Varijacijske nejednakosti

Pjanić, Matea

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:804787

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-06**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Pjanić

VARIJACIJSKE NEJEDNAKOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Zvonimir Tutek

Zagreb, lipanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hell, what has a mathematician to do on Parnas
wasting their time and disturbing poets?
Even his style is not smooth, his language has not the right sound
as it is accustomed to x and y only.
How his thoughts are clumpy, without the necessary polish,
and are as harsh as mathematical quantities.
Who shall read his poems? They are sharp and cornered,
whether seductive or otherwise, at all places they are toothed.
Jožef Stefan

Sadržaj

Uvod

Teorija varijacijskih nejednakosti inicijalno je razvijena za ravnotežne probleme. Prvi problem povezan s varijacijskim nejednakostima bio je Signorinijev problem kojeg je 1959. godine postavio Antonio Signorini, te 1963. godine riješio Gaetano Fichera.

1967. godine Guido Stampacchia i Jacques-Louis Lions dokazuju egzistenciju i jedinstvenost rješenja za eliptične varijacijske nejednakosti ([12]), dok 1969. i 1972. Jacques-Louis Lions i Haïm Brezis daju dokaz za jedinstvenost i egzistenciju rješenja paraboličke varijacijske nejednakosti, te Brezis daje rezultate regularnosti ([11], [2], [3]).

1982. godine Charles Elliott i John Ockendon uvode slabu formulaciju, dobivenu integracijom paraboličke varijacijske nejednakosti po vremenu, te pokazuju da ima jedinstveno rješenje u određenom funkcijskom prostoru. Elliott i Ockendon pokazuju i da diskretno rješenje paraboličke varijacijske nejednakosti postoji i konvergira jedinstvenom rješenju slabe formulacije, pa i jedinstvenom rješenju paraboličke varijacijske nejednakosti ([6]). Ovaj rad uvelike će se referirati na njihovim istraživanjima.

U ovom radu bavimo se rješenjem jednofaznog Stefanovog problema pomoću paraboličkih varijacijskih nejednakosti.

U prvom poglavlju postavljen je Stefanov problem u jednoj dimenziji, u drugom poglavlju formiramo Sobolevljev prostor na kojem će biti zadana slaba formulacija problema. U trećem poglavlju bavimo se egzistencijom i jedinstvenošću rješenja paraboličke varijacijske nejednakosti, te transformiramo Stefanov problem u traženi oblik. U zadnjem, četvrtom poglavlju rješavamo problem metodom konačnih elemenata, te proučavamo stabilnost i konvergencije.

Poglavlje 1

Stefanov problem

Stefanov problem jedan je od najvažnijih rubnih problema u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, sa slobodnom granicom kao funkcijom ovisnoj o vremenu.

Prvi poznati rad na difuziji topline u mediju s promjenom faze dali su francuski matematičari Gabriel Lamé i Benoit Paul Émile Clapeyron 1831. godine, koji su proučavali debljinu kore krutog stanja. Tek 60 godina kasnije, 1889., slovenski fizičar Jožer Stefan generalizira problem, te uvodi problem rubnih problema sa slobodnom granicom, to jest Stefanov problem. Stefan objavljuje četiri rada opisujući matematičke modele za realne fizičke probleme promjene faze, primjerice problem formacije leda u polarnim morima, koji je privukao najviše pozornosti. Uslijedile su mnoge plodne godine u proučavanju rubnih problema sa slobodnom granicom.

Klasični Stefanov problem opisuje promjenu temperature u homogenom mediju koji prolazi kroz promjenu faze pomicanjem granice među njima, primjerice otapanje leda u vodi. Problem je postavljen pomoću jednadžbe provođenja, inicijalne temperature na cijelom mediju, te rubnog uvjeta na granici između dvije faze, to jest Stefanovog uvjeta.

U ovom radu bavit ćemo se klasičnim jednofaznim Stefanovim problemom u jednoj prostornoj dimenziji.

1.1 Interpretacija problema

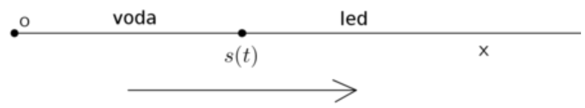
Neka je $x > 0$ prostorna varijabla, i t, $0 < t < T$, vremenska varijabla, za neki T zadano vrijeme.

Prva nepoznanica je funkcija $u(x, t)$, $x > 0$, $0 < t < T$, koja predstavlja temperaturu u točki x u trenutku t.

U problemu su zadana dva kontinuuma i slobodna granica među njima. Uslijed djelovanja topline slobodna granica se pomiče, te jedan od kontinuuma poprima temperaturu drugog. Prvi kontinuum biti će voda nepoznate temperature, a drugi led konstantne temprature 0.

Prijenosom topline, to jest energije koja prelazi s kontinuuma više temperature na kontinuum niže temperature, led će se otapati, i slobodna granica između leda i vode će se pomicati u smjeru leda (Slika 1.1).
Druga nepoznanica biti će dakle funkcija $s(t)$, $0 < t < T$, koja predstavlja slobodnu granicu između dva kontinuuma.
Na području $0 < x < s(t)$ nalazi se voda, a na $x > s(t)$ nalazi se led.

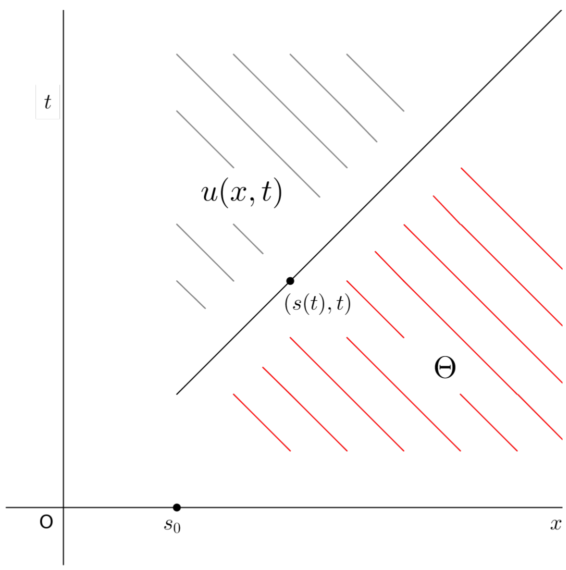
Slika 1.1: Smjer pomicanja granice



Domenu na kojoj promatramo problem označimo s

$$A = \{(x, t) : x > 0, 0 < t < T\}.$$

Slika 1.2: Domena



Domena na Slici 1.2 prikazuje granicu između leda i vode. Na području ispod grafa funkcije nalazi se led temperature $\Theta = 0$, dok je iznad grafa područje vode nepoznate temperature $u(x,t)$.

Uvodimo paraboličku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje distribuciju temperature u području gdje se nalazi voda, to jest jednadžbu provođenja

$$c\rho u_t = K u_{xx}, 0 < t < T, 0 < x < s(t), \tag{1.1}$$

gdje su toplinski kapacitet c, gustoća ρ i toplinska provodljivost K zadane konstante.
Jednadžba provođenja nije potrebna na području leda, obzirom da je tamo konstantna temperatura 0.
Treba nam inicijalni uvjet, to jest početna temperatura u trenutku $t = 0$:

$$u(x,0) = h(x) \geq 0, 0 < x < s(0). \tag{1.2}$$

Trebamo postaviti i inicijalnu poziciju granice:

$$s(0) = s_0, \tag{1.3}$$

i rubni (Dirichletov) uvjet, za $x = 0$

$$u(0,t) = f(t) \geq 0, 0 < t < T. \tag{1.4}$$

Osim inicijalnog i rubnog uvjeta, trebat će nam i temperatura na granici između kontinuuma, koja je ista kao i temperatura leda.

$$u(s(t),t) = 0, 0 < t < T. \tag{1.5}$$

Obzirom na imamo dvije nepoznanice, temperaturu $u(x,t)$ i slobodnu granicu $s(t)$, a samo jednu jednadžbu (jednadžbu provođenja), za rješenje problema potrebna nam je još jedna jednadžba. To će biti Stefanov uvjet, koji opisuje zakon kretanja slobodne granice između dvije faze, a izražava se pomoću zakona sačuvanja energije.

