Konformalna preslikavanja

Pehar, Antonija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Pehar

KONFORMALNA PRESLIKAVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Marcela Hanzer

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **11**

1 Čuvanje kutova **12**

2 Razlomljene linearne transformacije **15**

3 Normalne familije **18**

4 Riemannov teorem o preslikavanju **20**

5 Klasa $\mathscr{S}$ **23**

6 Neprekidnost na rubovima **29**

7 Konformalno preslikavanje kružnog vijenca **32**

Bibliografija **34**

Uvod

Tema ovog diplomskog rada su konformalna preslikavanja, to jest holomorfne funkcije koje čuvaju kutove u svakoj točki područja na kojem su definirane. Dokazat ćemo neke važne teoreme vezane uz konformalna preslikavanja, a najznačajniji od njih je Riemannov teorem o preslikavanju koji glasi ovako:

Teorem 0.0.1. *Svako jednostavno povezano područje Ω u kompleksnoj ravnini (osim same kompleksne ravnine) je konformalno ekvivalentno otvorenom jediničnom krugu.*

Konformalna preslikavanja imaju velik značaj u kompleksnoj analizi, kao što možemo vidjeti i po sljedećim rezultatima naznačenima u ovom diplomskom radu.

U početnom poglavlju definiramo važan pojam čuvanja kutova. Pretpostavimo da je f preslikavanje područja Ω u kompleksnu ravninu, $z_0 \in \Omega$ i z_0 ima punktiranu okolinu $D'(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z_0 - z| < r\} \subset \Omega$ u kojoj vrijedi $f(z) \neq f(z_0)$. Kažemo da f **čuva kutove** u z_0 ako limes

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] \qquad (r > 0)$$

postoji i *ne ovisi o* θ.

Dokazat ćemo sljedeći teorem:

Teorem 0.0.2. *Neka f preslikava područje Ω u kompleksnu ravninu. Ako $f'(z_0)$ postoji u nekoj točki $z_0 \in \Omega$ i $f'(z_0) \neq 0$, tada f čuva kutove u z_0. Obratno, ako diferencijal od f postoji i različit je od nule u z_0 i ako f čuva kutove u z_0, onda $f'(z_0)$ postoji i $f'(z_0) \neq 0$.*

U drugom poglavlju definiramo pojam razlomljenih linearnih transformacija:

Definicija 0.0.3. *Ako su a, b, c i d kompleksni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$, preslikavanje*

$$z \to \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

*zovemo **razlomljena linearna transformacija**.*

Pokazat ćemo i sljedeći rezultat:
Za bilo koje dvije uređene trojke (a, b, c) *i* (a', b', c') *u* S^2 *postoji jedna i samo jedna razlomljena linearna transformacija koja preslikava a u* a', *b u* b' *i c u* c' (uz pretpostavku da je $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $a' \neq b'$, $a' \neq c'$ i $b' \neq c'$).
Vidjet ćemo i kako razlomljene linearne transformacije omogućuju primjenu teorema koji se odnose na ponašanje holomorfnih funkcija u okolini pravaca na situacije u kojima se pojavljuju kružni lukovi. Pri tom će nam biti koristan sljedeći teorem:

Teorem 0.0.4. ***(Schwarzov princip refleksije)***
Neka je L segment na realnoj osi, Ω^+ *područje u* Π^+ *i neka je svaki* $t \in L$ *središte jednog otvorenog kruga* D_t *tako da* $\Pi^+ \cap D_t$ *leži u* Ω^+. *Neka je* Ω^- *definiran kao*

$$\Omega^- = \{z : \overline{z} \in \Omega^+\}.$$

Pretpostavimo da je $f = u + iv$ *holomorfna na* Ω^+ *i da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} v(z_n) = 0.$$

za svaki niz (z_n) *u* Ω^+ *koji konvergira prema točki u L. Tada postoji funkcija F holomorfna na* $\Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$ *takva da je* $F(z) = f(z)$ *na* Ω^+. *Za tu funkciju F vrijedi relacija:*

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \qquad (z \in \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-).$$

U sljedećem poglavlju uvodimo pojam normalnih familija:

Definicija 0.0.5. *Pretpostavimo da je* $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ *za neko područje* Ω. $\mathcal{F}$ *zovemo* ***normalna familija*** *ako svaki niz elemenata iz* $\mathcal{F}$ *ima podniz koji uniformno konvergira na kompaktnim podskupovima od* Ω. *Taj limes ne mora biti element iz* $\mathcal{F}$.

Dokazat ćemo sljedeći bitan teorem koji će nam biti koristan i u dokazu Riemannovog teorema o preslikavanju:

Teorem 0.0.6. *Pretpostavimo da je* $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ *i* $\mathcal{F}$ *je uniformno ograničena na svakom kompaktnom podskupu područja* Ω. *Tada je* $\mathcal{F}$ *normalna familija.*

U dokazu tog teorema javlja se važan pojam ekvikontinuiranih familija:

Definicija 0.0.7. *Neka je* $\mathcal{F}$ *familija kompleksnih funkcija definiranih na metričkom prostoru X sa pripadnom metrikom* ρ.
Kažemo da je $\mathcal{F}$ ***ekvikontinuirana*** *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da je* $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ *za svaku funkciju* $f \in \mathcal{F}$ *i za svaki par točaka* x, y *za koje vrijedi* $\rho(x, y) < \delta$. *Tada je svaka funkcija* $f \in \mathcal{F}$ *i uniformno neprekidna.*

Također, u dokazu ćemo se pozvati na sljedeća dva teorema:

Teorem 0.0.8. ***(Arzela-Ascoli)***
Neka je $\mathcal{F}$ uniformno ograničena i ekvikontinuirana familija kompleksnih funkcija u metričkom prostoru X i neka X sadrži prebrojiv gust podskup E.
Tada svaki niz (f_n) u $\mathcal{F}$ ima podniz koji uniformno konvergira na svakom kompaktnom podskupu od X.

Teorem 0.0.9. *Svaki otvoren skup Ω u kompleksnoj ravnini je unija niza kompaktnih skupova $(K_n), n = 1, 2, 3...$ takvih da vrijedi:*
(a) K_n leži u interioru skupa K_{n+1}, za $n = 1, 2, 3...$
(b) Svaki kompaktan podskup od Ω leži u nekom K_n.
(c) Svaka komponenta povezanosti skupa $S^2 \setminus K_n$ sadrži neku komponentu povezanosti skupa $S^2 \setminus \Omega$, za $n = 1, 2, 3...$

Prije dokaza Riemannovog teorema o preslikavanju, u četvrtom poglavlju definiramo pojam konformalno ekvivalentnih područja:

Definicija 0.0.10. *Za dva područja Ω_1 i Ω_2 kažemo da su* ***konformalno ekvivalentna*** *ako postoji preslikavanje $\varphi \in H(\Omega_1)$ koje je bijektivno na Ω_1 i vrijedi $\varphi(\Omega_1) = \Omega_2$, odnosno ako postoji konformalno bijektivno preslikavanje područja Ω_1 u Ω_2.*

Navedimo i preostale teoreme i pojmove koje ćemo koristiti pri dokazivanju:

Teorem 0.0.11. *Pretpostavimo da su $f_j \in H(\Omega)$, za $j = 1, 2, 3...$, i neka $f_j \to f$ uniformno na kompaktnim podskupovima od Ω. Tada je $f \in H(\Omega)$, i $f_j' \to f'$ uniformno na kompaktnim podskupovima od Ω.*

Teorem 0.0.12. *Za fiksirani $\alpha \in U$, preslikavanje $\varphi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ je bijekcija koja preslikava T na T, U na U i α u 0. Inverz od φ_α je $\varphi_{-\alpha}$ i vrijedi:*

$$\varphi_\alpha'(0) = 1 - |\alpha|^2, \qquad \varphi_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}.$$

Teorem 0.0.13. *Neka je Ω područje, $f \in H(\Omega)$ i $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$. Tada je ili $Z(f) = \Omega$ ili $Z(f)$ nema točku gomilišta u Ω. U slučaju da $Z(f)$ nema točku gomilišta u Ω, za svaki $a \in Z(f)$ postoji odgovarajući pozitivan cijeli broj $m = m(a)$ takav da vrijedi:*

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \qquad z \in \Omega,$$

gdje je $g \in H(\Omega)$ i $g(a) \neq 0$.
Cijeli broj m zovemo ***red nultočke*** *koju f ima u točki a.*
$Z(f)$ zovemo ***skup nulišta*** *od f. Nadalje, $Z(f)$ je najviše prebrojiv, te je $Z(f) = \Omega$ ako i samo ako je f identički nula na Ω.*

Teorem 0.0.14. ***(Teorem o otvorenom preslikavanju)***
Neka je Ω područje, $f \in H(\Omega)$, f nije konstantna, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$. Neka je m red nultočke koju funkcija $f - w_0$ ima u z_0.
Tada postoji okolina V točke z_0, $V \subset \Omega$, i postoji $\varphi \in H(V)$ takvo da vrijedi:
(a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m$, za sve $z \in V$,
(b) φ' nema nultočku na V i φ je invertibilno preslikavanje sa V na krug $D(0; r)$.

Prostor svih ograničenih holomorfnih funkcija na U označavamo sa H^∞. Uz normu

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in U\},$$

H^∞ postaje Banachov prostor.

Teorem 0.0.15. ***(Schwarzova lema)***
Pretpostavimo da je $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$, i $f(0) = 0$. Tada vrijedi:

$$|f(z)| \leq |z| \qquad (z \in U), \tag{2}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{3}$$

Ako u (2) vrijedi jednakost za neki $z \in U \setminus \{0\}$, ili ako jednakost vrijedi u (3), tada je $f(z) = \lambda z$, za neku konstantu λ, $|\lambda| = 1$.

Definirajmo pojam indeksa točke z u odnosu na krivulju γ :

Teorem 0.0.16. *Neka je γ zatvoren put, a Ω komplement od γ^* u kompleksnoj ravnini. Definirajmo*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \Omega).$$

Tada je Ind_γ cjelobrojna funkcija na Ω koja je jednaka konstanti na svakoj komponenti povezanosti od Ω i jednaka nuli na svakoj neograničenoj komponenti povezanosti od Ω.
$Ind_\gamma(z)$ nazivamo ***indeks*** *od z u odnosu na γ.*

Teorem 0.0.17. ***(Rouchéov teorem)***
Pretpostavimo da je γ zatvoren put u području Ω, tako da vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ za svaki α koji nije u Ω. Pretpostavimo također da je $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ ili 1 za svaki $\alpha \in \Omega \setminus \{\gamma^*\}$, i neka je Ω_1 skup svih α za koje vrijedi $Ind_\gamma(\alpha) = 1$.
Za neki $f \in H(\Omega)$, neka je N_f broj nultočaka od f u Ω, računajući i njihove kratnosti.

