Osnovni modeli rasta

Oremuš, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:587720

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Oremuš

OSNOVNI MODELI RASTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, srpanj 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovni pojmovi **2**
1.1 Eksponencijalna funkcija 2
1.2 Logistička distribucija 2
1.3 Ograničena eksponencijalna distribucija 3

2 Eksponencijalna funkcija **5**
2.1 Eksponencijalna funkcija i njena svojstva 5
2.2 Vrijeme udvostručavanja 7
2.3 Eksponencijalna funkcija s migracijama 10
2.4 Eksponencijalna funkcija s općim članom 11
2.5 Kombinacija eksponencijalnih funkcija 15
2.6 Rješenja jednadžbi i njihova svojstva 16

3 Logistička distribucija **19**
3.1 Diferencijalna jednadžba i njezino rješenje 19
3.2 Svojstva logističke distribucije 21

4 Ograničena eksponencijalna distribucija **27**
4.1 Diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficjentima 27
4.2 Diferencijalna jednadžba s varijabilnim koeficijentima 28
4.3 Varijabilni koeficijent rasta 30
4.4 Varijabilna ravnotežna vrijednost 34
4.5 Kombinacija eksponencijalne i ograničene eksponencijalne distribucije . . 42

Bibliografija **47**

Uvod

Ovaj diplomski rad bavi se analizom tri osnovna modela rasta: eksponencijalnom, logističkom i ograničenom eksponencijalnom distribucijom. Stoga prvo poglavlje daje uvod u te modele.

Najprije ću proučiti najjednostavniji model rasta: eksponencijalnu funkciju. U drugom poglavlju opisana je njena jednadžba, rješenje te svojstva eksponencijalne distribucije. Na kraju ću primjerom pokazati njenu primjenu.

U trećem poglavlju slijedi promatranje logističke funkcije, gdje ću također opisati njenu jednadžbu, naći joj rješenje i istaknuti bitna svojstva.

Zadnji od osnovnih modela rasta, koji ću obraditi u četvrtom poglavlju, je ograničena eksponencijalna distribucija. Analizirat ću njenu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim i promjenjivim parametrima, promatrati kombinaciju i usporedbu eksponencijalne i ograničene eksponencijalne distribucije, te njenu primjenu demonstrirati primjerom.

Matematički modeli rasta veoma su interesantni za proučavanje jer imaju široku primjenu. Prisutni su u gotovo svim granama znanosti: ekonomiji, gdje su neke od glavnih ideja o ekonomskom rastu temeljene upravo na matematičkim modelima rasta te u prirodnim i društvenim znanostima. Matematički okviri koriste se za analizu i prikaz promatranih mjerenja i statističkih podataka te interpretaciju dobivenih rezultata i predviđanje na temelju zaključenoga. Ti okviri su bazirani na iznenađujuće malom broju osnovnih principa i koncepata koji su prikazani u ovom radu.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Započinjemo analizu fenomena rasta upoznavajući tri osnovne jednadžbe koje nam pružaju uvid u glavne komponente većine matematičkih okvira kojima ćemo se baviti na sljedećim stranicama.

1.1 Eksponencijalna funkcija

Najosnovnija i najjednostavnija rastuća funkcija u našem inventaru. Ujedno je i najstarija. Definirana je na sljedeći način

$$\frac{dN}{dt} = aN \quad \text{ili} \quad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a, \tag{1.1}$$

gdje je N *veličina rasta*, t je *vrijeme* i a je takozvani *unutarnji koeficijent rasta.* Izraz $\frac{dN}{dt}$ nazivamo *stopom rasta*, a izraz $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ *specifičnom stopom rasta.*

1.2 Logistička distribucija

Originalno formulirana od Verhulsta (1838), logistička distribucija je iznimno važna u našoj kolekciji rastućih funkcija. Kao i eksponencijalna, potječe iz ranog doba. Njena definicija je

$$\frac{dN}{dt} = aN(1 - \frac{N}{N_*}) \quad \text{ili} \quad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(1 - \frac{N}{N_*}), \tag{1.2}$$

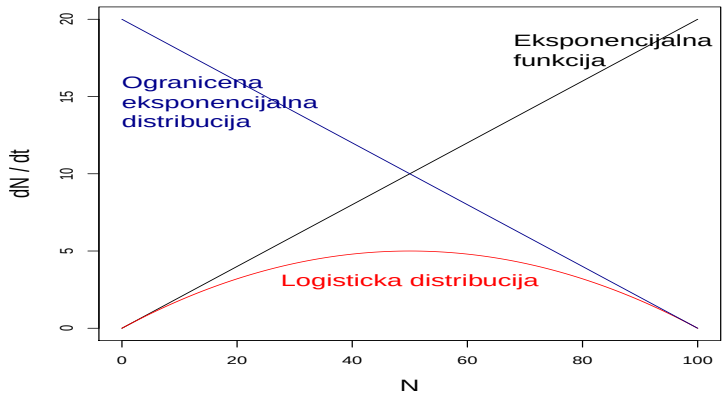
gdje je N_* ono što ćemo mi zvati *"noseći kapacitet"*. Uočimo, kada N_* teži u beskonačno, logistička distribucija postaje eksponencijalna.

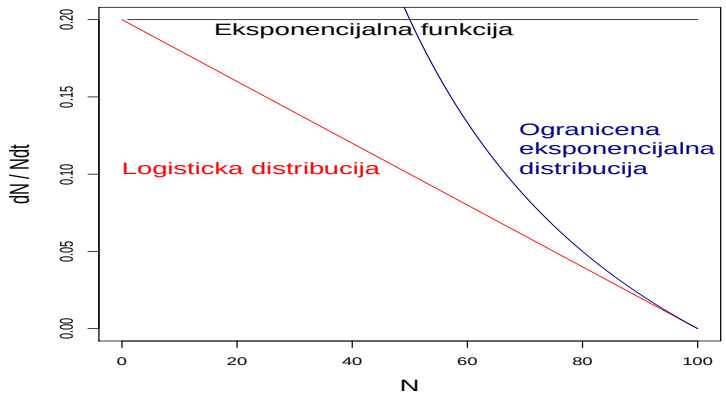
1.3 Ograničena eksponencijalna distribucija

Ova rastuća funkcija ima sljedeću definiciju:

$$\frac{dN}{dt} = a(N_* - N) \quad \text{ili} \quad \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(\frac{N_*}{N} - 1), \tag{1.3}$$

Trebalo bi istaknuti da je ova funkcija ponekad identificirana kao eksponencijalna distribucija ili modificirana eksponencijalna distribucija. Dva su razloga zašto ćemo ju zvati ograničenom eksponencijalnom distribucijom. Prvi, često ćemo izmjenjivati riječi funkcija i distribucija u opisima svih veza. Uključenjem pridjeva ograničena izbjeći ćemo miješanje s eksponencijalnom funkcijom. Drugo, kao što ćemo uskoro ustvrditi, rješenje jednadžbe (1.3) traži da N teži ka N_* za jako velike t. U skladu s time lako si možemo predočiti eksponencijalni rast krivulje koja je vezana ili ograničena na određeno konačno područje. Grafički prikaz funkcija (1.1),(1.2),(1.3):





Na grafu stope rasta ($\frac{dN}{dt}$ naprama N) vidimo parabolični oblik logističke distribucije sa strane omeđen linearno rastućom eksponencijalnom funkcijom te linearno padajućom ograničenom eksponencijalnom distribucijom. Stopa rasta logističke distribucije postiže maksimum kada je $N = \frac{1}{2}N_*$.

Na grafu specifične stope rasta ($\frac{dN}{Ndt}$ naprama N) primijetimo da eksponencijalna funkcija ima konstantnu vrijednost. Po definiciji, specifična stopa rasta logističke funkcije pada linearno s N. Za ograničenu eksponencijalnu, specifična stopa rasta je beskonačna kada je $N = 0$ te pada do nule kada je $N = N_*$.

U analizama koje slijede, učestalo ćemo gledati veze među stopama rasta slične kao u prethodnom grafu. Uspoređujući ih, možemo naučiti štošta o ponašanju unutar pojedinog matematičkog okvira kao i o fenomenu koji promatramo.

Primjeri korišteni u sljedećim poglavljima preuzeti su iz knjige Roberta B. Banksa (vidi [1]).

Poglavlje 2

Eksponencijalna funkcija

2.1 Eksponencijalna funkcija i njena svojstva

Logičan početak razmatranja matematičkih okvira fenomena rasta je proučavanje najjednostavnijeg slučaja: eksponencijalne funkcije. Kao što je već spomenuto, ovaj slučaj se odnosi na diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dN}{dt} = aN \tag{2.1}$$

gdje je a koeficijent rasta za koji pretpostavljamo da je konstantan. Ova jednadžba nam govori da je promjena količine N u vremenu t proporcionalna s količinom N u istom trenutku. Rješenje jednadžbe je oblika $N = N(t)$. Kako bismo dobili konačno rješenje potrebno je postaviti *početni uvjet*. Kažemo da je $N = N_0$ kada je $t = 0$, odnosno $N(0) = N_0$. U skladu s time rješenje (2.1) je

$$N = N_0 \mathrm{e}^{at}. \tag{2.2}$$

Ovaj se izraz često naziva Malthusovom rastućom jednadžbom, ali u ovom radu jednostavno ćemo ga zvati eksponencijalnom funkcijom ili eksponencijalnom jednadžbom. Može biti prikazana kao beskonačan red koji je dan ovim izrazom:

$$\mathrm{e}^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + ... \tag{2.3}$$

Uvrštavanjem $z = 1$ dobijemo vrijednost $\mathrm{e} \approx 2.71828$. Logaritmiranjem obje strane jednadžbe (2.2) dobijemo

$$\log_{\mathrm{e}}(N) = \log_{\mathrm{e}}(N_0) + at. \tag{2.4}$$

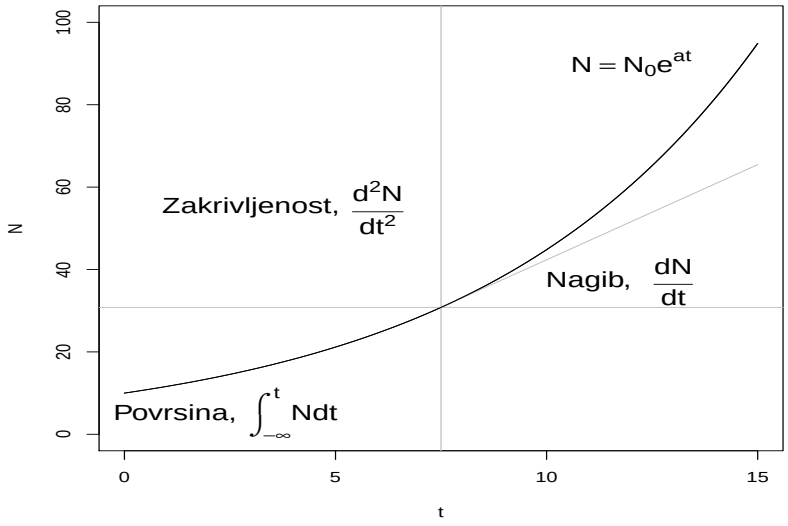
Derivacija izraza (2.2) po vremenu t daje nagib eksponencijalne funkcije. Druga derivacija pokazuje zakrivljenost funkcije, a integral mjeri površinu ispod krivulje od trenutka $-\infty$ do trenutka t. Spomenute veze prikazane su ispod:

$$\frac{dN}{dt} = aN_0 e^{at} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = a^2 N_0 e^{at} \tag{2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{t} N \, dt = \frac{1}{a} N_0 e^{at} \tag{2.7}$$

Geometrijske interpretacije prikazane su na grafu:



Slika 2.1: $a = 0.15, N_0 = 10$

Upoznati smo s fundamentalnim veličinama; sila (F), masa (m), duljina (l) i vrijeme (t). U sljedećim poglavljima količina N označavat će veličinu. U nekim primjerima koji slijede, bit će moguće izraziti količinu N u terminu gore navedenih fundamentalnih veličina. Određeni podatak može biti visina biljke ili površina lista ako promatramo rastuće fenomene u biologiji. U tom slučaju veličina N bit će duljina l ili površina l^2. Jedinica od

N može biti metar (m) ili centimetar kvadratni (cm^2). N se može interpretirati na razne načine. To mogu biti milijuni ljudi u populacijskom problemu, broj traktora u tehnološko-transportnom problemu i tako dalje. Na grafu prezentiranom gore pretpostavimo da N označava visinu biljaka. U tom slučaju, veličina N je duljina (l), a jedinice su centimetri; $N_0 = 10cm$. Veličina od t je vrijeme (t), a njena jedinica su tjedni. Kako je količina at bez mjerne jedinice; $a = 0.15$ po tjednu.

Na slici (2.1) su ordinata, nagib, zakrivljenost i površina ispod grafa krivulje eksponencijalnog rasta prikazani za $t = 7.5$ tjedana. Tablica 2.1 prikazuje numeričke vrijednosti tih karakteristika kao i različite veličine i mjerne jedinice danih karakteristika.

Karakteristike	Simbol	Veličina	Vrijednost	Mjerna jedninica
Ordinata	N	l	30.802	centimetar
Nagib	$\frac{dN}{dt}$	l/t^{-1}	4.620	centimetar/tjedan
Zakrivljenost	$\frac{d^2N}{dt^2}$	l/t^{-2}	0.693	centimetar/tjedan^2
Područje	$\int_{-\infty}^{t} N\,\mathrm{d}t$	lt	205.348	centimetar tjedan

Tablica 2.1: Numeričke vrijednosti karakteristika (2.5), (2.6), (2.7) za $N_0 = 10$ centimetara, $t = 7.5$ tjedana i $a = 0.15$ tjedan^{-1}

2.2 Vrijeme udvostručavanja

Ako veličina eksponencijalno raste, lako možemo odrediti parametar nazvan *vrijeme udvostručavanja* (eng. "doubling time"). Pitamo se koliko je dugo potrebno da se vrijednost neke točke koja raste eksponencijalno dvostruko poveća? Označimo li to vrijeme s t_2, uvrstimo $N = 2N_0$ u jednadžbu (2.2) te rješavamo li po t_2, dobit ćemo slijedeće rješenje

$$t_2 = \frac{1}{a}\log_e 2 \approx \frac{1}{a}(0.693). \tag{2.8}$$

Ukoliko koeficijent rasta (a) zapišemo kao postotak, a ne kao decimalan broj 0.693, koji je nakon zaokruživanja jednak 0.70, dobijemo jednostavnu vezu za brzu procjenu vremena udvostručavanja: $t_2 \approx \frac{70}{a}\%$.