$$-K u_x(s(t),t) = L\rho s'(t), x = s(t), 0 < t < T \tag{1.6}$$

pri čemu je $L > 0$ latentna toplina po jedinici volumena.
Radi jednostavnosti uzet ćemo da vrijedi:

$$u(x,0) = 0 \tag{1.7}$$

$$u(0,t) = u_0 \geq 0 \tag{1.8}$$

1.2 Bezdimenzionalna forma

Bezdimenzionalna forma omogućit će nam uklanjanje fizikalnih konstanti toplinskog kapaciteta, gustoće, toplinske provodljivosti i latentne topline, radi što jednostavnijeg prikaza problema. Uvodimo nove varijable

$$X = \frac{x}{l}, T_1 = \frac{K}{c\rho}\frac{t}{l^2}, U = \frac{u}{u_0}, S = \frac{s}{l}$$

gdje je l neka standardna duljina, te zamijenimo varijable

$$\begin{aligned} U &\to u \\ T_1 &\to t \\ X &\to x \\ S &\to s \end{aligned}$$

Bezdimenzionalna forma jednadžbi Stefanovog problema (1.1)-(1.6), s dodatnim uvjetima (1.7)-(1.8) je:

$$u_t = u_{xx}, 0 < x < s(t), 0 < t < T \tag{1.9}$$

$$u(x, 0) = 0, x > 0 \tag{1.10}$$

$$u(0, t) = 1, 0 < t < T \tag{1.11}$$

$$s(0) = s_0 \tag{1.12}$$

$$u(s(t), t) = 0, 0 < t < T \tag{1.13}$$

$$-u_x(s(t), t) = \lambda\frac{ds}{dt}, 0 < t < T \tag{1.14}$$

gdje je $\lambda = \frac{L}{cu_0}$ bezdimenzionalna latentna toplina, $\frac{1}{\lambda}$ je Stefanov broj.
Detaljnije u [4].

1.3 Monotonost i invertibilnost slobodne granice

Za dokaz monotonosti funkcije slobodne granice koristit ćemo princip maksimuma pokazan u [10], vrlo čest i važan alat u proučavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Radi se o generalizaciji činjenice iz kalkulusa jedne varijable da se maksimum funkcije f postiže u jednom od rubova a ili b intervala $[a, b]$ gdje je $f'' > 0$.

Općenito, funkcije koje zadovoljavaju diferencijalnu nejednakost u bilo kojoj domeni Ω, zadovoljavaju i princip maksimuma, jer je maksimum funkcije postignut na rubu $\partial\Omega$. Princip maksimuma daje nam informacije o rješenju diferencijalne jednadžbe bez eksplicitnih informacija o samom rješenju.

Definicija 1.3.1 (Parabolički rub)**.** *Neka je*

$$E_T = \{(x,t) : 0 < x < l(t), 0 < t \leq T\} \tag{1.15}$$

područje u $(x,t)-$ *ravnini. Pretpostavimo da je temperatura zadana na sljedećim rubovima od* E_T*:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}, \\ S_2 &= \{0 \leq x \leq l(t), t = 0\}, \\ S_3 &= \{x = l(t), 0 \leq t \leq T\}. \end{aligned}$$

Za funkciju $u \in C^2_{(1)}$ vrijedi da je vremenska derivacija u_t neprekidna, te da su prostorne derivacije u_x, u_{xx} neprekidne.

Lema 1.3.2. *Neka je* $u(x,t) \in C^2_{(1)}$ *funkcija koja zadovoljava diferencijalnu nejednakost*

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0 \tag{1.16}$$

u E_T*. Tada u ne može poprimati svoju maksimalnu/minimalnu vrijednost na interioru zatvarača* $\overline{E_T}$ *od* E_T*.*

Dokaz. Pretpostavimo da u poprima svoj maksimum na interioru od $\overline{E_T}$, u točki $P = (x_0, t_0)$. Kako je P kritična točka, derivacija u_t je 0, i jer je maksimum, vrijedi $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. To je kontadikcija s $L[u] > 0$, pa u ne može imati maksimum u točki interiora. □

Teorem 1.3.3 (Slabi princip maksimuma)**.** *Pretpostavimo da funkcija* $u(x,t)$ *zadovoljava diferencijalnu nejednakost*

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \tag{1.17}$$

u pravokutnoj regiji E_T *danoj s (1.15). Tada se maksimalna/minimalna vrijednost od u na zatvaraču* $\overline{E_T}$ *mora pojaviti na jednom od rubova* S_1, S_2 *ili* S_3*.*

Dokaz. Neka je M najveća vrijednost od u koja se pojavljuje na S_1, S_2 i S_3, i pretpostavimo da postoji točka u interioru $P = (x_0, t_0)$ gdje je $u(x_0, t_0) = M_1 > M$.
Definiramo pomoćnu funkciju

$$w(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2, \tag{1.18}$$

iz w i v definiramo funciju

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + w(x). \tag{1.19}$$

Na rubovima S_1, S_2 i S_3 imamo $u \leq M$ i $0 < x < l$ pa vrijedi

$$v(x,t) \leq M + \frac{M_1 - M}{2} < M_1. \tag{1.20}$$

U točki interiora (x_0, t_0) imamo

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + 0 = M_1 \tag{1.21}$$

i u E_T imamo

$$L[v] \equiv L[u] + L[w] = L[u] + \frac{M_1 - M}{l^2} > 0. \tag{1.22}$$

Iz uvjeta (1.20) i (1.21) možemo zaključiti da maksimum $v(x_0, t_0)$ mora biti postignut u interioru od E_T ili na

$$S_4 = \{0 < x < l, t = T\}.$$

Iz Leme 1.3.2 znamo da nejednakost (1.22) ne daje mogućnost za maksimum u interioru. Za maksimum na S_4 dobivamo $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$, što implicira $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=T} < 0$. Dakle, v mora imati veću vrijednost za ranije vrijeme $t < T$, i iz te kontradikcije možemo vidjeti da je pretpostavka $u(x_0, t_0) > M$ pogrešna. □

Teorem 1.3.4 (Jaki princip maksimuma)**.** *Pretpostavimo da za točku* $(x_0, t_0) \in E_T$ *vrijedi* $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{E_T}} u$. *Tada je* $u(x,t) \equiv u(x_0, t_0)$ *za sve* $(x,t) \in E_T$.

Dokaz. dan u [13]. □

Teorem 1.3.5 (Monotonost slobodne granice)**.** *Neka su* u *i* $s(t)$ *rješenje problema (1.1)-(1.6). Tada je* $x = s(t)$ *monotona neopadajuća funkcija.*

Dokaz. Uvjeti na rubovima pravokutnika $Q_T := \{(x,t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ su

$$u(x, 0) = 0,$$
$$u(s(t), t) = 0,$$
$$u(0, t) = u_0 \geq 0,$$

pa iz slabog principa maksimuma, danog u Teoremu 1.3.3, slijedi da je $u(x,t) \geq 0$ za $0 < x < s(t)$.
Jer je temperatura 0 na rubu, za promjenu temperature po $x-$u na slobodnom rubu $x = s(t)$ vrijedi $u_x(s(t), t) \leq 0$.
Iz Stefanovog uvjeta (1.6) i pozitivnosti konstanti L i K slijedi $s'(t) \geq 0$, to jest funkcija s je monotono neopadajuća. □

Dalje promatramo bezdimenzionalnu formu Stefanovog problema danu s (1.9)-(1.14). Pokažimo strogu monotonost. Da bi slobodna granica bila strogo monotona, potrebni su dodatni uvjeti ([8]):

$$h(x) \neq 0 \tag{1.23}$$

ili

$$f(t) \neq 0. \tag{1.24}$$

Uvjet $f(t) \neq 0$ je zadovoljen u bezdimenzionalnoj formi Stefanovog problema (1.9)-(1.14), dakle $s(t)$ je strogo rastuća funkcija.

Invertibilnost slobodne granice slijedi iz rezultata da su strogo rastuće realne funkcije realne varijable bijektivne, pa i invertibilne.
Za Stefanov problem (1.9)-(1.14) slijedi da je funkcija slobodne granice $s(t)$ invertibilna, što će nam omogućiti transformaciju u varijacijsku nejednakost.