(a) Ako je $f \in H(\Omega)$ i f nema nultočaka na γ^*, onda vrijedi

$$N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Ind_\Gamma(0),$$

gdje je $\Gamma = f \circ \gamma$.
(b) Ako je $g \in H(\Omega)$ i

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \qquad z \in \gamma^*$$

onda vrijedi $N_g = N_f$.

Teorem koji slijedi bit će koristan i u sljedećem poglavlju:

Teorem 0.0.18. *Za područje Ω u kompleksnoj ravnini, svaki od sljedećih devet uvjeta implicira ostale:*
(a) Ω je homeomorfno otvorenom jediničnom krugu U.
(b) Ω je jednostavno povezano područje.
(c) $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ za svaki zatvoren put γ u Ω i svaki $\alpha \in S^2 \setminus \Omega$.
(d) $S^2 \setminus \Omega$ je povezan skup.
(e) Svaki $f \in H(\Omega)$ može se uniformno aproksimirati polinomima na kompaktnim podskupovima od Ω.
(f) Za svaki $f \in H(\Omega)$ i svaki zatvoren put γ u Ω vrijedi:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(g) Za svaku $f \in H(\Omega)$ postoji $F \in H(\Omega)$ takvo da je $F' = f$.
(h) Ako je $f \in H(\Omega)$ i $1/f \in H(\Omega)$, tada postoji $g \in H(\Omega)$ takvo da je $f = e^g$.
(i) Ako je $f \in H(\Omega)$ i $1/f \in H(\Omega)$, tada postoji $\varphi \in H(\Omega)$ takvo da je $f = \varphi^2$.

Tema petog poglavlja je klasa $\mathscr{S}$:

Definicija 0.0.19. *$\mathscr{S}$ je klasa svih $f \in H(U)$ koje su injekcije na U i za koje vrijedi:*

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Prema tome, svaka funkcija $f \in \mathscr{S}$ se može razviti u red potencija

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U).$$

Dokazat ćemo sljedeća svojstva te klase:

Teorem 0.0.20. *(a) Ako je $f \in \mathscr{S}$, $|\alpha| = 1$ i $g(z) = \overline{\alpha} f(\alpha z)$, onda je $g \in \mathscr{S}$.*
(b) Ako je $f \in \mathscr{S}$, onda postoji $g \in \mathscr{S}$ takva da vrijedi

$$g^2(z) = f(z^2) \qquad (z \in U). \tag{4}$$

Teorem 0.0.21. *Ako je $f \in \mathscr{S}$, i*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

tada vrijedi:
(a) $|a_2| \leq 2$, i
(b) $f(U) \supset D(0; \frac{1}{4})$.
Druga tvrdnja znači da $f(U)$ sadrži sve w takve da je $|w| < \frac{1}{4}$.

Osim toga, dokazat ćemo i sljedeći teorem:

Teorem 0.0.22. *Ako je $F \in H(U \setminus \{0\})$, F injekcija na U i ako vrijedi*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad (z \in U),$$

onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1.$$

Pri dokazivanju prethodnog teorema koristit ćemo sljedeću tvrdnju:

Teorem 0.0.23. *Pretpostavimo da vrijede sljedeće tvrdnje:*
(i) $X \subset V \subset \mathbb{R}^k$, V je otvoren skup, $g : V \to \mathbb{R}^k$ je neprekidna;
(ii) X je Lebesgue-izmjeriv skup, g je injekcija na X, i g je diferencijabilna u svakoj točki od X;
(iii) $m(g(V \setminus X)) = 0$, gdje je m Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^k$.
Tada vrijedi

$$\int_Y f dm = \int_X (f \circ g)|J_g| dm$$

za $Y = g(X)$ i svako izmjerivo preslikavanje $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty]$. J_g je Jacobijan preslikavanja g.

U poglavlju "Neprekidnost na rubovima" definiramo jednostavne rubne točke:

Definicija 0.0.24. *Rubna točka β jednostavno povezanog područja Ω se naziva* ***jednostavna rubna točka od*** Ω *ako ima sljedeće svojstvo: za svaki niz (α_n) u Ω takav da $\alpha_n \to \beta$ kad $n \to \infty$ postoji krivulja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ i niz $(t_n), 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \to 1$, takav da je $\gamma(t_n) = \alpha_n, n = 1,2,3...$ i $\gamma(t) \in \Omega$ za $0 \leq t < 1$. Drugim riječima, postoji krivulja u Ω koja prolazi kroz točke α_n i završava u β.*

Dokazat ćemo sljedeći teorem:

Teorem 0.0.25. *Neka je Ω ograničeno jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i f konformalno preslikavanje iz Ω na U.*
(a) Ako je β jednostavna rubna točka od Ω, tada f ima neprekidno proširenje na $\Omega \cup \{\beta\}$. Ako je f tako proširena, vrijedi $|f(\beta)| = 1$.
(b) Ako su β_1 i β_2 različite jednostavne rubne točke od Ω i ako je f proširena na $\Omega \cup \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$ kao u (a), tada je $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.

Nakon što dokažemo prethodni teorem bit će nam jednostavnije dokazati sljedeću bitnu tvrdnju:

Teorem 0.0.26. *Ako je Ω ograničeno jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i ako je svaka rubna točka od Ω jednostavna, tada se svako konformalno preslikavanje iz Ω na U može proširiti na homeomorfizam iz $\overline{\Omega}$ na $\overline{U}$.*

Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere. Prostor $L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ se sastoji od klasa ekvivalencije ($f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = f_2$ μ-s.s.) $\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija koje su μ-s.s. omeđene. Funkcija f je μ-s.s omeđena ako $\exists N \in \mathcal{F}, \mu(N) = 0$ takav da je $\sup\{|f(x)| : x \in N^c\} < \infty$. Za takvu funkciju definiramo $S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \in N^c\}$ i $\|f\|_\infty := \inf\left\{S_f(N) : N \in \mathcal{F}, \mu(N) = 0\right\}$. Elemente od L^∞ zovemo i **esencijalno ograničene funkcije**, a $\|f\|_\infty$ esencijalni supremum.

U istom poglavlju koristit ćemo i sljedeće teoreme:

Teorem 0.0.27. *Za svaku funkciju $f \in H^\infty$ postoji funkcija $f^* \in L^\infty(T)$, definirana gotovo svuda na sljedeći način:*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}).$$

Vrijedi jednakost $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$.
Ako je $f^*(e^{i\theta}) = 0$ za gotovo sve $e^{i\theta}$ na nekom luku $I \subset T$, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in U$.

Teorem 0.0.28. ***(Lindelöfov teorem)***
Prepostavimo da je $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *krivulja takva da vrijedi* $|\Gamma(t)| < 1$ *za* $t < 1$ *i* $\Gamma(1) = 1$. *Ako je* $g \in H^\infty$ *i ako je*

$$\lim_{t\to 1} g(\Gamma(t)) = L,$$

tada g ima radijalni limes L u točki 1.

Teorem 0.0.29. *Pretpostavimo da je* Ω *područje,* $f \in H(\Omega)$, *i* f *je injekcija na* Ω. *Tada je* $f'(z) \neq 0$ *za svaki* $z \in \Omega$, *i inverz od* f *je holomorfan.*

U posljednjem poglavlju, "Konformalno preslikavanje kružnog vijenca", dat ćemo odgovor na pitanje jesu li bilo koja dva kružna vijenca konformalno ekvivalentna.
Za $0 < r < R$, neka je

$$A(r,R) = \{z : r < |z| < R\}$$

kružni vijenac sa unutarnjim polumjerom r i vanjskim polumjerom R. Pokazat ćemo da vrijedi:

Teorem 0.0.30. *Kružni vijenci* $A(r_1,R_1)$ *i* $A(r_2,R_2)$ *su konformalno ekvivalentni ako i samo ako je* $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

U nastavku ćemo definirati neke bitnije pojmove iz kompleksne analize koje ćemo koristiti u ovom radu.

Definicija 0.0.31. *Otvoren skup* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je* ***povezan*** *(odnosno* ***povezan putevima****) ako za sve* $z_1, z_2 \in \Omega$ *postoji neprekidno preslikavanje* $\gamma : [a,b] \to \Omega$ *takvo da je* $\gamma(a) = z_1$ *i* $\gamma(b) = z_2$. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je* ***područje*** *ako je* Ω *otvoren i povezan skup. Svaki otvoren skup je disjunktna unija područja (komponenti povezanosti).*

U sljedećem teoremu definirat ćemo derivaciju kompleksne funkcije, te pojam holomorfne (analitičke) funkcije.

Teorem 0.0.32. *Neka je* f *kompleksna funkcija definirana na* Ω *i neka je* $z_0 \in \Omega$. *Ako limes*

$$lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

postoji, označavamo ga sa $f'(z_0)$ *i zovemo* ***derivacija funkcije*** f ***u točki*** z_0.
Funkcija f *je* ***holomorfna (analitička)*** *na* Ω *ako* $f'(z_0)$ *postoji za svaki* $z_0 \in \Omega$. *Klasu svih holomorfnih funkcija na* Ω *označavamo sa* $H(\Omega)$.