Uvrstimo li u (2.8) $a = 0.15$ tjedana^{-1}, dobijemo da je vrijeme udvostručavanja $t_2 \approx 4.62$ tjedna. Vrijeme utrostručavanja je $t_3 \approx \frac{1}{a}\log_e 3$ i tako induktivno dalje. U ovom trenutku, bitno je odrediti uvjet o ograničenju eksponencijalnog rasta. Nastavljajući u skladu s navedenim, vrijeme potrebno za povećanje od 100 puta, bilo bi $t_{100} = \frac{1}{a}\log_e 100 \approx 30.70$ tjedana. To znači da uvrštavajući direktno u (2.2), za $t_3 \approx 30.70$ tjedana visina biljaka naraste na $N = 100$ metara. U stvarnome svijetu, takav rast sadnica malo je vjerojatan. Eksponencijalna jednadžba može točno opisati rast za male vrijednosti vremena, ali nakon

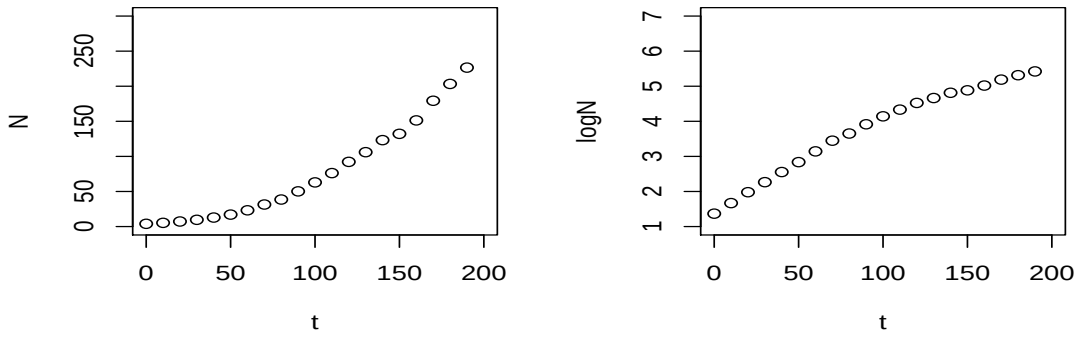
određenog perioda uključuju se i drugi faktori koji usporavaju i ograničavaju taj rast. Uzet ćemo to u obzir proučavajući spomenutu temu u slijedećem primjeru.

Primjer: Populacija SAD-a

Kao primjer fenomena koji se, barem za jedno određeno vrijeme, može opisati eksponencijalnim rastom je rast populacije SAD-a. U Tablici 2.2 populacija (N) je navedena za svako desetljeće od 1790. do 1980. godine.

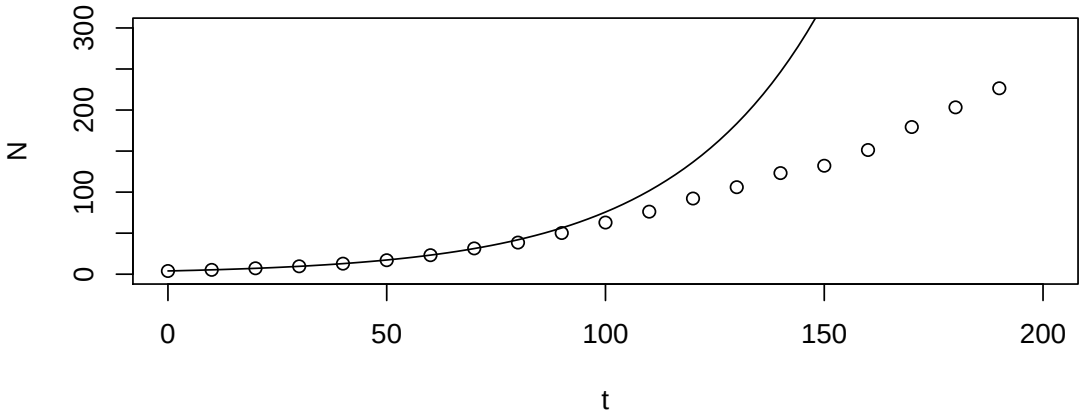
Godina	t (godine)	N (milijuni)	Godina	t (godine)	N (milijuni)
1790	0	3.929	1890	100	62.980
1800	10	5.308	1900	110	76.212
1810	20	7.240	1910	120	92.228
1820	30	9.638	1920	130	106.021
1830	40	12.861	1930	140	123.203
1840	50	17.064	1940	150	132.165
1850	60	23.192	1950	160	151.326
1860	70	31.443	1960	170	179.323
1870	80	38.558	1970	180	203.302
1880	90	50.189	1980	190	226.546

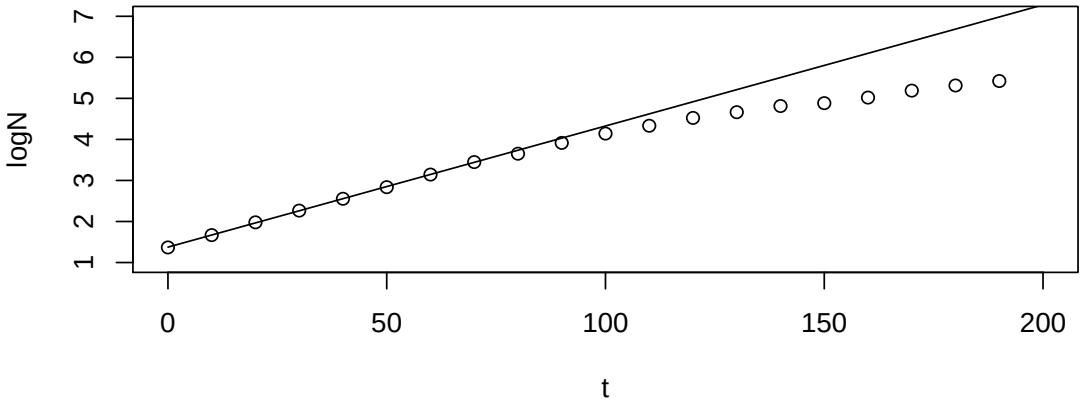
Tablica 2.2: Populacija Sjedinjenih Država, po desetljećima, od 1790. do 1980. godine



Slika 2.2: Aritmetički (lijevo) i semilogaritamski (desno) graf podataka iz Tablice 2.2

Promatrajući podatke na semilogaritamskom grafu vidimo kako je moguće provući pravac kroz prvih osam točaka, što nas, uz jednadžbu (2.4), navodi na zaključak da je kroz prvih sedam desetljeća populacija SAD-a zaista rasla eksponencijalno. Kako bismo preciznije odredili taj pravac, koristit ćemo metodu najmanjih kvadrata (vidi [3]). Aproksimacija podataka afinom funkcijom za razdoblje između 1790. i 1860. godine daje nam vrijednosti $N_0 = 3.956$ milijuna i $a = 0.0295$ godina^{-1}. Ako na prethodnom grafu prikažemo jednadžbe (2.2) i (2.4) s dobivenim vrijednostima, dobijemo slijedeći grafički prikaz:





Vratimo se sada na vrijeme udvostručavanja: za izračunani koeficijent rasta (a), iz jednadžbe (2.8) slijedi $t_2 \approx 23.50$ godina. Vrijeme potrebno da bi se populacija povećala osam puta dano je s $t_8 = \frac{1}{a}\log_e 8 \approx 70.49$. Prema tome, u godini 1790 + 70 = 1860, aproksimativan broj ljudi bio bi $N = 8N_0 = 31.649$ milijuna. Taj rezultat se približno slaže s vrijednosti $N = 31.443$ prikazanoj u Tablici 2.2.

Pretpostavimo sada da populacija raste eksponencijalno dulji period vremena. Iz jednadžbe (2.2) dobiveni su sljedeći rezultati:

Godina	t (godine)	Opaženo (N)	Projicirano (N)
1790	0	3.929	3.956
1830	40	12.861	12.874
1870	80	38.558	41.898
1910	120	92.228	136.351
1950	160	151.326	443.738
1980	190	226.546	1075.169

Već u 1870. godini vidimo lagano odstupanje podataka od vrijednosti bazirane na eksponencijalnom rastu populacije. Nadalje, rezultati dobiveni za 1950. i 1980. godinu pokazuju ogromna odstupanja od promatranih vrijednosti; što se jako dobro vidi na grafu 2.2. Uzmemo li u obzir gore navedene rezultate, zaključujemo da je, jako brzo nakon građanskog rata u Americi (1861.-1865. godine), populacija prestala eksponencijalno rasti. Više nije bilo beskonačnog nosećeg kapaciteta (N_*) ni demografske strukture koja bi vodila neograničenom rastu. Tema usporenog rasta relativno je dobro opisana logističkom jednadžbom koja će biti obrađena u jednom od sljedećih poglavlja.

2.3 Eksponencijalna funkcija s migracijama

Diferencijalna jednadžba (2.1) može se jednostavno generalizirati jednadžbom

$$\frac{dN}{dt} = aN + s - h \tag{2.9}$$

gdje je *s imigracijski doprinos*, a h je *emigracijski gubitak* po jedinici vremena. Rješenje jednadžbe (2.9), uz početni uvjet $N(0) = N_0$, je

$$N = N_0 e^{at} + \frac{s-h}{a}(e^{at} - 1) \tag{2.10}$$

Ako je $s = h$, ta se formula svodi na jednadžbu (2.2).

Primjer kod štednje novca. Pretpostavimo da mlada osoba uloži 1000 dolara u banku i nakon toga, slijedećih 20 godina izabere da mjesečno štedi 25 dolara. Kamatna stopa

na uštedevinu je 5.2% godišnje ili 0.001 tjedno. Sada imamo: $N_0 = 1000$ dolara, $a = 0.001$, $s = 25$ dolara i $t = 20 \cdot 52 = 1040$ tjedna. Uvrštavajući te vrijednosti u jednadžbu (2.10) dobijemo $N = 48560$ dolara od kojih je 2830 dolara vrijednost od originalnih 1000 dolara, a 45730 dolara je vrijednost od tjednih depozita. Za 20 godina osoba završi s planom štednje i odluči vaditi određenu fiksnu svotu tjedno; kamatna stopa je još uvijek 5.2%. Pitanje je: koliko može vaditi tjedno prije nego što potroši svu uštedevinu ($N = 0$)? Ukoliko je rata trošenja (h) veća od aN_0, postoji vrijeme izumiranja (t_e) dano formulom

$$t_e = \frac{1}{a} \log_e\left(\frac{1}{1 - \frac{aN_0}{h}}\right). \tag{2.11}$$

Izrazimo h iz jednadžbe (2.11) te uvrštavamo vrijednosti za vrijeme izumiranja t_e uz $N_0 = 48560$. Ako je $t_e = 1040$ tjedana (20 godina), tada je $h = 75.11$ dolara tjedno; $t_e = 1560$ tjedana (30 godina), tada je $h = 61.48$ dolara; i ako je $t_e = \infty$, tada je $h = 48.56$ dolara. Imajmo na umu da je ovaj primjer temeljen na takozvanim trenutnim ulaganjima. Ipak, dnevni, tjedni ili čak mjesečni periodi ulaganja značajno ne mijenjaju gore navedene vrijednosti.

2.4 Eksponencijalna funkcija s općim članom

Eksponencijalna funkcija može se generalizirati na drugi način pišući

$$\frac{dN}{dt} = aN^r \tag{2.12}$$

gdje je r konstanta. Da bismo izbjegli neuobičajene veličine i dobili jednostavnije odgovore, ovu diferencijalnu jednadžbu ćemo pisati u formi bez mjernih jedinica

$$\frac{dW}{dT} = W^r \tag{2.13}$$

gdje je $W = \frac{N}{N_0}$ i $T = at$. Ovaj izraz možemo nazvati *eksponencijalnom funkcijom s općim članom* budući da je W dignuto na r-tu potenciju. Rješenje je

$$W = [1 + (1 - r)T]^{\frac{1}{1-r}} \tag{2.14}$$

ili

$$\frac{N}{N_0} = [1 + (1 - r)at]^{\frac{1}{1-r}}. \tag{2.15}$$

Slijedi nekoliko slučajeva počevši od $r = 0$. Uvrštavanjem te vrijednosti u jednadžbu (2.15), dobivamo slijedeću linearnu vezu

$$\frac{N}{N_0} = 1 + at \tag{2.16}$$

taj rezultat se odmah vidi iz jednadžbe (2.13). Pretpostavimo da je $r = \frac{1}{2}$. Tada iz jednadžbe (2.15) dobijemo rastuću kvadratnu funkciju

$$\frac{N}{N_0} = (1 + \frac{1}{2}at)^2. \tag{2.17}$$

Kada je $r = \frac{3}{4}$, rezultat je na četvrtu potenciju

$$\frac{N}{N_0} = (1 + \frac{1}{4}at)^4. \tag{2.18}$$

Uzmimo da je $r = 1$. Uvrštavajući to u jednadžbu (2.15) dobijemo neodređeno rješenje. Zbog toga se koristimo vezom

$$\lim_{m\to\infty}(1 + \frac{z}{m})^m = \mathrm{e}^z \tag{2.19}$$

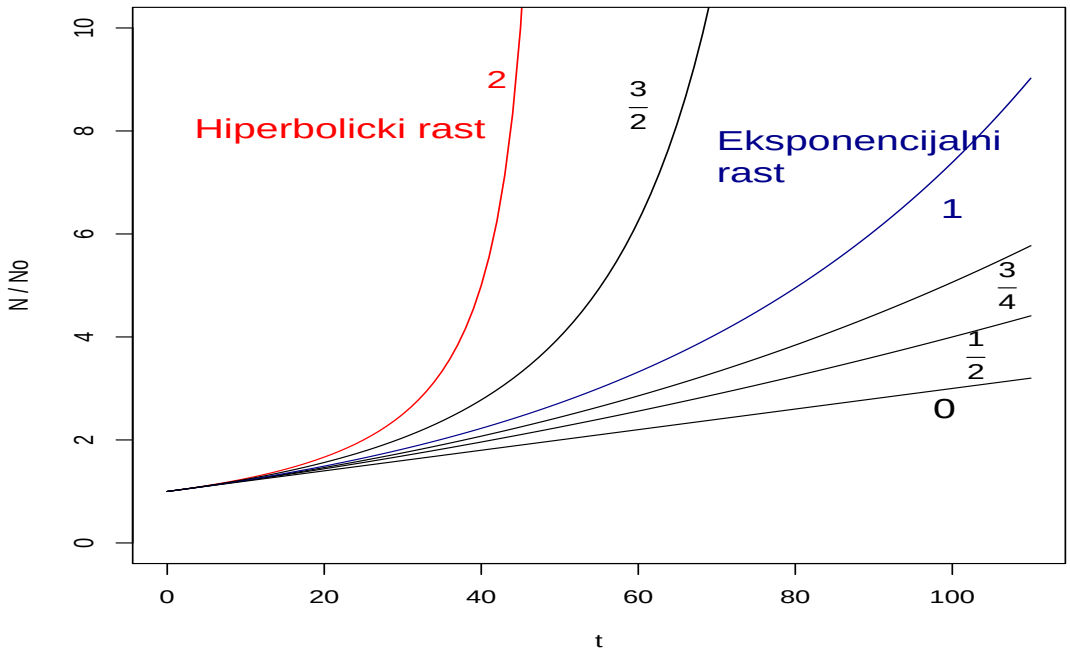
kako bismo potvrdili činjenicu da, kada je $r = 1$, opet dobijemo jednostavno eksponencijalno rješenje

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{at}. \tag{2.20}$$

Na posljetku, u slučaju da je $r = 2$, dobije se zanimljiv slučaj hiperboličnog rasta. Rješenje je

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{1 - at}. \tag{2.21}$$

Na grafu 2.3 je prikazana krivulja (2.15) za različite vrijednosti od r.