Poglavlje 2

Sobolevljev prostor

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne prostore, norme i distribucijske derivacije, te konačno i Sobolevljev prostor $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ u kojem će se nalaziti rješenje Stefanovog problema riješenog pomoću varijacijskih nejednakosti.

Sobolevljev prostor omogućuje jednostavno i korisno okruženje za metode funkcionalne analize u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i varijacijskih nejednakosti. Sastoji se od funkcija s integrabilnim derivacijama. Kada formuliramo slabo rješenje u smislu Sobolevljevih prostora, dokaz egzistencije i jedinstvenosti slabog rješenja biti će jednostavan.

2.1 L^p prostori

Neka je Ω otvoren, ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ sa Lipshitz neprekidnim rubom $\partial\Omega$. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokalno integrabilna ako je Lebesgue integrabilna i ako je

$$\int_K f(x)dx$$

konačan za sve kompaktne skupove $K \subset \Omega$. Prostor lokalno integrabilnih funkcija označavamo s $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Za $1 \leq p < \infty$ definiramo prostor

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Za $p = \infty$ definiramo prostor $L^\infty(\Omega)$ esencijalno ograničenih funkcija.

Dvije funkcije smatramo istim elementom prostora L^p ako se razlikuju na skupu mjere 0.

Za $1 \leq p < \infty$, normu na $L^p(\Omega)$ definiramo kao

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Ponekad ćemo koristiti kraću notaciju

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorem 2.1.1. *Prostor L^p je Banachov prostor za sve $1 \leq p \leq \infty$.*

Za $1 \leq p \leq \infty$, definiramo konjugirani eksponent $1 \leq p' \leq \infty$ od p tako da vrijedi

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1.$$

Za $f \in L^p, g \in L^{p'}$ vrijedi Hölderova nejednakost

$$\left| \int_\Omega fg dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Za $1 \leq p < \infty$, $L^{p'}$ možemo identificirati s dualnim prostorom od L^p.

2.2 Distribucijske derivacije

Teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi uvelike je pojednostavljena korištenjem distribucijskih ili slabih derivacija, umjesto klasičnih derivacija koje su definirane u svakoj točki. Distribucije su određeni linearni funkcionali na test funkcijama koji posjeduju distribucijske derivacije svih redova. Distribucije koje koresponiraju s lokalno integrabilnim funkcijama nazivamo regularne distribucije. Ako je distribucijska derivacija g regularne distribucije f također regularna, tada je f slabo diferencijabilna sa slabom derivacijom g. To nam omogućuje ekstenziju klasične derivacije s mnogo jačim funkcionalnim analitičkim svojstvima. Sobolevljev prostor se sastoji od funkcija čije slabe derivacije pripadaju L^p prostorima.
Neka je

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

i

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

je multi-indeks nenegativnih prirodnih brojeva. Definiramo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Za dani multi-indeks α, definiramo parcijalne diferencijalne derivacije reda $|\alpha|$ s

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Definicija 2.2.1. *Test funkcija $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ je funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama svih redova čiji nosač (zatvarač skupa gdje je $\varphi \neq 0$) je kompaktan podskup od Ω. Skup test funkcija označimo sa $C_c^\infty(\Omega)$. Distribucija T na Ω je linearno preslikavanje*

$$T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

sa svojstvom da

$$\langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ čim } \varphi_k \to \varphi \text{ u } C_c^\infty, \text{ to jest } D^{(n)}\varphi_k \to D^{(n)}\varphi \text{ u } \sup - \text{normi}.$$

Vrijednost distribucije T na test funkciji φ je $\langle T, \varphi \rangle$.

Primjer 2.2.1. Ako je $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, tada je preslikavanje $F : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ dano s

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

distribucija na Ω. Obrnuto, ako je dano preslikavanje F, možemo otkriti vrijednosti funkcije f u točkama skoro svuda na Ω. Dakle, F možemo identificirati s f. Svaku distribuciju, koju možemo povezati s lokalno integrabilnom funkcijom na ovaj način, zovemo regularna distribucija.

Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ glatka funkcija, integracija po dijelovima daje

$$\int_\Omega f_{x_i}\varphi dx = -\int_\Omega f\varphi_{x_i}dx,$$

obzirom da rubni dio nestaje jer φ ima kompaktan nosač na Ω. Ovaj rezlutat motivira sljedeću definiciju distribucijske derivacije.

Definicija 2.2.2. *Distribucijska derivacija T_{x_i} distribucije T s obzirom na x_i definirana je kao*

$$\langle T_{x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi_{x_i} \rangle.$$

U našem slučaju, T i T_{x_i} su regularne distribucije povezane s funkcijama f i g_i, strogo.

Definicija 2.2.3. *Pretpostavimo da su $f, g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ takve da*

$$\int_\Omega g_i\varphi dx = -\int_\Omega f\varphi_{x_i}dx$$

za sve test funkcije $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Tada kažemo da je f slabo diferencijabilna obzirom na x_i i $g_i = f_{x_i}$ zovemo slaba derivacija od f obzirom na x_i.

U daljnjem radu termin derivacije odnosi se na slabu derivaciju.

2.3 Sobolevljev prostor

Sobolevljevi prostori su prostori funkcija čije slabe derivacije pripadaju prosoru L^p.

Definicija 2.3.1. *Neka je k pozitivni prirodni broj, i* $1 \leq p \leq \infty$. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{R}^n$. *Sobolevljev prostor* $W^{k,p}(\Omega)$ *sadrži sve funkcije* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *takve da* $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ *za sve parcijalne derivacije reda* $0 \leq |\alpha| \leq k$. *Normu na* $W^{k,p}(\Omega)$ *definiramo s*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

za $1 \leq p < \infty$, *i s*

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} \left\{ \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \right\}$$

za $p = \infty$.

Za $p = 2$ *pišemo* $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, *i definiramo skalarni produkt na* $H^k(\Omega)$ *sa*

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx.$$

Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je Banachov prostor, a $H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor. Koristimo kraticu $\|f\|_{k,p} = \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Primjer 2.3.1. Sobolevljev prostor $H^1(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g + fg. \tag{2.1}$$

Sljedeća definicija je definicija prostora Sobolevljevih funkcija koje isčezavaju na rubu od Ω.

Definicija 2.3.2. *Zatvarač od* $C_c^\infty(\Omega)$ *u* $W^{k,p}(\Omega)$ *označimo sa*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}.$$

Također definiramo

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$$

Neformalno, o funkcijama iz $W_0^{k,p}(\Omega)$ možemo razmišljati kao o funkcijama iz $W^{k,p}(\Omega)$ čije derivacije reda manjeg ili jednakog od $k-1$ isčezavaju na rubu $\partial\Omega$ od Ω.

2.4 Slaba konvergencija

Pretpostavimo da smo konstruirali niz aproksimativnih rješenja rubnog problema. Za rješenja polaznog problema moramo pokazati da niz, ili barem jedan podniz, ima limes, te da je taj limes rješenje. U tom smislu koristit ćemo pojam slabe konvergencije. Prvo definiramo dualni prostor realnog Banachovog prostora.

Definicija 2.4.1. *Neka je X Banachov prostor. Dualni prostor X' se sastoji od neprekidnih linearnih funkcionala $\omega : X \to \mathbb{R}$. Vrijednost od $\omega \in X'$ na $u \in X$ označimo s $\langle \omega, u \rangle$. Dualni prostor je Banachov prostor s normom*

$$\|\omega\| = \sup_{u \in X, u \neq 0} \frac{\langle \omega, u \rangle}{\|u\|}.$$

Banachov prostor je refleksivan ako je $X'' = X$, to jest svaki neprekidni linearni funkcional $F : X' \to \mathbb{R}$ je forme

$$\langle F, \omega \rangle = \langle \omega, u \rangle$$

za neki $u \in X$.
Ako je $X = H$ Hilbertov prostor, svaki neprekidni linearni funkcional $\omega : H \to \mathbb{R}$ ima formu

$$\langle \omega, u \rangle = (w, u)$$

za neki $w \in H$, pa možemo identificirati H' sa H.