Ako je $f \in H(\Omega)$ i $g \in H(\Omega)$, onda je i $f + g \in H(\Omega)$ i $fg \in H(\Omega)$. Odavde slijedi da je $H(\Omega)$ prsten. Ako je $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega_1$, te $g \in H(\Omega_1)$ i $h = g \circ f$, tada je $h \in H(\Omega)$, i h' možemo izračunati pomoću lančanog pravila:

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0) \qquad (z_0 \in \Omega).$$

Uz identifikaciju $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $x + iy = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ možemo shvatiti kao preslikavanje sa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$, odnosno, kao uređen par funkcija (u, v) dvije realne varijable:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy \in \Omega.$$

Derivabilnost funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ u točki $z_0 = x_0 + iy_0$ može se iskazati pomoću svojstava funkcija u i v. Podsjetimo se, za otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i za realnu funkciju $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dviju realnih varijabli kažemo da je **diferencijabilna u točki** $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{g(x, y) - g(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} = 0.$$

Tada su brojevi A i B **parcijalne derivacije funkcije g u točki** (x_0, y_0) i pišemo:

$$A = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad B = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Teorem 0.0.33. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C} = R^2$ otvoren skup, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, i $u = Ref$ i $v = Imf$ pripadne funkcije dviju realnih varijabli. Za $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sljedeća dva svojstva su međusobno ekvivalentna:*
(a) Funkcija f je derivabilna u točki z_0.
*(b) Funkcije u i v su diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i vrijede **Cauchy-Riemannove jednadžbe**:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Nadalje, tada je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Prepostavimo da f ima diferencijal u nekoj točki $z_0 \in \Omega$. Radi jednostavnosti, pretpostavimo $z_0 = f(z_0) = 0$. To znači da postoje kompleksni brojevi α i β (parcijalne derivacije od f u odnosu na x, odnosno y, u točki $z_0 = 0$) takvi da je:

$$f(z) = \alpha x + \beta y + \eta(z)z \qquad (z = x + iy), \tag{5}$$

gdje $\eta(z) \to 0$ kada $z \to 0$.
Kako je $2x = z + \bar{z}$ i $2iy = z - \bar{z}$, (5) možemo zapisati u obliku:

$$f(z) = \frac{\alpha - i\beta}{2} z + \frac{\alpha + i\beta}{2} \bar{z} + \eta(z)z. \tag{6}$$

(6) nam sugerira uvođenje diferencijalnih operatora:

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Sad (6) postaje

$$\frac{f(z)}{z} = (\partial f)(0) + (\bar{\partial} f)(0)\frac{\bar{z}}{z} + \eta(z) \qquad (z \neq 0). \tag{8}$$

Za realne z je $\bar{z}/z = 1$; za čisto imaginarne z je $\bar{z}/z = -1$. Dakle, $f(z)/z$ ima limes kada $z \to 0$ ako i samo ako je $(\bar{\partial} f)(0) = 0$, pa dobivamo sljedeću karakterizaciju holomorfnih funkcija:

Teorem 0.0.34. *Pretpostavimo da f ima diferencijal u svakoj točki od Ω. Tada je $f \in H(\Omega)$ ako i samo ako Cauchy-Riemannova jednakost*

$$(\bar{\partial} f)(z) = 0$$

vrijedi za sve $z \in \Omega$. U tom slučaju je

$$f'(z) = (\partial f)(z) \qquad (z \in \Omega).$$

Slijede definicije i oznake još bitnih pojmova koje ćemo koristiti u nastavku rada.

Definicija 0.0.35. ***Jediničnu kružnicu*** *u $\mathbb{C}$ ćemo označavati sa T, to jest $T = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, a sa U* ***otvoreni jedinični krug*** *$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*
Riemannovu sferu *S^2 definiramo kao uniju skupa $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ i $\{\infty\}$.*
Jordanova krivulja *je homeomorfna slika jedinične kružnice.*

Definicija 0.0.36. *Neka je X topološki prostor.* ***Krivulja*** *u X je neprekidno preslikavanje γ intervala $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ u X, za $\alpha < \beta$. Segment $[\alpha,\beta]$ nazivamo interval parametara od γ. Sliku preslikavanja γ označavamo sa γ^*, to jest γ^* je skup svih točaka $\gamma(t)$ za $\alpha \leq t \leq \beta$. Ako se početna točka $\gamma(\alpha)$ podudara sa završnom točkom $\gamma(\beta)$, onda γ nazivamo* ***zatvorenom krivuljom****.*
Put *je po dijelovima diferencijabilna krivulja u kompleksnoj ravnini. Preciznije, put sa intervalom parametara $[\alpha,\beta]$ je neprekidna kompleksna funkcija γ na $[\alpha,\beta]$ takva da vrijedi sljedeće: postoji konačno mnogo točaka s_j,*

$$\alpha = s_0 < s_1 < ... < s_n = \beta,$$

i restrikcija od γ na svaki interval $\left[s_{j-1}, s_j\right]$ ima neprekidnu derivaciju na $\left[s_{j-1}, s_j\right]$. Međutim, u točkama $s_1, s_2, ..., s_{n-1}$ derivacije slijeva i zdesna od γ se mogu razlikovati. Zatvorena krivulja koja je također i put naziva se ***zatvoreni put****.*

Gornja poluravnina Π^+ predstavlja skup svih $z = x + iy$ za koje je $y > 0$, dok *donju poluravninu* Π^- čine svi z čiji je imaginarni dio negativan.

Poglavlje 1

Čuvanje kutova

U početnom poglavlju definirat ćemo pojam čuvanja kutova, i vidjeti da je to važno svojstvo holomorfnih funkcija koje će nas dovesti i do same definicije konformalnih preslikavanja. Nakon toga dokazat ćemo teorem koji povezuje to svojstvo sa derivacijom kompleksnih funkcija.

Definicija 1.0.37. *Svaki kompleksni broj $z \neq 0$ ima svoj* ***smjer*** *u odnosu na ishodište, definiran točkom*

$$A(z) = \frac{z}{|z|}$$

na jediničnoj kružnici.

Pretpostavimo da je f preslikavanje područja Ω u kompleksnu ravninu, $z_0 \in \Omega$ i z_0 ima punktiranu okolinu $D'(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z_0 - z| < r\} \subset \Omega$ u kojoj vrijedi $f(z) \neq f(z_0)$. Kažemo da f **čuva kutove** u z_0 ako limes

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] \qquad (r > 0)$$

postoji i *ne ovisi o θ*.

Manje precizno, zahtijevamo da za bilo koja dva polupravca L' i L'' kojima je početna točka z_0, kut koji njihove slike $f(L')$ i $f(L'')$ zatvaraju u $f(z_0)$ bude jednak kutu kojeg zatvaraju L' i L'', po veličini i orijentaciji.
Svojstvo čuvanja kutova u svakoj točki područja je karakteristika holomorfnih funkcija čija derivacija nije nula na tom području. To je korolar sljedećeg teorema i razlog zbog kojeg takve holomorfne funkcije nazivamo **konformalnim preslikavanjima**.

Teorem 1.0.38. *Neka f preslikava područje Ω u kompleksnu ravninu. Ako $f'(z_0)$ postoji u nekoj točki $z_0 \in \Omega$ i $f'(z_0) \neq 0$, tada f čuva kutove u z_0. Obratno, ako diferencijal od f postoji i različit je od nule u z_0 i ako f čuva kutove u z_0, onda $f'(z_0)$ postoji i $f'(z_0) \neq 0$.*

Ovdje je kao i obično $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Diferencijal od f u z_0 je linearna transformacija L iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ tako da, uz $z_0 = (x_0, y_0)$, vrijedi:

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + L(x, y) + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y), \tag{1.1}$$

gdje $\eta(x, y) \to 0$, kada $x \to 0$ i $y \to 0$. Dakle, ovdje pretpostavljamo da je f diferencijabilna funkcija kada je promatramo kao funkciju definiranu na otvorenom skupu iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Neka je, zbog jednostavnosti, $z_0 = f(z_0) = 0$. Ako je $f'(0) = a \neq 0$, onda iz $f'(0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z}$ i $|e^{i\theta}| = 1$ slijedi

$$e^{-i\theta} A[f(re^{i\theta})] = \frac{e^{-i\theta} f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \frac{\dfrac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}}{\dfrac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}|}} \to \frac{a}{|a|} \qquad (r \to 0)$$

pa f čuva kutove u nuli jer limes postoji i ne ovisi o θ. Obratno, ako diferencijal od f u nuli postoji i različit je od nule, onda (1.1) možemo napisati u obliku:

$$f(z) = \alpha z + \beta \overline{z} + |z|\eta(z), \tag{1.2}$$

gdje $\eta(z) \to 0$ kada $z \to 0$, a $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ i $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ su kompleksni brojevi koji nisu oba jednaki nula. Dakle, ako stavimo $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ i\alpha_2 \end{bmatrix} (x + iy) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ i\beta_2 \end{bmatrix} (x - iy) + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y) = \\ &= \alpha_1 x + \alpha_1 iy + \alpha_2 ix - \alpha_2 y + \beta_1 x - \beta_1 iy + \beta_2 ix + \beta_2 y + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y) = \\ &= (\alpha_1 + i\alpha_2 + \beta_1 + i\beta_2)x + (i\alpha_1 - \alpha_2 - i\beta_1 + \beta_2)y + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y) = \\ &= \alpha_1 x + \beta_1 x - \alpha_2 y + \beta_2 y + i(\alpha_2 x + \beta_2 x + \alpha_1 y - \beta_1 y) + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y). \end{aligned}$$

Znamo, funkcija $f(z) = f(x, y)$ je diferencijabilna u $z_0 = (x_0, y_0)$ ako i samo ako su u i v diferencijabilne u (x_0, y_0) i ako vrijede Cauchy-Riemannove jednadžbe:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

U našem slučaju je

$$u(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 x - \alpha_2 y + \beta_2 y, \qquad v(x, y) = \alpha_2 x + \beta_2 + \alpha_1 y - \beta_1 y,$$

pa mora vrijediti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \beta_2 - \alpha_2 = -\alpha_2 - \beta_2 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Iz prethodnih jednakosti slijedi $\beta_1 = 0$ i $\beta_2 = 0$, dakle $\beta = 0$. Ako uz to f čuva kutove u nuli, tada limes

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\theta} A[f(re^{i\theta})] = \frac{\alpha + \beta e^{-2i\theta}}{|\alpha + \beta e^{-2i\theta}|} \tag{1.3}$$

postoji i ne ovisi o θ. Možemo izbaciti one θ za koje je nazivnik u (1.3) jednak nuli; postoje najviše dva takva θ u $[0, 2\pi\rangle$. Za sve ostale θ, zaključujemo da $\alpha + \beta e^{-2i\theta}$ leži na fiksnom pravcu kroz ishodište, a to je moguće samo kada je $\beta = 0$. Dakle, $\alpha \neq 0$. Iz (1.2) slijedi da je $f'(z_0) = f'(0) = \alpha$. □

Napomena: lako se dokaže da niti jedna holomorfna funkcija ne čuva kutove u točki u kojoj je njena derivacija jednaka nuli. Međutim, diferencijal transformacije može biti nula u točki u kojoj se čuvaju kutovi. Na primjer, ako je $f(z) = |z|z$, $z_0 = 0$. U tom slučaju je

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\theta} A[f(re^{i\theta})] = \lim_{r\to 0} e^{-i\theta} \frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} = \lim_{r\to 0} \frac{|re^{i\theta}| re^{i\theta} e^{-i\theta}}{|re^{i\theta}||re^{i\theta}|} = \frac{1}{|e^{i\theta}|} = 1.$$

Diferencijal u $z_0 = 0$ je jednak

$$L(z) = f(z) - f(0) + |z|\eta(z) = |z|z - 0 - |z|\eta(z) = 0, \qquad \eta(z) \to 0 \text{ kada } z \to 0.$$

Poglavlje 2

Razlomljene linearne transformacije

Tema ovog poglavlja su razlomljene linearne transformacije te važni rezultati i primjene tih transformacija vezane uz konformalna preslikavanja.