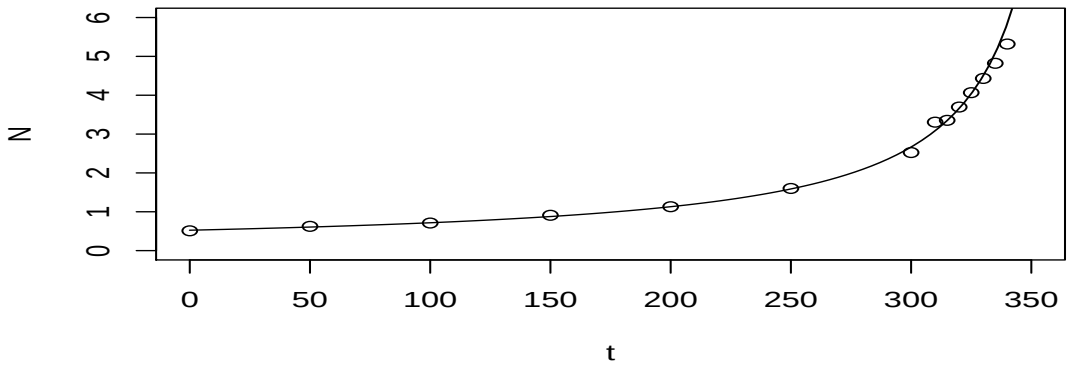
Slika 2.3: $a = 0.020$

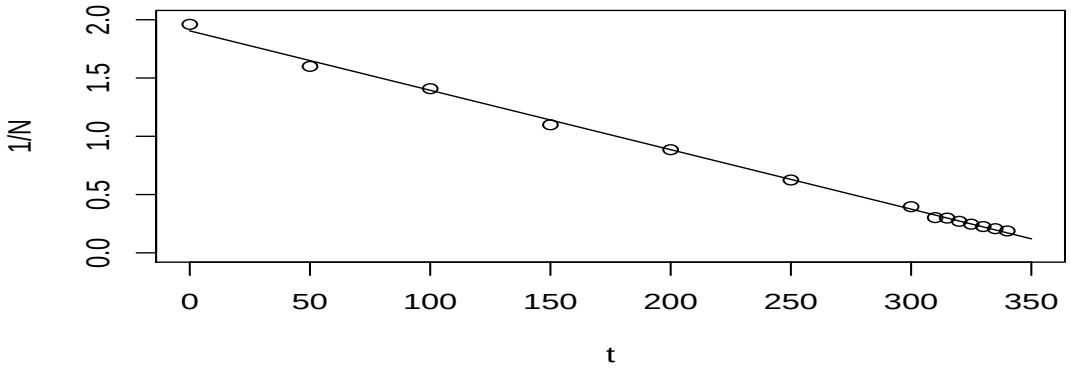
Primjer: Populacija svijeta

Na grafu 2.3 smo uočili da, u slučaju $r = 2$, N postaje beskonačan za fiksnu vrijednost od t. Iz jednadžbe (2.21) dobije se ta kritična vrijednost $\tilde{t} = \frac{1}{a} = 50$. Spomenuti slučaj ($r = 2$) izvorno je uzeo u obzir Keyfitz (vidi [4]) u primjeru eksplozije broja svjetskog stanovništva. U Tablici 2.3 je prikazana populacija svijeta (N) u različitim periodima počevši od 1650. godine ($t = 0$).

Godina	t (godine)	N (milijarde)	Godina	t (godine)	N (milijarde)
1650	0	0.510	1960	310	3.307
1700	50	0.625	1965	315	3.354
1750	100	0.710	1970	320	3.696
1800	150	0.910	1975	325	4.066
1850	200	1.130	1980	330	4.432
1900	250	1.600	1985	335	4.822
1950	300	2.525	1990	340	5.318

Tablica 2.3: Populacija svijeta od 1650. do 1990. godine





Na prvom grafu (t naprama N) vidimo dobro znanu činjenicu da je svjetska populacija izrazito sporo rasla kroz stoljeća. Uistinu, sve do početka ovog stoljeća nije bilo upadljivog rasta populacije i tek nakon 1950. godine primjećujemo alarmantan porast svjetskog stanovništva. Pretpostavimo da rast svjetske populacije prati inverznu hiperboličku vezu danu relacijom (2.21). Kako bismo primjenili metodu najmanjih kvadrata na dane podatke treba nam linearna veza između istih. Zapišimo jednadžbu (2.21) na slijedeći način:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_0} - \frac{at}{N_0}. \tag{2.22}$$

Na drugom grafu ($\frac{1}{N}$ naprama t) prikazana je ta veza uz pravac koji prolazi točkama podataka i time potvrđuje polaznu pretpostavku. Metoda najmanjih kvadrata daje rješenja, $N_0 = 0.525$ milijardi i $a = 0.00267$ godina^{-1}, na kojima se temelje ravne linije na oba grafa. Uvrstimo li dobivene vrijednosti u jednadžbu (2.21) dobit ćemo sljedeće procijenjene veličine za svjetsku populaciju:

Godina	t (godine)	N (milijarde)
1990	340	5.694
2000	350	8.015
2010	360	13.531
2020	370	43.338
2024	374	369.718
2024.53	374.53	∞

Ako se nazivnik u jednadžbi (2.21) namjesti na nulu, N postaje beskonačan. Vrijeme eksplozije je $\tilde{t} = 374.53$, što odgovara godini $1650 + 375 = 2025$. Jasno je da ovakvo stanje nije realno, iako po Keyfitzovoj izjavi: "Minimalan zaključak koji treba izvući je taj da će svjetska populacija promijeniti sadašnji trend kroz slijedećih 75 godina, ako je trend uistinu hiperbola." [4]

2.5 Kombinacija eksponencijalnih funkcija

Mnogo je matematičkih formulacija u fizici, biologiji i socijalnim znanostima gdje se pojavljuju eksponencijalne funkcije ili različite kombinacije eksponencijalnih funkcija. Jednostavan primjer se pojavljuje u kinetici uzastopnih kemijskih reakcija. Prateći Moelwyn-Hughesa (vidi [5]), uzmimo u obzir slijedeće dvije uzastopne reakcije prvog reda

$$A \to^{k_1} B \to^{k_2} C \tag{2.23}$$

gdje su k_1 i k_2 koeficijenti reakcije. Ova veza govori da se reaktant A odmah pretvara u reaktant B koji se, na kraju, pretvara u završni produkt C. Za primjer, Winkler i Hishelwood

(vidi [6]), u svojim studijima o terminalnoj dekompoziciji acetona, dobili su slijedeće reakcije

$$(CH_3)_2CO \rightarrow^{k_1} CH_2 : CO + CH_4 \qquad CH_2 : CO \rightarrow^{k_2} \frac{1}{2}CH_4 + CO. \tag{2.24}$$

Aceton (reaktant A), odmah proizvodi produkt, ketan (B), koji vodi konačnom produktu, metanu (C). Ovi istraživači su otkrili da koncentracija ketana dostiže maksimalnu vrijednost tijekom eksperimenta i onda asimptotski pada k nuli.

Neka su x, y i z koncentracije od A, B i C i pretpostavimo da su to nepovratne reakcije prvog reda. Prema tome, dobijemo slijedeće diferencijalne jednadžbe uz pripadajuće početne uvjete

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x, \quad x(0) = x_0 \tag{2.25}$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \quad y(0) = y_0 \tag{2.26}$$

$$\frac{dz}{dt} = k_2 y, \quad z(0) = z_0. \tag{2.27}$$

U kemijskim reakcijama početne vrijednosti y_0 i z_0 najčešće su jednake nuli. Mi ćemo za naše potrebe uzeti da su te veličine konstantne; uvijek se mogu postaviti na nulu ako to želimo. Po zakonu očuvanja mase imamo

$$x + y + z = x_0 + y_0 + z_0 = r_0. \tag{2.28}$$

Primijetimo; prva od ovih jednadžbi govori nam da je stopa po kojoj se količina smanjuje proporcionalna količini prisutnoj u svakom trenutku. To je jednadžba za radioaktivni raspad. Kao u slučaju udvostručavanja vremena, lagano je utvrditi da je *vrijeme poluraspada* supstance kod radioaktivnog raspada jednako $t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k_1}\log_e 2$.

2.6 Rješenja jednadžbi i njihova svojstva

Vratimo se problemu koji se sastoji od tri linearne diferencijalne jednadžbe. Lako dobijemo slijedeće rješenje za jednadžbu (2.25)

$$x = x_0 e^{-k_1 t}. \tag{2.29}$$

Ova jednadžba nema maksimuma ni točke infleksije. Uvrštavanjem rezultata u (2.26) dobijemo

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 x_0 e^{-k_1 t}. \tag{2.30}$$

To je diferencijalna jednadžba prvog reda koja ima slijedeći oblik

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{2.31}$$

Rješenje jednadžbi ovog oblika dano je s

$$y = Ce^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt} \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt. \tag{2.32}$$

Iz početnog uvjeta $y(0)$ odredimo vrijednost konstante C. Zatim iz navedenih veza dobijemo rješenje za (2.26)

$$y = y_0e^{-k_2t} + \frac{k_1x_0}{k_2 - k_1}(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}). \tag{2.33}$$

Deriviramo li (2.33) po t i izjednačimo s nulom, dobit ćemo vrijeme, t_m, u kojem $y(t)$ postiže maksimalnu vrijednost

$$t_{m,y} = \frac{1}{k_2 - k_1} \log_e[\ \frac{k_2}{k_1}\ (1 - \frac{(k_2 - k_1)y_0}{k_1x_0})\ ]. \tag{2.34}$$

Izjednačimo li drugu derivaciju jednadžbe (2.33) s nulom, dobit ćemo vrijeme, t_i, u kojem $y(t)$ ima točku infleksije

$$t_{i,y} = \frac{1}{k_2 - k_1} \log_e[\ (\frac{k_2}{k_1})^2\ (1 - \frac{(k_2 - k_1)y_0}{k_1x_0})\ ]. \tag{2.35}$$

Primijetimo da se jednadžbe (2.33) do (2.35), ukoliko je početni uvjet $y_0 = 0$, značajno pojednostavljuju. Na kraju uvrstimo (2.33) u (2.27) i dobijemo

$$z = r_0 - y_0e^{-k_2t} - \frac{x_0}{k_2 - k_1}(k_2e^{-k_1t} - k_1e^{-k_2t}). \tag{2.36}$$

Ova jednadžba nema ni maksimum ni minimum za pozitivne vrijednosti od t. Iako, ima točku infleksije u

$$t_{i,z} = \frac{1}{k_2 - k_1} \log_e[\ \frac{k_2}{k_1}\ (1 - \frac{(k_2 - k_1)y_0}{k_1x_0})\ ]. \tag{2.37}$$

Uočimo iz rezultata i jednadžbe (2.33) da su vremena za maksimum od $y(t)$ i točke infleksije od $z(t)$ jednaka. Kao što je već spomenuto, jednadžbe se pojednostavljuju uzmemo li $y_0 = 0$ i $z_0 = 0$. Iz dobivenih rezultata nije teško potvrditi da vrijedi $x+y+z = x_0+y_0+z_0 = r_0$.

Primijetimo da su za $k_1 = k_2 = k$ rješenja (2.33) i (2.36) neodređena, stoga se moramo vratiti na početnu jednadžbu (2.30) kako bismo dobili sljedeće rezultate

$$x = x_0e^{-kt} \tag{2.38}$$

$$y = (y_0 + kx_0t)\,\mathrm{e}^{-kt} \tag{2.39}$$

$$z = r_0 - \Big(y_0 + x_0(1 + kt)\Big)\,\mathrm{e}^{-kt}. \tag{2.40}$$

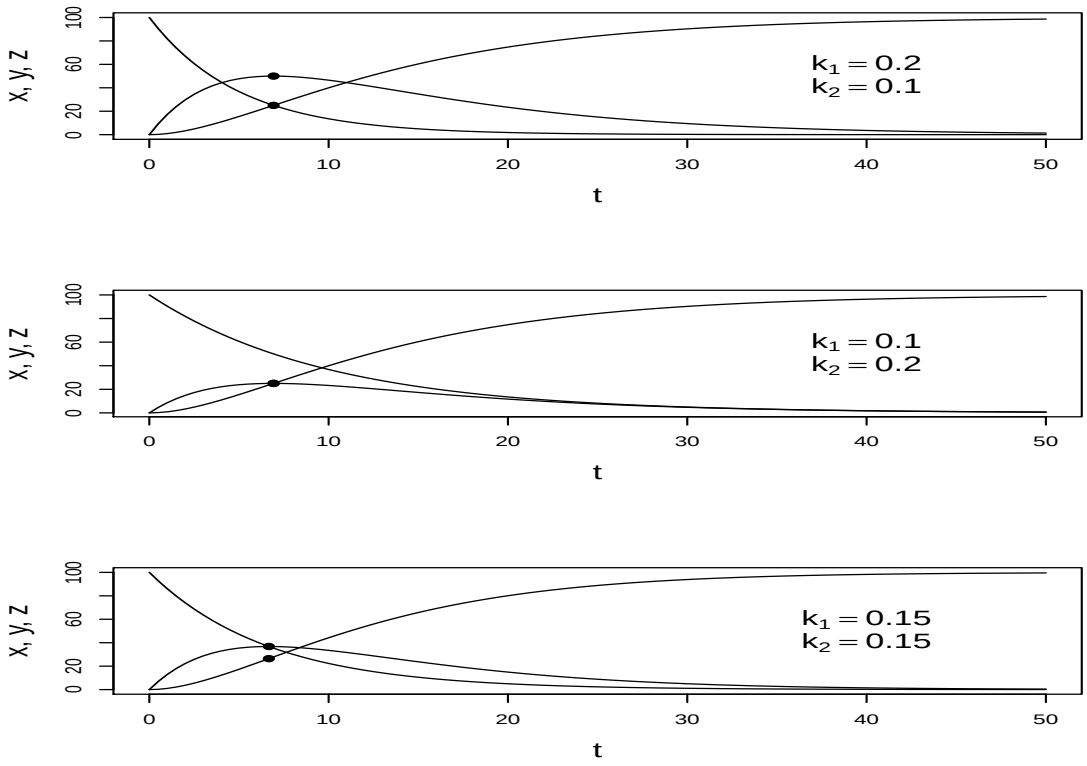
Maksimum i točka infleksije od y dani su s

$$t_{m,y} = \frac{x_0 - y_0}{kx_0} \qquad t_{i,y} = \frac{2x_0 - y_0}{kx_0}. \tag{2.41}$$

Kao i do sada, z nema točke maksimuma i točka infleksije je

$$t_{i,z} = \frac{x_0 - y_0}{kx_0}. \tag{2.42}$$

Krivulje x, y i z prikazane su na sljedećim grafovima za različite vrijednosti od k_1, k_2.