Primjer 2.4.1. Za $1 \leq p < \infty$, identificiramo $(L^p)'$ sa $L^{p'}$, gdje je p' konjugirani eksponent od p. U tom slučaju, za $f \in L^{p'}$ i $g \in L^p$ imamo

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx.$$

Posebno, $(L^2)' = L^2$.

Definicija 2.4.2. *Neka je X Banachov prostor. Kažemo da niz $\{u_n\} \subset X$ konvergira slabo k $u \in X$ ako*

$$\langle \omega, u_n \rangle \to \langle \omega, u \rangle \text{ kada } n \to \infty$$

za sve $\omega \in X'$. Slabu konvergenciju označavamo

$$u_n \rightharpoonup u.$$

U Hilbertovom prostoru H, $u_n \rightharpoonup u$ ako i samo ako

$$(u_n, v) \to (u, v) \text{ za sve } v \in H.$$

$u_n \to u$ označava jaku konvergenciju, to jest

$$\|u_n - u\| \to u \text{ kada } n \to \infty.$$

Na konačnodimenzionalnim prostorima, jaka i slaba konvergencija su ekvivalentne, dok na beskonačnodimenzionalnim prostorima jaka konvergencija povlači slabu.

2.5 Vremenski zavisni Sobolevljevi prostori

Za probleme zavisne u vremenu, kao što je Stefanov problem, moramo promotriti elemente normiranog vektorskog prostora u ovisnosti o parametru $t \in (a, b)$.
Neka je X Banachov prostor, i $(a, b) \subset \mathbb{R}$ vremenski interval. Za $1 \leq p < \infty$ definiramo prostor L^p funkcija $u : (a, b) \to X$ sa

$$L^p(a, b; X) = \{u : u \text{ je izmjeriva i } \int_a^b \|u(t)\|^p dt < \infty\},$$

s normom

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \Big(\int_a^b \|u(t)\|^p dt \Big)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$L^\infty(a, b; X) = \{u : u \text{ je izmjeriva i } \|u(t)\| \text{ je esencijalno ograničena }\},$$

s normom

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t\in(a,b)} \|u(t)\|.$$

Prostori $L^p(a, b; X)$ i $L^\infty(a, b; X)$ su Banachovi prostori.
Za kompaktan interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definiramo prostor neprekidnih funkcija

$$C([a, b]; X) = \{u : u \text{ je neprekidna na } [a, b]\},$$

s normom

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|.$$

Definiramo prostor $C^1([a,b];X)$ neprekidnih diferencijabilnih funkcija $u : [a,b] \to X$ s normom

$$\|u\|_{C^1([a,b];X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|u'(t)\|.$$

Također definiramo Sobolevljev prostor $W^{1,p}(a,b;X)$ koji se sastoji od funkcija iz $L^p(a,b;X)$ čije distribucijske vremenske derivacije pripadaju prostoru $L^p(a,b;X)$. Norma je

$$\|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} = \Big(\int_a^b [\|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p]dt\Big)^{1/p}.$$

Primjer 2.5.1. Neka je $X = L^2(\Omega)$. Tada je

$$\|u\|_{L^2(a,b;X)} = \Big(\int_a^b \int_\Omega |u(x,t)|^2\Big)^{1/2}.$$

Ovaj prostor označit ćemo s $L^2(\Omega_T)$.

Primjer 2.5.2. Neka je $X = H_0^1(\Omega)$. Tada je

$$\|u\|_{L^2(a,b;X)} = \Big(\int_a^b \int_\Omega |Du(x,t)|^2\Big)^{1/2}.$$

Integrali i distribucijske derivacije vektorskih funkcija $u : (a,b) \to X$ definiraju se slično kao i za skalarne funkcije $u : (a,b) \to \mathbb{R}$.

Poglavlje 3

Varijacijske nejednakosti

U ovom poglavlju dokazat ćemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja za paraboličke varijacijske nejednakosti. Zatim ćemo dobiveno rješenje povezati s linearnim komplementarnim sustavom, kojeg ćemo konačno povezati i sa Stefanovim problemom.

3.1 Definicija varijacijske nejednakosti

Neka je D funkcijski prostor, i

$$a : D \times D \to \mathbb{R}$$

neprekidna, koercitivna, bilinearna forma, $f \in D'$, i K zatvoren konveksan podskup od D. Problem varijacijske nejednakosti je naći funkciju $u \in K$ tako da vrijedi

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u),$$

za sve test funkcije $v \in K$ koje zadovoljavaju određene uvjete.

Primjer 3.1.1. Neka je D domena u $\mathbb{R}^n$,

$$a(u, v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v,\ u, v \in H_0^1(D),$$

neprekidna, bilinearna, koercitivna forma, i

$$(f, v) = \int_D f v,\ f, v \in H_0^1(D)$$

skalarni produkt na $H_0^1(D)$, gdje je f linearni funkcional.
Tada je problem varijacijske nejednakosti naći funkciju $u \in H_0^1(D)$ tako da vrijedi

$$a(u, v-u) = \int_D \nabla u \cdot \nabla(v-u) \geq \int_D f(v-u) = (f, v-u),$$

za sve $v \in H_0^1(D)$.

Varijacijske nejednakosti ovog tipa zovemo eliptične varijacijske nejedanakosti.
Ako je u rješenje ekvivalentne eliptičke parcijalne diferencijalne jednadžbe s Dirichletovim rubnim uvjetom, funkcija v će se podudarati s funkcijom u na rubu ∂D domene D i biti će kvadratno sumabilna zajedno sa svojim prvim derivacijama, to jest v, v_x i v_y postoje na D i $\iint (v^2 + v_x^2 + v_y^2) dxdy < \infty$.
Stefanov problem biti će izražen pomoću varijacijske nejednakosti paraboličkog tipa:

$$(u_t, v-u) + a(u, v-u) \geq (f, v-u),$$

definirane kao funkcije od u, koja je zadovoljena za sve test funkcije v, koje se poklapaju s funkcijom u na rubovima, i kvadratno su sumabilne, zajedno s prvim derivacijama.

3.2 Rješenje varijacijske nejednakosti

Rješenje varijacijske nejednakosti dano je u [6]. Kako bi dobili rješenje paraboličke varijacijske nejednakosti, uvodimo fiksnu domenu, što će nam omogućiti rješavanje problema bez eksplicitne upotrebe Stefanovog uvjeta.
Neka je $\Omega := \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, te $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Prisjetimo se prostora $H_0^1(\Omega)$, prostora svih funkcija iz $H^1(\Omega)$ koje isčezavaju na rubu $\partial\Omega$. Norma je

$$\|v\|_{H^1} = \Big(\int_\Omega (|v|^2 + |\nabla v|^2) \Big)^{1/2}.$$

Neka je

$$k(t) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq G(x,t) \text{ s.s na } \Omega\} \tag{3.1}$$

$$K = \{v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) : v \geq G \text{ s.s na } \Omega_T\} \tag{3.2}$$

gdje je

$$G \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \frac{\partial G}{\partial t} \in L^2(\Omega_T) \tag{3.3}$$

i

$$G \geq 0 \text{ s.s na } \partial\Omega \times (O, T). \tag{3.4}$$

Pretpostavimo da vrijedi $f \in L^2(\Omega_T)$, i definiramo skalarni produkt i neprekidnu, bilinearnu, koercitivnu formu:

$$
\begin{aligned}
(w, v) &= \int_\Omega wv dx, \\
a(w, v) &= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Promatramo sljedeće paraboličke varijacijske nejednakosti.

Problem 1.

Naći $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tako da je

$$\partial w/\partial t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$w(x, 0) = w_0 \in k(0),$$

$$w(t) \in k(t) \text{ za skoro sve } t \in (0, T),$$

te vrijedi

$$(w_t, v - w) + a(w, v - w) \geq (f, v - w)$$

za sve $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, tako da je $v(t) \in k(t)$ skoro svuda u $(0, T)$.

Problem 2.

Naći $w \in K$ tako da je

$$\partial w/\partial t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$w(x, 0) = w_0 \in k(0),$$

te vrijedi

$$\int_0^T \{(w_t, v - w) + a(w, v - w) - (f, v - w)\} dt \geq 0$$

za sve $v \in K$.