Definicija 2.0.39. *Ako su a, b, c i d kompleksni brojevi takvi da je $ad-bc \neq 0$, preslikavanje*

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.1}$$

zovemo ***razlomljena linearna transformacija****.*

Obično relaciju (2.1) promatramo kao preslikavanje iz S^2 u S^2, uz napomenu da se $-\frac{d}{c}$ preslikava u ∞, a ∞ se preslikava u $\frac{a}{c}$, za $c \neq 0$. Lako je vidjeti da je svaka razlomljena linearna transformacija bijektivno preslikavanje iz S^2 u S^2. Nadalje, svaka linearna razlomljena transformacija je dobivena komponiranjem transformacija sljedećih tipova:
(a) translacije : $z \to z + b$
(b) rotacije : $z \to az, |a| = 1$
(c) homotetije : $z \to rz, r > 0$
(d) inverzije : $z \to 1/z$.

Ako je $c = 0$ u (2.1), dobivamo

$$z \to \frac{az+b}{d},$$

pa tvrdnja vrijedi. Ako je $c \neq 0$, tvrdnja slijedi iz slijedeće jednakosti:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d}, \qquad \lambda = \frac{bc-ad}{c}.$$

Prva tri tipa evidentno preslikavaju pravce u pravce i kružnice u kružnice. Za tip (d) to ne vrijedi.
Međutim, ako sa $\mathcal{F}$ označimo familiju koja sadrži sve pravce i sve kružnice, onda i transformacija (d) čuva $\mathcal{F}$ i slijedi važan rezultat da *sve razlomljene linearne transformacije čuvaju familiju* $\mathcal{F}$.
Dokaz da inverzije čuvaju $\mathcal{F}$ je dosta lagan. Elementarna analitička geometrija pokazuje da je svaki element iz $\mathcal{F}$ krivulja čija je jednadžba oblika

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0, \tag{2.2}$$

gdje su α i γ realne konstante, a β kompleksna konstanta i uz to vrijedi $\beta\bar{\beta} > \alpha\gamma$. Ako je $\alpha \neq 0$, onda jednadžba (2.2) definira kružnicu; za $\alpha = 0$ jednadžba definira pravac. Zamijenimo li z sa $1/z$, (2.2) prelazi u

$$\alpha + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma z\bar{z} = 0, \tag{2.3}$$

što je jednadžba istog tipa.

Pretpostavimo da su a, b i c različiti kompleksni brojevi. Konstruiramo razlomljenu linearnu transformaciju φ koja preslikava uređenu trojku (a, b, c) u $(0, 1, \infty)$:

$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}. \tag{2.4}$$

Postoji samo jedna takva transformacija φ. Budući da je $\varphi(a) = 0$, u brojniku moramo imati $z - a$; budući da je $\varphi(c) = \infty$ u nazivniku moramo imati $z - c$; budući da je $\varphi(b) = 1$, dobivamo (2.4). Ako je a, b ili c jednak ∞, lako zapišemo formule analogne (2.4).
Dolazimo do sljedećeg rezultata:
Za bilo koje dvije uređene trojke (a, b, c) *i* (a', b', c') *u* S^2 *postoji jedna i samo jedna razlomljena linearna transformacija koja preslikava* a *u* a', b *u* b' *i* c *u* c' (uz pretpostavku da je $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $a' \neq b'$, $a' \neq c'$ i $b' \neq c'$).

Iz ovoga zaključujemo da razlomljenim linearnim transformacijama možemo preslikati svaku kružnicu u svaku kružnicu. Više nas zanima činjenica da se svaka kružnica može preslikati u svaki pravac (ako ∞ promatramo kao dio pravca), odakle slijedi da se *svaki otvoreni krug može konformalno preslikati u svaku otvorenu poluravninu.* Pogledajmo detaljnije jedno takvo preslikavanje, uzmimo

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

φ preslikava $(-1, 0, 1)$ u $(0, 1, \infty)$; interval $\langle -1, 1\rangle$ je preslikan u pozitivni dio realne osi; jedinična kružnica T prolazi kroz -1 i 1; budući da je $\varphi(1) = \infty \in \varphi(T)$, a ∞ pripada pravcu u skupu $\mathbb{C}$, $\varphi(T)$ nije kružnica. Slijedi da je $\varphi(T)$ pravac kroz $\varphi(-1) = 0$. Budući da T zatvara pravi kut sa realnom osi u -1, $\varphi(T)$ zatvara pravi kut sa realnom osi u nuli. Dakle, $\varphi(T)$ je imaginarna os. Budući da je $\varphi(0) = 1$, slijedi da je φ *konformalno bijektivno preslikavanje otvorenog jediničnog kruga u otvorenu desnu poluravninu.*
Razlomljene linearne transformacije omogućuju primjenu teorema koji se odnose na ponašanje holomorfnih funkcija u okolini pravaca na situacije u kojima se pojavljuju kružni lukovi. Pretpostavimo da je Ω područje u U dijelom ograničeno lukom L jedinične kružnice, f je neprekidna na $\overline{\Omega}$, holomorfna na Ω i realna na L. Funkcija

$$\psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

preslikava gornju poluravninu u skup U. Ako je $g = f \circ \psi$, Teorem 0.0.4 nam daje holomorfno proširenje G od g, i dobivamo $F = G \circ \psi^{-1}$ kao holomorfno proširenje od f koje zadovoljava jednakost

$$f(z^*) = \overline{F(z)},$$

gdje je $z^* = 1/\overline{z}$. Zadnja tvrdnja slijedi iz svojstva preslikavanja ψ : ako je $w = \psi(z)$ i $w_1 = \psi(\overline{z})$, onda je $w_1 = w^*$. Zaista, ako je $z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, vrijedi:

$$w = \psi(z) = \frac{x + iy - i}{x + iy + i}, \qquad w_1 = \psi(\overline{z}) = \frac{x - iy - i}{x - iy + i}$$

Slijedi

$$w_1 = \frac{x - iy - i}{x - iy + i} = \frac{1}{\overline{\frac{x - iy + i}{x - iy - i}}} = w^*.$$

Poglavlje 3

Normalne familije

Riemannov teorem o preslikavanju dokazat ćemo promatrajući navedeno preslikavanje kao rješenje određenog problema ekstrema. Postojanje tog rješenja ovisi o veoma korisnom svojstvu familija holomorfnih funkcija koje ćemo u ovom poglavlju formulirati.

Definicija 3.0.40. *Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ za neko područje Ω. $\mathcal{F}$ zovemo **normalna familija** ako svaki niz elemenata iz $\mathcal{F}$ ima podniz koji uniformno konvergira na kompaktnim podskupovima od Ω. Taj limes ne mora biti element iz $\mathcal{F}$.*

Teorem 3.0.41. *Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ i $\mathcal{F}$ je uniformno ograničena na svakom kompaktnom podskupu područja Ω. Tada je $\mathcal{F}$ normalna familija.*

Dokaz. Pretpostavka teorema znači da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji broj $M(K) < \infty$ takav da je $|f(z)| \leq M(K)$ za sve $f \in \mathcal{F}$ i sve $z \in K$.
Ω je područje, pa je i otvoren skup. Za svaki otvoren skup $U \subset \mathbb{C}$ postoji rastući niz kompaktnih skupova čija je unija jednaka U. Neka je (K_n) niz kompaktnih skupova čija je unija jednaka Ω. Prema teoremu 0.0.9 se skup K_n nalazi u interioru skupa K_{n+1}. Tada postoje $\delta_n > 0$ takvi da vrijedi:

$$D(z; 2\delta_n) \subset K_{n+1} \qquad (z \in K_n).$$

Budući da je $z \in K_n \subset Int(K_{n+1})$, a $Int(K_{n+1})$ je otvoren skup, takvi δ_n postoje po definiciji otvorenog skupa.
Odaberimo dvije točke z' i z'' iz K_n, takve da je $|z'-z''| < \delta_n$. Neka je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u z' i polumjerom $2\delta_n$ i procijenimo $|f(z')-f(z'')|$ pomoću Cauchyeve formule. Budući da je

$$\frac{1}{\varsigma - z'} - \frac{1}{\varsigma - z''} = \frac{z' - z''}{(\varsigma - z')(\varsigma - z'')}, \qquad \text{za } \varsigma \in \gamma$$

dobivamo

$$f(z') - f(z'') = \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z')(\varsigma - z'')} d\varsigma. \tag{3.1}$$

Kako je $|\varsigma - z'| = 2\delta_n$ i $|\varsigma - z''| > \delta_n$ za svaki $\varsigma \in \gamma^*$, iz (3.1) slijedi nejednakost:

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}|z' - z''| \tag{3.2}$$

koja vrijedi *za sve* $f \in \mathcal{F}$ *i sve* z' *i* $z'' \in K_n$*, kada je* $|z' - z''| < \delta_n$. Ovo je bio najvažniji korak dokaza: pokazali smo da za svaki K_n restrikcije elemenata iz $\mathcal{F}$ na K_n formiraju *ekvikontinuiranu familiju*. To po definiciji znači da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$ za sve $f \in \mathcal{F}$ i sve z' i z'' iz K_n za koje vrijedi $|z' - z''| < \delta$. Iz (3.2) vidimo da je uvaj uvjet zadovoljen ako je

$$\delta = \frac{\epsilon\delta_n}{M(K_{n+1})}. \tag{3.3}$$

Neka je (f_m) niz u $\mathcal{F}$. Odaberimo prebrojiv gust podskup $\{z_i\}$ od Ω. Budući da je $(f_m(z))$ ograničena u svim $z \in \Omega$, (f_m) ima podniz, označimo ga sa $(f_{m,1})$, koji konvergira u z_1. U $(f_{m,1})$ također možemo naći podniz $(f_{m,2})$ koji konvergira u z_2. Nastavimo taj postupak i dolazimo do podnizova $(f_{m,i})$ koji kovergiraju u z_i i $(f_{m,i})$ je podniz od $(f_{m,i-1})$. Tada ”dijagonalni niz” $(f_{m,m})$ konvergira u svakoj točki z_i.
Mi tvrdimo da $(f_{m,m})$ zapravo konvergira uniformno na svakom K_n, a prema tome i na svakom kompaktnom podskupu K od Ω, jer znamo da je (K_n) niz kompaktnih skupova čija je unija jednaka Ω, pa je zbog toga $(\cup K_n) \cap K = \Omega \cap K = K$.
Fiksirajmo K_n i $\epsilon > 0$, te odaberimo δ kao u (3.3). Postoje točke $z_1, ..., z_p$ u skupu $\{z_i\}$ takve da K_n leži u uniji krugova $D(z_i, \delta), i = 1, ..., p$, i postoji cijeli broj N takav da vrijedi

$$|f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| < \epsilon \tag{3.4}$$

za $r > N, s > N$ i $1 \leq i \leq p$.
Za svaki $z \in K_n$ postoji z_i takav da je $1 \leq i \leq p$ i $|z - z_i| < \delta$. Tada $|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)|$ nije veće od

$$|f_{r,r}(z) - f_{r,r}(z_i)| + |f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| + |f_{s,s}(z_i) - f_{s,s}(z)|. \tag{3.5}$$