Slika 2.4: $x_0 = 100, y_0 = z_0 = 0$

Poglavlje 3

Logistička distribucija

3.1 Diferencijalna jednadžba i njezino rješenje

U prošlom poglavlju upoznali smo se s eksponencijalnom funkcijom i njezinim svojstvima, a sada ćemo uvesti još jednu: logističku funkciju. Za taj slučaj imamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{a}{N_*}N^2 = aN - bN^2, \tag{3.1}$$

gdje je a koeficijent rasta, a b je takozvani *koeficijent gušenja* (eng. "crowding coefficient"). Prisutnost N^2 nam govori da je ovo nelinearna diferencijalna jednadžba. Uglavnom nije jednostavno dobiti egzaktna rješenja za svaku jednadžbu, ali ovaj slučaj je, na sreću, iznimka. Na nekoliko načina možemo doći do rješenja gornje jednadžbe.

Prvi način: tablica integrala

Najizravnija metoda za rješavanje jednadžbe (3.1) je upotreba tablice integrala. Najprije ju zapišimo u sljedećem obliku

$$\frac{dN}{aN - bN^2} = dt. \tag{3.2}$$

Kako bismo pronašli N, $N = N(t)$, moramo znati vrijednost od N u nekom trenutku t. Neka je $N = N_0$ za $t = 0$, odnosno $N(0) = N_0$. Zapišemo li jednadžbu (3.2) kao integral s početnim uvjetom u donjoj granici dobijemo

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{aN - bN^2} = \int_0^t dt. \tag{3.3}$$

Algebarskim manipulacijama svedemo gornji izraz na poznate integrale te uz pomoć tablice integrala dobijemo sljedeće rješenje

$$N = \left[\frac{1}{N_*} + (\frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_*})\, \mathrm{e}^{-at} \right]^{-1}, \tag{3.4}$$

gdje je $N_* = \frac{a}{b}$ noseći kapacitet. Uočimo da ako N_* ide u beskonačnost jednadžba (3.4) se svodi na slučaj eksponencijalne funkcije dane s (2.2)

$$N = N_0 \mathrm{e}^{at}. \tag{3.5}$$

Izlučimo li N_* iz (3.4) dobijemo konačni oblik rješenja logističke funkcije

$$N = N_* \left[1 + (\frac{N_*}{N_0} - 1)\, \mathrm{e}^{-at} \right]^{-1}. \tag{3.6}$$

U ovoj analizi pretpostavljamo da je koeficijent rasta a pozitivan. Primijetimo da ako t u jednadžbi (3.6) teži u beskonačnost, N teži prema N_*. Početni uvjet N_0 može biti veći ili manji od N_*, no u oba slučaja N teži prema N_* kako t teži prema beskonačnom. Od sada nadalje ćemo pretpostavljati da je N_0 manji od N_*.

Drugi način: parcijalni razlomci

Napišimo jednadžbu (3.1) na sljedeći način

$$\frac{dN}{N(1 - \frac{N}{N_*})} = a dt. \tag{3.7}$$

Uočimo da se racionalna funkcija na lijevoj strani jednadžbe može rastaviti na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{N(1 - \frac{N}{N_*})} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{N}{N_*}}, \tag{3.8}$$

gdje su A i B konstante. Svođenjem na zajednički nazivnik te izjednačavanjem koeficijenata uz potencije od N na lijevoj i desnoj strani jednadžbe dobijemo $A = 1$ i $B = \frac{1}{N_*}$. Uvrstimo li to u (3.7) i napišemo li dobiveno kao integral s početnim uvjetom u donjoj granici, preostaje nam izračunati sljedeće:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} + \frac{1}{N_*} \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{1 - \frac{N}{N_*}} = a \int_0^t dt. \tag{3.9}$$

Rješavanjem gornjeg izraza opet dolazimo do rezultata danog jednadžbom (3.6).

Treći način: svođenje na linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

Logistička diferencijalna jednadžba (3.1) je zapravo poznati slučaj Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe (za $n = 2$) koja izgleda ovako:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n. \tag{3.10}$$

Danu diferencijalnu jednadžbu možemo svesti na linearnu uvođenjem supstitucije $z = y^{-(n-1)}$:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x). \tag{3.11}$$

S time u vidu, za $p(x) = -a$, $q(x) = -b$ i $n = 2$, jednadžba (3.1) se svodi na

$$\frac{dZ}{dt} + aZ = b, \tag{3.12}$$

gdje je $Z = N^{-1}$ ($Z(0) = Z_0 = N_0^{-1} = N(0)^{-1}$). Rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (3.12) odredit ćemo metodom varijacije konstanti. Sada imamo $\tilde{p}(t) = a$ i $\tilde{q}(t) = b$ pa je njeno homogeno rješenje dano je s

$$Z(t) = C\mathrm{e}^{-\int \tilde{p}(t)dt} = C\mathrm{e}^{-at}, \tag{3.13}$$

gdje je C konstanta. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku $Z(t) = C(t)\mathrm{e}^{-at}$ i želimo da ono zadovoljava (3.12). Iz toga lako slijedi

$$C(t) = \int \tilde{q}(t)\mathrm{e}^{\int \tilde{p}(t)dt} = \frac{b}{a}\mathrm{e}^{at} + \tilde{C}. \tag{3.14}$$

Uvrštavanjem (3.14) u jednadžbu $Z(t) = C(t)\mathrm{e}^{-at}$ za $t = 0$ dobijemo konstantu $\tilde{C}$ te je napokon partikularno rješenje oblika

$$Z(t) = \frac{b}{a} + (Z_0 - \frac{b}{a})\,\mathrm{e}^{-at}. \tag{3.15}$$

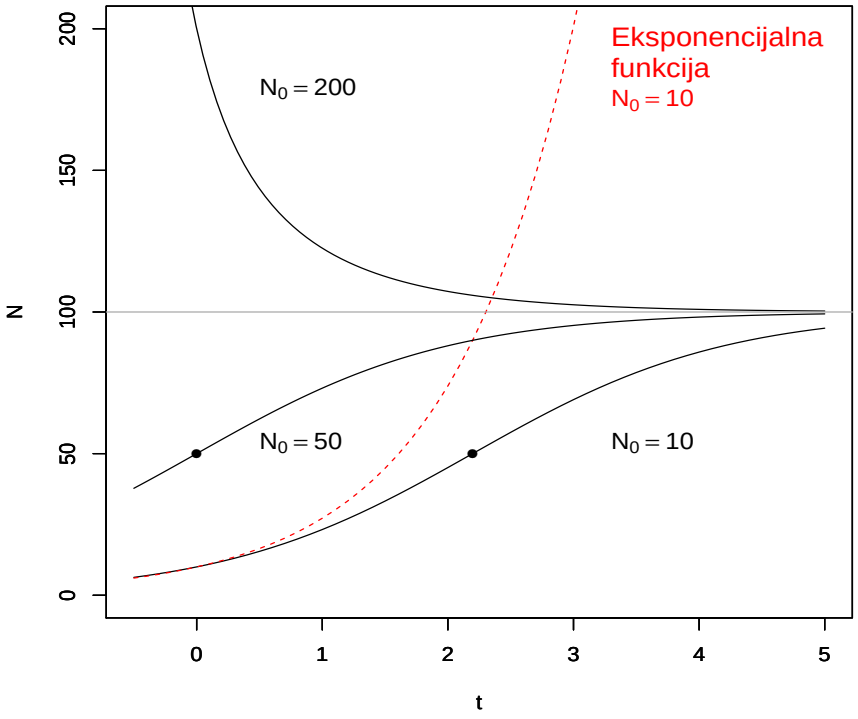
Vračanjem supstitucije ($N = Z^{-1}$), uz notaciju $b = \frac{a}{N_*}$, dolazimo do rješenja logističke diferencijalne jednadžbe (3.1) koje je jednako rezultatu (3.6).

3.2 Svojstva logističke distribucije

Da pojednostavnimo notaciju, zapisat ćemo (3.6) u obliku

$$N = \frac{N_*}{1 + m\mathrm{e}^{-at}}, \tag{3.16}$$

gdje je $m = \frac{N_*}{N_0} - 1$. Prije nego što krenemo dalje s analizom, pogledajmo grafički prikaz logističke distribucije za različite vrijednosti od N_0.



Slika 3.1: $a = 1.0, N_* = 100$

Na gornjoj slici prikazane su tri krivulje za $a = 1.0, N_* = 100$. Prvo ćemo promotriti slučajeve kada je $N_0 < N_*$. Za $N_0 = 10$, odnosno $m = 9$ dobijemo graf najdonje krivulje, karakterističan graf za logističku distribuciju. Primijetimo da je nagib krivulje pozitivan za svaki t. Točka infleksije nalazi se u $t_i = \log(9) = 2.197$, $N(t_i) = N_i = 50$, kao što vidimo na grafu (3.1). Krivulja je konveksna za $t < t_i$ te konkavna za $t > t_i$. Za velike vrijednosti vremena t, krivulja teži ka nosećem kapacitetu $N_* = 100$. Nadalje, za $N_0 = 50$ ($m = 1$) prikazana je krivulja u sredini grafa. Ona također ima pozitivan nagib, točka infleksije joj se nalazi u $t_i = 0$, $N_i = 50$ i za $t > t_i$ prikazane na grafu, krivulja je konkavna. Preostaje slučaj kada je $N_0 = 200 > N_*$. Tada je $m = -\frac{1}{2}$ i tome odgovara najgornja krivulja na grafu. Konveksna je te, za razliku od krivulja u prvom slučaju, nagib joj je negativan i nema točke infleksije. No kao što je već spomenuto, tim slučajem se nećemo detaljnije baviti.

Na kraju, za usporedbu, isprekidanom linijom prikazana je eksponencijalna funkcija dana jednadžbom (3.5).

Vratimo se na analizu i derivirajmo (3.16) po t. Rezultat je

$$n = \frac{dN}{dt} = amN_* \frac{\mathrm{e}^{-at}}{(1 + m\mathrm{e}^{-at})^2}. \tag{3.17}$$

Trenutno je najvažnije identificirati jednadžbu (3.16) kao funkciju distribucije logističke razdiobe. Tada, po definiciji, jednadžba (3.17) označava funkciju gustoće logističke jednadžbe. Vidimo da integriranjem (3.17) po vremenu t dobijemo upravo (3.16):

$$N = \int_{-\infty}^{t} n(t)dt = \frac{N_*}{1 + m\mathrm{e}^{-at}}. \tag{3.18}$$

Geometrijske interpretacije gore navedenih jednadžbi prikazane su na slici (3.2). N je ordinata funkcije distribucije i zbog (3.18) također područje ispod krivulje funkcije gustoće od $-\infty$ do t. Nadalje, n je ordinata funkcije gustoće i zbog (3.17) nagib krivulje funkcije distribucije. Izjednačimo li nagib ($\frac{dN}{dt}$) s nulom, dobit ćemo točku t u kojoj funkcija distribucije postiže minimum i maksimum. Primijetimo, dok je god $m > 0$, odnosno $N_0 < N_*$, nagib krivulje funkcije distribucije je strogo pozitivan. Drugim riječima, N je strogo rastuća funkcija s infimumom jednakim 0 i supremumom jednakim N_*.

Deriviranjem jednadžbe (3.17) dobijemo

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d^2N}{dt^2} = a^2mN_* \frac{\mathrm{e}^{-at}(m\mathrm{e}^{-at} - 1)}{(1 + m\mathrm{e}^{-at})^3}. \tag{3.19}$$

Izjednačimo li rezultat s nulom ($\frac{dn}{dt} = 0$) dobit ćemo maksimum funkcije gustoće. Također, to nam govori gdje je zakrivljenost krivulje funkcije distribucije jednaka nuli ($\frac{d^2N}{dt^2} = 0$), odnosno određuje točku infleksije krivulje N. Dakle, iz jednadžbe (3.19) slijedi

$$t_i = \frac{1}{a} \log_{\mathrm{e}} m, \tag{3.20}$$

gdje je t_i vrijeme točke infleksije funkcije distribucije. Uvrštavanjem u (3.16) i (3.17) dobijemo sljedeće rezultate

$$N_i = \frac{1}{2}N_*, \qquad n_i = (\frac{dN}{dt})_i = \frac{1}{4}aN_*. \tag{3.21}$$

Gornji izrazi nam redom daju vrijednost funkcije distribucije i vrijednost funkcije gustoće (vrijednost nagiba funkcije distribucije) u točki t_i. Korisno je izraziti jednadžbu funkcije distribucije (3.16) u alternativnoj formi. Najprije iz (3.20) slijedi $m = \mathrm{e}^{at_i}$. Uvrštavanjem tog rezultata u (3.16) daje

$$N = \frac{N_*}{1 + \mathrm{e}^{-a(t-t_i)}} = \frac{N_*}{2}\left(1 + \mathrm{th}\left[\frac{1}{2}a(t - t_i)\right]\right). \tag{3.22}$$

U skladu s time, jednadžba (3.17) se može zapisati kao

$$n = \frac{aN_*}{4}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}a(t - t_i)\right]. \tag{3.23}$$

Deriviranjem jednadžbe (3.19) dobijemo drugu derivaciju funkcije gustoće, odnosno treću derivaciju funkcije distribucije. Izjednačimo li to s nulom, dobit ćemo točku infleksije funkcije gustoće i maksimalnu točku zakrivljenosti funkcije distribucije. Rezultati su

$$t_c = \frac{1}{a}\log_{\mathrm{e}}[(2 \pm \sqrt{3})m], \tag{3.24}$$

$$N_c = \frac{1}{2}N_*(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}), \tag{3.25}$$

$$n_c = (\frac{dN}{dt})_c = \frac{1}{6}aN_*, \tag{3.26}$$

$$(\frac{dn}{dt})_c = (\frac{d^2N}{dt^2})_c = \pm\frac{1}{6\sqrt{3}}a^2N_*. \tag{3.27}$$

Naposljetku, odredit ćemo srednju vrijednost (očekivanje) $\bar{t}$ i varijancu σ^2. Po definiciji, očekivanje je jednako

$$\bar{t} = \frac{1}{N_*}\int_{-\infty}^{+\infty} tn(t)dt. \tag{3.28}$$

Nakon uvrštavanja (3.17) u jednadžbu slijedi

$$\bar{t} = \frac{1}{a}\log_{\mathrm{e}} m. \tag{3.29}$$

Primijetimo da je to isti rezultat kao i za točku infleksije funkcije distribucije t_i (3.20). Varijanca je definirana s

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_*}\int_{-\infty}^{+\infty}(t - t_i)^2 n(t)dt. \tag{3.30}$$

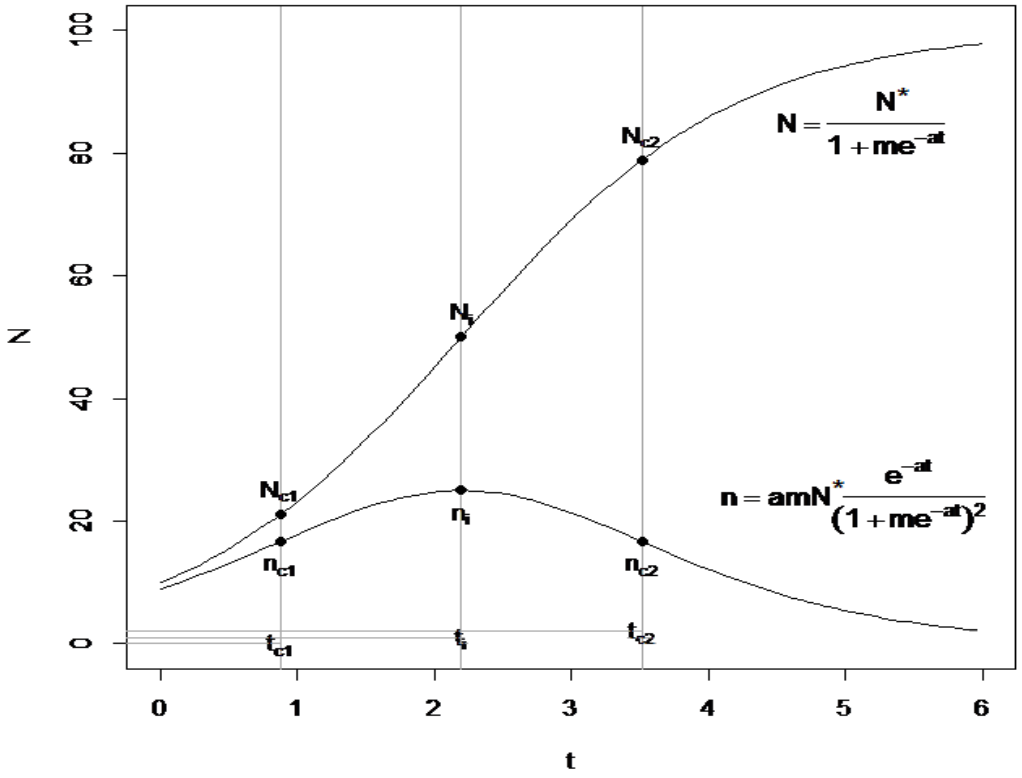
Uvrštavanjem izraza za funkciju gustoće (3.17) te izraza za matematičko očekivanje (3.29) u gornju jednadžbu, dobijemo

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{3a^2}. \tag{3.31}$$

Standardna devijacija, jednaka drugom korijenu varijance, dana je s

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3}a}. \tag{3.32}$$

Funkcija distribucije N i funkcija gustoće n, prikazane su na grafu (3.2) za $a = 1.0$, $N_* = 100$ i $N_0 = 10$. Dobiveni rezultati obilježeni su na grafu te su im pripadajuće vrijednosti ispisane u tablici.



Slika 3.2: $a = 1.0, N_* = 100, N_0 = 10$

Simbol	Opis	Vrijednost*
t_i	vrijednost na apcisi točke infleksije funkcije distribucije N	$\log(9) \approx 2.197$
N_i	vrijednost na ordinati točke infleksije funkcije distribucije N	50
$n_i = (\frac{dN}{dt})_i$	vrijednost maksimuma funkcije gustoće n u točki t_i	25
t_c	vrijednosti na apcisi točaka infleksije funkcije gustoće n	$\log(18 \pm 9\sqrt{3}) \approx 0.880, 3.514$
$n_c = (\frac{dN}{dt})_c$	vrijednost na ordinati točaka infleksije funkcije gustoće n	$\frac{50}{3} \approx 16.67$
N_c	vrijednosti funkcije distribucije N u točkama t_c	21.13, 78.87
$(\frac{dn}{dt})_c = (\frac{d^2N}{dt^2})_c$	vrijednosti nagiba funkcije gustoće n / vrijednosti zakrivljenosti funkcije distribucije N u točkama t_c	±9.62
$\bar{t}$	srednja vrijednost (očekivanje) distribucije	2.197
σ	standardna devijacija distribucije	1.814

Tablica 3.1: *Vrijednosti su izračunane za $a = 1.0, N_* = 100, N_0 = 10$ (slika (3.2))

Poglavlje 4

Ograničena eksponencijalna distribucija

4.1 Diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficjentima

Ograničena eksponencijalna distribucija definirana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dN}{dt} = a_*(N_* - N), \tag{4.1}$$

gdje je a_* koeficijent rasta (transfera) i N_* noseći kapacitet. Pretpostavimo da su a_* i N_* konstante. Uz početni uvjet $N(0) = N_0$, metodom varijacije konstanti (koja je objašnjena u prethodnom poglavlju), dobijemo rješenje jednadžbe (4.1)

$$N = N_* - (N_* - N_0)\mathrm{e}^{-a_* t}. \tag{4.2}$$

Jednadžbu (4.2) zovemo ograničenom eksponencijalnom jednadžbom. Pogledajmo najprije slučaj kada je $N_* = 0$. Iz (4.2) slijedi

$$N = N_0\mathrm{e}^{-a_* t}. \tag{4.3}$$

Kada t teži u beskonačnost, N teži ka nuli. Suprotno od eksponencijalnog rasta opisanog jednadžbom (2.2), sada imamo eksponencijalan pad. Također, umjesto vremena udvostručavanja, pojavljuje se *vrijeme poluživota* (eng. "half-life time") $t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_*}\log_{\mathrm{e}} 2$.

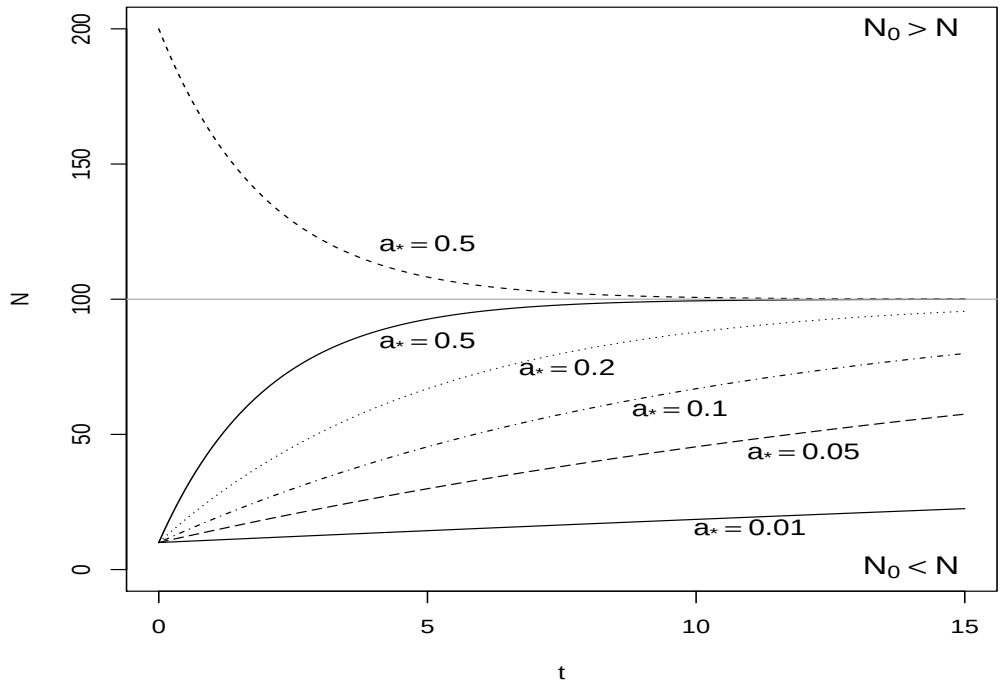
Prva derivacija ograničene eksponencijalne jednadžbe daje nagib krivulje

$$\frac{dN}{dt} = a_*(N_* - N_0)\mathrm{e}^{-a_* t}, \tag{4.4}$$

koji je pozitivan za $N_0 < N_*$ i negativan za $N_0 > N_*$. Kada je nagib pozitivan, krivulja strogo raste s infimumom N_0 i supremumom N_*. Druga derivacija spomenute jednadžbe daje zakrivljenost

$$\frac{d^2N}{dt^2} = -a_*^2(N_* - N_0)\mathrm{e}^{-a_*t}. \tag{4.5}$$

Vidimo da krivulja nema točaka infleksije. Primijetimo da je ovaj jednostavan tip eksponencijalnog rasta (pada) uvijek ograničen vrijednostima N_0 i N_*. Na grafu su prikazane ograničene eksponencijalne krivulje za različite vrijednosti koeficijenta rasta.



Slika 4.1: $N_* = 100$, $N_0 = 200$ (gornji slučaj), $N_0 = 10$ (donji slučaj)

4.2 Diferencijalna jednadžba s varijabilnim koeficijentima

Pogledajmo jednadžbu (4.1) u još općenitijoj formi

$$\frac{dN}{dt} = a_*(t)\,(N_*(t) - N), \tag{4.6}$$

gdje su sada $a_*(t)$ i $N_*(t)$ funkcije vremena. Početni uvjet je $N(0) = N_0$. Zapišemo li (4.6) u obliku

$$\frac{dN}{dt} + a_*(t)N = a_*(t)N_*(t), \tag{4.7}$$

vidimo da imamo linearnu, nehomogenu diferencijalnu jednadžbu prvog reda s koeficijentima koji ovise o t. Rješenje jednadžbe je

$$N = \mathrm{e}^{-\int a_* dt}\left(\int a_* N_* \mathrm{e}^{\int a_* dt} dt + C\right), \tag{4.8}$$

gdje je C konstanta. Neka je sada $N(t) = N_{\mathrm{H}}(t)N_{\mathrm{P}}(t)$, gdje je N_{H} rješenje pripadne homogene jednadžbe.

$$\frac{dN_{\mathrm{H}}}{dt} = -a_*(t)N_{\mathrm{H}} \tag{4.9}$$

$$N_{\mathrm{H}}(t) = N_{\mathrm{H}}(0)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t a_* dt} \tag{4.10}$$

Nadalje, deriviranjem jednadžbe $N = N_{\mathrm{H}}N_{\mathrm{P}}$ dobijemo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_{\mathrm{H}}}{dt}N_{\mathrm{P}} + \frac{dN_{\mathrm{P}}}{dt}N_{\mathrm{H}}. \tag{4.11}$$

Uvrštavanje (4.10) i (4.11) u jednadžbu (4.6) dovodi nas do sljedećih rezultata:

$$\frac{dN_{\mathrm{P}}}{dt} = \frac{1}{N_{\mathrm{H}}(0)} a_* N_*\,\mathrm{e}^{\int_0^t a_* dt}, \tag{4.12}$$

$$N_{\mathrm{P}}(t) = \frac{1}{N_{\mathrm{H}}(0)} \int_0^t a_* N_*\,\mathrm{e}^{\int_0^t a_* dt} dt + N_{\mathrm{P}}(0). \tag{4.13}$$

Prema tome, opće rješenje jednadžbe (4.6), uz notaciju $N_0 = N(0) = N_{\mathrm{H}}(0)N_{\mathrm{P}}(0)$, jest

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\int_0^t a_*(s)ds}\left(\frac{1}{N_0}\int_0^t a_*(s)N_*(s)\,\mathrm{e}^{\int_0^s a_*(u)du} ds + 1\right). \tag{4.14}$$

U sljedećim poglavljima razmatramo dvije mogućnosti:
(1) $a_* = a_*(t)$ i $N_* = N_*(0) =$ konstanta
(2) $a_* = a_*(0) =$ konstanta i $N_* = N_*(t)$.

4.3 Varijabilni koeficijent rasta

Pretpostavimo da je koeficijent transfera specifična funkcija vremena, $a_* = a_*(t)$, i da je noseći kapacitet konstanta, $N_* = N_{*0}$. U tom slučaju, jednadžba (4.14) postaje

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t a_*(x)dx}. \tag{4.15}$$

Proučit ćemo nekoliko slučajeva koji se odnose na navedenu vrijednost $a_*(t)$.

Konstantna varijabla a_*

U prvom i najjednostavnijem slučaju pretpostavimo da je $a_*(t) = a_{*0}$ = konstanta. Ako uvrstimo ovaj izraz u (4.15) dobijemo

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{-a_{*0}t}, \tag{4.16}$$

što je obična ograničena eksponencijalna jednadžba dana formulom (4.2) i prikazana na slici (4.1).

Linearna varijabla a_*

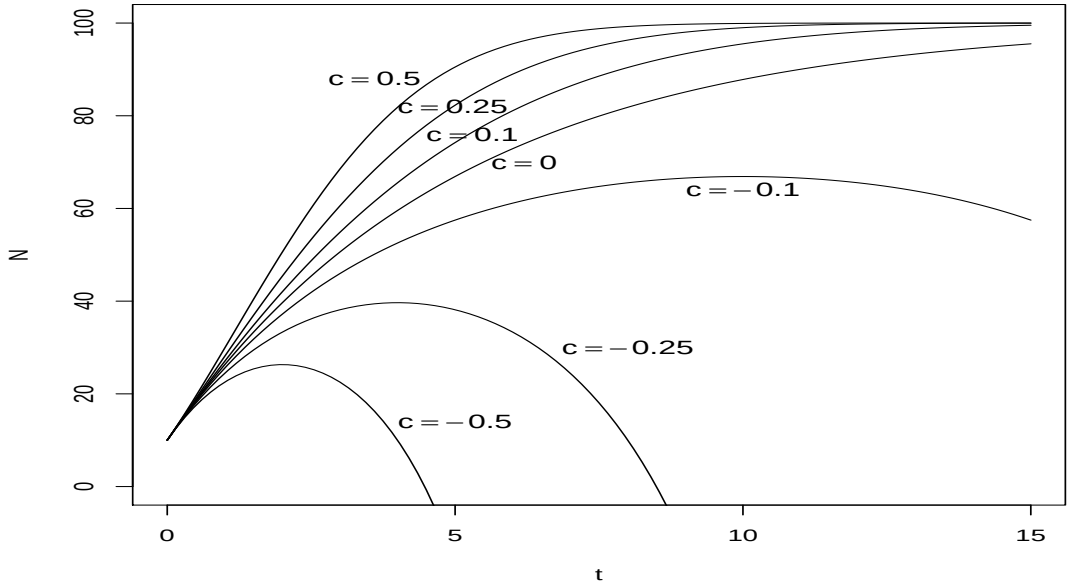
Uzmimo u obzir slučaj kada je $a_*(t)$ linearna varijabla u odnosu na vrijeme t

$$a_*(t) = a_{*0}(1 + ct), \tag{4.17}$$

gdje je c pozitivna ili negativna konstanta. Uvrstimo li spomenuto u (4.15) imamo

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{-a_{*0}(t+\frac{1}{2}ct^2)}. \tag{4.18}$$

Ova je jednadžba prikazana na slici za različite vrijednosti od c.



Slika 4.2: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$

Deriviranjem jednadžbe (4.18) i izjednačavanjem s nulom dobijemo sljedeće rezultate:
1. Ako je $c > 0$, vidimo da je N monotono rastuća te se asimptotski približava N_{*0}, za velike t.
2. Ako je $c < 0$, N postiže maksimum u točki

$$t_m = -\frac{1}{c} \quad \text{i on iznosi} \quad N_m = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{\frac{a_{*0}}{2c}}. \tag{4.19}$$

Sa slike vidimo da za $t > t_m$ vrijednost od N pada te dostiže početnu vrijednost N_0 u $t = -\frac{2}{c}$. N postaje nula u točki

$$t_0 = -\frac{1}{c}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2c}{a_{*0}} \log_{\mathrm{e}}(1 - \frac{N_0}{N_{*0}})}\right). \tag{4.20}$$

Eksponencijalna varijabla a_*

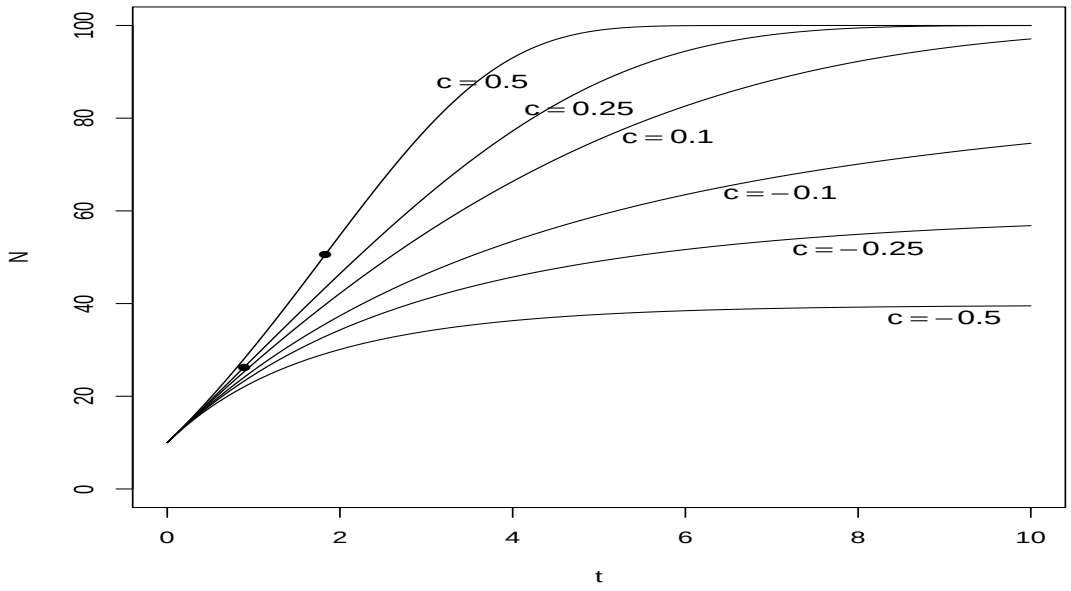
Pretpostavimo da koeficijent rasta varira na sljedeći način

$$a_*(t) = a_{*0}\mathrm{e}^{ct}, \tag{4.21}$$

gdje c može biti pozitivna ili negativna konstanta. U tom slučaju dobijemo rješenje

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{a_{*0}}{c}(\mathrm{e}^{ct}-1)}. \tag{4.22}$$

Grafovi jednadžbe prikazani su na slici.



Slika 4.3: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$

Primijetimo, kada t ide u beskonačno:
1. Ako je $c > 0$, N monotono teži ka N_{*0}.
2. Ako je $c < 0$, N strogo raste prema $\sup N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{\frac{a_{*0}}{c}}$.

Također, vidimo da za $c > a_{*0}$ funkcija ima točku infleksije u

$$t_i = \frac{1}{c}\log_{\mathrm{e}}(\frac{c}{a_{*0}}) \quad \text{i ona iznosi} \quad N_i = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{\frac{a_{*0}-c}{c}}. \tag{4.23}$$

Na slici (4.3), točke infleksije $T_{i,0.25} = (t_i, N_i) = (0.89, 26.32)$ i $T_{i,0.5} = (1.83, 50.61)$ prikazane su za krivulje kojima odgovaraju $c = 0.25$ i $c = 0.5$.

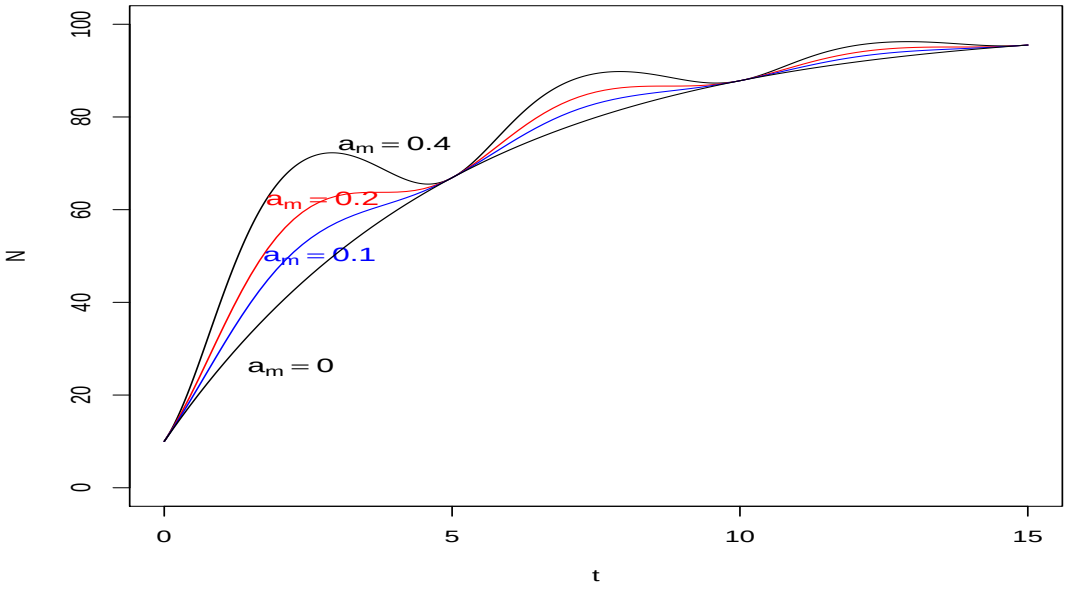
Sinusoidalna varijabla a_*

Kao zadnji slučaj proučavat ćemo koeficijent rasta u sljedećem obliku

$$a_*(t) = a_{*0} + a_m \sin(\omega t), \tag{4.24}$$

gdje je a_m amplituda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija, a T period. Rješenje dane jednadžbe je

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\, \mathrm{e}^{-a_{*0} - \frac{a_m}{\omega}(1-\cos(\omega t))}. \tag{4.25}$$



Slika 4.4: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$, $T = 5$

Deriviramo li (4.25) i izjednačimo s nulom, vidimo da funkcija postiže lokalne maksimume u

$$t_{max} = T\left(n - \frac{1}{2\pi}\arcsin(\frac{a_{*0}}{a_m})\right), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.26}$$

i lokalne minimume u točkama

$$t_{min} = T\left(\frac{2n+1}{2} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(\frac{a_{*0}}{a_m})\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.27}$$

Primijetimo također kako se lokalni ekstremi postižu samo za $a_{*0} < a_m$.

4.4 Varijabilna ravnotežna vrijednost

U ovom dijelu rada pretpostavit ćemo da je $a_* = a_{*0}$ konstanta i $N_* = N_*(t)$. Za tako dane varijable, rješenje (4.14) svodi se na

$$N(t) = \mathrm{e}^{-a_{*0}t}\left(N_0 + a_{*0}\int_0^t N_*(s)\,\mathrm{e}^{a_{*0}s}ds\right). \tag{4.28}$$

Pogledajmo nekoliko oblika nosećeg kapaciteta $N_*(t)$.

Konstantna varijabla N_*

Kao u prethodnom poglavlju, najjednostavniji slučaj je kada je $N_*(t) = N_{*0}$ konstanta. Kao što i očekujemo, jednadžba (4.28) reducira se na običnu ograničenu eksponencijalnu jednadžbu

$$N = N_{*0} - (N_{*0} - N_0)\,\mathrm{e}^{-a_{*0}t}. \tag{4.29}$$

Linearna varijabla N_*

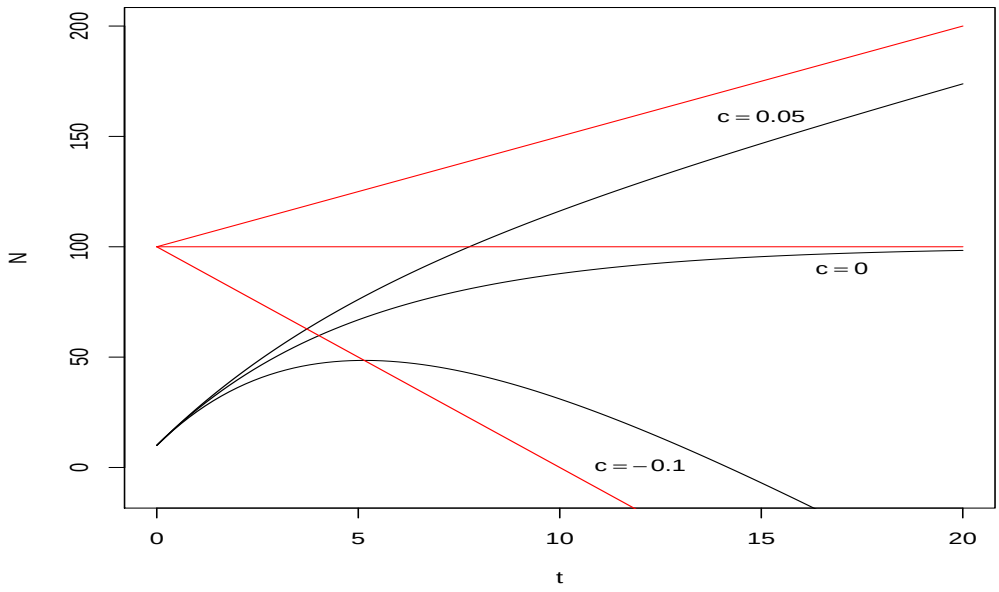
Neka je $N_*(t)$ linearna funkcija vremena dana jednadžbom

$$N_*(t) = N_{*0}(1 + ct), \tag{4.30}$$

gdje je c pozitivna ili negativna konstanta. Uvrstimo li navedeno u (4.28) dobijemo

$$N = \mathrm{e}^{-a_{*0}t}\left(N_0 + N_{*0}\,(\frac{c}{a_{*0}} - 1)\right) + N_{*0}\left(1 + c\,(t - \frac{1}{a_{*0}})\right). \tag{4.31}$$

Gornja jednadžba prikazana je na sljedećem grafu za različite vrijednosti od c.



Slika 4.5: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$

Deriviramo li (4.31) i izjednačimo s nulom dobijemo točku u kojoj funkcija postiže maksimum

$$t_{max} = \frac{1}{a_{*0}} \log_e \left(1 + \frac{a_{*0}}{c}(\frac{N_0}{N_{*0}} - 1)\right) \tag{4.32}$$

i on iznosi

$$N_{max} = N_{*0}\left[1 + \frac{c}{a_{*0}} \log_e \left(1 + \frac{a_{*0}}{c}(\frac{N_0}{N_{*0}} - 1)\right)\right]. \tag{4.33}$$

Primijetimo kako funkcija N postiže maksimum samo za negativne c. Također, pogledajmo jednadžbu $N_*(t) = N_{*0}(1 + ct)$ (prikazano crvenom linijom na grafu (4.5)) u točki $t = t_{max}$,

$$N_* = N_{*0}\left[1 + \frac{c}{a_{*0}} \log_e \left(1 + \frac{a_{*0}}{c}(\frac{N_0}{N_{*0}} - 1)\right)\right]. \tag{4.34}$$

Dakle, kao što vidimo i na grafu, za $c < 0$, pravac N_* i krivulja N sijeku se u točki (t_{max}, N_{max}). Nadalje, ukoliko promatramo razliku tih dviju funkcija

$$N_* - N = N_{*0}\frac{c}{a_{*0}} + \left[N_{*0}\left(1 - \frac{c}{a_{*0}}\right) - N_0\right]\mathrm{e}^{-a_{*0}t} \tag{4.35}$$

za velike t njihova udaljenost teži konstanti.

$$N_* - N \to N_{*0}\frac{c}{a_{*0}}, \qquad t \to \infty, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

Eksponencijalna varijabla N_*

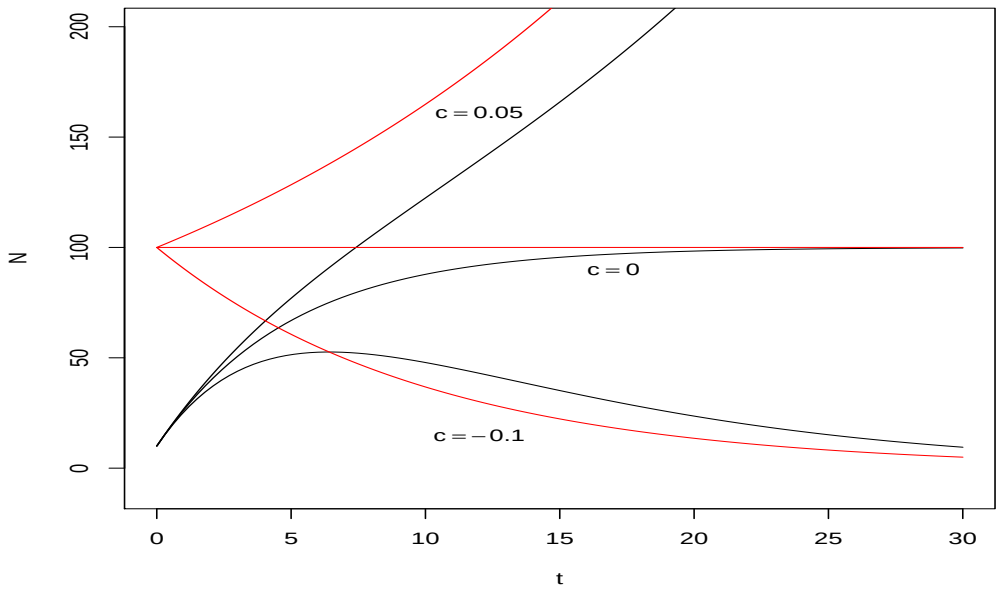
Ovdje promatramo slučaj u kojem se $N_*(t)$ kreće eksponencijalno s obzirom na vrijeme:

$$N_*(t) = N_{*0}\,\mathrm{e}^{ct}, \tag{4.37}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$. Sada jednadžba (4.28) izgleda ovako

$$N = \frac{a_{*0}}{c + a_{*0}}N_{*0}\,\mathrm{e}^{ct} + \left(N_0 - \frac{a_{*0}}{c + a_{*0}}N_{*0}\right)\mathrm{e}^{-a_{*0}t} \tag{4.38}$$

te je prikazana na slici (4.6) za različite vrijednosti od c.



Slika 4.6: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$

Maksimum funkcije se pojavljuje samo za $c < 0$ u točki

$$t_{max} = \frac{1}{a_{*0} + c} \log_{\mathrm{e}} \left(\frac{a_{*0}}{c} (\frac{N_0}{N_{*0}} - 1) + \frac{N_0}{N_{*0}} \right). \tag{4.39}$$

Kao i u prethodnom slučaju, na grafu (4.6) vidimo da se krivulje N_* (prikazana crvenom bojom) i N sijeku u točki (t_{max}, N_{max}) kada je konstanta c negativna. Njihova udaljenost dana je jednadžbom

$$N_* - N = \frac{c}{c + a_{*0}} N_{*0}\, \mathrm{e}^{ct} + \left(\frac{a_{*0}}{c + a_{*0}} N_{*0} - N_0 \right) \mathrm{e}^{-a_{*0}t}. \tag{4.40}$$

Primijetimo da ako je $c < 0$, udaljenost tih krivulja povećava se s povećanjem t. Za $c \geq 0$, kada t teži ka beskonačnosti, njihova udaljenost teži ka nuli.

Sinusoidalna varijabla N_*

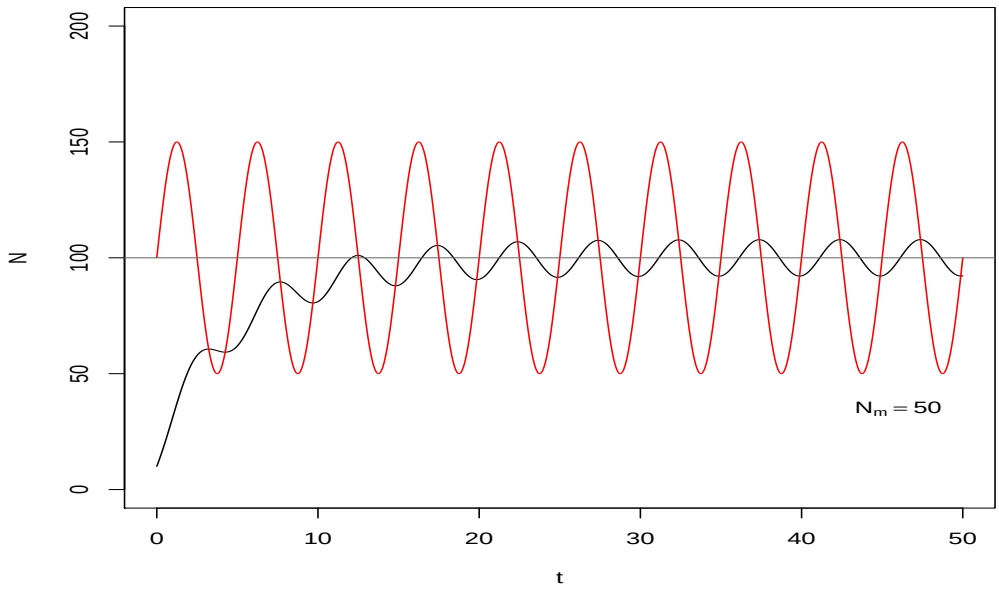
Uzmimo da je noseći kapacitet dan u sljedećem obliku

$$N_*(t) = N_{*0} + N_m \sin(\omega t), \tag{4.41}$$

gdje je N_m amplituda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ frekvencija i T period. Rješenje tako zadane jednadžbe je

$$N = N_{*0} + \frac{\theta}{\theta^2 + 1} N_m (\, \theta \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \,) - \left(N_{*0} - N_0 - \frac{\theta}{\theta^2 + 1} N_m \right) \mathrm{e}^{-a_{*0}t}, \tag{4.42}$$

gdje je $\theta = \frac{a_{*0}}{\omega}$. Na grafu (4.7) crnom bojom prikazana je gornja jednadžba za amplitudu $N_m = 50$ i period $T = 5$ uz graf jednadžbe (4.41) koji je crvene boje.



Slika 4.7: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$, $T = 5$

Na gornjoj slici vidimo, kako t ide u beskonačnost, drugi dio jednadžbe (4.42) pada u nulu te funkcija postaje periodična. Primijetimo, također, kako se krivulje N_* i N sijeku u točkama lokalnih ekstrema funkcije N.

Primjer: Javni interes za medijske događaje

Zaokružit ćemo prethodni dio o ograničenoj eksponencijalnoj distribuciji ilustracijom događaja koji susrećemo u svakodnevnom životu. Prijenos neke izvanredne vijesti često naglo poraste, dosegne vrhunac te polako potpuno nestane iz medija. Javni interes za spomenutu vijest ili događaj slijedi isti obrazac. Ovakav primjer odgovara kontekstu ovog poglavlja, jer ograničena eksponencijalna distribucija opisuje vanjsko uvjetovane, neosobne mehanizme prijenosa informacija, što upravo karakterizira medije; novine, radio i televiziju. Za svrhu ovog primjera uvodimo takozvanu Γ funkciju. Pretpostavimo da je noseći kapacitet opisan jednostavnom formom spomenute funkcije

$$N_*(t) = N_{*0}\, \mathrm{e}^{-ct} ct, \qquad c > 0. \tag{4.43}$$

Deriviranjem gornje jednadžbe i izjednačavanjem s nulom, lako je doći do točaka maksimuma

$$t_{*max} = \frac{1}{c}, \qquad N_{*max} = \frac{N_{*0}}{\mathrm{e}}, \tag{4.44}$$

i infleksije

$$t_{*i} = \frac{2}{c}, \qquad N_{*i} = \frac{2N_{*0}}{\mathrm{e}^2}. \tag{4.45}$$

Uvrstimo li (4.43) u opću jednadžbu (4.28) uz početni uvjet $N(0) = 0$ dobijemo

$$N = N_{*0}\frac{a_{*0}c}{(a_{*0}-c)^2}\left[\Big((a_{*0}-c)t - 1\Big)\mathrm{e}^{-ct} + \mathrm{e}^{-a_{*0}t}\right]. \tag{4.46}$$

Izjednačavanje prve derivacije s nulom daje izraz

$$(a_{*0}-c)t_m + \log_{\mathrm{e}}\left[1 - \frac{c}{a_{*0}}(a_{*0}-c)t_m\right] = 0, \tag{4.47}$$

iz kojeg se može dobiti točka maksimuma funkcije N. U slučaju kada je $c = a_{*0}$, rješenje jednadžbe dano je s

$$N = \frac{1}{2}N_{*0}\, a_{*0}^2\, t^2\, \mathrm{e}^{-a_{*0}t}. \tag{4.48}$$

Gornja jednadžba postiže maksimum i infleksije u točkama

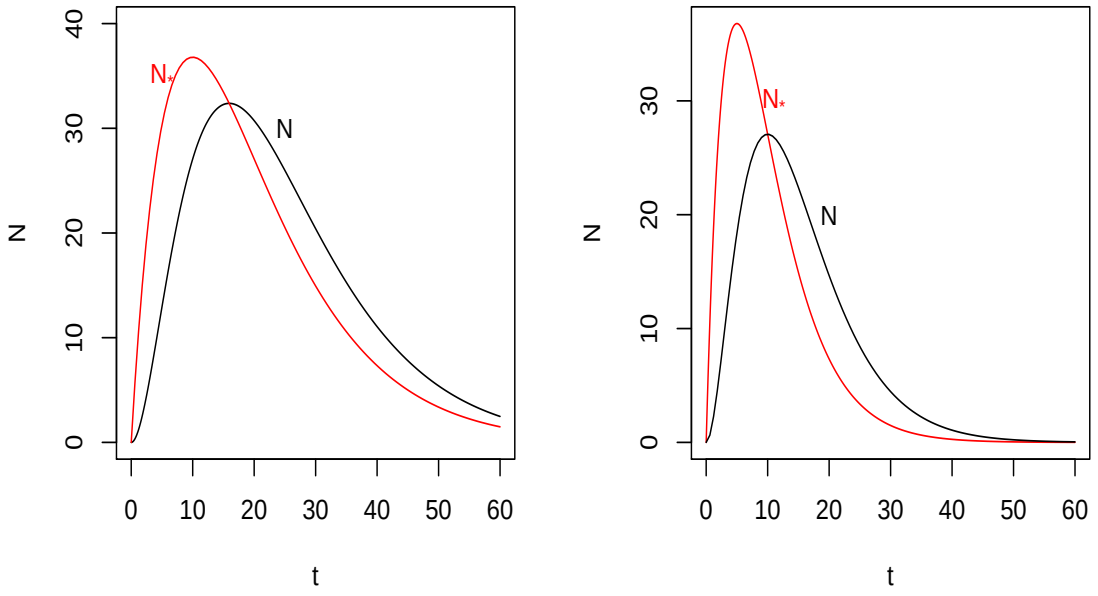
$$t_{max} = \frac{2}{a_{*0}}, \qquad t_i = \frac{2}{a_{*0}}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.49}$$

Dobiveni rezultati grafički su prikazani za $a_{*0} = 0.2$, $N_{*0} = 100$ i $N_0 = 0$ na slikama (4.8).

Primijetimo kako u ovom primjeru obje funkcije N i N_* kreću iz nule, te nakon što postignu maksimum počinju monotono padajuće, asimptotski približavati se nuli. Ovom analizom postavili smo temelje za slijedeći primjer. Prije samog početka, napominjem kako je ovaj primjer fiktivan, štoviše baziran na pretpostavci da je $c = 0.3$, no ovdje je korišten da ilustrira poantu poglavlja.

Krivulja nosećeg kapaciteta. Za funkciju N_* određeno je i zapisano u tablicu (4.1) broj minuta posvečenih emitiranju određenog medijskog događaja u svakom danu, od strane nekoliko lokalnih televizijskih postaja.

Krivulja rasta. Za funkciju N zabilježen je postotak osoba koje su potvrdno odgovorile na telefonsko anketno pitanje; interesira li ih trenutno spomenuti medijski događaj.
Mjerne jedinice od N i N_* ne moraju uvijek biti iste, makar tako može doći do gubitka nekih matematičkih svojstva (poput sjecišta tih dviju krivulja u (t_m, N_m)). Podaci su dani tablicom (4.1).



Slika 4.8: $c = 0.10$ (lijevo), $c = 0.20$ (desno), $a_{*0} = 0.2$, $N_{*0} = 100$, $N_0 = 0$

t (dani)	N_* (minuta po danu)	U (%)	t (dani)	N_* (minuta po danu)	U (%)
0	0	0	8	131	23.2
1	133	2.3	10	90	21.5
2	198	7.1	12	59	18.4
3	220	12.2	15	30	13.2
4	217	16.6	20	9	6.5
5	201	19.9	25	3	2.9
6	179	22.0	30	1	1.2

Tablica 4.1: Minute dnevne medijske pokrivenosti izvanredne vijesti (N_*) i interes javnosti za spomenutu vijest (U)

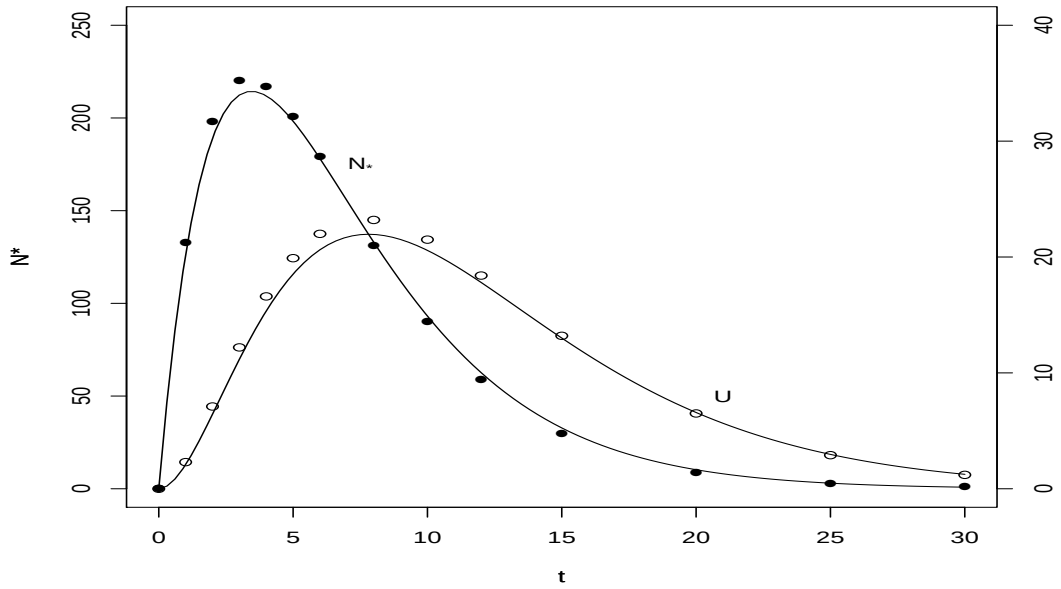
Zapišimo jednadžbu (4.43) kao

$$\log_e \frac{N_*}{t} = \log_e(N_{*0}c) - ct. \tag{4.50}$$

Vrijednosti od c i N_{*0} dobijemo metodom najmanjih kvadrata iz podataka za $N_*(t)$ u gornjoj tablici.

$$c = 0.29 \text{ dana}^{-1} \qquad \text{i} \qquad N_{*0} = 583 \text{ minuta} \tag{4.51}$$

S grafa (4.9) primjetimo kako funkcija $U = \frac{N}{N_*}$ postiže maksimum za vrijednosti od t oko $t = 7.5$. Pošto znamo vrijednost za konstantu c, možemo iz jednadžbe (4.47) dobiti vrijednost preostale konstante; $a_{*0} = 0.2$ dana^{-1}. Sada možemo grafički prikazati krivulje dane jednadžbama (4.43) i (4.46) (slika (4.9)).



Slika 4.9: N_* - dnevni prijenos u minutama , U - interes javnosti za određeni medijski događaj

Rezultati koje vidimo na gornjoj slici, zaista odgovaraju prvotnoj pretpostavci: interes javnosti za određenu vijest raste te (sporije) pada u odnosu na rast i pad informacija dostupnih od vanjskih izvora.

4.5 Kombinacija eksponencijalne i ograničene eksponencijalne distribucije

Pristup kojim ćemo se baviti u ovom poglavlju obradio je Samuel Brody (1945.) u svojim studijima o fenomenima rasta [2]. Pretpostavimo da je eksponencijalna funkcija valjana duž vremenskog perioda kada se stopa rasta ($\frac{dN}{dt}$) povećava i nazovimo to *prvim stadijem*. Zatim pretpostavimo da ograničena eksponencijalna distribucija odgovara vremenskom periodu u kojem se stopa rasta smanjuje i to nazovimo *drugim stadijem*. Jednadžbe su:

1. stadij

$$\frac{dN}{dt} = aN, \qquad N(0) = N_0 \tag{4.52}$$

$$N = N_0 \mathrm{e}^{at} \tag{4.53}$$

2. stadij

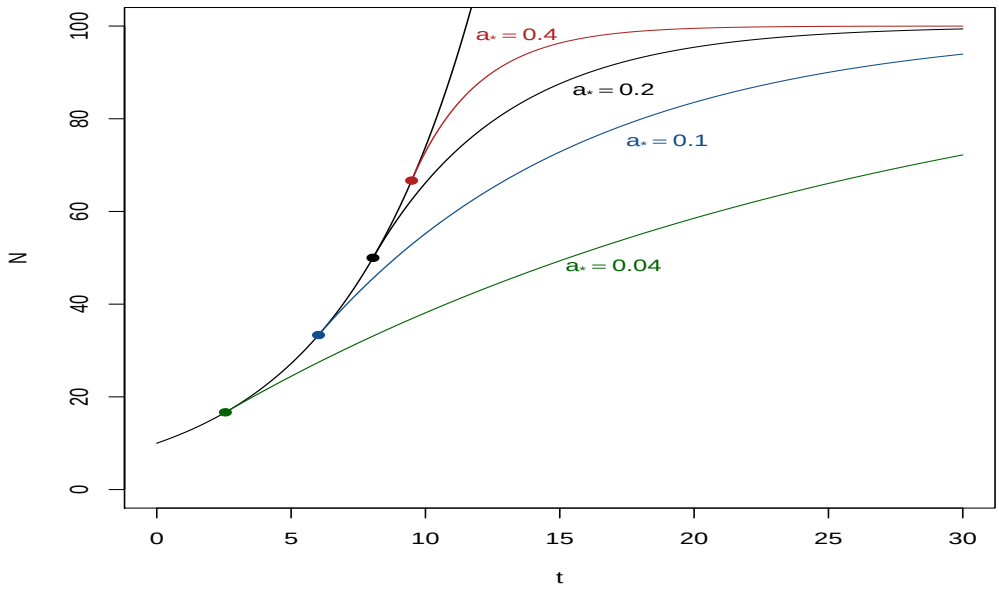
$$\frac{dN}{dt} = a_*(N_* - N), \qquad N(t_i) = N_i \tag{4.54}$$

$$N = N_* - (N_* - N_i)\, \mathrm{e}^{-a_*(t-t_i)} \tag{4.55}$$

Kako bismo spojili te dvije distribucije u točki infleksije, navedene jednadžbe moraju zadovoljavati
(1) $N_i = N_0 \mathrm{e}^{at_i}$
(2) $\frac{dN_i}{dt_i} = aN_i = a_*(N_* - N_i)$
Dakle, točka infleksije (t_i, N_i) novog modela je

$$t_i = \frac{1}{a} \log_{\mathrm{e}} \frac{N_i}{N_0} \qquad N_i = \frac{a_*}{a + a_*} N_* \tag{4.56}$$

Metoda je ilustrirana na slici (4.10) za različite a_*.



Slika 4.10: $N_{*0} = 100$, $N_0 = 10$, $a_{*0} = 0.20$, $T = 5$

Točke infleksije su označene na grafu. Primijetimo kako su sve te točke sadržane na eksponencijalnoj krivulji. Upravo taj veliki interval za točku infleksije, od N_0 do N_*, je atraktivna karakteristika kombinacije ovih dviju distribucija. Prikažimo to na sljedećem primjeru.

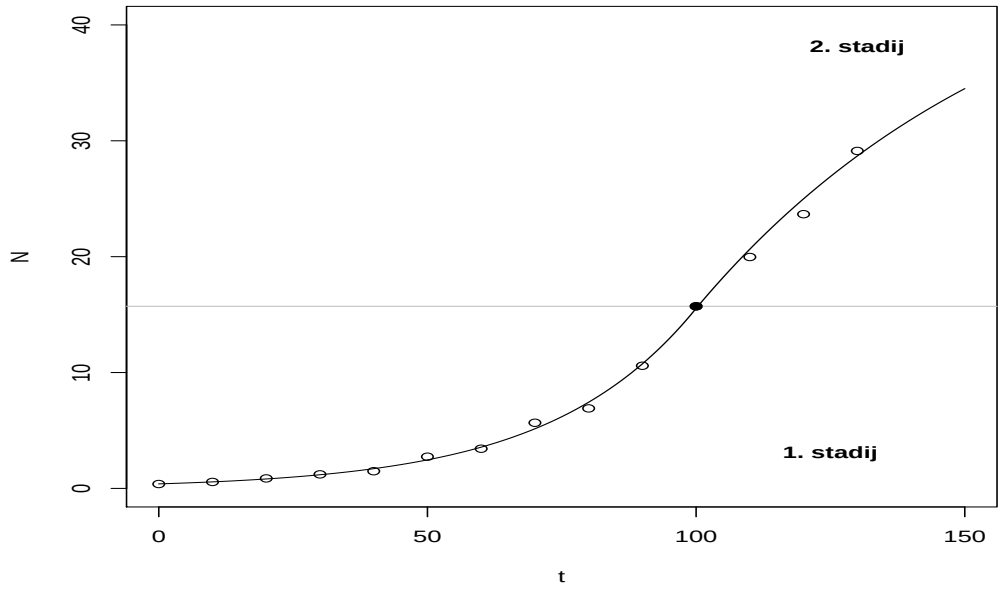
Primjer: Populacija Kalifornije

Populacija države Kalifornije ispisana je po desetljećima, od 1860. do 1990. godine, u tablici (4.2).

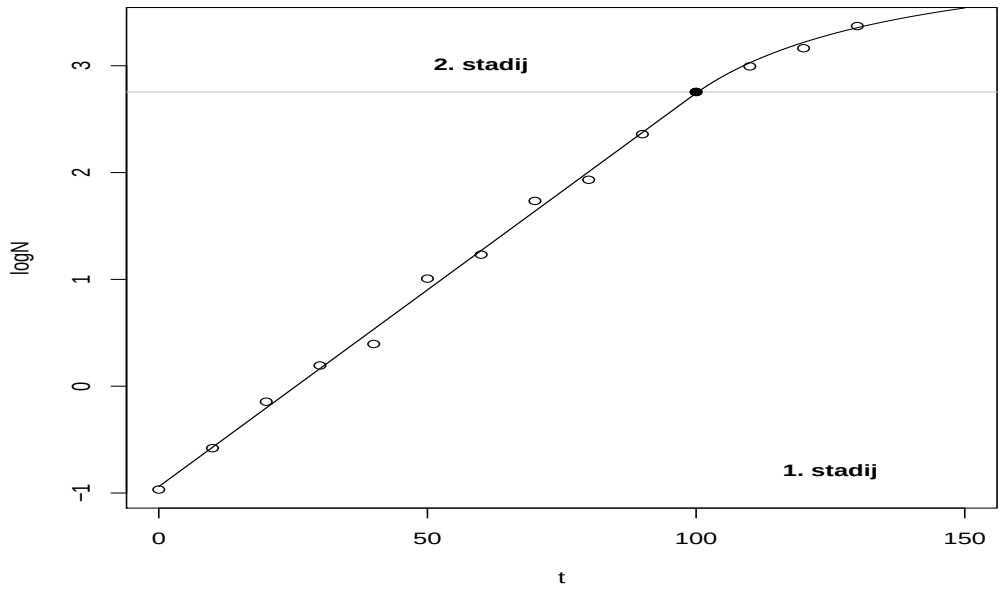
Godina	t (godine)	N (milijuni)	Godina	t (godine)	N (milijuni)
1860	0	0.380	1930	70	5.667
1870	10	0.560	1940	80	6.907
1880	20	0.865	1950	90	10.586
1890	30	1.214	1960	100	15.717
1900	40	1.485	1970	110	19.971
1910	50	2.738	1980	120	23.668
1920	60	3.427	1990	130	29.126

Tablica 4.2: Populacija Kalifornije od 1860. do 1990. godine

Podaci iz tablice prikazani su na aritmetičkom i semilogaritamskom grafu.



Slika 4.11: Aritmetički graf podataka iz Tablice 4.1



Slika 4.12: Semilogaritamski graf podataka iz Tablice 4.1

Na grafovima vidimo kako populacija Kalifornije raste eksponencijalno kroz prvih 100 godina, od 1860. do 1960. godine, zatim rast usporava. Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, stavit ćemo 1960. godinu kao godinu sjecišta između dva stadija; eksponencijalnog i ograničenog eksponencijalnog rasta. Odnosno, $t_i = 100$. Iz jednadžbe (4.53) slijedi

$$\log_e N = \log_e N_0 + at \tag{4.57}$$

Metodom najmanjih kvadrata za prvih jedanaest podataka iz tablice dobijemo $a = 0.0368$ i $N_0 = 0.391$. Rezultat je linija koja opisuje podatke do trenutka t_i, odnosno sive linije na oba grafa. Dobivena točka infleksije je $(t_i, N_i) = (100, 15.502)$. Kako bismo započeli drugi stadij, iz (4.55) slijedi

$$\log_e (N_* - N) = \log_e (N_* - N_i) - a_*(t - t_i). \tag{4.58}$$

Također, iz jednadžbe (4.56) dobijemo

$$N_* - N_i = \frac{aN_i}{a_*}, \tag{4.59}$$

pa izraz (4.58) možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\log_e (N_* - N) = \log_e \frac{aN_i}{a_*} - a_*(t - t_i). \tag{4.60}$$

Sada, metodom najmanjih kvadrata za zadnja četiri podatka u tablici, možemo dobiti vrijednosti za a_* i N_*. Ta procedura vodi do rješenja $a_* = 0.0162$ i $N_* = 49.7$. Uvrštavanjem tih vrijednosti u jednadžbu (4.55) dobijemo liniju za drugi stadij, iznad sive granice na oba grafa.

Prethodni primjer pokazuje metodologiju uključenu u ovakav tip kombinacije dviju distribucija.

Bibliografija

[1] Robert B. Banks, *Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications*, Springer-Verlang, 1994.

[2] S. Brody, *Bioenergetics and growth*, Reinhold, 1945.

[3] Zlatko Drmač, Vjeran Hari, Miljenko Marušić, Mladen Rogina, Sanja Singer i Saša Singer, *Numerička analiza*, (Zagreb, 2003), 398–412, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf`.

[4] N. Keyfitz, *Introduction to the mathematics of population*, Addison-Wesley, 1968.

[5] E.A. Moelwyn-Huges, *Phsyical chemistry, 2nd edition*, Pergamon Press, 1961.

[6] C.A. Winkler i C.N. Hinshelwood, *The Thermal Decomposition of Acetone Vapour*, Proceedings of the Royal Society A **149** (1935), br. 867, 340–354.

Sažetak

U ovom radu analizirali smo osnovne modele rasta, točnije eksponencijalnu, logističku te ograničenu eksponencijalnu distribuciju. Prvo poglavlje daje pregled, karakterizaciju i definiciju tih modela. U drugom poglavlju obrađena je najjednostavnija, eksponencijalna funkcija te je primjerom pokazana njena primjena. Treće poglavlju bavi se analizom logističke funkcije i njenim bitnim svojstvima. Ograničena eksponencijalna distribucija proučena je i ilustrirana u zadnjem poglavlju. Usporedili smo je s eksponencijalnom funkcijom te smo metodu kombiniranja tih dviju distribucija objasnili i demonstrirali primjerom.

Summary

In this paper we analyzed the basic models of growth, more precisely exponential, logistic and confined exponential distribution. The first section provides an overview, characterization and definition of these models. The second chapter deals with the most simple one, exponential function and the example shows its application. The third chapter analyzes the logistics function and its essential characteristics. Confined exponential distribution is studied and illustrated in the last chapter. It was compared and combined with the exponential function, and a method behind the proces of combining these two distributions is explained and demonstrated by example.