Teorem 3.2.1. *Problemi 1. i 2. su ekvivalentni, i imaju jednistveno rješenje* $w \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

Dokaz. Pokažimo prvo ekvivalenciju. Očito rješenje Problema 1 zadovoljava i Problem 2. Obrnuto, promotrimo rješenje Problema 2, i pretpostavimo da za $\epsilon > 0$ i $\tau \in (0, T)$ je

$$v = \begin{cases} w & , t \notin (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) \\ \tilde{v} \in K & , t \in (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon) \end{cases}$$

Tada je

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \{(w_t, \tilde{v} - w) + a(w, \tilde{v} - w) - (f, \tilde{v} - w)\}dt \geq 0.$$

Obzirom da ovo vrijedi za svaki interval na $(0, T)$, vrijedi i Problem 1.
Dokažimo sada jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, to jest postoje dva rješenja $w_i, i = 1, 2$ Problema 2. Za $i \neq j$ vrijedi

$$\textstyle\int_0^T \{(\frac{\partial w_i}{\partial t}, w_j - w_i) + a(w_i, w_j - w_i) - (f, w_j - w_i)\}dt \geq 0$$

Zbrajajući te dvije nejednakosti slijedi:

$$\int_0^T \{(\frac{\partial w_1}{\partial t}, w_2 - w_1) + (\frac{\partial w_2}{\partial t}, w_1 - w_2) + a(w_1, w_2 - w_1) + a(w_2, w_1 - w_2) - (f, w_2 - w_1) - (f, w_1 - w_2)\}dt \geq 0$$

$$\int_0^T \{(-\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial t}, w_1 - w_2) + a(-w_1, w_1 - w_2) + a(w_2, w_1 - w_2) + (f, w_1 - w_2) - (f, w_1 - w_2)\}dt \geq 0$$

$$\int_0^T \{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_1 - w_2, w_1 - w_2) - a(w_1 - w_2, w_1 - w_2)\}dt \geq 0$$

$$\int_0^T \{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_1 - w_2, w_1 - w_2) + a(w_1 - w_2, w_1 - w_2)\}dt \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\|(w_1 - w_2)_T\|_2^2 + \int_0^T \|w_1 - w_2\|_1^2 dt \leq 0 \tag{3.6}$$

pri čemu je $\|v\|_2 = \{\int v^2 dx\}^{1/2}$ i $\|v\|_1 = \{\int |\nabla v|^2 dx\}^{1/2}$. Iz (3.6) slijedi $w_1 = w_2$. Dakle, zbog kontadikcije slijedi jedinstvenost rješenja.
Za dokaz egzistencije, promatramo evolucijsku jednadžbu

$$\frac{\partial w_\epsilon}{\partial t} - \nabla^2 w_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}(w_\epsilon - G)^- = f, x \in \Omega, \epsilon > 0 \tag{3.7}$$

s

$$w_\epsilon(x, 0) = w_0 \tag{3.8}$$

$$w_\epsilon = 0, x \in \partial\Omega \tag{3.9}$$

pri čemu je $(w_\epsilon - G)^- = \min(w_\epsilon - G, 0)$. Jer je (3.7) evolucijska jednadžba za monotoni operator, jednadžba ima jedinstveno rješenje ([11]).
Također može se pokazati da su $\|w_\epsilon\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))}$, $\|\partial w_\epsilon/\partial t\|_{L^2(\Omega_T)}$ i $\|(w_\epsilon - G)^-/\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}$ uniformno ograničeni neovisno od ϵ, pa postoji podniz w_ϵ, koji konvergira slabo u $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ i jako u $L^2(\Omega_T)$ limesu $\overline{w_\epsilon} \geq G$ skoro svuda u Ω_T. Konačno, množeći (3.7) s $v - w_\epsilon$,slijedi

$$\int_0^T \{(\tfrac{\partial w_\epsilon}{\partial t}, v - w_\epsilon) + a(w_\epsilon, v - w_\epsilon) - (f, v - w_\epsilon)\}dt \geq 0$$

za sve $v \in K$, tako da $\overline{w}$ rješava Problem 2. i $\overline{w} \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$. □

Sada možemo dokazati sljedeći teorem koji povezuje paraboličke varijacijske nejednakosti i komplementarne sisteme.

Teorem 3.2.2. *Rješenje Problema 2. zadovoljava linearni komplementarni sistem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f &\geq 0, \\ w &\geq G, \\ (\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f)(w - G) &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

skoro svuda u Ω_T. Vrijedi i obratno.

Dokaz. Za svaku nenegativnu funkciju $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, $v = w + \varphi \in K$ iz Problema 2. slijedi

$$\int_{\Omega_T} (\tfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f)\varphi dx dt = \int_0^T \{(\tfrac{\partial w}{\partial t}, v - w) + a(w, v - w) - (f, v - w)\}dt \geq 0$$

što implicira da

$$\tfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f \geq 0 \text{ s.s. u } \Omega_T.$$

Neka je $\Omega_T^+ = \{(x, t) \in \Omega_T : w(x, t) > G(x, t)\}$. Tada za svaki $\varphi \in C_0^\infty \Omega_T^+$, $v = w \pm \epsilon\varphi \in K$ za dovoljno mali ϵ vrijedi

$$0 = \int_0^T (\tfrac{\partial w}{\partial t}, \varphi) + a(w, \varphi) - (f, \varphi)dt = \int_{\Omega_T^+} (\tfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f)\varphi dx dt.$$

Dakle,

$$\tfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f = 0 \text{ s.s. na } \Omega_T^+$$

i (3.10) vrijedi.
Obrnuto, ako $w \in K$ zadovoljava (3.10), tada za $v \in K$ vrijedi

$$(\tfrac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f)(v - w) \geq 0 \text{ s.s. na } \Omega_T,$$

jasno je da w rješava Problem 2.

□

3.3 Transformacija Stefanovog problema

U ovom poglavlju Stefanov problem prikazat ćemo pomoću Duvautove transformacije kao linearni komplementarni sustav, za kojeg znamo da postoji jedinstveno rješenje.
Transformaciju jednofaznog Stefanovog problema u varijacijsku nejednakost predložio je Duvaut u [5], te je detaljno obrađeno u [9]. Prikaz Stefanovog problema pomoću linearnog komplementarnog sustava uzeto je iz [4].

Osnovno svojstvo svake varijacijske nejednakosti je da zavisna funkcija i njene derivacije moraju biti neprekidne kako bi bila moguća derivacija po dijelovima, potrebna za derivaciju varijacijske nejednakosti. Za Stefanov uvjet to nije slučaj. Naime, u (1.6) prva derivacija temperature nije neprekidna za nenegativnu latentnu toplinu. Varijacijska formulacija je moguća tek uvođenjem određenih transformacija koje će omogućiti neprekidnost. Uvodimo Duvautovu transformaciju problema (1.9)-(1.14) uvođenjem nove, zavisne varijable U:

$$\begin{aligned} U(x,t) = \int_{l(x)}^{t} u(x,\tau)d\tau, 0 \leq x \leq s(t), 0 < t < T; \\ U(x,t) = 0, s(t) \leq x \leq 1, 0 < t < T, \end{aligned} \tag{3.11}$$

gdje smo uveli fiksnu, konačnu domenu $Q_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t < T\}$. Iskoristili smo svojstvo invertibilnosti funkcije $s(t)$ pokazano u poglavlju 1. $t = l(x)$ je vrijeme u kojem led u točki x prelazi u vodu. $l(x)$ je inverz od $s(t)$, to jest $l^{-1}(t) = s(t)$.
Sljedeći korak je pokazati da su $U(x,t)$ i prva derivacija $\partial U/\partial x$ neprekidne na slobodnom rubu i u području $0 \leq x \leq 1$. Po formuli deriviranja pod znakon integrala iz (3.11) slijedi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u(x,t)t' - u(x,l(x))l'(x) + \int_{l(x)}^{t} \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)d\tau, 0 < x \leq s(t), 0 < t < T.$$