Prvi i treći član u (3.5) su manji od ϵ zbog našeg odabira δ, a srednji član je manji od ϵ ako je $r > N$ i $s > N$. Odavde slijedi:

$$|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| < 3\epsilon$$

za svaki $z \in K_n$, ako je $r > N$ i $s > N$. Time je dokaz dovršen. □

Poglavlje 4

Riemannov teorem o preslikavanju

Da bi dokazali Riemannov teorem o preslikavanju, definirat ćemo konformalno ekvivalentna područja.

Definicija 4.0.42. *Za dva područja Ω_1 i Ω_2 kažemo da su* ***konformalno ekvivalentna*** *ako postoji preslikavanje $\varphi \in H(\Omega_1)$ koje je bijektivno na Ω_1 i vrijedi $\varphi(\Omega_1) = \Omega_2$, odnosno ako postoji konformalno bijektivno preslikavanje područja Ω_1 u Ω_2.*

Ako vrijede uvjeti iz prethodne definicije, inverz funkcije φ je holomorfan na Ω_2, pa je on i konformalno preslikavanje područja Ω_2 u Ω_1. Slijedi da su konformalno ekvivalentna područja homeomorfna. Postoji još važnija relacija između konformalno ekvivalentnih područja : ako je φ preslikavanje kao u definiciji (4.0.42), $f \to f \circ \varphi$ je bijektivno preslikavanje $H(\Omega_2)$ u $H(\Omega_1)$ koje čuva sume i produkte, to jest izomorfizam prstenova sa $H(\Omega_2)$ u $H(\Omega_1)$. Ako Ω_1 ima jednostavniju strukturu, problemi na $H(\Omega_2)$ se mogu prenijeti u $H(\Omega_1)$ i pomoću funkcije φ rješenja se mogu ponovno vratiti na $H(\Omega_2)$. Najvažniji ovakav slučaj se temelji na Riemannovom teoremu o preslikavanju (gdje je Ω_2 jedinični krug U), što reducira proučavanje $H(\Omega)$ na proučavanje $H(U)$ za svako jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini.

Teorem 4.0.43. ***(Riemannov teorem o preslikavanju)***
Svako jednostavno povezano područje Ω u kompleksnoj ravnini (osim same kompleksne ravnine) je konformalno ekvivalentno otvorenom jediničnom krugu U.

Dokaz. Pretpostavimo da je Ω jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i neka je w_0 kompleksan broj, $w_0 \notin \Omega$. Neka je Σ klasa svih $\psi \in H(\Omega)$ koje su injektivna preslikavanja na Ω i preslikavaju Ω u U. Moramo pokazati da je neki $\psi \in \Sigma$ surjekcija iz Ω na U.
Prvo ćemo pokazati da Σ nije prazan skup. Budući da je Ω jednostavno povezano područje, postoji $\varphi \in H(\Omega)$ takvo da je $\varphi^2(z) = z - w_0$ na Ω.

Ako je $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, onda je i $\varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$, odakle slijedi $z_1 = z_2$. Dakle, φ je injekcija. Isti argument pokazuje da ne postoje dvije različite točke z_1 i z_2 u Ω takve da je $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$. Budući da je φ otvoreno preslikavanje, $\varphi(\Omega)$ sadrži krug $D(a; r), 0 < r < |a|$. Krug $D(-a; r)$ ne sječe $\varphi(\Omega)$, pa ako definiramo $\psi = \frac{r}{\varphi + a}$, vidimo da je $\psi \in \Sigma$. U sljedećem koraku pokazujemo da ako je $\psi \in \Sigma$, te $\psi(\Omega)$ ne prekriva cijeli U i $z_0 \in \Omega$, postoji $\psi_1 \in \Sigma$ takvo da je

$$|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$$

Koristit ćemo funkcije φ_α definirane na sljedeći način:

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Za $\alpha \in U$, φ_α je bijekcija iz U u U; njen inverz je $\varphi_{-\alpha}$ (po teoremu 0.0.12).
Pretpostavimo da je $\psi \in \Sigma, \alpha \in U$ i $\alpha \notin \psi(\Omega)$. Tada je $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ i $\varphi_\alpha \circ \psi$ nema nultočku na Ω. Iz teorema 0.0.18 (i) slijedi da postoji $g \in H(\Omega)$ takva da je $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. g je injekcija (dokaže se kao u dokazu da je $\Sigma \neq \emptyset$), dakle $g \in \Sigma$. Ako je $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$, gdje je $\beta = g(z_0)$, slijedi da je $\psi_1 \in \Sigma$. Uz notaciju $w^2 = s(w)$, dobivamo:

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1.$$

Zbog $\psi_1(z_0) = 0$, lančano pravilo daje:

$$\psi'(z_0) = F'(0)\psi_1'(z_0),$$

gdje je $F = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$. Vidimo da je $F(U) \subset U$ i da F nije injekcija na U. Zato je $|F'(0)| < 1$ po Schwarzovoj lemi, pa je $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$ ($\psi'(z_0) \neq 0$, jer je ψ injekcija na Ω).
Fiksirajmo $z_0 \in \Omega$, i definirajmo

$$\eta = sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma\}.$$

Iz prethodnog dijela dokaza se vidi da svaki $h \in \Sigma$ za kojeg vrijedi $|h'(z_0)| = \eta$ preslikava Ω u U. Dokaz će biti gotov kada dokažemo postojanje takvog h.
Budući da je $|\psi(z)| < 1$ za sve $\psi \in \Sigma$ i $z \in \Omega$, iz teorema 3.0.41 slijedi da je Σ normalna familija. Iz definicije od η slijedi da postoji niz (ψ_n) u Σ takav da $|\psi_n'(z_0)| \to \eta$, i zbog normalnosti od Σ možemo odrediti podniz (označimo ga opet sa (ψ_n) zbog jednostavnosti) koji uniformno konvergira na kompaktnim podskupovima od Ω prema limesu $h \in H(\Omega)$. Po teoremu 0.0.11, $|h'(z_0)| = \eta$. Kako je $\Sigma \neq \emptyset$ i $\eta > 0$, h nije konstantna funkcija. Budući da je $\psi_n(\Omega) \subset U$, za $n = 1, 2, 3...$ dobivamo $h(\Omega) \subset \overline{U}$, ali iz teorema o otvorenom preslikavanju slijedi da je zapravo $h(\Omega) \subset U$.

Preostaje pokazati da je h injekcija. Fiksirajmo različite točke z_1 i z_2 iz Ω; stavimo $\alpha = h(z_1)$ i $\alpha_n = \psi_n(z_1)$ za $n = 1, 2, 3....$ Neka je $\overline{D}$ zatvoreni krug u Ω sa središtem u z_2, tako da $z_1 \notin \overline{D}$ i $h - \alpha$ nema nultočku na rubu od $\overline{D}$. Funkcije $\psi_n - \alpha_n$ uniformno konvergiraju prema $h - \alpha$ na $\overline{D}$; one nemaju nultočke na D jer su injekcije i imaju nultočku u z_1. Sada iz Rouchéovog teorema slijedi da $h - \alpha$ nema nultočku na D; posebno, $h(z_2) \neq h(z_1)$.
Slijedi da je $h \in \Sigma$. □

Iz dokaza prethodnog teorema slijedi da je $h(z_0) = 0$, jer ako je $h(z_0) = \beta$ i $\beta \neq 0$, onda je $\varphi_\beta \circ h \in \Sigma$ i

$$|(\varphi_\beta \circ h)'(z_0)| = |\varphi_\beta'(\beta) h'(z_0)| = \frac{h'(z_0)}{1 - |\beta|^2} > |h'(z_0)|.$$

Primijetimo, iako smo h dobili maksimizacijom $|\psi'(z_0)|$ za $\psi \in \Sigma$, h također maksimizira $|f'(z_0)|$ ako je f u klasi svih holomorfnih preslikavanja iz Ω u U (ne nužno injektivnih). Ako je f takva funkcija, onda je $g = f \circ h^{-1}$ preslikavanje iz U u U, odakle slijedi $|g'(0)| \leq 1$, a po Schwarzovoj lemi jednakost vrijedi ako i samo ako je g rotacija. Lančano pravilo daje sljedeći rezultat:
Ako je $f \in H(\Omega), f(\Omega) \subset U$ *i* $z_0 \in \Omega$, *onda je* $|f'(z_0)| \leq |h'(z_0)|$. *Jednakost vrijedi ako i samo ako je* $f(z) = \lambda h(z)$ *za neku konstantu* λ, $|\lambda| = 1$.

Poglavlje 5

Klasa $\mathscr{S}$

U ovom poglavlju uvodimo klasu $\mathscr{S}$ funkcija koje su holomorfne na U i zadovoljavaju određene uvjete. Ta klasa ima i neka zanimljiva svojstva koja ćemo u nastavku dokazati i provjeriti na primjerima.

Definicija 5.0.44. *$\mathscr{S}$ je klasa svih $f \in H(U)$ koje su injekcije na U i za koje vrijedi:*

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Prema tome, svaka funkcija $f \in \mathscr{S}$ se može razviti u red potencija

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U).$$

Klasa $\mathscr{S}$ nije zatvorena na zbrajanje i množenje.

