SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Ivačić

OSNOVNI TEOREM INFINITEZIMALNOG RAČUNA I NJEGOVA REALIZACIJA U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mojoj mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na pomoći i velikodušnoj potpori pri izradi ovog rada. Također, zahvaljujem svim profesorima Matematičkog odsjeka, kao i mojim kolegama koji su bili uz mene tijekom mog visokoškolskog obrazovanja. Veliko hvala mojoj obitelji i prijateljima koji su mi uvijek bili podrška i oslonac.

Sadržaj

Uvod

Osnovni teorem infinitezimalnog računa povezuje ključne pojmove infinitezimalnog računa - pojam derivacije, antiderivacije i pojam određenog integrala. Jedan njegov mogući izričaj je putem formule $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, pri čemu je F diferencijabilna funkcija na $[a, b]$, a njezina derivacija F' je integrabilna na $[a, b]$. Taj teorem najčešće primjenjujemo kod računanja vrijednosti određenog integrala, odnosno kod računanja relativne površine područja omeđenog intervalom na osi x i grafom funkcije.

Problemom površine bavili su se već stari Grci (Arhimed), o čemu će više biti riječi u prvom poglavlju. Prvi objavljeni iskaz i dokaz nepotpune verzije Osnovnog teorema dao je James Gregory (1638. - 1675.). Nešto općenitiju verziju teorema dokazao je Isaac Barrow (1630. - 1677.). (vidi [6]). Uz infinitezimalni račun vezan je i najpoznatiji sukob u povijesti matematike, između Barrowovog učenika sir Isaaca Newtona (1642. - 1727.) i Gottfrieda Wilhelma von Leibniza (1646. - 1716.). Newton je dao veliki doprinos fizici i matematici, a među najpoznatijima je njegova univerzalna teorija gravitacije, dok je von Leibniz najpoznatiji po svojoj filozofiji i težnji k objedinjavanju znanosti. Newton je zamišljao česticu (točku) koja se giba u pravokutnom koordinatnom sustavu te s $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ i $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ označio njenu horizontalnu, odnosno vertikalnu brzinu i nazvao ih fluksijama tekućih veličina (fluensa) x i y pridruženih fluksu (toku) vremena. On je određivao koeficijent smjera tangente na krivulju po kojoj se ta točka giba (tj. omjer $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$) pomoću infinitezimalnog (beskonačno malog) prirasta o. Pritom je uočio da se inverzni problem sastoji u određivanju y iz poznavanja veze između x i $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Taj je problem također riješio i dobio osnovni teorem infinitezimalnog računa: deriviranje (određivanje koeficijenta smjera tangente na krivulju, tj. brzine iz puta) i integriranje (određivanje puta iz brzine) međusobno su inverzne operacije. Te rezultate dobio je u razdoblju 1665. - 1671., no prvi put ih je objavio tek 1736. godine. S druge strane, von Leibniz je 1672. godine dobio rezultate ekvivalentne Newtonovima, ali u drugom obliku. Promatrao je površinu ispod neke krivulje (na nekom intervalu) te je aproksimirao zbrojem površina pravokutnika širine 1 i visine y_i, tj. $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, gdje je y_i ordinata točke krivulje. Budući da su razmaci između dva susjedna x-a jednaki $x_{i+1} - x_i = 1$, zaključio je da je koeficijent smjera sekante između dviju susjednih točaka na krivulji (u smislu pomaka apscise za 1) jednak $\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = y_{i+1} - y_i$. Također, što je odabrana jedinica 1 manja, to je koeficijent smjera sekante bliži koeficijentu smjera tangente u lijevoj od dviju susjednih točaka. Odabranu jedinicu 1 prozvao je dx i dobio da je tražena površina ispod krivulje jednaka zbroju izraza oblika ydx, a koeficijent smjera tangente jednak je $\frac{dy}{dx}$, gdje je dy promjena y ako se x promijeni za dx. Vidimo da je von Leibniz, za razliku od Newtona, koeficijent smjera tangente dobio kao omjer infinitezimalnih prirasta osnovnih veličina (koje bi Newton zvao fluensi), a ne kao omjer fluksija (brzina). Na osnovi tih rezultata, von Leibniz je također zaključio da su postupci integriranja i deriviranja međusobno inverzni, tj. traženje koeficijenta smjera tangente i površine ispod krivulje međusobno su inverzni postupci. Godine 1676. Newton je u svom pismu von Leibnizu tvrdio da mu je ovaj ukrao metodu. U povijesti se smatralo da su argumenti na strani von Leibniza, najviše zbog poznatog nezgodnog Newtonovog karaktera. No, von Leibniz je 1673. godine posjetio London te je tada možda vidio Newtonove rukopise i, inspiriran njima, izveo svoju varijantu infinitezimalnog računa. Danas je sigurno da su obojica podjednako zaslužna za ovo otkriće, te da je von Leibniz potpuno drugačijim pristupom samostalno izveo svoje rezultate. Današnji oblik diferencijalnog i integralnog računa sličniji je von Leibnizovom jer je gotovo sve glavne današnje oznake i način pisanja uveo upravo on. Osim toga, njegov pristup je više matematički, dok je Newtonov pristup više fizikalan. (vidi [2]).

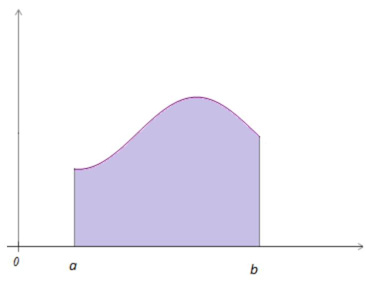
U prvom poglavlju ovog diplomskog rada opisana je realizacija Osnovnog teorema na studiju matematike, to jest sa strogo matematičkog stajališta. Za razliku od prvog poglavlja, u drugom i trećem poglavlju opisana je realizacija Osnovnog teorema u nastavi matematike na tehničkim fakultetima te u srednjoškolskoj nastavi matematike (matematička gimnazija). U srednjoškolskoj nastavi matematike primjena Osnovnog teorema ograničena je uglavnom na problem površine i računanje određenog integrala. Tako "usko" shvaćanje Osnovnog teorema, isključivo kao metode za računanje vrijednosti određenog integrala, ne dovodi do intuitivnog razumijevanja tog teorema. Važno je razvijati shvaćanje da je određeni integral brzine promjene funkcije na nekom intervalu jednak ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom intervalu. Takvim pristupom, kao i ostalim primjenama Osnovnog teorema, više ćemo se baviti u četvrtom i petom poglavlju.

Poglavlje 1

Matematička pozadina Osnovnog teorema na studiju matematike

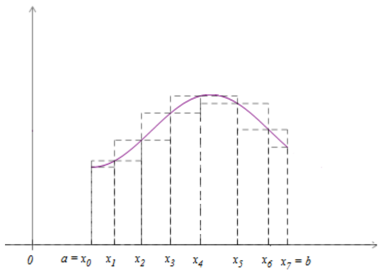
1.1 Problem površine

Površinu jednostavnih likova u ravnini (npr. kvadrata, pravokutnika, trokuta, trapeza,. . .) znamo lako odrediti. Također, podjelom na trokute, možemo odrediti površinu bilo kojeg mnogokuta. Međutim, na ovaj način ne možemo izračunati površinu lika kojemu je jedan rub opisan krivuljom. Primjer takvog lika je dio ravnine omeđen grafom funkcije (pseudotrapez) kao na slici 1.1.



Slika 1.1: Pseudotrapez

U ovom slučaju aproksimirat ćemo označeni dio ravnine jednostavnijim likovima čije površine znamo izračunati (vidi [7]). Primjerice, možemo ga aproksimirati pravokutnicima. Podijelimo segment $[a, b]$ na n ($n \in \mathbb{N}$) dijelova točkama $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ (u našem slučaju $n = 7$). Nacrtajmo upisane i opisane pravokutnike kojima je duljina jedne stranice jednaka duljini segmenta $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ (slika 1.2).



Slika 1.2: Aproksimacija pravokutnicima

Primijetimo da segmenti $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, ne moraju biti jednakih duljina. Označimo s p_k površinu $k-$tog upisanog pravokutnika, a s P_k površinu $k-$tog opisanog pravokutnika, pri čemu je $k = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$p_k = m_k(x_k - x_{k-1}), \;\; P_k = M_k(x_k - x_{k-1}), \;\; (k = 1, \ldots, n),$$

gdje je m_k visina $k-$tog upisanog pravokutnika, a M_k visina $k-$tog opisanog pravokutnika. Također, primijetimo da je u ovom slučaju m_k najmanja vrijednost, a M_k najveća vrijednost neprekidne funkcije čiji graf omeđuje lik, na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$. Očito je tražena površina P veća od zbroja površina upisanih pravokutnika i manja od zbroja površina opisanih pravokutnika. Dakle, vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq P \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Različitim podjelama segmenta $[a, b]$ dobivamo različite aproksimacije tražene površine odozdo, odnosno odozgo. Očigledno je da će aproksimacija biti bolja ako je podjela segmenta finija, to jest ako je segment $[a, b]$ podijeljen na što više dijelova. Također je jasno da se time zbroj površina upisanih pravokutnika povećava, a zbroj površina opisanih pravokutnika smanjuje. Opisana metoda naziva se **Arhimedova metoda iscrpljivanja ili ekshaustije**, po velikom grčkom matematičaru Arhimedu. On je opisanim postupkom računao površinu ispod parabole. Osim toga, računao je i površinu kruga upisujući mu i opisujući pravilne mnogokute. Povećavajući im broj stranica, mogao je izračunati površinu s dovoljnom preciznošću.

1.2 Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu

Prisjetimo se uvođenja Riemannovog integrala za klasu ograničenih funkcija na segmentu (vidi [7]).

Neka je $[a,b]$, $a < b$, segment u $\mathbb{R}$ i neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$. Dakle, postoje $m = \inf_{[a,b]} f$ i $M = \sup_{[a,b]} f$, to jest $\forall x \in [a,b]$, vrijedi $m \leq f(x) \leq M$. Analogno kao i prije, podijelimo segment $[a,b]$ na n ($n \in \mathbb{N}$) dijelova točkama $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Neka je $m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ i $M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$, $(k = 1,\dots,n)$. Odaberimo proizvoljnu točku t_k segmenta $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1,\dots,n)$. Definiramo sume:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\ \ \sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}),\ \ S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj s se naziva *donja Darbouxova suma*, S je *gornja Darbouxova suma*, a σ je *integralna suma*. S obzirom da je infimum na podsegmentu veći ili jednak infimumu na segmentu, a supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu, vrijedi:

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a).$$

Donje i gornje Darbouxove sume te integralna suma nisu jedinstvene, odnosno brojevi s, S i σ nisu jedinstveni. Sve te sume dobiju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$, svim različitim izborima podjele segmenta $[a,b]$ i točaka t_k. Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma s, B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S, a C je skup svih integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a,b]$. Iz gornje nejednakosti slijedi da su skupovi A, B i C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$. Prema aksiomu potpunosti postoje infimum i supremum skupa A, odnosno skupa B. Označimo:

$$I_*(f;[a,b]) = \sup A,\ \ I^*(f;[a,b]) = \inf B.$$

Definicija 1.2.1. *Broj I_* zovemo* ***donji Riemannov integral*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$, a broj I^* zovemo* ***gornji Riemannov integral*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Na temelju dosad spomenutog, jasno je da donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a,b]$.

Definicija 1.2.2. *Za funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a,b]$ kažemo da je* ***integrabilna u Riemannovom smislu*** *ili R-integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako je*

$$I_*(f;[a,b]) = I^*(f;[a,b]).$$

Tada se broj $I = I_* = I^*$ naziva ***određeni integral*** *ili R-integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava jednom od sljedećih oznaka:*

$$I = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

Vratimo se sada na problem računanja površine pseudotrapeza.

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ integrabilna funkcija na $[a,b]$ i neka je

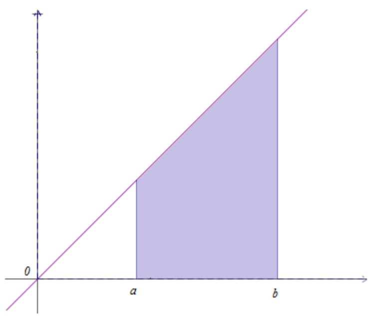
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 \leq y \leq f(x), \forall x \in [a,b]\}$$

pseudotrapez. Površinu pseudotrapeza definiramo s:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

U sljedećem primjeru izračunat ćemo integral jednostavne funkcije primjenom definicije (vidi [7]).

Primjer 1.2.3. *Neka je $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, i $a, b \in \mathbb{R}_+, a < b$. Izračunajmo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx$.*



Slika 1.3: Trapez

Kako je funkcija f pozitivna na $[a,b]$, to je po definiciji $\int_a^b f(x)dx$ jednak površini lika sa slike 1.3. Osjenčani lik je trapez s osnovicama duljine a i b, te visinom $b-a$. Njegovu površinu znamo odrediti: $P = \frac{a+b}{2}(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$. Izračunajmo sada njegovu površinu primjenom definicije Riemannovog integrala. Uzmimo proizvoljan prirodan broj n te podijelimo segment $[a,b]$ na n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Djelišne točke su oblika $x_k = a + kh, k = 0, 1, \ldots, n$. S obzirom da je f strogo rastuća na $\mathbb{R}$, to je $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$m_k = f(x_{k-1}) = a + (k-1)h, \ M_k = f(x_k) = a + kh.$$

Računamo donje Darbouxove sume:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)h)h = nha+h^2\sum_{k=1}^{n}(k-1) = nha+h^2\frac{(n-1)n}{2} = na\frac{b-a}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Analognim postupkom dobijemo gornje Darbouxove sume:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a+kh)h = ... = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Označimo:

$$A' = \{s_n; n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$B' = \{S_n; n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Uočimo da je $\sup A' = \inf B' = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. S obzirom da je skup A' podskup skupa svih donjih Darbouxovih suma, a skup B' podskup skupa svih gornjih Darbouxovih suma, vrijedi

$$\sup A' = \inf B' = \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Primijetimo da smo na oba načina dobili jednaku površinu.

Promotrimo sada primjer funkcije koja je ograničena na segmentu, ali nije integrabilna u Riemannovom smislu (vidi [12]).

Primjer 1.2.4. *Dirichletova funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definirana je sa:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & ; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Pokažimo da ta funkcija nije integrabilna u Riemannovom smislu.

Očito je funkcija f ograničena na segmentu $[0,1]$ i vrijedi:

$$m = \inf_{[0,1]} f = 0, \;\; M = \sup_{[0,1]} f = 1.$$

Podijelimo segment $[0,1]$ na n dijelova točkama

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = 1.$$

Sada je očito za $k = 1, \ldots, n$:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0, \;\; M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1,$$

budući da svaki segment $[x_{k-1}, x_k]$ sadrži racionalne i iracionalne brojeve. Računamo donju (s) i gornju (S) Darbouxovu sumu:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Očito će za svaku podjelu segmenta $[0,1]$, svaka donja Darbouxova suma biti jednaka 0, a svaka gornja Darbouxova suma biti jednaka 1. Neka je A skup svih donjih Darbouxovih suma, a B skup svih gornjih Darbouxovih suma. Očito je $I_*(f;[0,1]) = \sup A = 0$, a $I^*(f;[0,1]) = \inf B = 1$. Dakle, $I_*(f;[0,1]) \neq I^*(f;[0,1])$ pa zaključujemo da funkcija f nije integrabilna u Riemannovom smislu.

1.3 Primitivna funkcija. Newton - Leibnizova formula

Definicija 1.3.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$.* ***Primitivna funkcija*** *ili* ***antiderivacija*** *funkcije f na skupu I je svaka funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*

Ako je $G : I \to \mathbb{R}$ neka druga primitivna funkcija od f na intervalu I, to jest $G'(x) = f(x), \forall x \in I$, onda je:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Dakle, postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ tako da je $F(x) = G(x) + c, \forall x \in I$.

Definicija 1.3.2. *Neodređeni integral funkcije f na otvorenom intervalu I je skup svih primitivnih funkcija od f na I. Označavamo ga s $\int f(x)dx$. Ako je $F'(x) = f(x)$ na I, onda je po prethodnom zaključku*

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\},$$

što kraće zapisujemo u obliku

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Teorem 1.3.3. *Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$, te $x \in [a, b]$. Neka je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Tada je F diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i vrijedi $F'(x) = f(x)$.*

U dokazu ovog teorema koristit ćemo sljedeće svojstvo (vidi [8]):
Ako su $M, m \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$ za sve $x \in [a, b]$, onda je

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Dokaz. (Teorema 1.3.3.) Promatramo Newtonov kvocijent za $h \neq 0$, uz pretpostavku $x, x + h \in (a, b)$:

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right].$$

Iz svojstva integrala slijedi

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Pretpostavimo da je $h > 0$. Neka su $s, t \in [x, x+h]$ tako da je $f(s)$ maksimum, a $f(t)$ minimum od f na $[x, x+h]$. Označimo $m = f(t)$ i $M = f(s)$. Primjenom prethodno iskazanog svojstva, dobivamo

$$f(t)(x+h-x) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(s)(x+h-x),$$

odnosno

$$f(t)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(s)h.$$

Odavde dijeljenjem s $h > 0$ dobivamo

$$f(t) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(s).$$

Zamijenimo srednji dio ove nejednakosti izrazom $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$:

$$f(t) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(s). \tag{1.1}$$

Prethodnu nejednakost dokazali bismo analogno u slučaju $h < 0$. Neka sada $h \to 0$. S obzirom da su $s, t \in [x, x+h]$, vrijedi $s \to x$ i $t \to x$. Prema tome,

$$\lim_{h\to 0} f(t) = \lim_{t\to x} f(t) = f(x)$$

i

$$\lim_{h\to 0} f(s) = \lim_{s\to x} f(s) = f(x),$$

zbog neprekidnosti funkcije f u točki x. Po teoremu o sendviču iz nejednakosti (1.1) slijedi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x),$$

tj. F je primitivna funkcija od f, što je i trebalo pokazati. □

Pogledajmo primjenu tog teorema na konkretnim primjerima (vidi [3]).

Primjer 1.3.4. *Nađimo derivaciju funkcije* $g(x) = \int_4^x t^5 dt$.

Kako je funkcija $f(t) = t^5$ neprekidna, prema Teoremu 1.3.3, vrijedi

$$g'(x) = x^5.$$

Primjer 1.3.5. *Nađimo derivaciju funkcije* $g(x) = \int_{-2}^{x} e^{t^3} dt$.

Kako je funkcija $f(t) = e^{t^3}$ neprekidna, prema Teoremu 1.3.3, vrijedi

$$g'(x) = e^{x^3}.$$

Primjer 1.3.6. *Nađimo derivaciju funkcije* $g(x) = \int_{-1}^{x^2} e^{t^2} dt$.

U ovom primjeru gornja granica integracije nije x, već x^2 pa ćemo uvesti supstituciju $u = x^2$. Dakle, imamo

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^2} e^{t^2} dt = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{u} e^{t^2} dt = \frac{d}{du}\left[\int_{-1}^{u} e^{t^2} dt\right]\frac{du}{dx}. \tag{1.2}$$

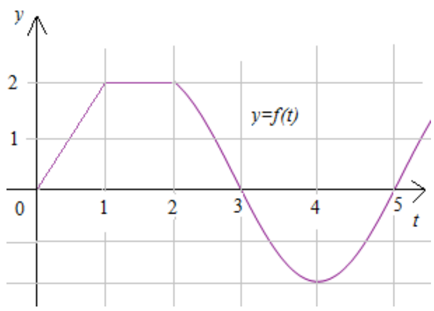
Kako je funkcija $f(t) = e^{t^2}$ neprekidna, prema Teoremu 1.3.3, vrijedi

$$\frac{d}{du}\left[\int_{-1}^{u} e^{t^2} dt\right] = e^{u^2}.$$

Prema tome, jednakost 1.2 postaje

$$e^{u^2}\frac{du}{dx} = e^{(x^2)^2}\cdot 2x = 2xe^{x^4}.$$

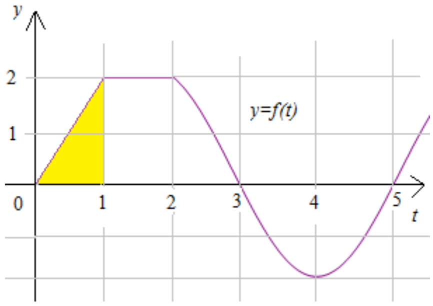
Primjer 1.3.7. *Na slici 1.4 prikazan je graf funkcije f. Neka je funkcija g zadana sa* $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. *Nađimo vrijednosti* $g(0),\ g(1),\ g(2),\ g(3),\ g(4)$ *i* $g(5)$.



Slika 1.4

Uočimo da je funkcija g zapravo **funkcija "bojanja površine**," tj. vrijednost $g(x)$ jednaka je relativnoj površini područja omeđenog grafom funkcije f i segmentom $[0, x]$. Očito je

$$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0.$$

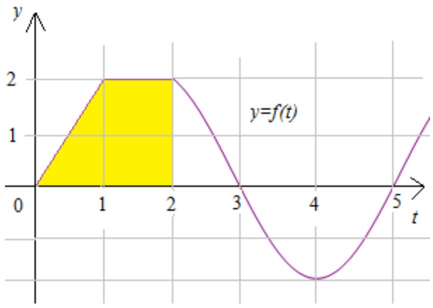


Slika 1.5

Vrijednost $g(1)$ jednaka je površini označenog trokuta na slici 1.5. Dakle,

$$g(1) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1.$$

Da bismo odredili $g(2)$, vrijednosti $g(1)$ dodajemo površinu pravokutnika (slika 1.6).



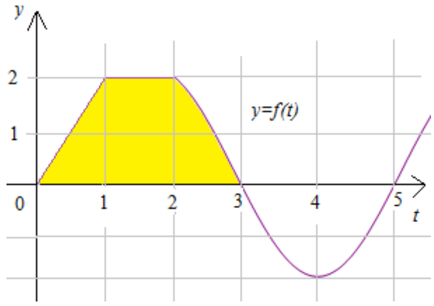
Slika 1.6

Dakle,

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3.$$

Površinu ispod grafa funkcije f između 2 i 3 ne možemo točno odrediti, pa procjenjujemo da iznosi približno 1.3 (slika 1.7). Prema tome,

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)dt \approx 3 + 1.3 = 4.3.$$

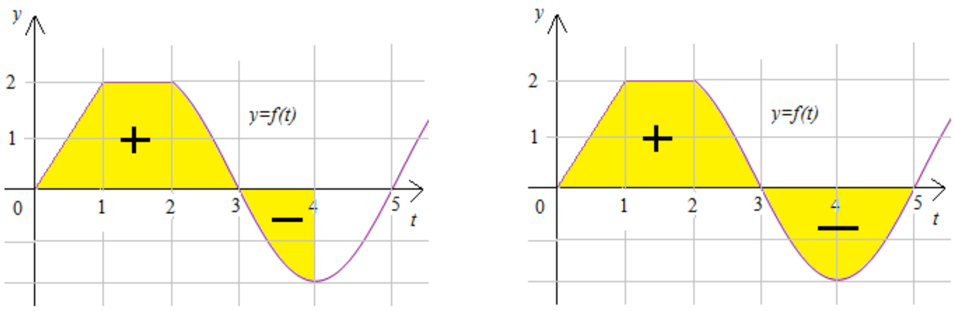


Slika 1.7

S obzirom da funkcija f poprima negativne vrijednosti za $t > 3$, moramo početi oduzimati označene površine (slika 1.8). Dakle,

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3,$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7.$$



Slika 1.8

Sada ćemo iskazati i dokazati Newton - Leibnizovu formulu (Osnovni teorem infinitezimalnog računa) koja daje vezu primitivne funkcije (pojma derivacije) i Riemannovog integrala funkcije.

Teorem 1.3.8. *Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ te F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a, b]$. Onda je:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Dokaz. Ako je F primitivna funkcija definirana s $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$, onda je $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Dakle, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Ako je G bilo koja druga primitivna funkcija od f na $[a, b]$, onda postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $G(x) = F(x) + c, \forall x \in [a, b]$. Sada je

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Gornji rezultat govori nam da ako želimo izračunati određeni integral neke neprekidne funkcije f na segmentu $[a, b]$, onda to možemo napraviti u dva koraka. Prvo nađemo bilo koju primitivnu funkciju F dane funkcije f, i nakon toga izračunamo vrijednosti funkcije F u krajevima segmenta, tj. u točkama b i a te ih oduzmimo. Uočimo da vrijednost određenog integrala funkcije f na $[a, b]$, tj. površina ispod grafa funkcije f, ovisi samo o vrijednostima koje primitivna funkcija F poprima u krajevima segmenta; što izgleda pomalo neočekivano.

Sada se možemo vratiti na primjer 1.2.3. i izračunati $\int_a^b xdx$ primjenom Newton - Leibnizove formule:

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}x^2|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Primijetimo koliko je ovaj način računanja vrijednosti Riemannovog integrala jednostavniji od računanja po definiciji.

Poglavlje 2

Metodička realizacija Osnovnog teorema na tehničkim fakultetima

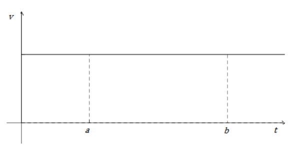
U ovom poglavlju opisana je realizacija Osnovnog teorema infinitezimalnog računa na tehničkim fakultetima, s naglaskom na Fakultet strojarstva i brodogradnje i udžbenik [11]. Vidjet ćemo neke sličnosti, ali i razlike u odnosu na prvo poglavlje. Glavna razlika je u tome što se na FSB-u, osim matematičkim, dosta pažnje posvećuje i fizikalnim problemima.

2.1 Putovi i površine

Dva problema koja nas asociraju na pojam integrala su fizikalni problem izračunavanja puta iz zadane brzine te geometrijski problem površine kojeg smo već "upoznali" u prethodnom poglavlju. Promotrimo sada problem izračunavanja puta iz zadane brzine. Ako je u vremenskom intervalu od $t = a$ do $t = b$ brzina v konstantna, onda je prijeđeni put u tom vremenskom intervalu jednak umnošku vrijednosti brzine i razlike krajnjeg i početnog vremena, odnosno

$$s(b) - s(a) = v(b - a) = v \cdot \Delta t.$$

Tu situaciju možemo prikazati v-t grafom (slika 2.1):



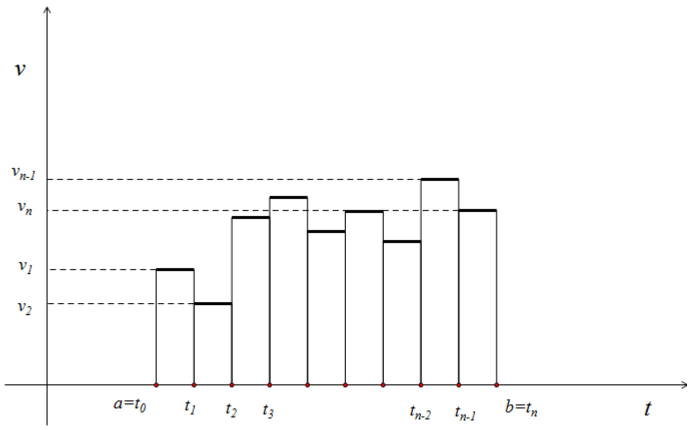
Slika 2.1

Uočimo da je $v(b-a)$ površina pravokutnika sa stranicama duljine $v > 0$ i $b - a > 0$. Stoga zaključujemo da je ukupni prijeđeni put u vremenskom intervalu od $t = a$ do $t = b$ jednak **površini** ispod grafa funkcije brzine v na intervalu (a, b).

Pogledajmo nešto općenitiji slučaj, kada brzina nije konstantna na cijelom vremenskom intervalu (a, b). Podijelimo taj vremenski interval na n manjih intervala

$$(t_0, t_1)\,, (t_1, t_2)\,, ..., (t_{n-1}, t_n)\,,$$

gdje je $t_0 = a$ i $t_n = b$. Pretpostavimo da je brzina gibanja v_i konstantna na svakom intervalu (t_{i-1}, t_i). Tu situaciju također možemo prikazati v-t grafom (slika 2.2):



Slika 2.2

U ovom slučaju, ukupni put koji tijelo prijeđe od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$ jednak je

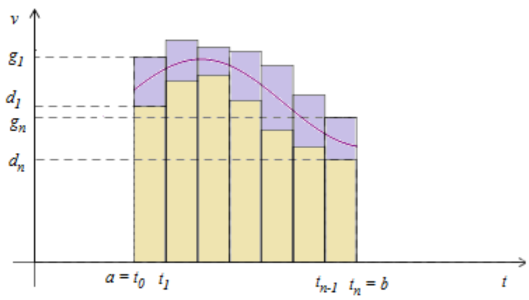
$$s(b) - s(a) = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i,$$

gdje je $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Ta suma predstavlja zbroj površina pravokutnika kojima su stranice duljina Δt_i i v_i. Prema tome, ukupni prijeđeni put jednak je **površini** ispod grafa "skokovite" funkcije brzine v.

Prethodne situacije pravocrtnog gibanja donekle su idealizirane jer se radi o skokovitim promjenama brzine. Promotrimo sada općeniti slučaj, kada se brzina tijela mijenja kontinuirano s vremenom, odnosno funkcija v je neprekidna (bez skokova). Analogno kao i prije, podijelit ćemo vremenski interval (a, b) na n manjih intervala $(t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n)$, gdje je $t_0 = a$ i $t_n = b$. Odaberimo konstante d_i i g_i takve da bude

$$d_i \leq f(t) \leq g_i,$$

za $t \in (t_{i-1}, t_i)$. Prikažimo navedenu situaciju v-t grafom (slika 2.3):



Slika 2.3

S obzirom da tijela koja se brže gibaju prelaze veće putove, zaključujemo da će tijelo tijekom vremenskog intervala $\Delta t_i = (t_{i-1}, t_i)$ prijeći udaljenost veću od $d_i \Delta t_i$ i manju od $g_i \Delta t_i$. Prema tome, ukupni put prijeđen od trenutka a do trenutka b veći je od $\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta t_i$ i manji od $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta t_i$. Dakle, vrijedi:

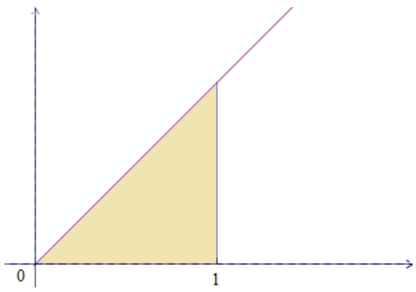
$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta t_i \leq s(b) - s(a) \leq \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta t_i.$$

Kako je $\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta t_i$ jednaka zbroju površina smeđih pravokutnika, a $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta t_i$ zbroju površina ljubičastih pravokutnika sa slike 2.3, zaključujemo da je ukupni prijeđeni put jednak **površini** područja ispod grafa funkcije v. Povećavanjem broja dijelova na koje je podijeljen interval (a, b) postići ćemo bolju aproksimaciju prijeđenog puta.

Promotrimo sada problem izračunavanja površine ispod grafa funkcije.

Primjer 2.1.1. *Izračunajmo površinu P ispod grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ na intervalu* $[0, 1]$.

Ovaj primjer sličan je primjeru 1.2.3 iz prethodnog poglavlja, gdje smo trebali izračunati određeni integral $\int_a^b x dx$ primjenom definicije Riemannovog integrala. U ovom poglavlju još nismo definirali pojam integrala, pa ćemo traženu površinu odrediti pomoću donjih i gornjih procjena.



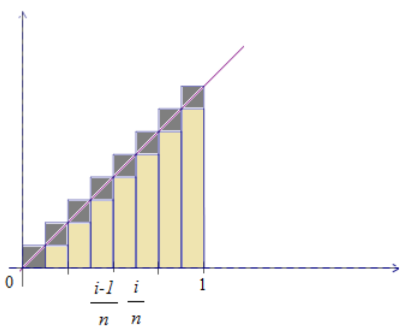
Slika 2.4

Na slici 2.4 prikazan je graf funkcije f i označeni je dio ispod grafa na intervalu $[0,1]$. Uočavamo da je tražena površina zapravo jednaka površini označenog pravokutnog trokuta i iznosi $P=\frac{1}{2}$. Podijelimo interval $[0,1]$ na n jednakih dijelova duljine $\frac{1}{n}$. Dobivamo djelišne točke $0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n-1}{n}<1$. Definiramo konstante: $d_i=\frac{i-1}{n}$, za $x\in\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)$ i $g_i=\frac{i}{n}$, za $x\in\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)$. S obzirom da je $f(x)=x$, onda za $x\in\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)$ sigurno vrijedi $d_i\le f(x)\le g_i$. Računamo donje i gornje sume (procjene):

$$D=\sum_{i=1}^{n} d_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

$$G=\sum_{i=1}^{n} g_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Na slici 2.5 prikazane su donje i gornje sume.



Slika 2.5

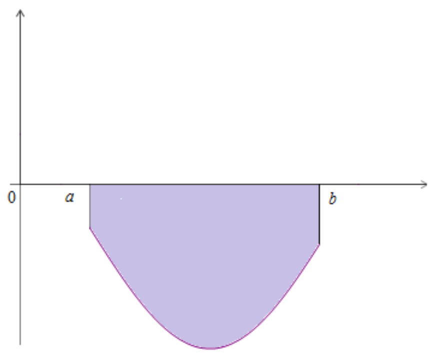
Vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq P \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Točnu površinu dobit ćemo ako povećamo broj dijelova na koje je podijeljen interval $[0, 1]$, odnosno ako $n \to \infty$. Tada dobivamo $P = \frac{1}{2}$, što smo i očekivali.

2.2 Relativna površina

Dosad smo uglavnom promatrali samo situacije u kojima je funkcija f poprimala pozitivne vrijednosti na segmentu $[a, b]$. Ukoliko bismo trebali izračunati površinu pseudotrapeza na slici 2.6, onda bismo računanjem Riemannovog integrala po definiciji, dobili negativnu vrijednost (vidi Poglavlje 1).



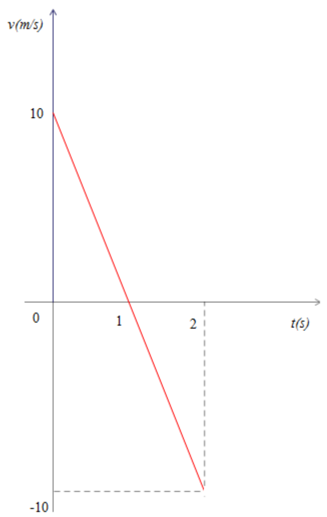
Slika 2.6

Naime, tada su donje i gornje Darbouxove sume te integralne sume negativne, jer je vrijednost funkcije f u svakoj točki segmenta $[a, b]$ negativan broj. Očito tražena površina nije negativna, pa je u tom slučaju ona jednaka negativnoj vrijednosti Riemannovog integrala, tj. $P = -\int_a^b f(x)dx$.

Promotrimo prethodnu situaciju s fizikalnog aspekta, na primjeru **vertikalnog hica** uvis. Vertikalan hitac je kretanje tijela u polju Zemljine teže, bačeno početnom brzinom v_0. Jednadžba gibanja tog tijela ima oblik

$$v = v_0 - gt,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada i iznosi približno 10 m/s^2. Neka je npr. $v_0 = 10$ m/s. Tada je $v(t) = 10 - 10t$, tj. $v(1) = 0$, a $v(2) = -10$. Drugim riječima, za jednu sekundu, tijelo postigne najveći domet i onda počinje padati. Na slici 2.7 nalazi se v-t graf za opisano gibanje. Iz tog grafa vidimo da je brzina pozitivna do prve sekunde, a negativna od prve do druge sekunde.



Slika 2.7

Pomak tijela u odnosu na početni položaj računamo integriranjem izraza za brzinu, tj.

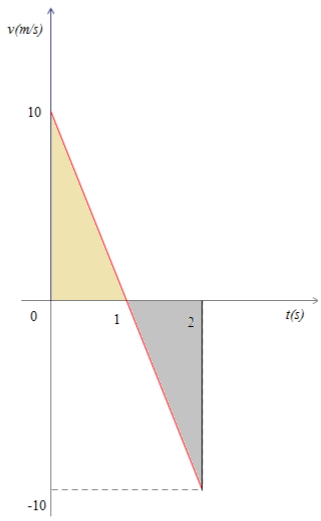
$$s = \int v dt = \int (v_0 - gt)dt = v_0 t - g\frac{t^2}{2} + c,$$

a kako je $s(0) = 0$, to je konstanta c jednaka nuli. Izračunajmo pomak tijela nakon dvije sekunde:

$$s(2) = 10 \cdot 2 - 10 \cdot \frac{4}{2} = 20 - 20 = 0.$$

Dakle, za dvije sekunde tijelo se vratilo u početni položaj.

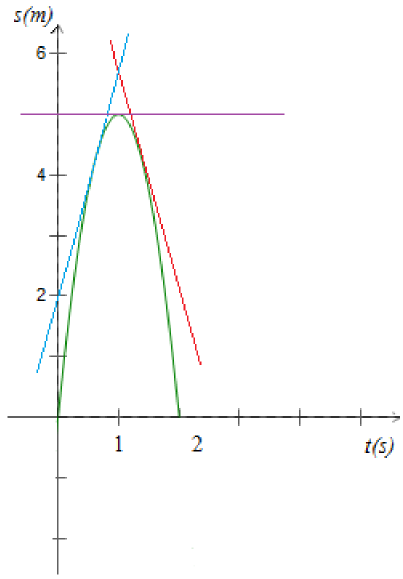
Primijetimo da smo to mogli odrediti i na drugi način, računanjem relativne površine područja omeđenog grafom funkcije v na intervalu $[0, 2]$ (slika 2.8).



Slika 2.8

Tražena relativna površina jednaka je razlici površina označenih trokuta, tj. $\frac{10}{2} - \frac{10}{2} = 5 - 5 = 0$, što smo i očekivali. S druge strane, ukupni **prijeđeni put** u prve dvije sekunde jednak je zbroju površina označenih trokuta, tj. $5 + 5 = 10$, što nam daje do znanja da trebamo razlikovati pomak (relativni put) od prijeđenog puta.

Nacrtajmo još s-t graf koji prikazuje pomak tijela (u metrima) u ovisnosti o vremenu (u sekundama) (slika 2.9).



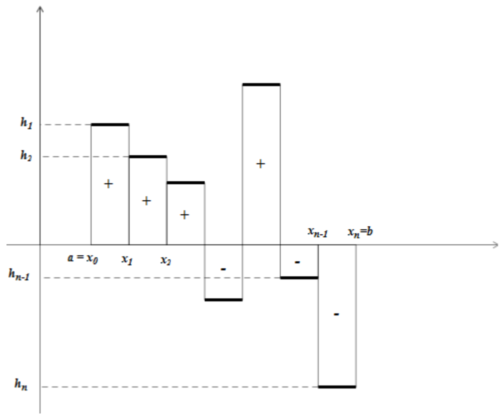
Slika 2.9

Graf je parabola s jednadžbom $s = 10t - 5t^2$. Koeficijent smjera tangente na parabolu u točki $(t, s(t))$ jednak je brzini tijela u trenutku t. Vidimo sa slike 2.9 da je koeficijent smjera tangente pozitivan za $0 \leq t < 1$, za $t = 1$ jednak je nuli, a za $1 < t \leq 2$ je negativan. Stoga zaključujemo da je brzina tijela pozitivna do prve sekunde i negativna od prve do druge sekunde, dok je $v(1) = 0$, što smo već prije uočili.

2.3 Definicija integrala i Osnovni teorem infinitezimalnog računa

Prije nego što definiramo integral, apstrahirat ćemo realni kontekst. Drugim riječima, zanemarit ćemo interpretaciju funkcije f (kao brzine) i intervala $[a,b]$ (kao vremenskog intervala).

Definicija 2.3.1. *Funkcija h definirana na $[a,b]$ je **stepenasta funkcija** ako postoji razdioba intervala $[a,b]$ točkama $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ takva da je funkcija h konstantna na svakom od intervala $(x_0, x_1), ..., (x_{n-1}, x_n)$.*



Slika 2.10: Stepenasta funkcija

Definicija 2.3.2. ***Integral stepenaste funkcije** h na intervalu $[a,b]$ je broj H zadan sa*

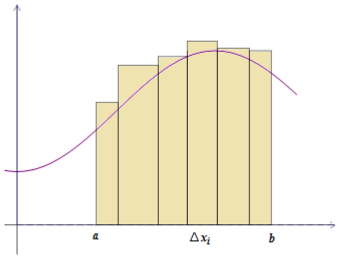
$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i,$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a h_i je konstantna vrijednost funkcije h na intervalu (x_{i-1}, x_i).

Jasno je da je integral stepenaste funkcije h na $[a,b]$ jednak relativnoj površini područja koje se proteže od intervala $[a,b]$ na osi x, do grafa funkcije h.

Definicija 2.3.3. *G je **gornja suma** za f na $[a,b]$ ako postoji stepenasta funkcija g na $[a,b]$, takva da je $g(x) \geq f(x)$ za sve $x \in [a,b]$ i G je integral od g na $[a,b]$, tj.*

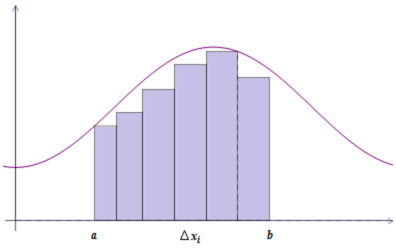
$$G = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i.$$



Slika 2.11: Gornja suma

*D je **donja suma** za f na $[a, b]$ ako postoji stepenasta funkcija d na $[a, b]$, takva da je $d(x) \leq f(x)$ za sve $x \in [a, b]$ i D je integral od d na $[a, b]$, tj.*

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i.$$



Slika 2.12: Donja suma

Definicija 2.3.4. *Ako na $[a, b]$ postoje gornje i donje sume za f koje se po volji malo razlikuju, onda postoji jedan jedini broj I koji je veći ili jednak od svih donjih suma D i manji ili jednak od svih gornjih suma G, $D \leq I \leq G$. Taj je broj **integral** funkcije f na intervalu $[a, b]$. Označavamo ga: $I = \int_a^b f(x)dx$. Ako postoji integral od f na $[a, b]$, onda kraće kažemo da je funkcija f integrabilna na $[a, b]$. Dakle, ako je f integrabilna na $[a, b]$, onda nejednakosti*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i,$$

vrijede za sve stepenaste funkcije d i g, takve da je $d(x) \leq f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, b]$, a $\int_a^b f(x)dx$ jedini je broj koji ima to svojstvo.

Jasno je da je integral funkcije f na $[a, b]$ jednak relativnoj površini područja koje se proteže od intervala $[a, b]$ na osi x, do grafa funkcije f (analogija s relativnim putom).

Uočimo da bi računanje određenog integrala funkcije f, odnosno računanje relativne površine područja koje se proteže od intervala $[a, b]$ na osi x, do grafa funkcije f, pomoću donjih i gornjih suma, bilo dugotrajno i zahtjevno. Stoga nam je potreban lakši i jednostavniji način. Prisjetimo se, ako $F(x)$ predstavlja put što ga tijelo prijeđe do trenutka x, onda derivacija $F'(x)$ predstavlja brzinu tijela u trenutku x. Znamo da je relativni put $F(b) - F(a)$ što ga tijelo prijeđe od trenutka a do trenutka b, jednak relativnoj površini ispod grafa brzine $F'(x)$, tj.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

Ta veza integrala i derivacije vrijedi i općenito, neovisno o interpretaciji funkcije F i predstavlja temeljnu sponu diferencijalnog i integralnog računa.

Teorem 2.3.5. *(Osnovni teorem infinitezimalnog računa) Ako je funkcija diferencijabilna na* $[a, b]$ *, a njezina je derivacija* F' *integrabilna na* $[a, b]$ *, onda*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Drugim riječima, ako je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ i ima antiderivaciju F, onda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Trebamo dokazati da je broj $F(b) - F(a)$ manji ili jednak od svake gornje sume i veći ili jednak od svake donje sume. Pokažimo prvo da je broj $F(b) - F(a)$ manji ili jednak od svake gornje sume za funkciju f na $[a, b]$. Neka je g stepenasta funkcija takva da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Neka su g_i vrijednosti stepenaste funkcije g na intervalima particije (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, ..., n$. Na intervalu (x_{i-1}, x_i) vrijedi $f(x) = F'(x) \leq g_i$. Prema tome, ako je brzina kojom se F mijenja na intervalu (x_{i-1}, x_i) stalno manja od konstantne brzine g_i, onda je i ukupna promjena $F(x_i) - F(x_{i-1})$ manja od $g_i(x_i - x_{i-1})$. Dakle, vrijedi

$$g_i \Delta x_i \geq F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Zbrajanjem tih nejednakosti od $i = 1$ do $i = n$, dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + ... + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

što je i trebalo pokazati. Slično dokazujemo da je broj $F(b) - F(a)$ veći ili jednak od svake donje sume za funkciju f na $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dakle, $F(b) - F(a)$ je broj veći ili jednak od svake donje i manji ili jednak od svake gornje sume za f, tj. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$, što smo i trebali dokazati. □

Sada se možemo vratiti na primjer 2.1.1 i izračunati površinu P ispod grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$ pomoću integrala:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 |_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Primijetimo koliko je ovaj način jednostavniji od računanja pomoću donjih i gornjih suma.

Sadržaj Osnovnog teorema zapravo daje vezu brzine promjene i ukupne (relativne) promjene neke veličine.

Definicija 2.3.6. *Ako je brzina promjene veličine V u odnosu na x zadana sa $\frac{dV}{dx} = f(x)$, onda je ukupna promjena veličine V od $x = a$ do $x = b$ dana sa:*

$$\Delta V = V(b) - V(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Time ćemo se više baviti u zadnjem poglavlju.

Na temelju prva dva poglavlja možemo usporediti realizaciju Osnovnog teorema na studiju matematike te na tehničkim fakultetima. Primjećujemo da se na tehničkim fakultetima pojam Riemannovog integrala ne definira tako strogo kao na studiju matematike. Osim toga, dokaz Osnovnog teorema je nešto jednostavniji. Međutim, na tehničkim fakultetima (FSB) dan je jedan potpuno drugačiji i zanimljiv pristup pojmovima donjih i gornjih suma te integrala - veliki naglasak stavljen je na brzinu, put i vrijeme.

Poglavlje 3

Metodička realizacija Osnovnog teorema u srednjoškolskoj nastavi matematike

3.1 Neodređeni integral i primitivna funkcija

Pojam neodređenog integrala i primitivne funkcije u srednjim se školama uvodi putem raznih primjera iz realnog svijeta (vidi [1]).

Primjer 3.1.1. *Nakon što se tanker nasukao na hrid, počeo je ispuštati naftu. Brzina kojom se naftna mrlja širi ovisi o broju x minuta nakon početka ispuštanja i dana je formulom $P'(x) = 3x^2 + 2$ kvadratnih metara u minuti. Odredimo površinu naftne mrlje nakon sat vremena.*

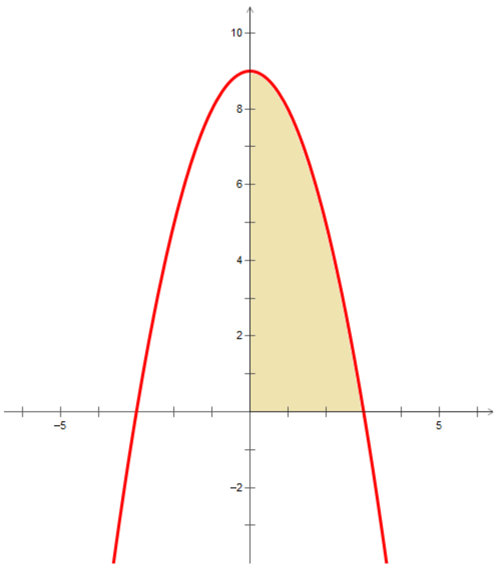
Da bismo odredili površinu naftne mrlje nakon sat vremena, moramo naći funkciju $P = P(x)$ koja računa površinu mrlje u ovisnosti o x minuta. Poznata nam je brzina promjene te površine, tj. poznato nam je $\frac{dP}{dx}$, a traži se površina P. Stoga se pitamo koju funkciju treba derivirati da bi se dobilo $3x^2+2$. Deriviranjem lako provjerimo da je tražena funkcija oblika $P(x) = x^3 + 2x + c, c \in \mathbb{R}$. Znamo da je površina naftne mrlje u početnom trenutku bila jednaka nuli, to jest $P(0) = 0$. Prema tome, konstanta c jednaka je nuli. Dakle, površina naftne mrlje nakon sat vremena jednaka je $P(60) = 60^3 + 2 \cdot 60 = 216120$ m^2.

Definicija 3.1.2. *Neka je $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada svaku funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ nazivamo **primitivna funkcija** ili **antiderivacija** funkcije f. Skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f zove se **neodređeni integral** funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$. To zapisujemo ovako: $\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.*

3.2 Određeni integral

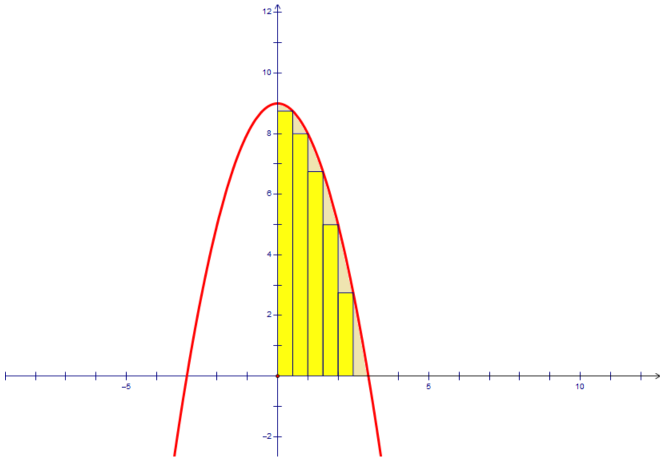
U srednjim se školama pojam određenog integrala uvodi preko **problema mjerenja površine** ravninskih likova omeđenih zakrivljenom linijom. Slično kao i kod poligona, podijelimo taj lik na manje dijelove koje nazivamo krivocrtni trapezi. Tako se problem računanja površine ravninskog lika svodi na problem određivanja površine krivocrtnog trapeza ispod grafa neke funkcije. Za razliku od prva dva poglavlja, ovdje krećemo od konkretnog primjera, što je bilo i za očekivati. Prirodno je u srednjoj školi početi s konkretnim primjerima na temelju kojih učenici generaliziraju (vidi [1]).

Primjer 3.2.1. *Odredimo površinu ispod grafa funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 9 - x^2$ *na intervalu* $[0, 3]$.

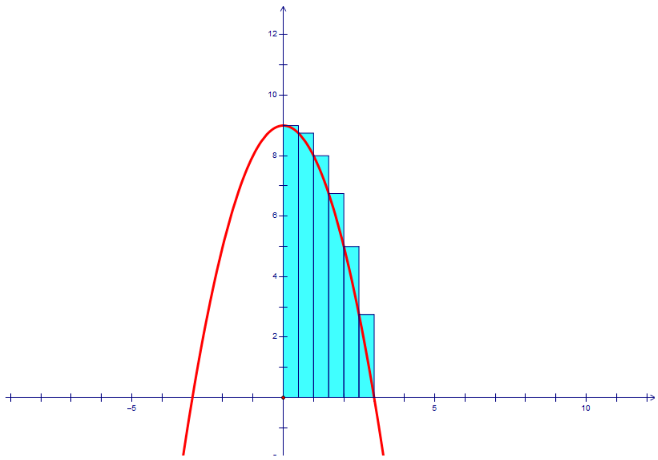


Slika 3.1: Površina ispod grafa funkcije f na intervalu $[0, 3]$

Osnovna je ideja površinu ispod grafa ove funkcije aproksimirati površinom niza upisanih ili opisanih pravokutnika kao na slikama 3.2 i 3.3. Uočimo da smo interval $[0, 3]$ podijelili na šest jednakih intervala duljine $\frac{1}{2}$. Nad svakim dijelom (intervalom) smo nacrtali upisani i opisani pravokutnik. Pritom je visina jednog upisanog pravokutnika jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije f na tom intervalu, a postiže se u krajnjoj točki tog intervala (jer je f padajuća na $[0, 3]$). Također, uočavamo da je visina jednog opisanog pravokutnika jednaka maksimalnoj vrijednosti funkcije f na tom intervalu, a postiže se u početnoj točki tog intervala.



Slika 3.2: Aproksimacija površinom niza upisanih pravokutnika



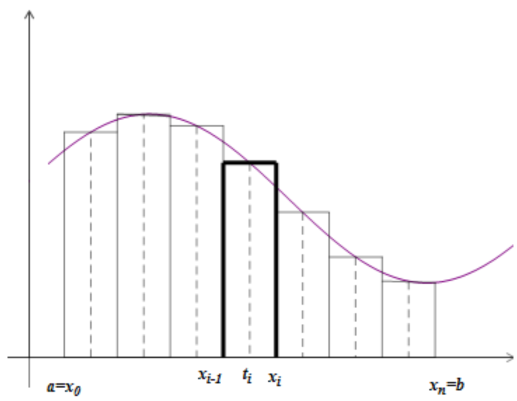
Slika 3.3: Aproksimacija površinom niza opisanih pravokutnika

Mjerenjem u alatu dinamične geometrije ili računanjem dobivamo da je ukupna površina upisanih pravokutnika približno 15.63 kvadratne jedinice, a ukupna površina opisanih pravokutnika približno 20.13 kvadratnih jedinica. Očito je stvarna površina ispod grafa funkcije f između brojeva 15.63 i 20.13, što je vrlo gruba aproksimacija. Bolju aproksimaciju dobit ćemo ako povećamo broj upisanih ili opisanih pravokutnika, tj., ako podijelimo interval $[0, 3]$ na sve veći broj intervala što manje duljine. Time će se smanjivati razlika između zbroja površina upisanih pravokutnika (tzv. **donjeg integralnog zbroja**) i zbroja površina opisanih pravokutnika (tzv. **gornjeg integralnog zbroja**). Kasnije ćemo se uvjeriti da granična vrijednost obaju zbrojeva daje stvarnu površinu, koja iznosi 18.

Općenito, neka je f neprekidna i pozitivna funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Da bismo izračunali površinu ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$, podijelit ćemo taj interval na n manjih intervala. To možemo učiniti točkama

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Radi jednostavnosti možemo umjesto opisanih i upisanih pravokutnika nad svakim malim intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ promatrati pravokutnike visine $f(t_i)$, gdje je t_i proizvoljna točka intervala $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, \ldots, n)$. Uočimo da su ovi pravokutnici "uklopljeni" između upisanih i opisanih pravokutnika (slika 3.4).



Slika 3.4

Površina i-tog takvog pravokutnika jednaka je

$$P_i = f(t_i) \cdot \Delta x_i,$$

gdje je Δx_i duljina intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Takvih pravokutnika ima ukupno n, pa je zbroj njihovih površina jednak

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(t_n) \cdot \Delta x_n.$$

Taj zbroj nazivamo **integralni zbroj** funkcije f na intervalu $[a, b]$ te je on jedna aproksimacija površine ispod grafa funkcije f. Kao što smo već spomenuli, želimo li dobiti bolju aproksimaciju tražene površine, interval $[a, b]$ moramo podijeliti na sve veći broj intervala. Time dobivamo sve više pravokutnika kojima se duljina sve više smanjuje, a njihova površina sve bolje aproksimira traženu površinu. Ako smo interval $[a, b]$ dijelili na n jednakih dijelova, onda duljina Δx_i svakog pravokutnika iznosi $\delta_n = \frac{b-a}{n}$. U suprotnom, možemo uzeti da je δ_n najveća duljina od svih duljina Δx_i. Ako interval $[a, b]$ podijelimo na sve veći broj intervala, duljina δ_n svakog pravokutnika se sve više smanjuje, odnosno teži k nuli. Time dobivamo stvarnu površinu ispod grafa funkcije f kao graničnu vrijednost ili limes integralnih zbrojeva kada $\delta_n \to 0$.

Definicija 3.2.2. ***Određeni integral*** *funkcije f na intervalu $[a, b]$ (ili od a do b) limes je integralnih zbrojeva, kada $\delta_n \to 0$. Pišemo:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i.$$

Broj a je ***donja granica****, a broj b* ***gornja granica*** *integrala.*

Sada se možemo vratiti na početni problem određivanja površine ispod grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 9 - x^2$ na intervalu $[0, 3]$. Dakle, trebamo izračunati određeni integral $\int_0^3 (9 - x^2)dx$ kao limes integralnih zbrojeva.

Podijelimo interval $[0, 3]$ na n jednakih dijelova. Svaki je duljine

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}.$$

Dobivamo n intervala:

$$\left[0, \frac{3}{n}\right], \left[\frac{3}{n}, \frac{6}{n}\right], \left[\frac{6}{n}, \frac{9}{n}\right], \ldots, \left[\frac{3(n-1)}{n}, \frac{3n}{n}\right].$$

Na svakom intervalu odaberemo točku $t_i = x_i = \frac{3i}{n}$, odnosno

$$t_1 = \frac{3}{n},\ t_2 = \frac{6}{n},\ t_3 = \frac{9}{n}, ..., \ t_n = \frac{3n}{n} = 3.$$

Računamo vrijednost funkcije f u točkama t_i :

$$f(t_i) = 9 - t_i^2 = 9 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2 = 9 - \frac{9i^2}{n^2}.$$

Tada je integralni zbroj:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(9 - \frac{9i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{27}{n} - \frac{27i^2}{n^3}\right) = \frac{27}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{27}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

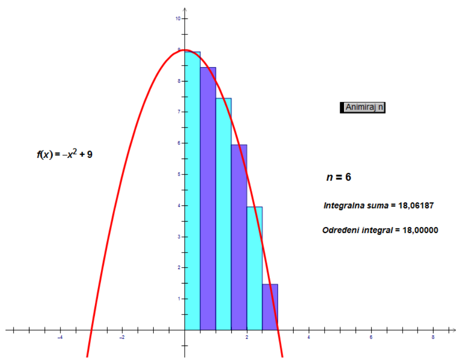
$$= \frac{27}{n} \cdot n - \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 27 - \frac{9}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Sada je

$$\int_0^3 (9-x^2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(27 - \frac{9}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) = 27 - \frac{9}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2}$$

$$= 27 - \frac{9}{2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 27 - 9 = 18.$$

Dakle, površina ispod grafa funkcije f na intervalu $[0, 3]$ iznosi 18 kvadratnih jedinica, što smo i očekivali. U alatu dinamične geometrije možemo povećavati broj dijelova na koje je podijeljen interval $[0, 3]$ te se uvjeriti u prethodne zaključke. Vidimo da se time duljina svih pravokutnika sve više smanjuje te zbroj njihovih površina sve bolje „pokriva" traženu površinu ispod grafa funkcije f.



Slika 3.5: Određeni integral kao limes integralnih suma

Vidimo da je ovakav način računanja površine ispod grafa funkcije, odnosno određenog integrala, vrlo dugotrajan i neefikasan. Prema tome, potreban nam je novi "alat" za računanje određenog integrala.

3.3 Newton - Leibnizova formula

U nastavi matematike u srednjoj školi, Osnovni teorem infinitezimalnog računa obrađuje se pod nazivom Newton - Leibnizova formula. Uvodi se putem primjera iz realnog konteksta (vidi [1]).

Primjer 3.3.1. *Brzina automobila u trenutku t (sekundi) nakon početka kretanja dana je u m/s formulom $v(t) = 2.3t$. Deset sekundi nakon početka kretanja automobil se nastavlja kretati konstantnom brzinom po pravcu. Odredimo koliki je put u metrima automobil prešao od početka kretanja do trenutka kad je nastavio voziti konstantnom brzinom. Nacrtajmo graf funkcije v i izračunajmo površinu ispod grafa te funkcije na intervalu [0,10].*

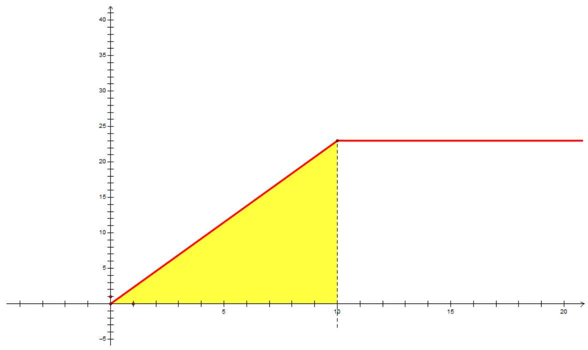
Znamo da je trenutna brzina derivacija puta po vremenu, to jest $v(t) = s'(t)$. Da bismo odredili ovisnost puta o vremenu, moramo odrediti primitivnu funkciju funkcije v. Dakle,

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 2.3tdt = 2.3 \int tdt = 2.3 \cdot \frac{t^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Znamo da je $s(0) = 0$, to jest, na početku kretanja prijeđeni put je 0 metara. Iz toga dobivamo da je konstanta c jednaka nuli. Prema tome, put koji je automobil prešao (u metrima) od početka kretanja do trenutka kad je nastavio voziti konstantnom brzinom jednak je razlici

$$s(10) - s(0) = 2.3 \cdot \frac{10^2}{2} - 0 = 2.3 \cdot 50 = 115.$$

Ta konstantna brzina iznosi $v(10) = 2.3 \cdot 10 = 23$ m/s. Nacrtajmo graf funkcije v i označimo dio ispod grafa te funkcije na intervalu [0, 10] (slika 3.6).



Slika 3.6

Površina označenog dijela jednaka je površini označenog pravokutnog trokuta i iznosi

$$P = \frac{10 \cdot 23}{2} = \frac{230}{2} = 115.$$

Uočavamo da smo u oba dijela zadatka dobili jednaki rezultat, pa zaključujemo da površina ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 10]$ predstavlja put koji je automobil prešao deset sekundi od početka kretanja. Znamo da je površina ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 10]$ jednaka određenom integralu $\int_0^{10} v(t)dt$. Dakle, vrijedi

$$\int_0^{10} v(t)dt = 115.$$

S obzirom da površina ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 10]$ predstavlja put koji je automobil prešao deset sekundi od početka kretanja, vrijedi

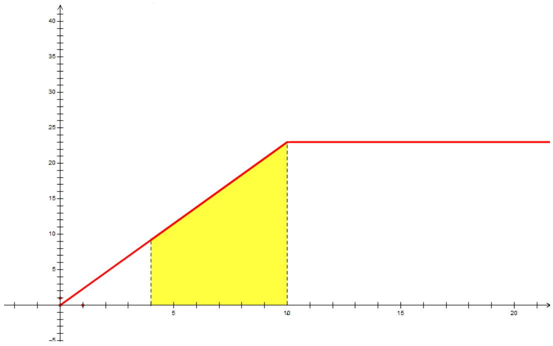
$$\int_0^{10} v(t)dt = \int_0^{10} 2.3tdt = s(10) - s(0) = 115,$$

gdje je $s(t) = \int 2.3tdt$. Dakle, određeni integral funkcije v na intervalu $[0, 10]$ jednak je razlici vrijednosti primitivne funkcije od v na kraju i početku intervala.

Provjerimo vrijedi li uočena pravilnost i na ostalim analognim primjerima. Primjerice, odredimo put (u metrima) koji je automobil prešao između četvrte i desete sekunde:

$$s(10) - s(4) = 2.3 \cdot \frac{10^2}{2} - 2.3 \cdot \frac{4^2}{2} = 115 - 18.4 = 96.6.$$

Nacrtajmo graf funkcije v i označimo dio ispod grafa te funkcije na intervalu $[4, 10]$ (slika 3.7).



Slika 3.7

Površina označenog dijela jednaka je površini označenog trapeza i iznosi

$$P = \frac{23 + 9.2}{2} \cdot 6 = 16.1 \cdot 6 = 96.6,$$

gdje je $v(4) = 9.2$. Uočavamo da smo u oba dijela zadatka dobili jednaki rezultat, pa zaključujemo da površina ispod grafa funkcije v na intervalu $[4, 10]$ predstavlja put koji je automobil prešao između četvrte i desete sekunde. Znamo da je površina ispod grafa funkcije v na intervalu $[4, 10]$ jednaka određenom integralu $\int_4^{10} v(t)dt$. Dakle, vrijedi

$$\int_4^{10} v(t)dt = 96.6.$$

Na temelju dobivenih jednakosti zaključujemo da vrijedi

$$\int_4^{10} v(t)dt = \int_4^{10} 2.3tdt = s(10) - s(4) = 96.6,$$

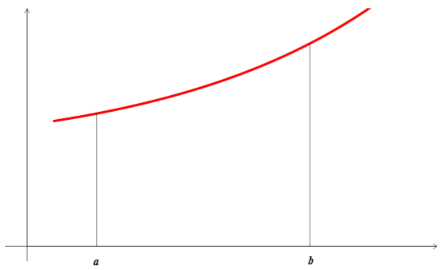
gdje je $s(t) = \int 2.3tdt$. Dakle, određeni integral funkcije v na intervalu $[4, 10]$ jednak je razlici vrijednosti primitivne funkcije od v na kraju i početku intervala. Na temelju ovih primjera zaključujemo da određeni integral, odnosno površinu ispod grafa neke funkcije možemo računati pomoću njene primitivne funkcije. Ovaj zaključak vrijedi i općenito, a dan je sljedećim teoremom.

Teorem 3.3.2. *(Newton - Leibnizova formula) Neka je f neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

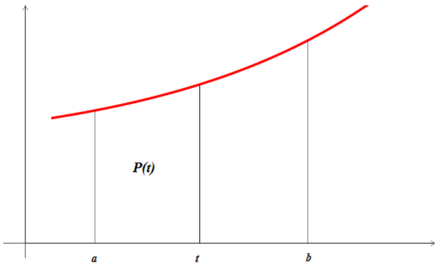
gdje je F primitivna funkcija za funkciju f (funkcija za koju je $F'(x) = f(x)$).

Dokaz. Neka je f neprekidna pozitivna funkcija na $[a, b]$ (slika 3.8).



Slika 3.8

Površina ispod grafa funkcije f između pravaca $x = a$ i $x = b$ jednaka je $\int_a^b f(x)dx$. Neka je F antiderivacija funkcije f, a $P(t)$ površina ispod grafa funkcije f između pravaca $x = a$ i $x = t$ (slika 3.9).

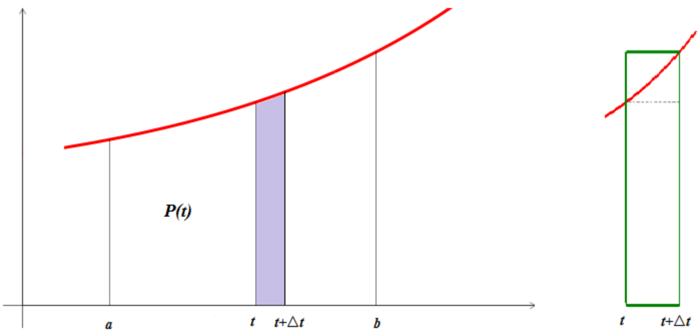


Slika 3.9

Tada je $P(t) = \int_a^t f(x)dx$. Očito je funkcija P rastuća i vrijedi

$$P(a) = 0,\ P(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Uočimo jednu usku *prugu*, djelić površine između $x = t$ i $x = t + \Delta t$ (slika 3.10). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je funkcija f na tom dijelu rastuća. Za slučaj padajuće funkcije dokaz bi se provodio analogno.



Slika 3.10

Površina te pruge je

$$P(t + \Delta t) - P(t).$$

S druge strane, površina pruge veća je od površine upisanog pravokutnika i manja od površine opisanog pravokutnika (slika 3.10). Dakle, vrijedi:

$$\Delta t \cdot f(t) \leq P(t + \Delta t) - P(t) \leq \Delta t \cdot f(t + \Delta t)$$

$$\Leftrightarrow f(t) \leq \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \leq f(t+\Delta t)$$

Odavde kada $\Delta t \to 0$ budući da je f neprekidna, dobivamo

$$f(t) \leq P'(t) \leq f(t),$$

odnosno

$$P'(t) = f(t).$$

Zaključujemo da je funkcija P antiderivacija funkcije f, što znači da se od funkcije F razlikuje samo za konstantu c. Dakle, vrijedi

$$P(t) = F(t) + c.$$

Uvrstimo $t = a$ u dobivenu jednakost

$$P(a) = F(a) + c \Leftrightarrow 0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a).$$

Sada je

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) = F(b) + c.$$

Odavde je konačno

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Slično se može provesti i za negativnu funkciju. □

Vratimo se sada na početni problem određivanja površine ispod grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 9 - x^2$ na intervalu $[0, 3]$. Trebamo izračunati određeni integral $\int_0^3 (9 - x^2)dx$. Primjenom Newton - Leibnizove formule dobivamo:

$$\int_0^3 (9 - x^2)dx = (9x - \frac{x^3}{3})|_0^3 = (27 - 9) - 0 = 18.$$

Vidimo da je računanje određenog integrala primjenom Newton - Leibnizove formule puno jednostavnije od računanja po definiciji.

Na temelju izloženog možemo usporediti metodičku realizaciju Osnovnog teorema na studiju matematike te u srednjoškolskoj nastavi matematike. Vidjeli smo da se na studiju matematike Riemannov integral definira za funkciju koja je ograničena na segmentu, dok se u nastavi matematike u srednjoj školi baziramo samo na neprekidne funkcije. Možemo reći da je srednjoškolsko gradivo matematike ”spušteno” na nižu razinu, što je potpuno očekivano.

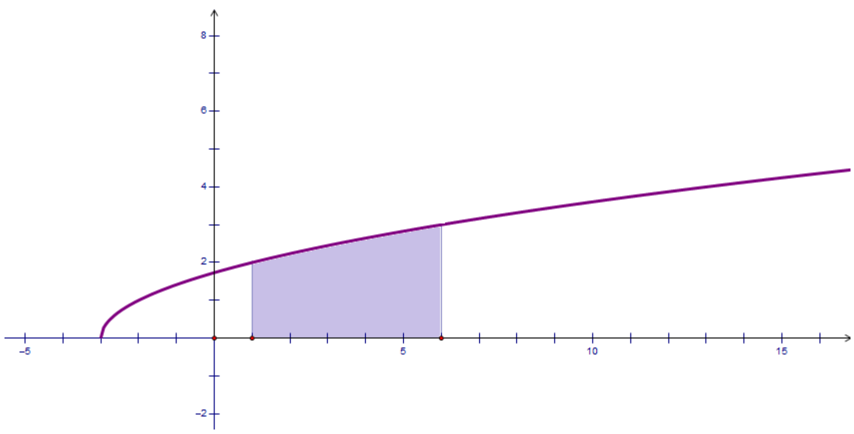
Poglavlje 4

Primjena Osnovnog teorema infinitezimalnog računa

U nastavi matematike u srednjoj školi te u visokoškolskoj matematici, Osnovni teorem infinitezimalnog računa najčešće koristimo pri računanju površine ravninskih likova (krivocrtnih trapeza), te za računanje volumena rotacijskih tijela (vidi [1], [11], [4]).

4.1 Površina ravninskog lika

Primjer 4.1.1. *Izračunajmo površinu ispod grafa funkcije* $f : [-3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+3}$ *na intervalu* $[1, 6]$ *(slika 4.1).*

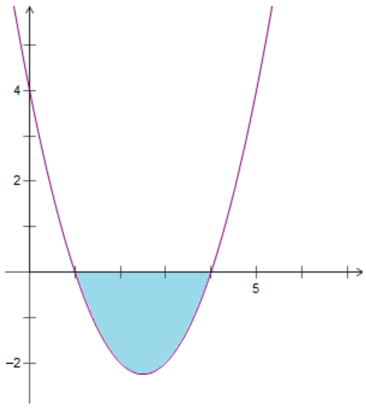


Slika 4.1

S obzirom da je funkcija f pozitivna na intervalu $[1, 6]$, tražena površina jednaka je:

$$P = \int_1^6 \sqrt{x+3}dx = \int_1^6 (x+3)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}|_1^6 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}.$$

Primjer 4.1.2. *Izračunajmo površinu između krivulje $y = (x-1)(x-4)$ i x-osi (slika 4.2).*



Slika 4.2

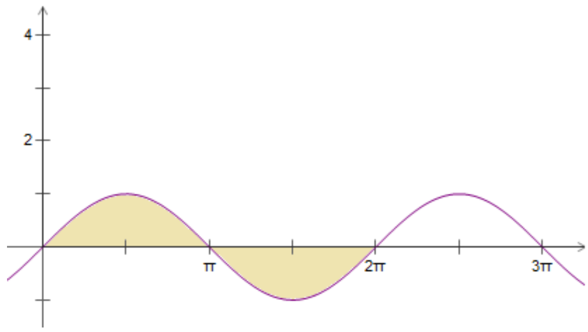
Uočimo da trebamo izračunati površinu iznad grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-4)$ na intervalu $[1, 6]$. S obzirom da je funkcija f negativna na tom intervalu, tražena površina jednaka je negativnoj vrijednosti određenog integrala $\int_1^4 f(x)dx$.

Dakle, površina je jednaka:

$$P = -\int_1^4 (x-1)(x-4)dx = -\int_1^4 (x^2-5x+4)dx = -(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x)|_1^4$$

$$= -\left(\frac{64}{3} - 40 + 16\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right) = \frac{9}{2}.$$

Primjer 4.1.3. *Izračunajmo površinu između grafa funkcije* $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ *i x-osi na intervalu* $[0, 2\pi]$ *(slika 4.3).*



Slika 4.3

Funkcija f poprima pozitivne vrijednosti na $[0, \pi]$ i negativne vrijednosti na $[\pi, 2\pi]$. Stoga je tražena površina jednaka:

$$P = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1) + (1+1) = 2 + 2 = 4.$$

Primijetimo da smo površinu mogli izračunati i na kraći način:

$$P = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cdot \cos x|_0^{\pi} = -2 \cdot (-1-1) = 4.$$

Pogledajmo što bismo dobili da smo površinu računali direktno, tj. kao $\int_0^{2\pi} \sin x dx$:

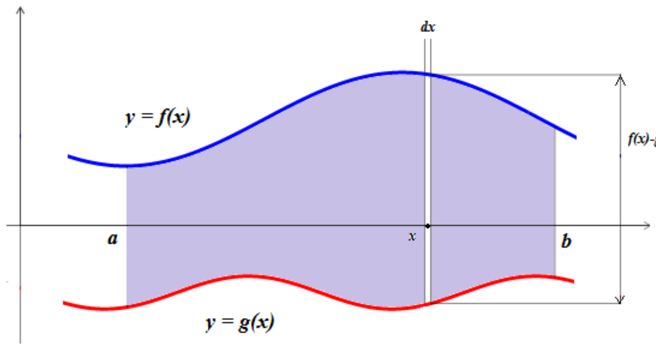
$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0.$$

Dobili bismo da je površina jednaka nuli, što očito nije istina. Naime, $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$, a $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2$, tj. to su suprotni brojevi pa su se "pokratili" prilikom računanja.

Općenito, određeni integral neke funkcije na nekom intervalu predstavlja površinu između grafa funkcije i x-osi nad tim intervalom samo kada funkcija poprima pozitivne vrijednosti na tom intervalu. Ako funkcija poprima negativne vrijednosti na tom intervalu, onda je površina negativna vrijednost određenog integrala. Drugim riječima, određeni integral funkcije predstavlja **relativnu površinu** između grafa funkcije i x-osi, što smo već spomenuli i u prethodnim poglavljima.

Površina lika omeđenog grafovima funkcija

Promotrimo sliku 4.4.



Slika 4.4

Područje između grafova funkcija f i g zamišljamo kao ”kontinuirani niz beskonačno tankih pravokutnika”, a njegovu površinu kao beskonačnu sumu svih tih pravokutnika. Nad svakom točkom x segmenta $[a, b]$, površina ”beskonačno tankog” pravokutnika širine dx i visine $f(x) - g(x)$ iznosi $(f(x) - g(x))dx$. Integral $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ je ”kontinuirana beskonačna suma” svih tih pravokutnika.

Stoga zaključujemo: Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$ i $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, onda površina područja (lika) koje je nad $[a, b]$ između grafa od f i grafa od g iznosi:

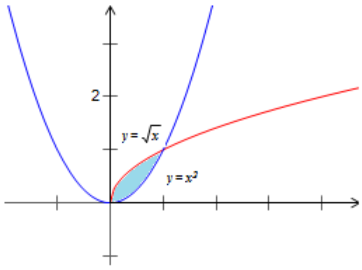
$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Primjer 4.1.4. *Izračunajmo površinu područja omeđenog krivuljama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ (slika 4.5).*

Ove dvije krivulje omeđuju lik određen točkama njihovog presjeka (označimo mu površinu s P).

Odredimo apscise točaka presjeka ovih dviju krivulja. Rješavamo sustav jednadžbi $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. Dakle, $x^2 = \sqrt{x}$, iz čega dobivamo $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Označimo: $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$. Tražena površina jednaka je

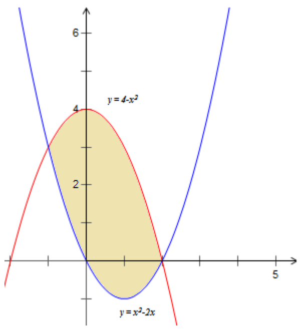
$$P = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3})|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



Slika 4.5

Primjer 4.1.5. *Izračunajmo površinu područja omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$ (slika 4.6).*

Ove dvije parabole omeđuju lik određen točkama njihovog presjeka (označimo mu površinu s P). Odredimo apscise točaka presjeka ovih dviju krivulja.



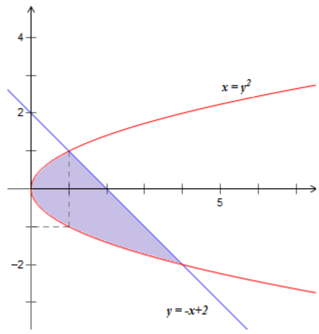
Slika 4.6

Rješavamo sustav jednadžbi $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$. Dakle, $4 - x^2 = x^2 - 2x$, iz čega dobivamo $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Označimo: $f(x) = 4 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x$. Tražena površina jednaka je

$$P = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = (-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x)|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9.$$

Primjer 4.1.6. *Izračunajmo površinu područja omeđenog krivuljama* $x = y^2$ *i* $y = -x + 2$ *(slika 4.7).*



Slika 4.7

Parabola i pravac omeđuju lik određen točkama njihovog presjeka (označimo mu površinu s P). Uočimo da će nam u ovom primjeru biti lakše odrediti traženu površinu ako dane krivulje gledamo kao grafove funkcija od y (vidi [11]).

Odredimo ordinate točaka presjeka parabole i pravca. Rješavamo sustav jednadžbi $x = y^2$ i $x = -y + 2$. Dakle, $y^2 = -y + 2$, iz čega dobivamo $y_1 = -2$ i $y_2 = 1$.

Označimo: $f(y) = -y + 2$ i $g(y) = y^2$.

Tražena površina jednaka je

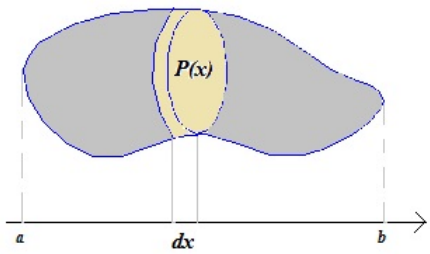
$$P = \int_{-2}^{1} (f(y) - g(y))dy = \int_{-2}^{1} (-y + 2 - y^2)dy = (-\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3})|_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}\right) - \left(-2 - 4 + \frac{8}{3}\right) = \frac{27}{6} = 4.5.$$

4.2 Volumen

Volumen tijela poznatog presjeka

Pri računanju volumena nekog tijela ideja je slična onoj pri računanju površine. Promotrimo tijelo koje se proteže duž osi x, od $x = a$ do $x = b$ (slika 4.8).



Slika 4.8

Dano tijelo možemo podijeliti na puno malih slojeva debljine dx koji imaju površinu presjeka $P(x)$ na mjestu x. Svaki taj mali sloj je oblika valjka pa je njegov volumen jednak $P(x)dx$. Ukupan volumen tijela približno je jednak zbroju volumenu svih slojeva. Granični slučaj kada dx teži prema nuli, dat će nam stvaran volumen.

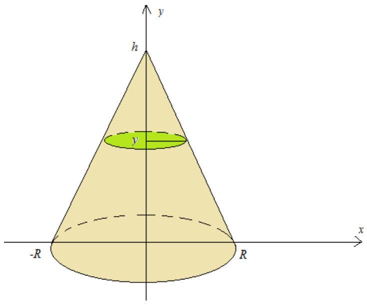
Stoga zaključujemo: Ako se tijelo proteže duž osi x, od $x = a$ do $x = b$, i ako na razini x ima presjek poznate površine $P(x)$, te ako je funkcija P integrabilna na intervalu $[a, b]$, onda je volumen tijela jednak integralu:

$$V = \int_a^b P(x)dx.$$

Napomena 4.2.1. *Analogan zaključak vrijedi ako se tijelo proteže duž y-osi.*

Primjer 4.2.2. *Izračunajmo volumen stošca visine h i polumjera baze R.*

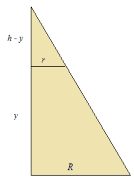
Stožac postavimo tako da mu $y-$ os bude os simetrije, a vrh u ishodištu koordinatnog sustava (slika 4.9).



Slika 4.9

Stožac se proteže od razine $y = 0$ do razine $y = h$. Presjek stošca na razini y je krug čiji radijus označimo s r. Iz sličnosti trokuta na slici 4.10, slijedi:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{h-y} \Rightarrow r = \frac{R(h-y)}{h}.$$



Slika 4.10

Prema tome, površina odgovarajućeg presjeka jednaka je:

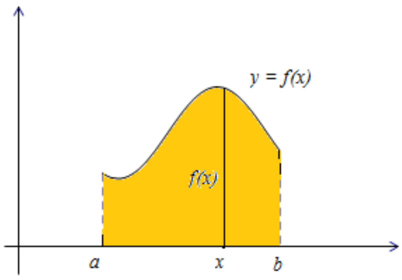
$$P(y) = \frac{(h-y)^2}{h^2}R^2\pi.$$

Dakle, traženi volumen jednak je:

$$V = \int_0^h P(y)dy = \int_0^h \frac{(h-y)^2}{h^2}R^2\pi dy = \frac{R^2\pi}{h^2}\int_0^h (h^2 - 2hy + y^2)dy$$
$$= \frac{R^2\pi}{h^2}(h^2y - hy^2 + \frac{y^3}{3})|_0^h = \frac{1}{3}R^2\pi h.$$

Volumen rotacijskog tijela

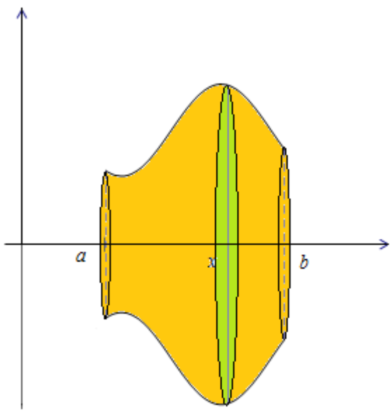
Neka lik sa slike 4.11 rotira oko x-osi.



Slika 4.11

Tom rotacijom nastaje tijelo čiji je presjek na razini x, krug radijusa $f(x)$ i površine $[f(x)]^2\pi$ (vidi sliku 4.12). Dakle, volumen tog rotacijskog tijela je (uz pretpostavku da je f integrabilna funkcija):

$$V = \int_a^b [f(x)]^2 \pi dx.$$



Slika 4.12

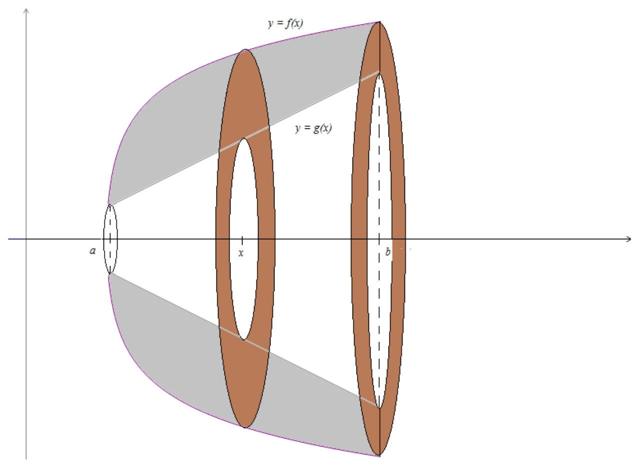
Primjer 4.2.3. *Odredimo volumen kugle radijusa R.*

Kugla radijusa R nastaje rotacijom oko x-osi lika omeđenog polukružnicom $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Prema tome, volumen cijele kugle iznosi:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Ako tijelo nastaje rotacijom oko x-osi, onoga lika koji se proteže nad intervalom $[a, b]$ između grafova integrabilnih funkcija f i g, gdje je $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, (slika 4.13) onda je njegov volumen jednak razlici dvaju volumena, tj.

$$V = \int_a^b [f(x)]^2 \pi dx - \int_a^b [g(x)]^2 \pi dx = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx.$$

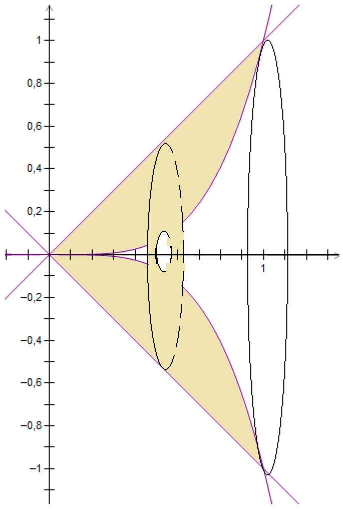


Slika 4.13

Primjer 4.2.4. *Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi, lika omeđenog s* $y = x^4$ *i* $y = x$.

Na slici 4.14 vidimo da se grafovi $y = x^4$ i $y = x$ sijeku u dvije točke. Da bismo odredili apscise tih točaka, rješavamo sustav $x = x^4$. Taj sustav ima dva rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Prema tome, traženi volumen jednak je:

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^8\right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^9}{9}\right)\Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2\pi}{9}.$$



Slika 4.14

Poglavlje 5

Brzina promjene i ukupna promjena

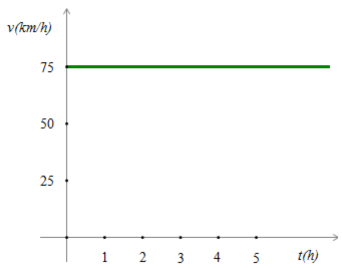
Ovo poglavlje posvećeno je intuitivnom razumijevanju Osnovnog teorema infinitezimalnog računa. Vidjet ćemo nekoliko primjera iz fizike (vidi [9]) te iz realnog svijeta na temelju kojih ćemo "razbistriti" našu interpretaciju Osnovnog teorema. Spomenimo samo da primjera iz realnog svijeta nema gotovo nigdje u srednjoškolskoj ni visokoškolskoj matematičkoj literaturi.

5.1 Primjeri iz fizike

Jednoliko pravocrtno gibanje

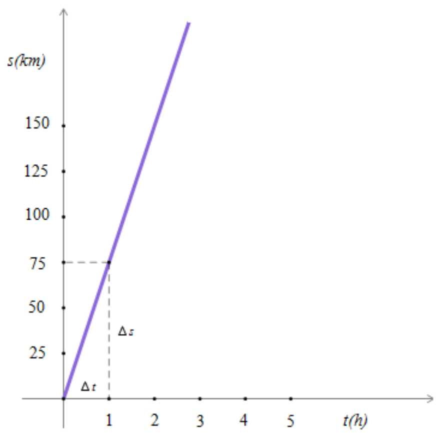
Primjer 5.1.1. *Automobil se giba srednjom brzinom $v = 75$ km/h. Prikažimo grafički brzinu i put automobila kao funkciju vremena. Koliki put automobil prijeđe za prva tri sata?*

Graf na slici 5.1 prikazuje brzinu automobila kao funkciju vremena.



Slika 5.1

S obzirom da je brzina automobila konstantna, vrijedi relacija $v = \frac{s}{t}$, gdje je s prijeđeni put u proteklom vremenu t. Odavde dobivamo $s = v \cdot t = 75 \cdot t$, pa zaključujemo da su s i t proporcionalne veličine, tj. kažemo da automobil u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje jednake putove. Drugim riječima, funkcija s zadana pravilom pridruživanja $s(t) = v \cdot t$ je linearna s vodećim koeficijentom $v = 75$. Znamo da vodeći koeficijent linearne funkcije predstavlja brzinu promjene te funkcije, tj. pokazuje nam za koliko se promijeni vrijednost funkcije ako argument povećamo za jedan. On je ujedno i **nagib** (koeficijent smjera) grafa linearne funkcije (pravca). Sada možemo lako nacrtati graf funkcije s metodom "koračaj i skoči" (eng. *rise over run*) (slika 5.2).



Slika 5.2

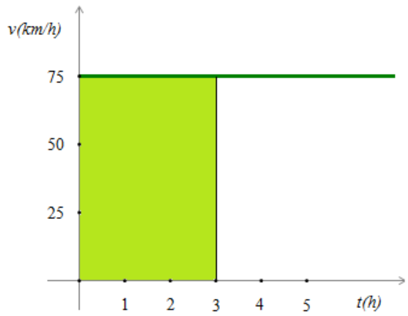
Put koji automobil prijeđe za prva tri sata možemo odrediti na više načina. Prvi način je da izračunamo razliku:

$$s(3) - s(0) = 75 \cdot 3 - 0 = 225. \tag{5.1}$$

Naravno, mogli smo samo očitati $s(3)$ iz grafa na slici 5.2.

Promotrimo graf na slici 5.1 i izraz $s = v \cdot t$. Kao što smo već spomenuli u drugom poglavlju, broj $v \cdot t$ predstavlja površinu pravokutnika sa stranicama duljine t i v. Dakle, ukupni prijeđeni put u proteklom vremenu t, jednak je površini ispod grafa funkcije v nad odgovarajućim vremenskim intervalom. To nam je i intuitivno jasno jer se gibanjem automobila prijeđeni put **akumulira** (skuplja, nadodaje, povećava,...). Dakle, put koji automobil prijeđe za prva tri sata jednak je površini ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 3]$. Ta površina jednaka je površini osjenčanog pravokutnika na slici 5.3 i iznosi:

$$P = 3 \cdot 75 = 225.$$



Slika 5.3

Površinu označenog pravokutnika možemo izračunati i pomoću integrala, tj.

$$P = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 75dt = 75t|_0^3 = 75 \cdot 3 = 225. \tag{5.2}$$

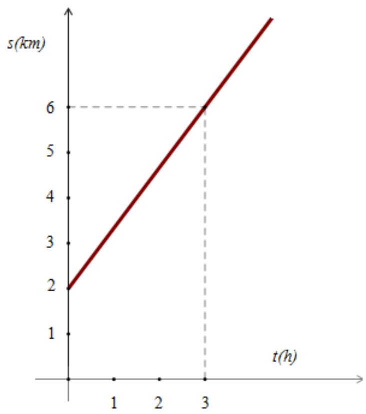
Vidimo da smo na sva tri načina dobili jednaki rezultat. Dakle, za tri sata automobil prijeđe 225 km.

Iz (5.1) i (5.2) slijedi:

$$\int_0^3 v(t)dt = s(3) - s(0).$$

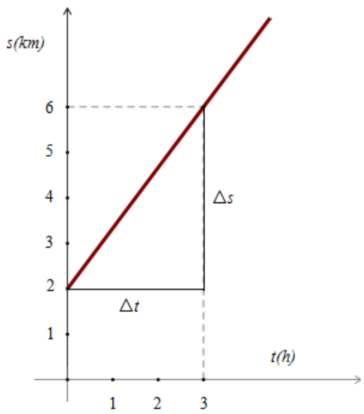
Znamo da je trenutna brzina derivacija puta po vremenu, tj. $v(t) = s'(t)$. Drugim riječima, brzina u trenutku t je brzina promjene funkcije s. Prema tome, **određeni integral brzine promjene funkcije na nekom intervalu jednak je ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom intervalu.** To je još jedna interpretacija Osnovnog teorema infinitezimalnog računa.

Primjer 5.1.2. *Graf na slici 5.4 prikazuje put koji prijeđe neko tijelo u ovisnosti o vremenu. Prikažimo grafički brzinu tijela kao funkciju vremena. Koliki put tijelo prijeđe za prva tri sata?*



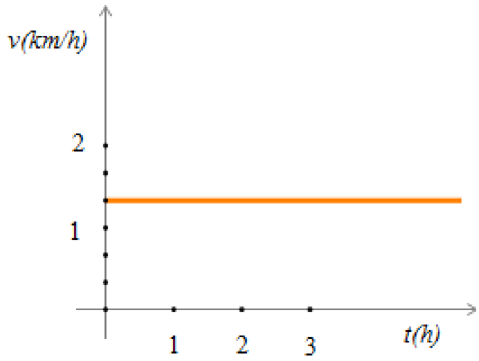
Slika 5.4

Da bismo izračunali brzinu tijela, moramo odrediti nagib pravca sa slike 5.5. Nagib tog pravca jednak je $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Dakle, brzina tijela iznosi $1\frac{1}{3}$ km/h.



Slika 5.5

Sada lako nacrtamo graf koji prikazuje brzinu tijela kao funkciju vremena (slika 5.6).



Slika 5.6

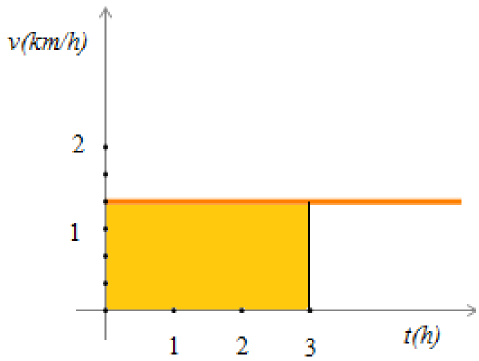
Put koji tijelo prijeđe za prva tri sata odredit ćemo analogno kao u prethodnom primjeru. Računamo razliku:

$$s(3) - s(0) = 6 - 2 = 4.$$

Drugi način je da izračunamo površinu osjenčanog pravokutnika sa slike 5.7. Tražena površina je jednaka:

$$P = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

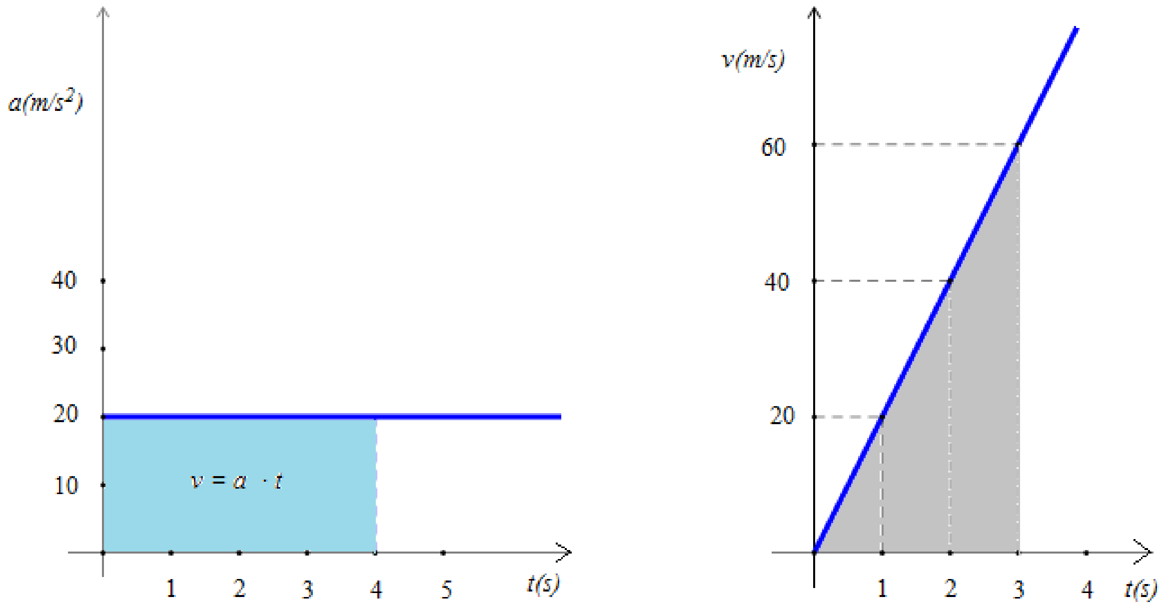
Dakle, za prva tri sata tijelo prijeđe 4 km.



Slika 5.7

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

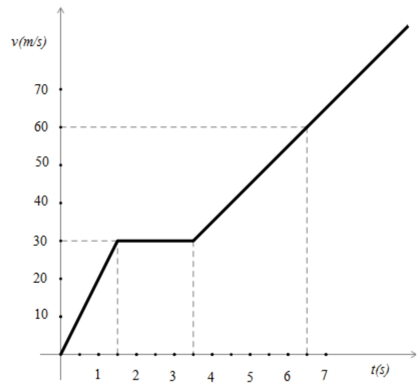
Kod jednolikog ubrzanog gibanja po pravcu brzina nije konstantna, već se mijenja proporcionalno s vremenom. To znači da se brzina promijeni za jednake iznose u jednakim vremenskim intervalima. Koeficijent proporcionalnosti je akceleracija (ubrzanje) (a) koja je kod ovakvog gibanja konstantna. Dakle, vrijedi relacija $v = a \cdot t$, gdje je v brzina tijela koje se pokrenulo iz mirovanja, a t proteklo vrijeme. Na slici 5.8 nalaze se a-t i v-t grafovi za ovakvo gibanje.



Slika 5.8

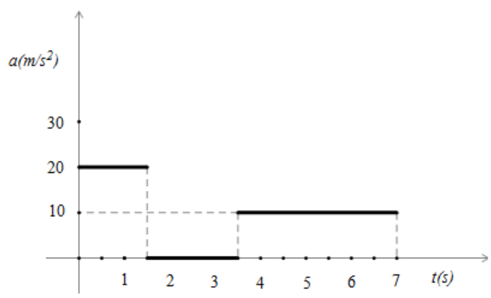
U ovom slučaju brzina je jednaka površini ispod grafa funkcije a na odgovarajućem vremenskom intervalu. Otprije znamo da je put jednak površini ispod grafa funkcije v na odgovarajućem vremenskom intervalu. U našem slučaju, put je jednak površini osjenčanog pravokutnog trokuta na slici 5.8. Površina tog trokuta jednaka je $\frac{v \cdot t}{2}$, te uvrštavanjem izraza za brzinu dobivamo $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$.

Primjer 5.1.3. *Na slici 5.9 zadan je v-t graf nekoga gibanja. Nacrtajmo a-t graf i odredimo put prijeđen između 4.5 s i 6.5 s. Kolika je ukupna promjena brzine između četvrte i sedme sekunde?*



Slika 5.9

Vidimo da se gibanje sastoji od tri dijela. Da bismo izračunali akceleraciju, moramo odrediti nagibe pravaca na slici 5.9. Vidimo da je od 0 s do 1.5 s gibanje jednoliko ubrzano s akceleracijom $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30}{1.5} = 20$ m/s^2, od 1.5 s do 3.5 s gibanje je jednoliko, tj. $a = 0$, a od 3.5 s do 7 s gibanje je jednoliko ubrzano s akceleracijom $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{65-30}{7-3.5} = \frac{35}{3.5} = 10$ m/s^2. Sada lako nacrtamo *a*-*t* graf (slika 5.10).



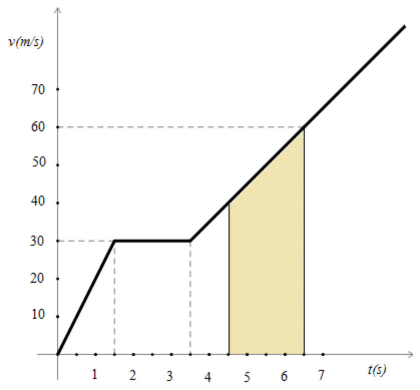
Slika 5.10

Prijeđeni put između 4.5 s i 6.5 s odgovara crtkanoj površini na slici 5.11.

Dakle, traženi put je jednak površini označenog trapeza i iznosi $s = \frac{40+60}{2} \cdot 2 = 100$ m.

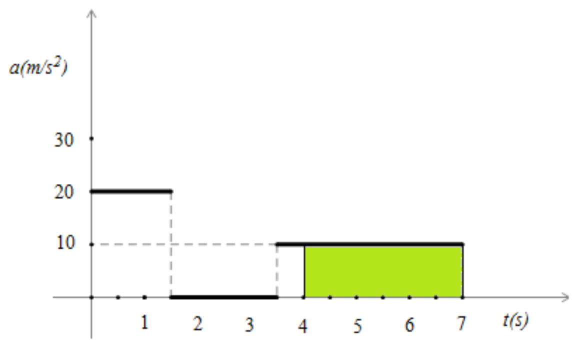
Ukupna promjena brzine između četvrte i sedme sekunde jednaka je razlici

$$v(7) - v(4) = 65 - 35 = 30.$$



Slika 5.11

Tražene vrijednosti smo očitali iz v-t grafa. Drugi način je da odredimo površinu osjenčanog pravokutnika na slici 5.12.

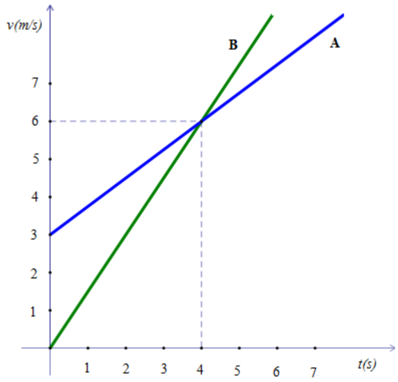


Slika 5.12

Dakle, $P = 3 \cdot 10 = 30$, pa zaključujemo da ukupna promjena brzine između četvrte i sedme sekunde iznosi 30 m/s.

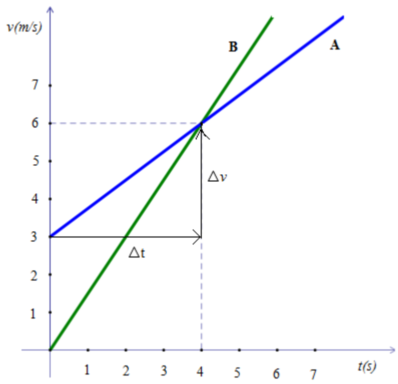
Napomena 5.1.4. *Vrlo česta učenička i studentska pogreška je da se na grafovima umjesto nagiba očitava vrijednost funkcije (zamjena nagiba i „visine“ funkcije).*

Primjer 5.1.5. *Gibanja tijela A i B prikazana su v-t grafom na slici 5.13. Usporedimo akceleracije tijela u trenutku $t = 2s$ (vidi [10]).*



Slika 5.13

Da bismo izračunali akceleracije tijela A i B, moramo odrediti nagibe (koeficijente smjera) pravaca na slici 5.13. Dakle, akceleracija tijela A jednaka je $a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3}{4}$, a akceleracija tijela B jednaka je $a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (slika 5.14).

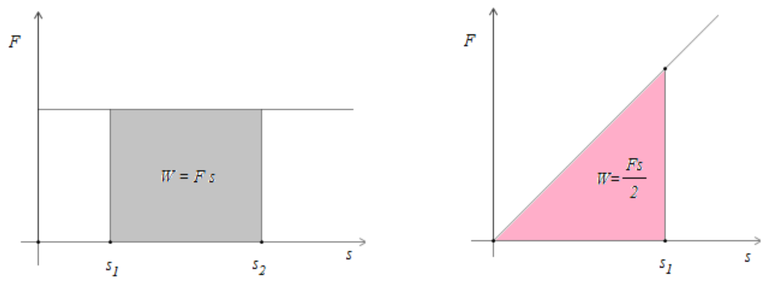


Slika 5.14

Znamo da je koeficijent smjera pravca konstantan, pa je stoga akceleracija tijela A u svakoj točki t jednaka $\frac{3}{4}$ m/s^2, a akceleracija tijela B u svakoj točki t jednaka je $\frac{3}{2}$ m/s^2. Dakle, tijelo B ima veću akceleraciju od tijela A, što je očito i iz grafa.

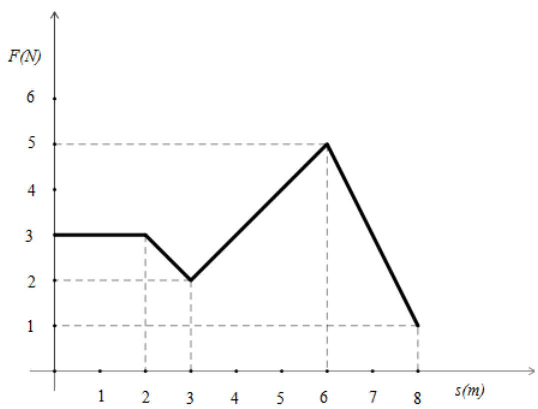
Sila i rad

Tijelo obavlja rad W ako ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi $W = F \cdot s$. Na F-s grafu rad je prikazan veličinom površine koju zatvara dio krivulje koji odgovara pripadnom putu. Na slici 5.15 vidimo rad ako je sila stalna i ako se mijenja proporcionalno s putom.



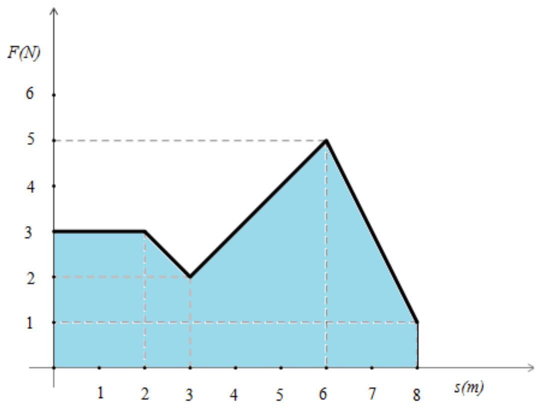
Slika 5.15

Primjer 5.1.6. *Na neko tijelo djeluje sila F zbog koje se to tijelo kreće po putu s. Sila F se mijenja te je prikazana F-s grafom na slici 5.16. Odredimo koliki je rad izvršila sila ako je tijelo prešlo put od 8 metara.*

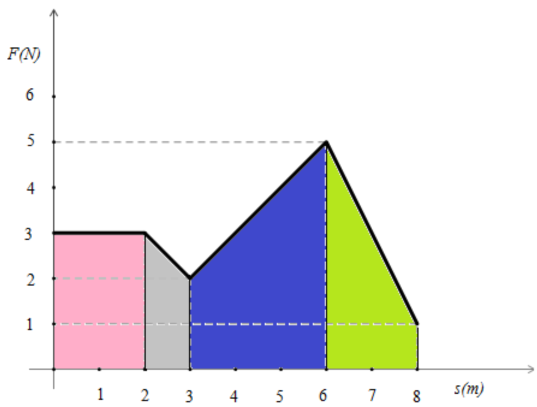


Slika 5.16

Trebamo izračunati površinu osjenčanog lika na slici 5.17.



Slika 5.17



Slika 5.18

Traženu površina jednaka je zbroju površina osjenčanih likova na slici 5.18.

Dakle,

$$P = 2 \cdot 3 + \frac{3+2}{2} \cdot 1 + \frac{5+2}{2} \cdot 3 + \frac{5+1}{2} \cdot 2 = 6 + 2.5 + 10.5 + 6 = 25.$$

Zaključujemo da je sila izvršila rad od 25 J pošto je tijelo prešlo put od 8 metara.

Još jedan način računanja tražene površine je pomoću integrala.

Funkcija F zadana je pravilom pridruživanja:

$$F(s) = \begin{cases} 3 & ; 0 \leq s \leq 2 \\ -s + 5 & ; 2 < s \leq 3 \\ s - 1 & ; 3 < s \leq 6 \\ -2s + 17 & ; 6 < s \leq 8 \end{cases}.$$

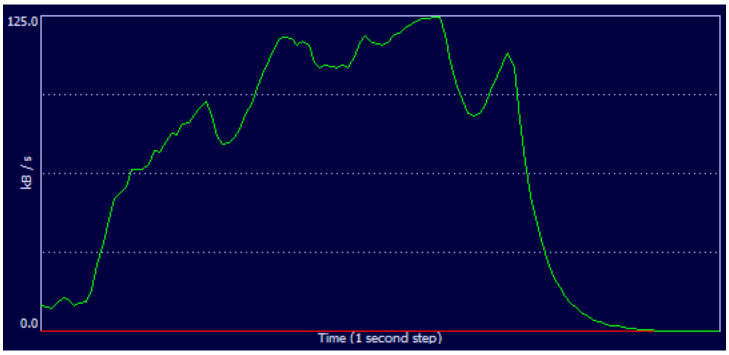
Prema tome, tražena površina jednaka je:

$$\begin{aligned} P = \int_0^8 F(s)ds &= \int_0^2 3ds + \int_2^3 (-s + 5)ds + \int_3^6 (s - 1)ds + \int_6^8 (-2s + 17)ds \\ &= 6 - 4.5 + 2 + 15 - 10 + 18 - 4.5 - 6 + 3 - 64 + 36 + 136 - 102 = 25. \end{aligned}$$

Vidimo da smo na oba načina dobili jednaki rezultat.

5.2 Primjeri iz realnog svijeta

Primjer 5.2.1. *Graf na slici 5.19 prikazuje brzinu preuzimanja podataka određene datoteke u kB/s kao funkciju vremena. Svaka točkica predstavlja jednu sekundu. Kolika je veličina datoteke? (vidi [3]).*



Slika 5.19

Neka je $f(t)$ veličina datoteke preuzeta do trenutka t (u kB), a $f'(t)$ brzina preuzimanja u trenutku t (u kB/s). Promotrimo izraz $f'(t)dt$ koji interpretiramo kao brzina $\times$ mali vremenski interval. Stavimo li "u igru" mjerne jedinice, prethodni izraz poprima oblik: kB/s $\times$ s = kB, tj. $f'(t)dt$ predstavlja **akumulaciju** (skupljanje, skladištenje) kilobajta nad malim vremenskim intervalom dt. Akumuliranjem (gomilanjem) tih malih količina (kilobajta) od početnog trenutka $t = a$ do završnog trenutka $t = b$, dobivamo ukupnu veličinu datoteke (u kB). Također, rezultat tog procesa je određeni integral $\int_a^b f'(t)dt$.

Dakle, $\int_a^b f'(t)dt$ jednak je **ukupnoj količini kilobajta** akumuliranoj između $t = a$ i $t = b$. Ako pak $f'(t)dt$ shvatimo kao površinu beskonačno tankog pravokutnika sa stranicama duljine dt i $f'(t)$, onda akumuliranjem svih tih površina opet dobivamo integral $\int_a^b f'(t)dt$ kao kontinuiranu beskonačnu sumu (analogija s prethodnim poglavljima). Sada je intuitivno jasno da je **površina** ispod grafa funkcije f' na intervalu $[a, b]$ jednaka ukupnoj količini kilobajta akumuliranoj između $t = a$ i $t = b$.

S druge strane, **ukupna količina kilobajta** akumulirana između $t = a$ i $t = b$ jednaka je razlici između krajnje i početne količine kilobajta, tj. $f(b) - f(a)$.

Uspoređujući ta dva načina dobivanja ukupne količine, došli smo do Osnovnog teorema infinitezimalnog računa:

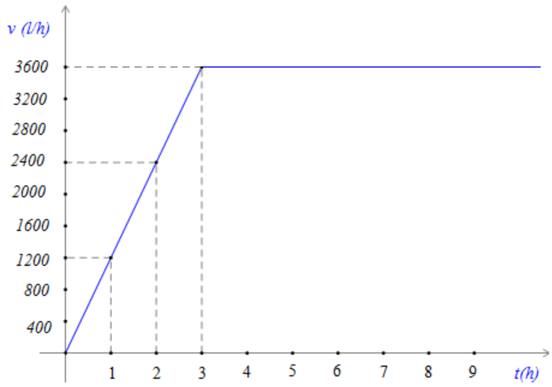
$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

gdje je f diferencijabilna funkcija.

Ovaj primjer nam je također pomogao razviti shvaćanje da je **određeni integral brzine promjene funkcije na nekom intervalu jednak ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom intervalu.**

S obzirom da nemamo eksplicitno zadanu funkciju f, pa ni funkciju f', ne možemo točno odrediti veličinu datoteke čiju brzinu preuzimanja prikazuje graf na slici 5.19. Isto tako, ne možemo lako odrediti površinu ispod grafa funkcije f' na intervalu $[a, b]$, koja je jednaka veličini datoteke. U sljedećim primjerima moći ćemo lako izračunati površinu ispod grafa zadane funkcije na nekom intervalu.

Primjer 5.2.2. *Graf na slici 5.20 prikazuje brzinu punjenja bazena kao funkciju vremena. Početna količina vode u bazenu iznosi* 250 *litara. Kolika je ukupna promjena količine vode u bazenu nakon prva* 3 *sata punjenja? Koliko je litara vode u bazenu nakon prvih* 6 *sati punjenja? Koliko je litara vode ušlo u bazen između drugog i petog sata punjenja? Koliko vremena treba da se napuni bazen koji sadrži* 174600 *litara?*



Slika 5.20

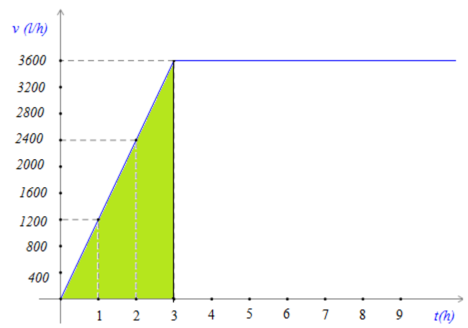
Neka je $v(t)$ brzina punjenja bazena u trenutku t. Da bismo odredili ukupnu promjenu količine vode u bazenu nakon prva 3 sata punjenja, moramo izračunati koliko je litara vode ušlo u bazen tijekom prva 3 sata, tj. od trenutka $t = 0$ do $t = 3$. Postupimo analogno kao u prethodnom primjeru. Promotrimo izraz $v(t)dt$ koji interpretiramo kao brzina

$\times$ vrijeme. Stavimo li "u igru" mjerne jedinice, prethodni izraz poprima oblik: l/h $\times$ h = l, tj. $v(t)dt$ predstavlja **ukupnu akumulaciju** (skupljanje, skladištenje) vode nad malim vremenskim intervalom dt. Akumuliranjem tih malih količina vode od početnog trenutka $t = 0$ do završnog trenutka $t = 3$, dobivamo ukupnu količinu vode (u l). Sada je intuitivno jasno da je **površina** ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 3]$ jednaka ukupnoj količini vode akumuliranoj između $t = 0$ i $t = 3$.

Prema tome, moramo izračunati površinu označenog pravokutnog trokuta sa slike 5.21. Tražena površina jednaka je:

$$P = \frac{3 \cdot 3600}{2} = \frac{10800}{2} = 5400.$$

Dakle, tijekom prva 3 sata u bazen je ušlo 5400 litara vode, što je ujedno i ukupna promjena količine vode u bazenu nakon prva 3 sata punjenja.



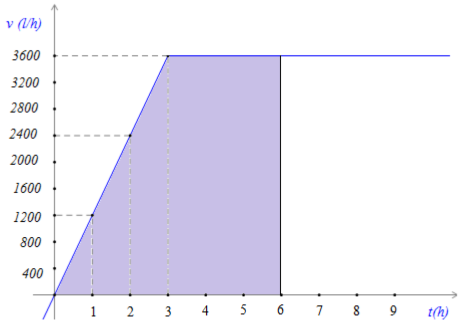
Slika 5.21

Odredimo sada koliko je litara vode ušlo u bazen tijekom prvih 6 sati punjenja. Analogno kao i prije, trebamo izračunati površinu ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 6]$. Tražena površina jednaka je površini označenog trapeza sa slike 5.22.

Dakle,

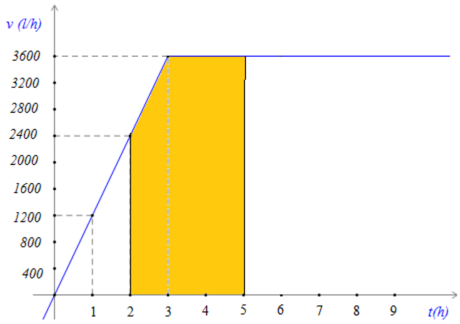
$$P = \frac{6 + 3}{2} \cdot 3600 = \frac{32400}{2} = 16200.$$

Traženu površinu mogli smo odrediti i kao zbroj površina pravokutnog trokuta i pravokutnika. Dakle, tijekom prvih 6 sati u bazen je ušlo 16200 litara vode, kojima dodajemo početnih 250 litara, te zaključujemo da se u bazenu nakon prvih 6 sati punjenja nalazi 16450 litara vode.



Slika 5.22

Da bismo odredili koliko je litara vode ušlo u bazen između drugog i petog sata punjenja, moramo izračunati površinu ispod grafa funkcije v na intervalu $[2, 5]$. Tražena površina jednaka je površini označenog peterokuta sa slike 5.23.



Slika 5.23

Uočimo da traženu površinu možemo izračunati kao zbroj površina trapeza i pravokutnika, tj.

$$P = \frac{2400 + 3600}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 3600 = 3000 + 7200 = 10200.$$

Naravno, tu površinu mogli smo izračunati i na mnoge druge načine. Dakle, između drugog i petog sata punjenja u bazen je ušlo 10200 litara vode.

Za razliku od prethodnog primjera, ovdje možemo eksplicitno odrediti funkciju $v : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, tj.

$$v(t) = \begin{cases} 1200t & ; 0 \le t \le 3 \\ 3600 & ; t > 3 \end{cases}.$$

Sada možemo količinu vode koja je ušla u bazen između drugog i petog sata izračunati pomoću određenog integrala:

$$\int_2^5 v(t)dt = \int_2^3 1200t dt + \int_3^5 3600 dt = 1200 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_2^3 + 3600t\Big|_3^5$$

$$= 600 \cdot 5 + 3600 \cdot 2 = 3000 + 7200 = 10200.$$

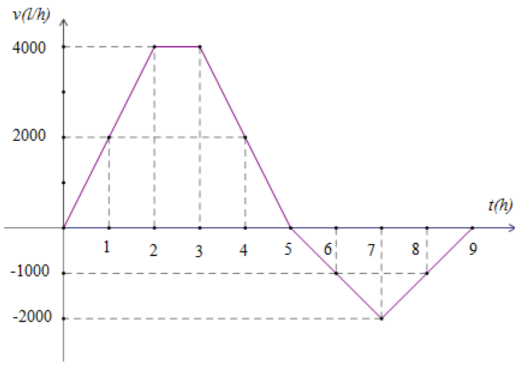
Vidimo da smo na oba načina dobili jednaki rezultat.

Konačno, odredimo koliko je vremena potrebno da se napuni bazen koji sadrži 174600 litara. Neka je x trenutak u kojem se bazen potpuno napuni. Drugim riječima, u tom trenutku ukupna površina ispod grafa funkcije v dostigne vrijednost 174600. Rješavamo jednadžbu:

$$174600 = \int_0^x v(t)dt = \int_0^3 1200t dt + \int_3^x 3600 dt = 5400 + 3600(x - 3).$$

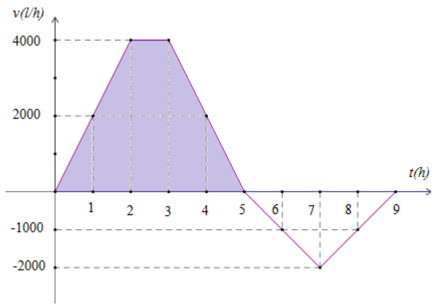
Dobivamo: $174600 = -5400 + 3600x$, tj. $3600x = 180000$, odakle slijedi $x = 50$. Bazen se potpuno napuni za 50 sati.

Primjer 5.2.3. *Prva cijev puni bazen pet sati, a druga cijev ga prazni iduća četiri sata. Graf na slici 5.24 prikazuje brzinu punjenja bazena kao funkciju vremena. Koliko je litara vode u bazenu nakon proteklih devet sati?*



Slika 5.24

Zanima nas količina vode u bazenu nakon devet sati. Odredimo prvo koliko je litara vode ušlo u bazen tijekom prvih pet sati punjenja, tj. ukupnu promjenu količine vode u tom vremenu. Analogno kao i prije, trebamo izračunati površinu ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 5]$. Tražena površina jednaka je površini označenog trapeza sa slike 5.25.



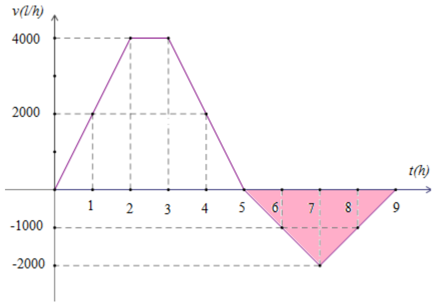
Slika 5.25

Dakle,

$$P = \frac{5+1}{2} \cdot 4000 = 3 \cdot 4000 = 12000.$$

Tijekom prvih 5 sati u bazen je ušlo 12000 litara vode.

Odredimo sada koliko je litara vode izašlo iz bazena tijekom iduća četiri sata. Trebamo izračunati površinu iznad grafa funkcije v na intervalu $[5, 9]$. Primijetimo da na tom intervalu funkcija v poprima negativne vrijednosti jer se pražnjenje bazena odvija u suprotnom smjeru od punjenja. Tražena površina jednaka je površini označenog jednakokračnog trokuta sa slike 5.26.



Slika 5.26

Dakle,

$$P = \frac{4 \cdot 2000}{2} = 4000.$$

Tijekom iduća četiri sata iz bazena je izašlo 4000 litara vode.

Da bismo odredili količinu vode u bazenu nakon devet sati, oduzet ćemo količinu vode koja je izašla iz bazena od količine vode koja je ušla u bazen tijekom prvih pet sati. Prema tome, nakon devet sati, u bazenu se nalazi $12000 - 4000 = 8000$ litara vode.

Sagledajmo ovaj problem iz malo drugačije perspektive. Zapišimo pravilo pridruživanja funkcije $v : [0, 9] \to \mathbb{R}$:

$$v(t) = \begin{cases} 2000t & ; 0 \leq t \leq 2 \\ 4000 & ; 2 < t \leq 3 \\ -2000t + 10000 & ; 3 < t \leq 5 \\ -1000t + 5000 & ; 5 < t \leq 7 \\ 1000t - 9000 & ; 7 < t \leq 9 \end{cases}.$$

Da bismo odredili količinu vode u bazenu nakon devet sati, trebamo izračunati **relativnu površinu** između grafa funkcije v i x-osi.

Dakle, računamo:

$$\int_0^9 v(t)dt = \int_0^2 2000t dt + \int_2^3 4000 dt + \int_3^5 (-2000t + 10000) dt$$

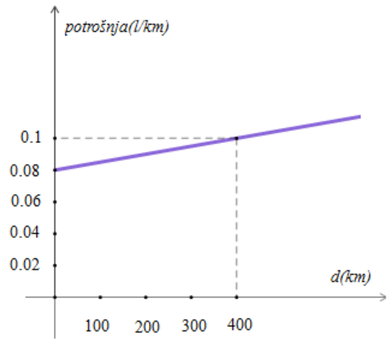
$$+ \int_5^7 (-1000t + 5000) dt + \int_7^9 (1000t - 9000) dt$$

$$= 1000 \cdot 4 + 4000 - 1000(25-9) + 10000 \cdot 2 - 500(49-25) + 5000 \cdot 2 + 500(81-49) - 9000 \cdot 2$$

$$= 4000 + 4000 - 16000 + 20000 - 12000 + 10000 + 16000 - 18000 = 8000.$$

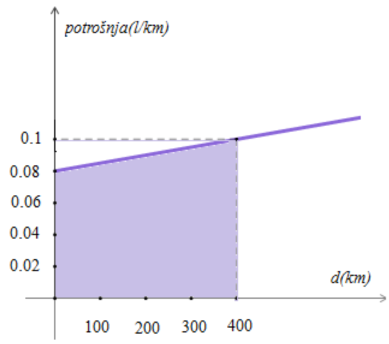
Vidimo da smo i ovim računom također dobili rezultat 8000.

Primjer 5.2.4. *Graf na slici 5.27 prikazuje potrošnju goriva (u l/km) za određeno vozilo u ovisnosti o prijeđenoj udaljenosti (u km). Koliko litara goriva je potrošeno za prvih 400 km putovanja? (vidi [10]).*



Slika 5.27

Količina litara goriva koja je potrošena za prvih 400 km putovanja jednaka je označenoj površini na slici 5.28.



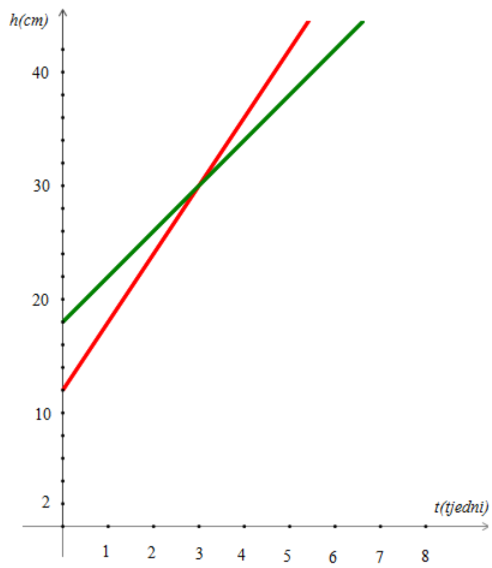
Slika 5.28

Dakle, tražena površina jednaka je površini označenog trapeza i iznosi:

$$P = \frac{0.1 + 0.08}{2} \cdot 400 = 0.09 \cdot 400 = 36.$$

Prema tome, za prvih 400 km putovanja potrošeno je 36 litara goriva.

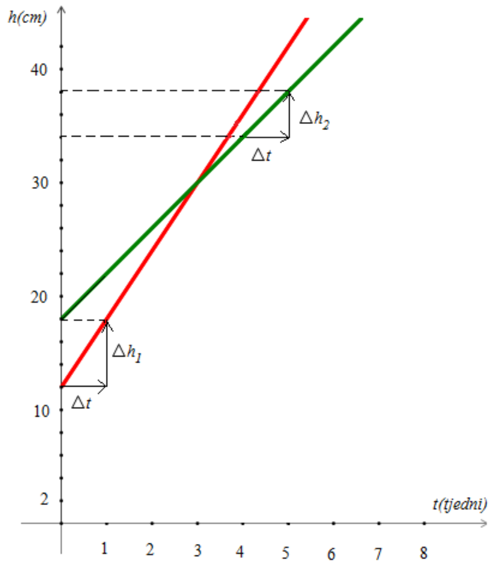
Primjer 5.2.5. *Grafovi na slici 5.29 prikazuju visinu biljaka kao funkciju vremena. Kolika je brzina rasta prve, a kolika druge biljke? Nakon koliko tjedana će biljke postići istu visinu? Kolika je ukupna promjena visine svake biljke nakon 5 tjedana?*



Slika 5.29

Neka je h_1 funkcija kojom mjerimo visinu "crvene" biljke, a h_2 funkcija kojom mjerimo visinu "zelene" biljke. Funkcije h_1 i h_2 su linearne jer su njihovi grafovi pravci. Znamo da **vodeći koeficijent** linearne funkcije predstavlja **brzinu promjene** te funkcije, tj. pokazuje nam za koliko se promijeni vrijednost funkcije, ukoliko argument povećamo za jedan. Metodom "koračaj i skoči" (eng. *rise over run*) možemo lako odrediti brzinu promjene funkcija h_1 i h_2. Na slici 5.30 vidimo da je brzina promjene funkcije h_1 jednaka $\frac{\Delta h_1}{\Delta t} = \frac{6}{1} = 6$, a brzina promjene funkcije h_2 jednaka je $\frac{\Delta h_2}{\Delta t} = \frac{4}{1} = 4$.

Uočimo da je brzina promjene funkcije h_1 zapravo brzina promjene visine "crvene" biljke, tj. brzina rasta te biljke. Analogno vrijedi i za brzinu rasta druge biljke. Prema tome, brzina rasta "crvene" biljke iznosi 6 centimetara tjedno (6 cm/tjedno), a brzina rasta "zelene" biljke iznosi 4 centimetara tjedno (4 cm/tjedno).



Slika 5.30

Da bismo odredili nakon koliko tjedana će biljke postići istu visinu, trebamo naći argument t za koji vrijedi $h_1(t) = h_2(t)$. Drugim riječima tražimo apscisu sjecišta grafova funkcija h_1 i h_2. Na slici 5.30 vidimo da se grafovi sijeku u točki $(3, 30)$. Dakle, za tri tjedna biljke će postići istu visinu (30 cm).

Konačno, odredimo ukupnu promjenu visine "crvene" biljke nakon 5 tjedana. Računamo razliku:

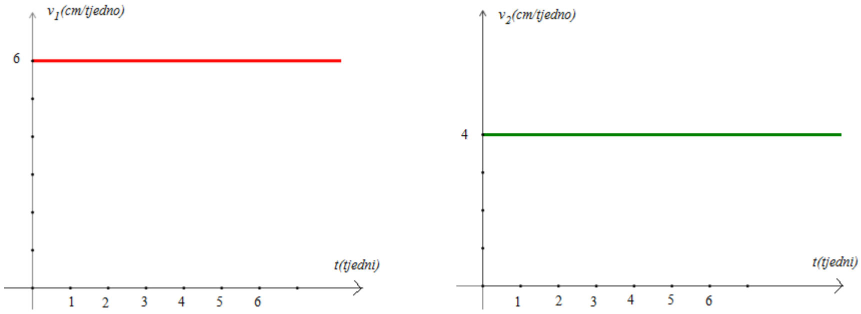
$$h_1(5) - h_1(0) = 42 - 12 = 30.$$

Dakle, ukupna promjena visine "crvene" biljke nakon 5 tjedana je 30 cm. Analogno računamo za drugu biljku:

$$h_2(5) - h_2(0) = 38 - 18 = 20.$$

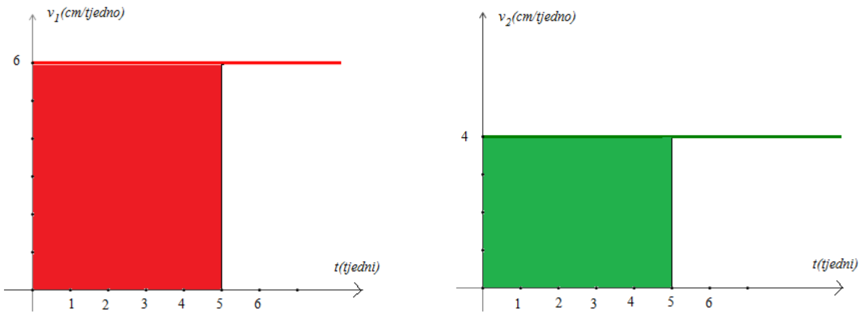
Prema tome, ukupna promjena visine "zelene" biljke nakon 5 tjedana je 20 cm. Drugim riječima, "crvena" biljka narasla je 30 cm, a "zelena" biljka 20 cm za 5 tjedana.

Nacrtajmo grafove koji prikazuju brzinu rasta prve, odnosno druge biljke u ovisnosti o vremenu (slika 5.31).



Slika 5.31

Ukupnu promjenu visine biljaka nakon 5 tjedana možemo odrediti i računanjem površine ispod grafova funkcije v_1, odnosno v_2 na intervalu $[0, 5]$. Tražene površine jednake su površinama označenih pravokutnika (slika 5.32).



Slika 5.32

Dakle,

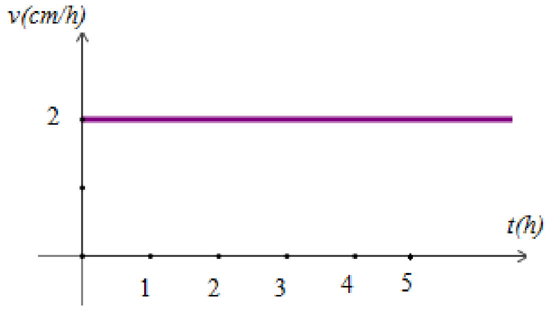
$$P_1 = 5 \cdot 6 = 30,$$

$$P_2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Vidimo da smo na oba načina dobili jednake rezultate.

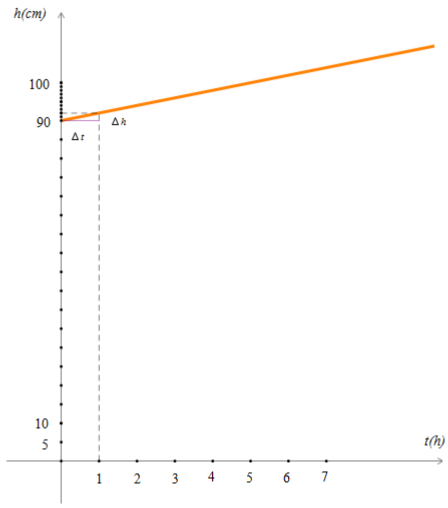
Primjer 5.2.6. *Za vrijeme kišnih dana vodostaj rijeke raste brzinom od* 2 *centimetara na sat. Nacrtajmo graf koji prikazuje brzinu rasta vodostaja rijeke kao funkciju vremena, te graf koji prikazuje vodostaj rijeke (u cm) u ovisnosti o vremenu, ako je početna razina vodostaja* 90 *cm. Kolika je ukupna promjena vodostaja rijeke nakon* 4 *kišna sata?*

Vidimo da je brzina rasta vodostaja rijeke konstantna i iznosi 2 cm/h. Na slici 5.33 nalazi se graf koji prikazuje ovisnost brzine rasta vodostaja rijeke o vremenu.



Slika 5.33

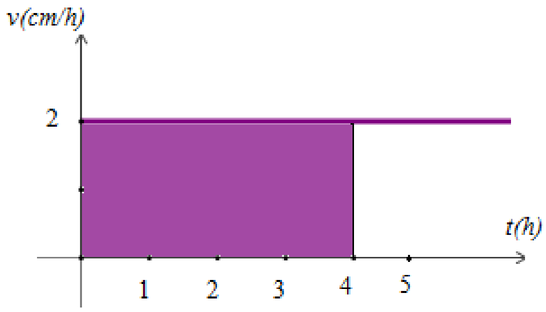
Na slici 5.34 nalazi se graf koji prikazuje ovisnost razine vodostaja rijeke o vremenu.



Slika 5.34

Iz podatka o brzini rasta vodostaja znamo da ako se vrijeme (t) poveća za 1, onda se razina vodostaja rijeke (h) poveća za 2. Na temelju toga, metodom "koračaj i skoči" lako smo nacrtali graf.

Odredimo sada ukupnu promjenu vodostaja rijeke nakon 4 kišna sata. To možemo napraviti na više načina. Jedna mogućnost je da odredimo površinu ispod grafa funkcije v na intervalu $[0, 4]$. Intuitivno nam je to jasno jer se padanjem kiše, vodostaj rijeke **akumulira** (povećava, skuplja). Tražena površina jednaka je površini označenog pravokutnika na slici 5.35 i iznosi $4 \cdot 2 = 8$. Dakle, nakon 4 kišna sata, vodostaj rijeke narastao je 8 cm.



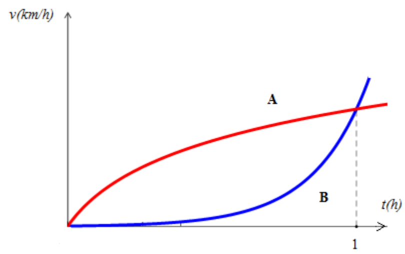
Slika 5.35

Osim spomenutog, možemo odrediti pravilo pridruživanja funkcije h te izračunati razliku $h(4) - h(0)$. Očito je funkcija $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dana pravilom $h(t) = 2t + 90$. Dakle, tražena razlika jednaka je:

$$h(4) - h(0) = 98 - 90 = 8,$$

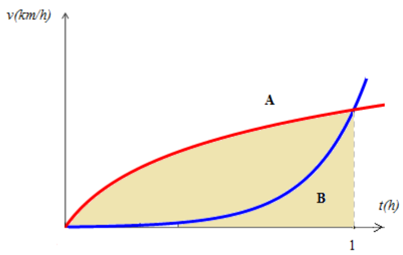
u što smo se već uvjerili.

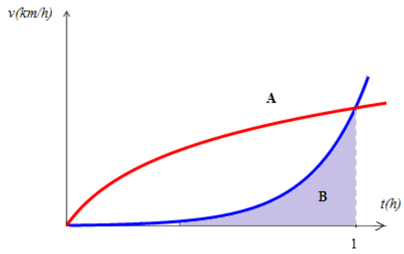
Primjer 5.2.7. *Gibanja automobila A i B prikazana su v-t grafom na slici 5.36. Oba automobila krenula su istovremeno u istom smjeru s istog mjesta. Koji automobil je prešao veći put za jedan sat? (vidi [5]).*



Slika 5.36

Znamo otprije da je ukupni prijeđeni put u proteklom vremenu t jednak površini ispod grafa funkcije v nad odgovarajućim vremenskim intervalom. Prema tome, put koji je prešao automobil A za jedan sat odgovara osjenčanoj površini na slici 5.37 lijevo, a put koji je prešao automobil B za jedan sat odgovara osjenčanoj površini na slici 5.37 desno.





Slika 5.37

Očito je automobil A prešao veći put od automobila B za jedan sat.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4 (II. polugodište), udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] F. M. Brückler, *Matematički dvoboji*, dostupno na http://e.math.hr/dvoboji/index.html (rujan, 2014.).

[3] W. Bussey, P. Collins, W. McCallum, S. Peterson, M. Schnepp, M. Thomas, *The Fundamental Theorem of Calculus*, IM&E Workshop, 2010.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio*, Element, Zagreb, 2008.

[5] H. M. Doerr, A. H. O'Neil, *A modelling approach to developing an understanding of average rate of change*, dostupno na http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/6/CERME7-Doerr&ONeil.pdf (kolovoz, 2014.).

[6] *Fundamental theorem of calculus*, dostupno na http://en.wikipedia.org/wiki/ (rujan, 2014.).

[7] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II, predavanja*, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/guljas/skripte/MATANALuR.pdf (svibanj, 2014.).

[8] S. Lang, *A first course in Calculus, 5th ed.*, Springer, 1986.

[9] B. Mikuličić, M. Varićak, E. Vernić, *Zbirka zadataka iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[10] M. Planinić, L. Ivanjek, A. Sušac, Ž. Milin-Šipuš, *Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts*, dostupno na http://journals.aps.org/prstper/pdf/10.1103/PhysRevSTPER.9.020103 (kolovoz, 2014.)

[11] Z. Šikić, *Diferencijalni i integralni račun*, Profil, Zagreb, 2008.

[12] *The Riemann Integral*, dostupno na http://www.math.klte.hu/ maksa/Riemannintegral.pdf (kolovoz, 2014.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu vidjeli smo različite realizacije Osnovnog teorema infinitezimalnog računa. Taj složeni matematički koncept ”spustili” smo na srednjoškolsku razinu kako bi učenicima olakšali njegovo razumijevanje. Glavni cilj ovog rada bio je pokazati da nam Osnovni teorem ne služi samo kao sredstvo za računanje određenog integrala, već je njegovo značenje puno dublje. Glavno značenje sadržaja tog teorema je da je određeni integral brzine promjene funkcije na nekom intervalu jednak ukupnoj promjeni vrijednosti te funkcije na tom intervalu. Takvo shvaćanje olakšava nam rješavanje grafičkih zadataka iz fizike te iz realnog svijeta. Nažalost, u srednjoškolskoj i visokoškolskoj matematičkoj literaturi nema mnogo (ili uopće nema) primjera na kojima se razvija intuitivno razumijevanje Osnovnog teorema.

Summary

In this thesis we have seen various embodiments of the Fundamental Theorem of Calculus. This complex mathematical concept we ”transposed” to the high school level in order to facilitate its understanding to students. The main goal of this thesis was to show that Fundamental Theorem does not only serve as a tool for calculating a definite integral, but its meaning is much deeper. The main significance of this theorem is that the definite integral of the rate of change of a function over an interval is the total amount of that function value accumulated in that interval. This understanding facilitates us to solve graphical tasks in physics and in the real world. Unfortunately, in the secondary and tertiary mathematics literature has little (or no) examples on which is developing an intuitive understanding of the Fundamental Theorem.

Životopis

Rođena sam 18. ožujka 1991. godine u Varaždinu. Osnovnu školu sam pohađala u Vinici, malom mjestu pokraj Varaždina. Godine 2004. postala sam članica Puhačkog orkestra Vinica, a 2006. i članica Gradskog puhačkog orkestra Hrvatskih željeznica Varaždin, gdje sam svirala klarinet. U Varaždinu sam 2009. godine završila Opću gimnaziju u Prvoj gimnaziji Varaždin. Te godine upisala sam matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu (nastavnički smjer), te na neko vrijeme napustila oba orkestra. Tijekom mog visokoškolskog obrazovanja bila sam demonstrator iz nekoliko kolegija. Povodom dana otvorenih vrata matematičkog odsjeka (2012. i 2014. godine) primila sam priznanja za izniman uspjeh na studiju. Ove godine, prigodom Dana fakulteta, primila sam i Pohvalnicu Fakultetskog vijeća za izuzetan uspjeh na studiju.