Jer je temperatura u 0 na rubu $x = s(t)$, to jest $u(x,l(x)) = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = \int_{l(x)}^{t} \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)d\tau, 0 < x \leq s(t), 0 < t < T; \\ \frac{\partial U}{\partial x} = 0, s(t) \leq x < 1, 0 < t < T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nadalje,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{l(x)}^{t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\tau - \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,l(x)), 0 < x < s(t), 0 < t < T, \tag{3.13}$$

jer $\partial u/\partial x \neq 0$ za $x = s(t)$, to jest u točki $(x,l(t))$.
Primjetimo da je $\partial l/\partial x = -1/(\partial s/\partial t)$, pa Stefanov uvjet (1.14) implicira

$$(\partial u/\partial x)(\partial l/\partial x) = \lambda.$$

Uz prethodnu tvrdnju i jednadžbu provođenja (1.9), jednadžba (3.13) postaje

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{l(x)}^{t} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau - \lambda = \frac{\partial}{\partial t} \int_{l(x)}^{t} u d\tau - \lambda = \frac{\partial U}{\partial t} - \lambda.$$

Dakle transformirana jednadžba je

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda, 0 < x < s(t), 0 < t < T; \\ U &= 0, s(t) \le x < 1, 0 < t < T, \end{aligned} \tag{3.14}$$

i vrijedi $U(x,t) > 0$ za $0 < x < s(t)$. Dakle, $U(x,t)$ i prve derivacije su neprekidne na domeni $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 < t < T\}$.
Po [4], sustav jednakosti (3.14) možemo zapisati kao:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda \ge 0, U \ge 0, 0 < x < 1, 0 < t < T, \tag{3.15}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda\right) U = 0, 0 < x < 1, 0 < t < T. \tag{3.16}$$

Ovo je linerni komlementarni sustav koji će nam omogućiti povezivanje Stefanovog problema s varijacijskom nejednakošću. Dakle, Stefanov problem povezujemo s komplementarnim sustavom danim sa (3.10).
U (3.15) i (3.16) stavimo U=w-G, gdje je

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \nabla^2 G - \lambda + f \tag{3.17}$$

$$G = 1 \text{ za } x = 0, 0 < t < T \tag{3.18}$$

$$G = 0 \text{ za } t = 0, 0 < x < 1 \tag{3.19}$$

Slijedi

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla^2 U - \lambda \ge 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 w + \nabla^2 G - \lambda \ge 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 G + \lambda - f - \nabla^2 w + \nabla^2 G - \lambda \ge 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f \geq 0,$$

što je prva nejednakost u (3.10).

$$U \geq 0$$

$$w - G \geq 0$$

$$w \geq G,$$

što daje drugu nejednakost u (3.10), i

$$(\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla^2 U - \lambda)U = 0$$

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 w + \nabla^2 G - \lambda\Big)(w - G) = 0$$

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 G + \lambda - f - \nabla^2 w + \nabla^2 G - \lambda\Big)(w - G) = 0$$

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w - f\Big)(w - G) = 0,$$

što je zadnja nejednakost u Teoremu 3.2.2, čime smo povezali Stefanov problem (1.9)-(1.14) sa komplementarnim sustavom (3.10) za kojeg postoji jedinstveno rješenje.

Dakle, dobili smo jedinstvenost i egzistenciju rješenja. Za potpuno rješenje problema potrebni su i rezultati regularnosti. Neprekidnost rješenja slijedi iz teorema ulaganja prostora $L^2(0, T; H)$ u prostor neprekidnih funkcija. Za ostale rezultate regularnosti Problema 2. pogledati [7].

Poglavlje 4

Numerička rješenja za paraboličke varijacijske nejednakosti

U ovom poglavlju proučavat ćemo aproksimaciju Problema 1. i Problema 2. iz poglavlja 3 metodom konačnih elemenata za $G \in C(\overline{\Omega}_T) \cap C[0, T; H^1(\Omega)]$.

4.1 Metoda konačnih elemenata

Neka je Ω poligonalna domena u $\mathbb{R}^2$ koja je prekrivena unijom, na interioru disjunktnih, trokuta. Uniju takvih trokuta zovemo triangulacija i označavamo T^h, gdje h označava duljinu najduljeg ruba trokuta. Svaki rub trokuta je ili rub drugog trokuta ili ima rubne točke na $\partial\Omega$.
Pretpostavit ćemo da je najmanji kut u triangulaciji ograničen odozdo s θ_0, neovisno o h, te da je omjer dijametra največeg elementa naspram dijametra najmanjeg elementa ograničen odozgo s γ, neovisno o h.
V^h je prostor neprekidnih funkcija koje su linearne na svakom trokutu i isčezavaju na rubu $\partial\Omega$. Za svaku funkciju v u Ω definiramo njenu procjenu $v_{\mathrm{I}} \in V^h$, i $v_{\mathrm{I}} = v$ u svakom vrhu triangulacije T^h.
Svaki $v \in V^h$ možemo zapisati kao $v = \sum_{j \in J} v_j b_j(x)$, gdje je J skup nodalnih čvorova interiora, v_j nodalne vrijednosti, $b_j(x)$ linearna baza funkcija koje zadovoljavaju $b_j(x_i) = \delta_{ij}$, gdje je x_i pozicija nodalnog čvora i.

Norme na prostoru L^2 koje ćemo koristiti označimo sa

$$\begin{aligned} \|v\|_2 &= \left(\int v^2 dx \right)^{1/2} \\ |v|_1 &= \left(\int |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

L^2 skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$ zamjenjen je u V^h s diskretnim skalarnim produktom

$$(u,v)_h = \frac{1}{3}\sum_{j\in J} W_j u_j v_j = u^{\mathrm{T}}\mathrm{M}v, \tag{4.2}$$

gdje je $u = (u_i)$, W_j je suma područja elemenata koji pripadaju nodalnom čvoru j, a M je pozitivna dijagonalna matrica.
Norma na V^h zadana je s

$$\|v\|_h = \left((v,v)_h\right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Diskretna inverzna nejednakost norme

$$|v|_1 \leq S(h)\|v\|_h \tag{4.4}$$

vrijedi za sve $v \in V^h$, gdje je $S(h) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{h}{\min \mathrm{A}(T)}}$, ako triangulacija ima sve šiljastokute trokute, i $S(h) = \frac{3}{2}\frac{h}{\min \mathrm{A}(T)}$ inače, pri čemu $\min \mathrm{A}(T)$ predstavlja područje trokuta T. Gornja granica za $S(h)$ dana je s

$$\sin\theta_0 h S(h)/\gamma^2 = \begin{cases} \sqrt{6} \\ 3 \end{cases}$$

Prostor K je aproksimiran prostorom

$$K_h = \{v = \sum_{j\in J} v_j b_j(x) \in V^h : v_j \geq G(x_j) \text{ za sve } j \in J\}. \tag{4.5}$$

Promatramo metodu konačnih elemenata Problema 1.: $(w_t, v-w) + a(w, v-w) \geq (f, v-w)$.
Problem je naći $w^{n+1} \in K_h^{n+1}$ tako da

$$((w^{n+1} - w^n)/k, v - w^{n+1})_h + a(w^{n+\theta}, v - w^{n+1}) \geq (f^{n+\theta}, v - w^{n+1})_h \tag{4.6}$$

za sve $v \in K_h^{n+1} = \{v \in V^h : v_i \geq G(x_i,(n+1)k) \text{ za sve točke interiora } i\}$,
gdje su

$$\begin{aligned} w^n &= \sum_i w_i^n b_i(x) \\ f^n &= \sum_i f(x_i, t^n) b_i(x) \\ w^{n+\theta} &= \theta w^{n+1} + (1-\theta) w^n \\ f^{n+\theta} &= \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n, \end{aligned}$$

za k vremenski korak, i $\theta \in [0, 1]$.
Podaci $f^{n+\theta}$ i w^0 mogu biti definirani kao funkcije u V^h tako da

$$\begin{aligned} \text{ili } f^n &= \{f(nk)\}_{\mathrm{I}}, \text{ ako je } f \text{ neprekidna,} \\ \text{ili } (f^{n+\theta}, v)_h &= \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} (f(t), v)dt \text{ za sve } v \in V^h \end{aligned} \tag{4.7}$$

i

$$\begin{aligned} \text{ili } w^0 &= (w_0)_{\mathrm{I}}, \text{ ako je } w_0 \in H^2(\Omega), \\ \text{ili } a(w^0, v) &= a(w_0, v) \text{ za sve } v \in V^h. \end{aligned} \tag{4.8}$$

U svakom slučaju

$$f_{h,k}(t) \to f \text{ u } L^2(\Omega_T)\ ,\ w^0 \to w_0 \text{ u } H_0^1(\Omega) \tag{4.9}$$

gdje je $f_{h,k}(t)$ definiran u $t \in (nk, (n+1)k)$, kao aproksimacija od $f^{n+\theta}$.
Na sličan način, možemo promotriti i općenitiju konveksnu regiju Ω s glatkim rubom za koju je potrebno opisati aproksimaciju Ω_h. Kada V^h konstuiramo kao aproksimaciju od $H_0^1(\Omega^h)$, analiza je jednostavnija ako zahtjevamo da funkcije iz K_h^{n+1} isčezavaju na $\Omega \setminus \Omega^h$.
U svakom vremenskom koraku rješenje napreduje rješavajući diskretnu eliptičnu varijacijsku nejednakost koja je ekvivalentna linearnom komplementarnom problemu

$$\begin{aligned} z^{n+1} &\geq 0, \\ w^{n+1} - G^{n+1} &\geq 0, \\ (z^{n+1})^{\mathrm{T}}(w^{n+1} - G^{n+1}) &= 0 \\ z^{n+1} = \mathrm{M}(w^{n+1} - w^n)/k + \hat{\mathrm{A}}w^{n+\theta} &- f^{n+\theta} \\ \mathrm{M} = (b_i, b_j)_h\ ,\ \hat{\mathrm{A}}_{ij} &= a(b_i, b_j), i, j \in J \end{aligned} \tag{4.10}$$

w^n, f^n i G^n su nodalni vektori. G^{n+1} je vektor vrijednosti $G((n+1)k)$ u točkama mreže, a matrica A je rijetka pozitivno definitna simetrična matrica.
Jer je matrica $\mathrm{M} + \theta k\hat{\mathrm{A}}$ simetrična i pozitivno definitvna, (4.10) ima jedinstveno rješenje ([6]).
Metodom rezanja može se pokazati ([1]), ako je M dijagonalna matrica i $\theta = 0$, rješenje linearnog komlementarnog sustava (4.10) dano je s

$$w_i^{n+1} = \max\{(w^n - k\mathrm{A}w^n + kf^n)_i, G_i^{n+1}\}$$

4.2 Stabilnost

Neka je

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= u^T \mathrm{M} v \\ |v|^2 &= \langle v, v\rangle \\ ||v||^2 &= v^T \mathrm{MA} v \\ \delta_k v^n &= (v^{n+1} - v^n)/k, \end{aligned} \tag{4.11}$$

s konvencijom da je $\mathrm{MA} = \hat{\mathrm{A}}$ za metodu konačnim elementom. Pretpostavimo da

$$K(t^*) \subset K(t) \text{ za } t > t^* \tag{4.12}$$

ili ekvivalentno

$$G(x,t) \leq G(x,t^*) \text{ za } t > t^* \tag{4.13}$$

Prema [6] komplementarni problem (4.10) je ekvivaletan

$$(z^{n+1})^{\mathrm{T}}(v - w^{n+1}) \geq 0 \text{ za sve } v \geq G^{n+1} \tag{4.14}$$

i jer, zbog (4.12) i (4.13), možemo staviti $v = w^n$ u (4.14), slijedi

$$|\delta_k w^n|^2 + \langle \mathrm{A} w^{n+\theta}, \delta_k w^n\rangle \leq \langle f^{n+\theta}, \delta_k w^n\rangle$$

$$|\delta_k w^n|^2 + \langle \mathrm{A} w^{n+\theta}, (w^{n+1} - w^n)/k\rangle \leq \langle f^{n+\theta}, \delta_k w^n\rangle$$

$$k|\delta_k w^n|^2 + \langle \mathrm{A} w^{n+\theta}, w^{n+1} - w^n\rangle \leq k\langle f^{n+\theta}, \delta_k w^n\rangle$$

$$k|\delta_k w^n|^2 + \frac{1}{2}\{(2\theta - 1)||w^{n+1} - w^n||^2 + ||w^{n+1}||^2 - ||w^n||^2\} \leq k\langle f^{n+\theta}, \delta_k w^n\rangle \tag{4.15}$$

Koristeći Cuuchy-Schwartzovu nejednakost $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$ i činjenicu da je $2ab \leq \epsilon a^2 + b^2/\epsilon$ za svaki $\epsilon > 0$, iz (4.15) slijedi

$$2\sum_{j=0}^{n} k|\delta_k w^j|^2 + ||w^{n+1}||^2 \leq ||w^0||^2 + \frac{k}{\epsilon}\sum_{j=0}^{n} |f^{n+\theta}|^2 + \epsilon k \sum_{j=0}^{n} |\delta_k w^j|^2 + (1 - 2\theta)\sum_{j=0}^{n} ||w^{j+1} - w^j||^2 \tag{4.16}$$

Sada možemo dokazati teorem o stabilnosti.

Teorem 4.2.1. *Uvjet stabilnosti*

$$(1-2\theta)k[S(h)]^2 < 2 \tag{4.17}$$

vrijedi za $\theta < \frac{1}{2}$, i postoji konstanta c, neovisna od h i k tako da vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n} k|\delta_k w^j|^2 + \|w^{n+1}\|^2 \le c\{\|w^0\|^2 + \sum_{j=0}^{n} k|f^{j+\theta}|^2\}. \tag{4.18}$$

Dakle, metoda konačnim elementom zadovoljava

$$\sum_{j=0}^{n} \left\|\frac{w^{n+1}-w^n}{k}\right\|_2^2 + |w^{n+1}|_1^2 \le c\{|w^0|_1^2 + \sum_{j=0}^{n} k\|f^{j+\theta}\|_2^2\}. \tag{4.19}$$

Dokaz. 1. $\theta \ge \frac{1}{2}$
Jer je $1-2\theta \le 0$, u 4.16 stavimo $\epsilon = 1$ iz čega slijedi

$$\sum_{j=0}^{n} k|\delta_k w^j|^2 + \|w^{n+1}\|^2 \le \|w^0\|^2 + \sum_{j=0}^{n} k|f^{j+\theta}|^2.$$

2. $\theta < \frac{1}{2}$
Nejednakost za normu

$$\|v\| \le S(h)|v|$$

koristimo u zadnjem izrazu nejednakosti (4.16), iz čega slijedi

$$(2-\epsilon-(1-2\theta)k\{S(h)\}^2)\sum_{j=0}^{n} k|\delta_k w^j|^2 + \|w^{n+1}\|^2 \le \|w^0\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=0}^{n} k|f^{n+\theta}|^2.$$

□

4.3 Konvergencija

Za konvergenciju diskretizacije konačnih elemenata, definiramo funkcije mreže na $(0, T)$ sa

$$\begin{aligned} w_{h,k}(t) &= w^{n+1} \\ \hat{w}_{h,k}(t) &= \{[(n+1)k - t]w^n + (t-nk)w^{n+1}\}/k \\ f_{h,k}(t) &= f^{n+\theta} \end{aligned} \tag{4.20}$$

za $t \in (nk, (n+1)k]$. Teorem stabilnosti 4.2.1 i konvergencije (4.9) impliciraju da su nizovi $\{w_{h,k}\}$ i $\{\hat{w}_{h,k}\}$ uniformno ograničeni u prostoru $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ i $\{\hat{w}_{h,k}\}$ je uniformno ograničen u $H^1(\Omega_T)$. Dakle, po kompaktnosti (uniformno ograničen niz u $H^1(\Omega)$ ima podniz koji je konvergentan u $L^2(\Omega)$), postoji podniz, kojeg notacijski ne razlikujemo od originalnog niza, takav da

$$\begin{aligned} w_{h,k} &\rightharpoonup w \text{ u } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ \hat{w}_{h,k} &\rightharpoonup w \text{ u } H^1(\Omega_T) \\ \hat{w}_{h,k} &\to w \text{ u } L^2(\Omega_T) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Jaka konvergencija $\hat{w}_{h,k} \to w$ u $L^2(\Omega_T)$ slijedi iz rezultata kompaktnosti da su ograničeni nizovi u $H^1(\Omega_T)$ sadržani u kompaktnim podskupovima od $L^2(\Omega_T)$([6]).
Da su limesi podnizova $w_{h,k}$ i $\hat{w}_{h,k}$ isti slijedi iz

$$\lim_{h,k\to 0} \int_{\Omega_T} (w_{h,k} - \hat{w}_{h,k})\varphi dxdt = 0$$

za sve $\varphi \in L^2(\Omega_T)$, što je posljedica nejednakosti

$$\Big| \int_{\Omega_T} (w_{h,k} - \hat{w}_{h,k})\varphi dxdt \Big| \leq k\Big(\sum_{n=0}^{N-1} \Big\| \frac{w^{n+1} - w^n}{k} \Big\|_2^2 \Big)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_T)},$$

koja slijedi iz Schwartzove nejednakosti, i procjene stabilnosti (4.18), (4.19).
Kako bi dokazali da w zadovoljava paraboličku varijacijsku nejednakost, primjetimo da za svaki $v \in C[0,T; H_0^1(\Omega)] \cap K$, postoji $v_{h,k}(t) \to v$ u $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ tako da vrijedi

$$v_{h,k}(t) = v^{n+1} \in K_h^{n+1} \text{ za } t \in (nk, (n+1)k]. \tag{4.22}$$

Kada zamijenimo takav v u (4.6) i sumiramo slijedi

$$k \sum_{n=0}^{N-1} (\frac{w^{n+1} - w^n}{k}, v^{n+1} - w^{n+1})_h + a(w^{n+\theta}, v^{n+1} - w^{n+1}) - (f^{n+\theta}, v^{n+1} - w^{n+1})_h \geq 0,$$

tako da vrijedi

$$\int_0^T (\frac{\partial \hat{w}_{h,k}}{\partial t}, v_{h,k} - w_{h,k})_h + a(w_{h,k}, v_{h,k} - w_{h,k}) - (f_{h,k}, v_{h,k} - w_{h,k})_h dt \geq (1-\theta)k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a(\frac{w^{n+1} - w^n}{k}, v^{n+1} - w^{n+1}) = \chi_{h,k}. \tag{4.23}$$

Koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost i nejednakost za normu $||v|| \leq S(h)|v|$ slijedi

$$\begin{aligned}|\chi_{h,k}| &\leq k^2(1-\theta)\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\Big|\frac{w^{n+1}-w^n}{k}\Big|_1^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}|v^{n+1}-w^{n+1}|_1^2\Big)^{1/2}\\ &\leq (1-\theta)kS(h)\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\Big|\frac{w^{n+1}-w^n}{k}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}|v^{n+1}-w^{n+1}|_1^2\Big)^{1/2}.\\ &\leq \text{const } k^{1/2}\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost slijedi iz $k(S(h))^2 \leq$ const, nejednakosti iz teorema stabilnosti (4.19) i jake konvergencije $v_{h,k}(t)$ iz (4.22).
Dakle, uzimajući limese u (4.23), pozivajući se na (4.21), (4.22), (4.7) i (4.8), te činjenice da slaba konvergencija od $w_{h,k}$ imlicira

$$\liminf_{h,k\to 0}\int_0^T a(w_{h,k}, w_{h,k})dt \geq \liminf_{h,k\to 0}\int_0^T \{2a(w_{h,k}, w) - a(w,w)\}dt = \int_0^T a(w,w)dt,$$

konačno dobivamo nejednakost Problema 2.

$$\int_0^T \{(\frac{\partial w}{\partial t}, v-w) + a(w, v-w) - (f, v-w)\}dt \geq 0 \tag{4.24}$$

za sve $v \in C[0,T; H_0^1(\Omega)] \cap K$, i inicijalni uvjet $w(0) = w_0$.
Za nejednakost koja vrijedi za sve $v \in K$, postoji niz

$$v_j \in C[0,T; H_0^1(\Omega)] \cap K \text{ takav da } v_j \to v \text{ u } L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$$

([11]).
Dakle, (4.24) vrijedi za sve $v \in K$, i w je rješenje Problema 2.
Jedinstvenost ovog rješenja imlicira da su limesi nizova $w_{h,k}, \hat{w}_{h,k}$ neovisni od podnizova te da nizovi konvergiraju. Dakle, vrijedi sljedeći teorem

Teorem 4.3.1. *Neka je* $f \in L^2(\Omega_T), G \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap C[0,T; H^1(\Omega)] \cap C(\overline{\Omega}_T), \partial G/\partial t \in L^2(\Omega_T), G \geq 0$ *skoro svuda na* $\partial\Omega \times (0,T)$ *i* $w_0 \in k(0)$. *Tada postoji jedinstveno rješenje Problema 2, kojem rješenje metode konačnih elemenata konvergira u smislu da*

$$\hat{w}_{h,k} \to w \text{ u } L^2(\Omega_T) \text{ i } \hat{w}_{h,k} \rightharpoonup w \text{ u } H^1(\Omega_T)$$

sto omogućuje uvjet stabilnosti (4.17).

Bibliografija

[1] A.E. Berger, M Ciment i J.C.W. Rogers, *Numerical Solution of a Diffusion Consumption Problem with a Free Boundary*, SIAM J. Num. Anal. (1975), br. 16, 646.

[2] H. Brezis, J.Math. pures appl. (1972), br. 51, 1–168.

[3] ______, C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci (1972), br. 274(A), 310–312.

[4] J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford Science Publications, 1984.

[5] G. Duvaut, *Résolution d'un probléme de Stefan (fusion d'un bloc de glace á zéro degrés)*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (1973), br. 276(A), 1461–1463.

[6] C. Elliott i Ockendon. J, *Weak and variational methods for moving boundary problems*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[7] A. Friedman, *Parabolic Variational Inequalities in One Space Dimension and Smoothness of Free Boundary*, Journal of Functional Analysis (1974), br. 18, 151–176.

[8] ______, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Robert E.Krieger Publishing Company, 1983.

[9] A. Friedman i D Kinderlehrer, *A one phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J (1975), br. 25, 1005–1035.

[10] T. Jonsson, *On the one dimensional Stefan problem*, Thesis (2013).

[11] J.L. Lions, *Quelques meťhodes de reśolution des problemes aux limites non lineáire*, Paris, Dunod, 1969.

[12] J.L. Lions i G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Wiley Periodicals, Inc., A Wiley Company, 1967.

[13] M.H. Protter i H.F Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Sažetak

U ovom radu proučavamo jednofazni Stefanov problem, rubni problem sa slobodnom granicom koja se pomiče uslijed djelovanja topline.
Stefanov problem prikazali smo kao proces otapljanja leda; matematički, kao jednadžbu provođenja s rubnim i inicijalnim uvjetom, te uvjetom na nepozatoj pomičnoj granici između vode i leda.
Zbog svojstva monotonosti invertibilnosti funkcije pomičnog ruba, Stefanov problem možemo prikazali u obliku paraboličke varijacijske nejednakosti za koje smo pokazali egzistenciju i jedinstvenost rješenja u Sobolevljevom prostoru, koji je također detaljno objašnjen.
Na kraju smo formirali diskretna rješenje pomoću metode konačnih elemenata, te dali rezultate stabilnosti i konvergencije za numerička rješenja problema.

Summary

In this thesis we analyze one-phase Stefan problem, boundary problem with moving barrier, which is moving due to heat transfer.
Stefan problem is process of a melting of ice; and mathematically, it is heat equation with initial and boundary condition, and condition on unknown barrier between water and ice.
Due to monotonicity and invertibility of the moving barrier function, we could transform Stefan problem in parabolic variational inequality, for which we showed uniqueness and existence of solution in Sobolev space, which is also explained in detail.
In the end we form discrete solution by means of finite element approximation, and give some results on stability and convergence for numerical solutions.

Životopis

Rođena san 02.08.1986. u Zagrebu. 2005. godine završila sam X. Gimnaziju u Zagrebu, prirodoslovno-matematički smjer, upisujem Visoku školu za poslovanje i upravljanje ”Baltazar Adam Krčelić” u Zaprešiću, te 2009. godine postajem stručna prvostupnica ekonomije, smjer menadžment u kulturi i turizmu. Godine 2008. upisujem preddiplomski studij Matematika, nastavnički smjer, kojeg i završavam 2012., te upisujem diplomski studij Primijenjena matematika.