Primjer 5.0.45. *Ako je $|\alpha| \leq 1$ i*

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - \alpha z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} z^n,$$

tada je $f_\alpha \in \mathscr{S}$. Naime, ako je $f_\alpha(z) = f_\alpha(w)$, onda je $(z - w)(1 - \alpha^2 zw) = 0$, i drugi faktor u tom umnošku nije nula ako je $|z| < 1$ i $|w| < 1$. U slučaju kada je $|\alpha| = 1$, f_α nazivamo Koebeovom funkcijom.

Teorem 5.0.46. *(a) Ako je $f \in \mathscr{S}$, $|\alpha| = 1$ i $g(z) = \overline{\alpha} f(\alpha z)$, onda je $g \in \mathscr{S}$.*
(b) Ako je $f \in \mathscr{S}$, onda postoji $g \in \mathscr{S}$ takva da vrijedi

$$g^2(z) = f(z^2) \qquad (z \in U). \tag{5.1}$$

Dokaz. (a) Budući da je $f \in H(U)$, vrijedi i $g \in H(U)$. Pokažimo da je g injekcija. Neka su u i v iz U i $g(u) = g(v)$, to jest $\overline{\alpha} f(\alpha u) = \overline{\alpha} f(\alpha v)$. Znamo da je f injekcija, pa slijedi da je $\alpha u = \alpha v$, te je $u = v$, to jest, i g je injekcija. Također, $g(0) = \overline{\alpha} f(0) = 0$, te $g'(z) = \overline{\alpha}\alpha f'(\alpha z) = |\alpha|^2 f'(\alpha z) = f'(\alpha z)$, pa je $g'(0) = f'(0) = 1$. Dakle, dokazali smo da je $g \in \mathscr{S}$.
Da bi dokazali (b), uzmimo $f(z) = z\varphi(z)$. Tada je $\varphi \in H(U), \varphi(0) = 1$ i φ nema nultočku na U jer f nema nultočku na $U \setminus \{0\}$. Stoga, prema teoremu 0.0.18 (i) postoji $h \in H(U)$ takvo da je $h(0) = 1, h^2(z) = \varphi(z)$. Neka je

$$g(z) = zh(z^2) \qquad (z \in U). \tag{5.2}$$

Tada je $g^2(z) = z^2h^2(z^2) = z^2\varphi(z^2) = f(z^2)$, pa vrijedi (5.1). Jasno je da je $g(0) = 0$ i $g'(0) = 1$. Moramo pokazati da je g injekcija.
Pretpostavimo da su z i w iz U i $g(z) = g(w)$. Budući da je f injekcija, iz (5.1) slijedi da je $z^2 = w^2$. Dakle, ili je $z = w$, (što želimo dokazati) ili je $z = -w$. U slučaju da je $z = -w$, (5.2) povlači da je $g(z) = -g(w)$ pa slijedi $g(z) = g(w) = 0$. Znamo da g nema nultočku na $U \setminus \{0\}$, pa je $z = w = 0$. □

Teorem 5.0.47. *Ako je $F \in H(U \setminus \{0\}), F$ injekcija na U i ako vrijedi*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad (z \in U),$$

onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1.$$

Dokaz. Neka je, za dani F,

$$F_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad (z \in U).$$

Dakle, $F(z) - F_1(z) = \alpha_0$. Budući da se F i F_1 razlikuju za konstantu, F_1 je injekcija na U i $F_1 \in H(U \setminus \{0\})$. Dakle, F_1 zadovoljava iste uvjete teorema kao i F. Stoga možemo pretpostaviti da je $\alpha_0 = 0$.

$F(z)$ zamijenimo sa $\lambda F(\lambda z), |\lambda| = 1$, što neće utjecati na pretpostavku i tvrdnju teorema, te onda možemo pretpostaviti da je α_1 realan broj.
Neka je $U_r = \{z : |z| < r\}, C_r = \{z : |z| = r\}$ i $V_r = \{z : r < |z| < 1\}$, za $0 < r < 1$. Tada je $F(U_r)$ u okolini od ∞ (po teoremu o otvorenom preslikavanju primjenjenom na $1/F$). Skupovi $F(U_r), F(C_r)$ i $F(V_r)$ su disjunktni, jer je F injekcija. Zapišimo

$$F(z) = \frac{1}{z} + \alpha_1 z + \varphi(z) \qquad (z \in U), \tag{5.3}$$

$F = u + iv$, i

$$A = \frac{1}{r} + \alpha_1 r, \qquad B = \frac{1}{r} - \alpha_1 r. \tag{5.4}$$

Za $z = re^{i\theta}$ slijedi

$$\begin{aligned}
F(re^{i\theta}) &= \frac{1}{re^{i\theta}} + \alpha_1 re^{i\theta} + \varphi(re^{i\theta}) = \\
&= \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} + \alpha_1 r(\cos\theta + i\sin\theta) + \varphi(re^{i\theta}) = \\
&= \frac{1}{r}\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)} + \alpha_1 r\cos\theta + i\alpha_1 r\sin\theta + \varphi(re^{i\theta}) = \\
&= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) + \alpha_1 r\cos\theta + i\alpha_1 r\sin\theta + \varphi(re^{i\theta}) = \\
&= \frac{1}{r}\cos\theta - i\frac{1}{r}\sin\theta + \alpha_1 r\cos\theta + i\alpha_1 r\sin\theta + \varphi(re^{i\theta}).
\end{aligned}$$

Iz prethodnih jednakosti dobivamo:

$$u = A\cos\theta + Re\varphi, \qquad v = -B\sin\theta + Im\varphi. \tag{5.5}$$

Podijelimo li jednadžbe u (5.5) sa A, odnosno B, kvadriramo ih i zbrojimo, dobivamo:

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1 + \frac{2\cos\theta}{A}Re\varphi + \left(\frac{Re\varphi}{A}\right)^2 - \frac{2\sin\theta}{B}Im\varphi + \left(\frac{Im\varphi}{B}\right)^2.$$

Iz (5.3) slijedi da φ ima nultočku reda barem dva u ishodištu. Ako sada promotrimo (5.4), vidimo da postoji $\eta > 0$ takav da za sve dovoljno male r vrijedi:

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} < 1 + \eta r^3 \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Ovo povlači da je $F(C_r)$ unutar elipse E_r čije su poluosi $A\sqrt{1 + \eta r^3}$ i $B\sqrt{1 + \eta r^3}$ i koja omeđuje površinu

$$\pi AB(1 + \eta r^3) = \pi\left(\frac{1}{r} + \alpha_1 r\right)\left(\frac{1}{r} - \alpha_1 r\right)(1 + \eta r^3) \le \frac{\pi}{r^2}(1 + \eta r^3). \tag{5.6}$$

Kako je $F(C_r)$ unutar E_r, imamo $E_r \subset F(U_r)$. Odavde slijedi da je $F(V_r)$ također unutar E_r, pa površina od $F(V_r)$ nije veća od (5.6). Iz Cauchy-Riemannovih jednadžbi dobivamo da je Jacobijan preslikavanja $(x, y) \to (u, v)$ jednak $|F'|^2$. Teorem 0.0.23 daje sljedeći rezultat:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r^2}(1 + \eta r^3) \geq & \iint_{V_r} |F'|^2 = \\ & = \int_r^1 t dt \int_0^{2\pi} | - t^{-2} e^{-2i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n t^{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta = \\ & = 2\pi \int_r^1 (t^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\alpha_n|^2 t^{2n-1}) dt = \\ & = \pi \left[r^{-2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 (1 - r^{2n}) \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ako podijelimo (5.7) sa π i oduzmemo r^{-2} od obje strane, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{N} n|\alpha_n|^2 (1 - r^{2n}) \leq 1 + \eta r \tag{5.8}$$

za sve dovoljno male r i sve pozitivne cijele brojeve N. Ako u (5.8) $r \to 0$, a zatim $N \to \infty$, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1,$$

što je tvrdnja teorema. □

Korolar 5.0.48. *Uz iste pretpostavke, vrijedi* $|\alpha_1| = 1$.

Da je to zapravo najbolji mogući slučaj vidi se u primjeru kada je $F(z) = \dfrac{1}{z} + \alpha z$, $|\alpha| = 1$, što je injekcija na U. Zaista, neka su z_1 i z_2 iz U i $z_1 \neq z_2$. Pretpostavimo da je $F(z_1) = F(z_2)$. To znači da je $\dfrac{1}{z_1} + \alpha z_1 = \dfrac{1}{z_2} + \alpha z_2$. Pomnožimo li tu jednakost sa $z_1 z_2$, dobivamo: $z_2 + \alpha z_1^2 z_2 = z_1 + \alpha z_1 z_2^2$. Odavde je $z_2 - z_1 = \alpha z_1 z_2^2 - \alpha z_1^2 z_2 = \alpha z_1 z_2 (z_2 - z_1)$, pa vrijedi $z_1 z_2 = \frac{1}{\alpha}$. Dakle, imamo $\alpha z_2 + \alpha z_2 = \alpha z_1 + \alpha z_1$. Slijedi $z_1 = z_2$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom, pa je $F(z_1) \neq F(z_2)$, to jest F je injekcija i zadovoljava uvjete prethodnog teorema.

Teorem 5.0.49. *Ako je $f \in \mathscr{S}$, i*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

tada vrijedi:
(a) $|a_2| \leq 2$, *i*
(b) $f(U) \supset D(0; \frac{1}{4})$.
Druga tvrdnja znači da $f(U)$ sadrži sve w takve da je $|w| < \frac{1}{4}$.

Dokaz. Prema teoremu 5.0.46, postoji $g \in \mathscr{S}$ takva da je $g^2(z) = f(z^2)$. Ako je $G = \dfrac{1}{g}$, onda teorem 5.0.47 primijenjen na G daje tvrdnju (a). Zaista, budući da je

$$f(z^2) = z^2(1 + a_2 z^2 + ...),$$

imamo

$$g(z) = z(1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + ...).$$

Neka je

$$G(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...$$

Mora vrijediti $G(z)g(z) = 1$, to jest:

$$\left(\frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...\right)\left(z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + ...\right) = 1.$$

Dakle,

$$b_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}a_2 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}a_2, \text{...itd.}$$

Iz korolara 5.0.48 slijedi da je $|a_2| \leq 2$.
Da bi dokazali (b), pretpostavimo da $w \notin f(U)$ i definirajmo funkciju

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - \dfrac{f(z)}{w}}.$$

Tada je $h \in h(U)$, h je injekcija na U, i

$$h(z) = (z + a_2 z^2 + ...)(1 + \frac{z}{w} + ...) = z + (a_2 + \frac{1}{w})z^2 + ...,$$

pa je $h \in \mathscr{S}$. Primjenom tvrdnje (a) na h dobivamo $|a_2 + \frac{1}{w}| \leq 2$, a budući da je $|a_2| \leq 2$, slijedi $|\frac{1}{w}| \leq 4$. Odavde je $|w| \geq \frac{1}{4}$ za sve $w \notin f(U)$. □

Primjer 5.0.45 pokazuje da su (a) i (b) najbolji mogući slučajevi.
Štoviše, uz bilo koji $\alpha \neq 0$, možemo naći funkcije f takve da je $f(0) = 0, f'(0) = 1$ koje ne poprimaju vrijednost α. Na primjer,

$$f(z) = \alpha(1 - e^{\frac{-z}{\alpha}}).$$

Naravno, nijedna takva funkcija f ne može biti injekcija na U ako je $|\alpha| < \frac{1}{4}$, to jest, ne može pripadati klasi $\mathscr{S}$.

Teorem 5.0.50. *Pretpostavimo da je $F \in H(U \setminus \{0\}), F$ injekcija na U, F ima pol prvog reda u $z = 0$, reziduum vrijednosti jedan i w_1 i w_2 nisu u $F(U)$.*
Tada je $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Dokaz. Neka je $f = \dfrac{1}{F - w_1}$, i pokažimo da je $f \in \mathscr{S}$. Uzmimo z_1 i z_2 iz U i neka je $f(z_1) = f(z_2)$, to jest $\dfrac{1}{F(z_1) - w_1} = \dfrac{1}{F(z_2) - w_1}$. Odavde je $F(z_1) - w_1 = F(z_2) - w_1$, pa je $F(z_1) = F(z_2)$. Kako je F injekcija na U, slijedi $z_1 = z_2$, pa je i f injekcija.
Budući da F ima pol prvog reda u $z = 0$, i reziduum vrijednosti jedan, F možemo zapisati kao $F(z) = \dfrac{g(z)}{z}$, gdje je $g \in H(U)$ i $g(0) = 1$. Slijedi:

$$f(z) = \frac{1}{F(z) - w_1} = \frac{1}{\frac{g(z)}{z} - w_1} = \frac{1}{\frac{g(z) - w_1 z}{z}} = \frac{z}{g(z) - w_1 z}$$

pa je $f(0) = \dfrac{0}{g(0)} = 0$. Također, vrijedi $f \in H(U)$ i:

$$f'(z) = \frac{g(z) - w_1 z - z(g'(z) - w_1)}{(g(z) - w_1 z)^2}, \qquad z \in U,$$

pa je $f'(0) = \dfrac{g(0)}{(g(0))^2} = 1$.
Dakle, $f \in \mathscr{S}$, pa je $f(U) \supset D(0; \frac{1}{4})$, te slika od U po funkciji $F - w_1$ sadrži sve w takve da je $|w| > 4$. Budući da $w_2 - w_1$ nije u toj slici, imamo $|w_2 - w_1| \leq 4$. □

Uočimo da je i ovaj slučaj najbolji mogući. Ako je $F(z) = z^{-1} + z$, tada $F(U)$ ne sadrži točke -2 i 2. Preciznije, komplement od $F(U)$ je segment $[-2, 2]$ na realnoj osi.

Poglavlje 6

Neprekidnost na rubovima

Uz određene uvjete, svako se konformalno preslikavanje iz jednostavno povezanog područja Ω u U može proširiti na homeomorfizam iz $\overline{\Omega}$ u $\overline{U}$. Pritom važnu ulogu imaju jednostavne rubne točke područja Ω koje ćemo u ovom poglavlju definirati i povezati sa konformalnim preslikavanjima.

Definicija 6.0.51. *Rubna točka β jednostavno povezanog područja Ω se naziva* ***jednostavna rubna točka od*** Ω *ako ima sljedeće svojstvo: za svaki niz (α_n) u Ω takav da $\alpha_n \to \beta$ kad $n \to \infty$ postoji krivulja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ i niz $(t_n), 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \to 1$, takav da je $\gamma(t_n) = \alpha_n, n = 1,2,3...$ i $\gamma(t) \in \Omega$ za $0 \le t < 1$. Drugim riječima, postoji krivulja u Ω koja prolazi kroz točke α_n i završava u β.*

Primjer 6.0.52. *Pogledajmo primjere nekih rubnih točaka koje nisu jednostavne.*
Ako je $\Omega = U \setminus \{x : 0 \le x < 1\}$, tada je Ω jednostavno povezano; ako je $0 < \beta \le 1, \beta$ je rubna točka od Ω koja nije jednostavna. Na primjer, uzmimo $\beta = \frac{1}{2}$ i $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n} i$.
Kada bi postojala krivulja $\gamma : [0,1\rangle \to \Omega$ koja prolazi kroz α_n, njen realni dio bi poprimao i negativne vrijednosti u točkama t_n za koje vrijedi $t_n \to 1$, što je u kontradikciji sa $\lim\limits_{t\to 1}\gamma(t) = \beta$.
U kompliciranijem primjeru uzmimo da je Ω_0 interior kvadrata koji ima vrhove u $0, 1, 1+i$ i i. Ako uklonimo intervale $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} i\right]$ i $\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2n+1} + 1\right]$ iz Ω_0, preostalo područje Ω je jednostavno povezano. Ako je $0 \le y \le 1$, tada je iy rubna točka koja nije jednostavna.

Teorem 6.0.53. *Neka je Ω ograničeno jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i f konformalno preslikavanje iz Ω na U.*
(a) Ako je β jednostavna rubna točka od Ω, tada f ima neprekidno proširenje na $\Omega \cup \{\beta\}$. Ako je f tako proširena, vrijedi $|f(\beta)| = 1$.
(b) Ako su β_1 i β_2 različite jednostavne rubne točke od Ω i ako je f proširena na $\Omega \cup \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$ kao u (a), tada je $f(\beta_1) \ne f(\beta_2)$.

Dokaz. Neka je g inverz od f. Tada je $g \in H(U)$, po teoremu 0.0.29 $g(U) = \Omega$, g je injekcija i $g \in H^\infty$ budući da je Ω ograničeno područje.
Pretpostavimo da (a) ne vrijedi, to jest da ne postoji neprekidno proširenje od f na $\Omega \cup \{\beta\}$. To znači, prema Heineovom kriteriju za neprekidnost, da postoji niz (α_n) u Ω za koji vrijedi $\alpha_n \to \beta$, ali $f(\alpha_n) \not\to f(\beta)$. Budući da se niz $f(\alpha_n)$ nalazi u kompaktu $\overline{\Omega}$, sigurno ima konvergentne nizove, ali on sam nije konvergentan. Prelaskom na podnizove, slijedi da postoje podnizovi takvi da vrijedi $f(\alpha_{2n}) \to w_1, f(\alpha_{2n+1}) \to w_2$ i $w_1 \neq w_2$. Odaberimo γ kao u definiciji (6.0.51) i stavimo $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, za $0 \leq t < 1$. Neka je $K_r = g(\overline{D}(0; r))$, za $0 < r < 1$. Tada je K_r kompaktan podskup od Ω. Budući da $\gamma(t) \to \beta$ kada $t \to 1$, postoji $t^* < 1$ koji ovisi o r takav da $\gamma(t) \notin K_r$ ako je $t^* < t < 1$. Prema tome, $|\Gamma(t)| > r$ ako je $t^* < t < 1$. Odavde slijedi da $|\Gamma(t)| \to 1$ kada $t \to 1$. Budući da $\Gamma(t_{2n}) \to w_1$ i $\Gamma(t_{2n+1}) \to w_2$, slijedi da je $|w_1| = |w_2| = 1$.
Sada se skup $T \setminus \{\{w_1\} \cup \{w_2\}\}$ sastoji od dva luka. Jedan od tih lukova J ima svojstvo da svaki radij-vektor koji završava u nekoj točki od J siječe sliku od Γ u skupu točaka koji ima gomilište na T. Primjetimo da je $g(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ za $0 \leq t < 1$, i da g ima radijalni limes gotovo svuda na T jer je $g \in H^\infty$. Dakle,

$$\lim_{r \to 1} g(re^{it}) = \beta \qquad \text{skoro svuda na } J, \tag{6.1}$$

jer $g(\Gamma(t)) \to \beta$ kada $t \to 1$. Po teoremu 0.0.27 primijenjenom na $g - \beta$, iz (6.1) slijedi da je g konstanta. Ali, g je injekcija, pa dobivamo kontradikciju. Slijedi da je $w_1 = w_2$, i vrijedi (a).
Pretpostavimo da (b) ne vrijedi. Ako pomnožimo f s odgovarajućom konstantom apsolutne vrijednosti jedan, dobivamo $\beta_1 \neq \beta_2$, ali $f(\beta_1) = f(\beta_2) = 1$.
Kako su β_1 i β_2 jednostavne rubne točke od Ω, postoje krivulje $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{C}$ takve da je $\gamma_i([0, 1\rangle) \subset \Omega$, za $i = 1, 2$ i $\gamma_i(1) = \beta_i$. Neka je $\Gamma_i(t) = f(\gamma_i(t))$. Tada je $\Gamma_i([0, 1\rangle) \subset U$ i $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(1) = 1$. Budući da je $g(\Gamma_i(t)) = \gamma_i(t)$ na $[0, 1\rangle$, dobivamo

$$\lim_{t \to 1} g(\Gamma_i(t)) = \beta_i \qquad (i = 1, 2). \tag{6.2}$$

Iz teorema 0.0.28 slijedi da je radijalni limes od g u točki 1 jednak β_1 i β_2, što je nemoguće, pa slijedi da je $\beta_1 = \beta_2$. □

Teorem 6.0.54. *Ako je Ω ograničeno jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i ako je svaka rubna točka od Ω jednostavna, tada se svako konformalno preslikavanje iz Ω na U može proširiti na homeomorfizam iz $\overline{\Omega}$ na $\overline{U}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f \in H(\Omega), f(\Omega) = U$, i f je injekcija. Po teoremu 6.0.53 f možemo proširiti na preslikavanje iz $\overline{\Omega}$ u $\overline{U}$ takvo da $f(\alpha_n) \to f(z)$ kad je (α_n) niz u Ω koji konvergira prema z. Ako je (z_n) niz u $\overline{\Omega}$ koji konvergira prema z, tada postoje točke α_n iz Ω takve da vrijedi $|\alpha_n - z_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(\alpha_n) - f(z_n)| < \frac{1}{n}$.

Prema tome, $\alpha_n \to z$, i stoga $f(\alpha_n) \to f(z)$, pa odavde slijedi $f(z_n) \to f(z)$. Pokazali smo da je proširenje od f neprekidno na $\overline{\Omega}$. Također vrijedi $U \subset f(\overline{\Omega}) \subset \overline{U}$. Budući da je $\overline{U}$ kompaktan, i $f(\overline{\Omega})$ je kompaktan. Prema tome $f(\overline{\Omega}) = \overline{U}$.
Iz teorema 6.0.53 slijedi da je f injekcija na $\overline{\Omega}$. Budući da svako neprekidno injektivno preslikavanje kompaktnog skupa ima neprekidan inverz, tvrdnja teorema je dokazana. □

Napomene:
(a) Prethodni teorem ima topološki korolar: ako je svaka rubna točka ograničenog jednostavno povezanog područja Ω jednostavna, onda je rub od Ω Jordanova krivulja i $\overline{\Omega}$ je homeomorfno na $\overline{U}$. Vrijedi i obrat: ako je rub od Ω Jordanova krivulja, onda je svaka rubna točka od Ω jednostavna.
(b) Pretpostavimo da je f definirana kao u teoremu 6.0.54. Neka su a, b i c različite rubne točke od Ω, a A, B i C različite točke na T. Postoji razlomljena linearna transformacija φ koja preslikava trojku $(f(a), f(b), f(c))$ u (A, B, C). Pretpostavimo da (A, B, C) i $(f(a), f(b), f(c))$ imaju jednaku orijentaciju. Tada je $\varphi(U) = U$, i funkcija $g = \varphi \circ f$ je homoemorfizam sa $\overline{\Omega}$ na $\overline{U}$ koji je holomorfan na Ω i koji preslikava (a, b, c) u zadane vrijednosti (A, B, C). Iz drugog poglavlja slijedi da je g jedinstveno određena ovim uvjetima.
(c) Teorem 6.0.54, kao i napomena (b), se može primijeniti na jednostavno povezana područja Ω u Riemannovoj sferi S^2 čije su sve rubne točke jednostavne. Time skup $S^2 \setminus \Omega$ ima neprazan interior. Pomoću razlomljenih linearnih transformacija vraćamo se na slučaj kada je Ω ograničeno područje u ravnini. Slično, U možemo zamijeniti s poluravninom.
(d) Općenito vrijedi: ako f_1 i f_2 preslikavaju Ω_1 i Ω_2 na U kao u teoremu 6.0.54, tada je $f = f_2^{-1} \circ f_1$ homeomorfizam sa $\overline{\Omega_1}$ na $\overline{\Omega_2}$ koji je holomorfan na Ω_1.

Poglavlje 7

Konformalno preslikavanje kružnog vijenca

Posljedica Riemannovog teorema o preslikavanju je da su bilo koja dva jednostavno povezana područja u ravnini (osim same ravnine) konformalno ekvivalentna, budući da je svaki od njih koformalno ekvivalentan jediničnom krugu. To je iznimno posebno svojstvo jednostavno povezanih područja. U ovom poglavlju dajemo odgovor na pitanje može li se to svojstvo proširiti na sljedeći jednostavniji primjer, to jest jesu li bilo koja dva kružna vijenca konformalno ekvivalentna?
Za $0 < r < R$, neka je

$$A(r,R) = \{z : r < |z| < R\}$$

kružni vijenac sa unutarnjim polumjerom r i vanjskim polumjerom R.
Ako je $\lambda > 0$, preslikavanje $z \to \lambda z$ preslikava $A(r,R)$ na $A(\lambda r, \lambda R)$. *Dakle,* $A(r,R)$ *i* $A(r_1,R_1)$ *su konformalno ekvivalentni ako je* $R/r = R_1/r_1$. Iznenađujuće je to što je ovaj dovoljan uvjet također i nužan. Prema tome, za kružne vijence postoje različiti tipovi konformalnosti vezani za svaki realan broj veći od jedan.

Teorem 7.0.55. *Kružni vijenci* $A(r_1,R_1)$ *i* $A(r_2,R_2)$ *su konformalno ekvivalentni ako i samo ako je* $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $r_1 = r_2 = 1$. Stavimo

$$A_1 = A(1,R_1), \qquad A_2 = A(1,R_2),$$

i pretpostavimo da postoji $f \in H(A_1)$ takva da je f injekcija i $f(A_1) = A_2$. Neka je K kružnica sa središtem u nuli i polumjerom $r = \sqrt{R_2}$. Budući da je $f^{-1} : A_2 \to A_1$ također holomorfna, $f^{-1}(K)$ je kompaktan skup.

$f^{-1}(K) \cap T = \emptyset$, i $f^{-1}(K) \subseteq A_1$, pa je $d(f^{-1}(K), T) > 0$ (jer su $f^{-1}(K)$ i T kompaktni), te postoji $\epsilon > 0$ tako da je

$$A(1, 1+\epsilon) \cap f^{-1}(K) = \emptyset.$$

Tada je $V = f(A(1, 1+\epsilon))$ povezan podskup od A_2 koji ne presjeca K, tako da je $V \subset A(1, r)$ ili $V \subset A(r, R_2)$. U slučaju $V \subset A(r, R_2)$, zamijenimo f sa R_2/f. Možemo pretpostaviti da vrijedi $V \subset A(1, r)$.
Ako za niz (z_n) vrijedi $1 < |z_n| < 1 + \epsilon$ i $|z_n| \to 1$, tada je $f(z_n) \in V$ i niz $(f(z_n))$ nema limes u A_2 (jer je f^{-1} neprekidna). Prema tome, $|f(z_n)| \to 1$. Na isti način se vidi da vrijedi $|f(z_n)| \to R_2$ ako $|z_n| \to R_1$.
Sad definiramo

$$\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1} \tag{7.1}$$

i

$$u(z) = 2\log|f(z)| - 2\alpha \log|z| \qquad (z \in A_1).$$

Neka je ∂ Cauchy-Riemannov operator (relacija (7) i teorem 0.0.34).Budući da je $\partial\overline{f} = 0$ i $\partial f = f'$, koristeći lančano pravilo dobivamo:

$$\partial(2\log|f|) = \partial(\log(\overline{f}f)) = f'/f,$$

pa je

$$\partial(u(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1).$$

Slijedi da je u harmonijska funkcija na A_1 koja se, prema prvom dijelu ovog dokaza, može proširiti do neprekidne funkcije na $\overline{A_1}$ koja je jednaka nuli na rubovima od A_1. Budući da harmonijske funkcije koje nisu konstante nemaju ni lokalni minimum ni lokalni maksimum, zaključujemo da je $u = 0$. Stoga je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1). \tag{7.2}$$

Neka je $\gamma(t) = \sqrt{R_1}e^{it}$, za $-\pi \le t \le \pi$, i stavimo $\Gamma = f \circ \gamma$. Kao u dokazu Rouchéovog teorema, iz (7.2) dobivamo:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Ind_\Gamma(0).$$

Dakle, α je cijeli broj. Iz (7.1) slijedi da je $\alpha > 0$. Po (7.2), derivacija od $z^{-\alpha}f(z)$ jednaka je nuli na A_1, pa je $f(z) = cz^\alpha$. Budući da je f injekcija na A_1, mora vrijediti $\alpha = 1$. Odavde slijedi $R_1 = R_2$. □

Bibliografija

[1] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, McGraw-Hill Professional Publishing, 1986.

[2] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

Sažetak

Najvažniji rezultat ovog diplomskog rada je Riemannov teorem o preslikavanju. Prije njegovog dokaza, u početnom poglavlju definirali smo sama konformalna preslikavanja. Nakon toga smo proučili razlomljene linearne transformacije i njihovu povezanost sa tim preslikavanjima. Važnu ulogu u dokazu Riemannovog teorema o preslikavanju imale su normalne familije koje smo definirali u trećem poglavlju i dokazali sljedeće: ako je $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ i $\mathcal{F}$ je uniformno ograničena na svakom kompaktnom podskupu područja Ω, onda je $\mathcal{F}$ normalna familija. Nakon što smo definirali i konformalno ekvivalentna područja, mogli smo dokazati Riemannov teorem o preslikavanju.
U petom poglavlju definirali smo klasu $\mathscr{S}$ koju čine sve $f \in H(U)$ koje su injekcije na U i za koje vrijedi $f(0) = 0, f'(0) = 1$, te smo pokazali neka svojstva te klase. U poglavlju "Neprekidnost na rubovima" definirali smo jednostavne rubne točke i dokazali sljedeću tvrdnju: ako je Ω ograničeno jednostavno povezano područje u kompleksnoj ravnini i ako je svaka rubna točka od Ω jednostavna, tada se svako konformalno preslikavanje iz Ω na U može proširiti na homeomorfizam iz $\overline{\Omega}$ na $\overline{U}$.
U posljednjem poglavlju bavili smo se konformalnim preslikavanjima kružnih vijenaca i dokazali zanimljivo svojstvo: kružni vijenci $A(r_1, R_1)$ i $A(r_2, R_2)$ su konformalno ekvivalentni ako i samo ako je $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Summary

The most important result of this diploma thesis is the Riemann mapping theorem. Before we could prove it, we defined the conformal mappings in the first chapter. After that we studied linear fractional transformations and their connection with those mappings. The important part of proving the Riemann mapping theorem are normal families which we defined in the third chapter. We also proved that if $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ and $\mathcal{F}$ is uniformly bounded on every compact subset of the region Ω, then $\mathcal{F}$ is a normal family. After we defined conformally equivalent regions, we could prove the Riemann mapping theorem.
In the fifth chapter we defined the class $\mathscr{S}$, which is the class of all $f \in H(U)$ which are one-to-one in U and satisfy $f(0) = 0, f'(0) = 1$, and proved some of its properties. In the chapter "Continuity at the boundary" we defined simple boundary points and proved the next statement: if Ω is a bounded simply connected region in the plane and if every boundary point of Ω is simple, then every conformal mapping of Ω onto U extends to a homeomorphism off $\overline{\Omega}$ onto $\overline{U}$.
In the last chapter we studied the conformal mapping of an annulus and proved this interesting property: $A(r_1, R_1)$ and $A(r_2, R_2)$ are conformally equivalent if and only if $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Životopis

Moje ime je Antonija Pehar. Rođena sam 11. listopada 1991. godine u Mostaru. Osnovnu školu, te nakon toga i opću gimnaziju sam pohađala u Ljubuškom. Maturirala sam 2010. godine i iste godine upisala Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2014. na istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika.