Vizualizacija i povijest hiperboličke geometrije

Pugar, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Pugar

VIZUALIZACIJA I POVIJEST HIPERBOLIČNE GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Franka Miriam Brueckler

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj obitelji koja mi je pružala podršku tijekom cijelog studija, a posebno im hvala za doprinos i pomoć u izradi diplomskog rada. Zahvaljujem svojim kolegama koji su mi svojim prijateljstvom i podrškom obogatili studentske dane. Zahvaljujem i prijateljima koji su uvijek imali razumijevanja za moje fakultetske obaveze i probleme. Hvala i profesorima na svemu što su me naučili. Posebno hvala mentorici na uloženom trudu i odličnom prijedlogu za temu diplomskog.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Povijest hiperbolične geometrije **3**
1.1 Nastanak geometrije 3
1.2 Euklidska geometrija 6
1.3 Neeuklidske geometrije 9
1.4 Hiperbolična geometrija 10

2 Vizualizacija hiperbolične geometrije **15**
2.1 Problem vizualizacije hiperbolične geometrije 15
2.2 Modeli hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini 16
2.3 Vizualizacija pomoću modela od papira 19
2.4 Vizualizacija pomoću kukičanih modela 25

Bibliografija **45**

Uvod

Nastanak geometrije možemo promatrati još od početka ljudske civilizacije kada su ljudi, krećući od konkretnog svijeta oko sebe, promatanjem uzoraka ili položaja zvijezda dolazili do određenih zaključaka. Kasnije se, uvođenjem aksiomatike i simboličkog zapisa, geometrija formalizirala. Otkrićem hiperbolične geometrije, početkom 19. stoljeća, pojavio se problem njene vizualizacije, koja je zbog njene kontraintuitivnosti vrlo bitna. Iako je prikazivanje hiperbolične ravnine projekcijom u euklidskoj ravnini pomoću Poincareovog diska bilo veliko otkriće i inspiriralo umjetnika M. C. Eschera na neka od njegovih najpoznatijih djela, cilj je i dalje bio prikaz hiperbolične ravnine pomoću fizičkog modela. Modeli kojima se prikazivala hiperbolična ravnina u početku su bili od papira. Takvi modeli nisu bili idealno rješenje zbog svoje nesavitljivosti, ali su bili nadahnuće i ideja za izradu prvog kukičanog modela. Kukičani modeli su od svog nastanka, 1997. godine, postali popularno pomagalo za vizualizaciju hiperbolične geometrije. Pomoću modela hiperboličnu geometriju mogu razumjeti i nematematičari, što je bitno jer bi i neeuklidske geometrije trebale postati dio opće kulture. Iz tog razloga, u ovom radu će poseban naglasak biti na prikazu hiperbolične ravnine i geometrijskih objekata u hiperboličnoj ravnini pomoću kukičanih modela.

Poglavlje 1

Povijest hiperbolične geometrije

1.1 Nastanak geometrije

Počeci geometrije sežu daleko prije pojave pisma i ne možemo sa sigurnošću znati kako su antičke civilizacije otkrivale geometriju. Geometrija, kao znanost, proizašla je iz svakodnevne prakse. Ljudi su morali graditi ceste, kanale, domove, određivati granice. Osim toga, ljudi su željeli ukrasiti svoje domove i svoju odjeću. Zbog toga su morali upoznati prostorna svojstva objekata materijalnog svijeta u kojem se nalaze i uočavati zakonitosti. Riječ geometrija izvedena je od dviju grčkih riječi: *geo*-zemlja i *metreo*-mjerim. Prema tome, doslovni prijevod bi bio zemljomjerstvo. [10]

Promatrat ćemo nastanak geometrije iz četiri različita smjera koji će utjecati na različite grane geometrije i matematike.

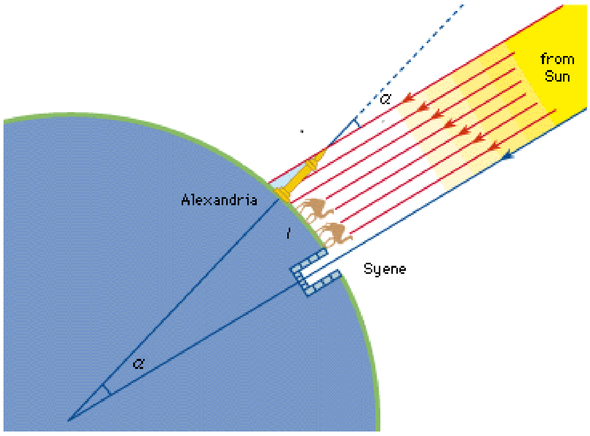
Prvi smjer je razvoj geometrije uz utjecaj umjetnosti i geometrijskih uzoraka. U prošlosti se pomoću različitih geometrijskih uzoraka ukrašavalo posuđe, tepisi, oružje, oruđe, odjeća i ostali objekti. Izrađivajući te uzorke ljudi su otkrivali i koristili simetriju. Jedan od najstarijih ornamenata u kojima se koristi simetrija star je oko 13 000 godina. Uzorci su se koristili da bi prikazali da je objekt u vlasništvu neke obitelji ili plemena, a ponekad se uzorcima prikazivao i socijalni status. U mnogim civilizacijama uzorci su opisivali i podneblje u kojem ljudi žive. Primjerice uzorci Inka su uglati zbog planina u kojima su živjeli, a uzorci Maora zaobljeni jer su prikazivali valove mora koje okružuje Novi Zeland. Za razliku od Inka i Maora, keltski uzorci su bili apstraktni, bez pokušaja oponašanja prirode koja ih okružuje. Antički umjetnici uzorcima su ukrašavali zaobljene plohe i time su se upoznali i s geometrijom različitih ploha. Geometrijski uzorci su se koristili i u mozaicima, posebno u onima koji su ukrašavali podove. Matematičarima je zanimljiv podni mozaik u bizantinskoj katedrali sv. Marka u Veneciji. Mozaik je nastao 1094. godine, a prikazuje trokute Sierpinskog koji su otkriveni tek u 19. stoljeću. Islamska umjetnost je bila bazirana na uzorcima i različitim geometrijskim oblicima. Jedan od poznatijih primjera je

Alhambra u Granadi. Kasnije je proučavanje simetrija u uzorcima dovelo do otkrića matematičkih koncepata kao što su popločavanja, teorija grupa, konačne geometrije, te primjena na kristalografiji.

Drugi smjer je razvoj geometrije proizašao iz gradnje i izrade struktura. Od davnina su ljudi izrađivali alate, oltare, mostove i skrovišta. Zato su morali otkriti kako napraviti krugove različitih radijusa i različite poligonalne i poliedrske strukture. Na temelju toga su razvili mjerni sustav i alate za mjerenje. Također, pronađeni su indijski zapisi nastali između 2000 pr. Kr. i 600 pr. Kr. u kojima se spominje Pitagorin teorem i problem kvadrature kruga. Kalendari u mnogim antičkim kulturama bili su kružnog oblika. Za njihovu konstrukciju bilo je bitno znanje o kutovima i proporcionalnosti.

Treći smjer je razvoj geometrije proizašao iz navigacije i promatranja zvijezda. Ljudi su vrlo rano otkrili da je život prepun pojava koje se periodički ponavljaju (godišnja doba, rast biljaka, položaj Sunca). Shvatili su da, uspiju li predvidjeti takve pojave, imat će bolju kontrolu nad okolišem u kojem žive. Također, uočili su važnost mjerenja vremena i korištenja položaja nebeskih tijela u navigaciji te u razumijevanju Zemljina oblika. Babilonci su, još prije 4000 godina razvili seksagezimalan brojevni sustav (baza 60) opisujući puni krug pomoću 360 stupnjeva, gdje je jedan stupanj prikazivao kut za koji se pomakla Zemlja u odnosu na Sunce u jednom danu. Grčki matematičar Eratosten, 250 godina prije Krista, odredio je, s nevjerojatnom preciznošću za to doba, opseg Zemlje. Koristio je činjenicu da u Syenni (današnji Aswan) točno u podne, za ljetnog solsticija, predmeti postavljeni vertikalno nemaju sjenu, odnosno da je Sunce točno iznad Syenne. U isto vrijeme, predmeti postavljeni vertikalno u Aleksandriji (primjerice toranj u Aleksandriji) su bacali sjenu. Koristeći duljinu te sjene i visinu tornja odredio je veličinu kuta upada Sunčevih zraka. Veličina tog kuta jednaka je veličini kuta čijem jednom kraku pripada Syenna, a drugom Aleksandrija, a s vrhom u središtu Zemlje. Eratosten je iskoristio veličinu tog kuta i udaljenost Aleksandrije i Syenne da bi izračunao opseg Zemlje. Eratostenov rezultat je 250 000 stadija. Postojalo je više verzija stadija (egipatski stadij i antički stadij). Uzmemo li egipatski stadij Eratostenov će opseg iznositi 39 690 km, a uzmemo li antički stadij opseg će iznositi 46 620 km.[6] Oba rezultata se malo razlikuju od stvarnog opsega Zemlje koji iznosi 39 940 km. Feničani i Grci koristili su položaj Zvijezde Sjevernjače za navigaciju po noći, te su zbog toga Feničani 3000 godina bili vodeći trgovci na Sredozemlju. O složenosti antičkih astronomskih proučavanja govori činjenica da je kineski astronom Shih Shen, u 4. stoljeću prije Krista, sastavio katalog od 800 zvijezda, a spomenuo je i komete, meteore te Sunčeve pjege. Navigacija i promatranje zvijezda s godinama su se sve više razvijali, a uz njih se razvijala i kartografija, trigonometrija i sferna geometrija.

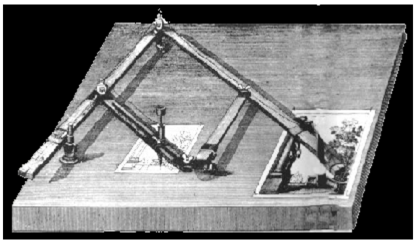
Četvrti smjer je razvoj geometrije promatranjem kretanja i razvoja mehanike. Najstarije poznato korištenje kotača u svakodnevnom životu je kotač za lončarenje koji potječe iz grada Ura u Mezopotamiji, a datira iz 3500 godine prije Krista. Tek 300 godina kasnije, stanovnici Mezopotamije kotač su počeli koristiti u svrhu prijevoza. To je prvo poznato



Slika 1.1: Eratostenovo mjerenje polumjera Zemlje ($http : //lamp.skola.skelleftea.se/$)

korištenje kotača u tu svrhu. Neke civilizacije su bile upoznate s oblicima kotača i koristile su ga u izradi dječjih igračaka, ali nisu otkrile njegovu praktičnu upotrebu. Već u 5. stoljeću prije Krista, i prije nego je Arhimed otkrio zakon poluge, koristila se poluga za vuču. U antičkoj Grčkoj, Arhimed, Heron i drugi geometri, riješili su probleme trisekcije kuta, kvadrature kruga i duplikacije kocke koristeći mehanička pomagala koja su izradili. To znači da ti problemi nisu nerješivi, ali se ne mogu riješiti koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo. Rješenje tih triju antičkih problema nema veliku praktičnu važnost, ali su postali poznati jer ih je mnogo ljudi pokušalo riješiti, a iz tih pokušaja proizašle su mnoge nove metode u matematici. Veza kretanja i geometrije bila je vrlo važna za antičke matematičare. Iako je Aristotel osuđivao mehanički pristup geometriji, baš je on napisao prvi poznati inženjerski udžbenik u kojem se prvi put spominju zupčanici. Mehanika se, u antici, koristila i za crtanje krivulja. Veza mehanike i geometrije bila je zanimljiva i srednjovjekovnim i renesansnim matematičarima Jeanu Buridanu, Nicoli Oresmeu i Galileu Galileiu. Prijelomni trenutak u razvoju tehnologije bilo je otkriće kako kontinuirano kružno gibanje (vjetrenjače, kotača na mlinu) transformirati u pravocrtno gibanje. Ta transformacija omogućena je korištenjem zupčanika i njihovim vezivanjem, a postala je važan predmet matematičkih istraživanja. Mehanika se koristila i za izradu pantografa kojim su se duplicirali dokumenti, slike i skice. Pantograf su koristili i veliki umjetnici, Leonardo da Vinci i Michelangelo.

Početkom 17. stoljeća, matematičari su počeli razvijati nov „jezik” za zapisivanje aritmetičkih koncepata i njihovih veza: simboličku algebru. Descartes i Leibniz posebnu pažnju su usmjerili na simbolički zapis u geometriji. Descartesova *Geometrija* u kojoj se koriste algebarske metode za rješavanje geometrijskih problema, smatra se početkom analitičke geometrije.[13]



Slika 1.2: Pantograf ($http://kmoddl.library.cornell.edu/linkages/$)

1.2 Euklidska geometrija

Grčki mislioci su, još od 5. stoljeća prije Krista, pokušavali sustavno izgraditi geometriju. Najuspješniji u tome bio je Euklid. Euklid je u 3. stoljeću prije Krista sistemtizirao znanja koja su o geometriji imali Babilonci, Egipćani i rani Grci, i skupio ih u 13 knjiga, zajedničkog naziva *Elementi*. *Elementi* su do danas osnovno djelo iz kojeg se uči geometrija i baza za nove geometrijske rezultate.

Slika 1.3: Euklid ($http://www.storyofmathematics.com/hellenisticeuclid.html$)

Izlaganje geometrije Euklid započinje nabrajanjem osnovnih činjenica na kojima se temelji njegov geometrijski sustav. Te osnovne činjenice on dijeli na: **definicije** u kojima objašnjava smisao pojmova koje će upotrebljavati i **aksiome i postulate** pomoću kojih određuje odnose između osnovnih pojmova geometrije i koji se prihvaćaju bez dokaza. Zatim slijede **propozicije i teoremi** koji se izvode iz ranije ustanovljenih aksioma i propozicija.

Primjer Euklidove definicije je: *Točka je ono što nema dijelova.*

Danas znamo da se temeljni pojmovi geometrije: točka, pravac i ravnina ne definiraju. Ipak, takve Euklidove definicije nemaju nekog utjecaja na njegova daljnja izlaganja, jer ih Euklid uopće ne koristi.

Najpoznatiji dio Euklidovih *Elemenata* su Euklidovi postulati:

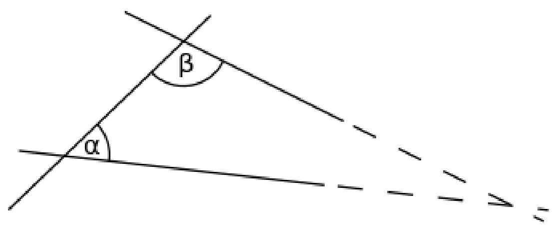
1. Od svake se točke do svake druge točke može nacrtati pravac.

2. Omeđeni dio pravca može se neprekidno produžiti po pravcu.

3. Oko svakog središta se sa svakim polumjerom može opisati kružnica.

4. Svi su pravi kutovi međusobno jednaki.

5. Ako dva pravca presiječemo trećim pravcem i ako on s njima zatvara s jedne svoje strane unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava, onda se ta dva pravca, dovoljno produžena, sijeku i to upravo s te strane.



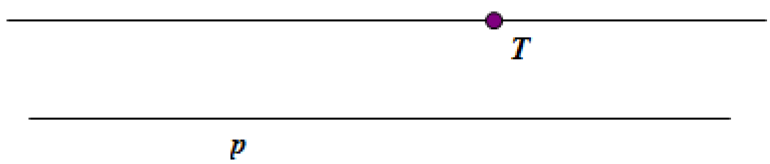
Slika 1.4: Peti Euklidov postulat

Euklidovi *Elementi* predstavljaju sintezu svih dotad poznatih rezultata matematičkih istraživanja. *Elementi* su posebni i zbog stila pisanja. Teoremi su logički poredani, svaki slijedi iz prethodno iskazanih i dokazanih ili iz osnovnih tvrdnji (aksioma, definicija i postulata), odnosno do zaključaka se dolazi deduktivno. Takav logički poredak uzor je za kasnija matematička djela.[6] Daljnji razvoj geometrije odvijao se u smjeru usavršavanja Euklidova sustava, ispravljanja uočenih netočnosti i dodavanja novih teorema. Pri tome, najveća je pažnja bila usmjerena na peti Euklidov postulat. Već na prvi pogled, formulacija petog postulata je vrlo složena u odnosu na druge postulate. Također, u ostalim se postulatima opisuju svojstva koja se vide na omeđenom dijelu ravnine, dok je takva provjera petog postulata fizički nemoguća. Usavršavanjem petog Euklidovog postulata bavili su se mnogi matematičari: Arhimed, Apolonije (3. st. pr. Kr), Geminus, Nikomah (1. st. pr. Kr), Papos (3. st.), Teon i Proklo (5.st.),... U to doba svi su pokušaji dokazivanja petog postulata pomoću prva četiri ili pojednostavljenja petog postulata prošli neuspješno. U srednjem vijeku središtem svjetske civilizacije postaje arapski istok. Euklidovi *Elementi* prevedeni su na arapski pa su se i arapski mislioci počeli baviti problemom petog postulata. Najpoznatiji rad iz tog doba, vezan uz dokazivanje petog postulata, pripada arapskom matematičaru Nasir-Eddinu (13.st.). Iako su njegova istraživanja bila zanimljiva i originalna, nisu dovela do željenog rezultata, odnosno dokazivanja petog postulata. U doba renesanse u Europi ponovo počinje zanimanje za tu temu. U to vrijeme već se došlo do saznanja da se peti postulat može zamijeniti drugim ekvivalentnim tvrdnjama. Primjerice:

- Neka je zadan pravac u ravnini i točka koja mu ne pripada. Tada postoji najviše jedan pravac koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan sa zadanim pravcem.(Playfairov aksiom) (Slika 1.5)

- Zbroj mjera kutova u trokutu iznosi najviše 180°.

- Postoje dva slična trokuta koji nisu sukladni.



Slika 1.5: Peti Euklidov postulat, druga verzija

Navedene ekvivalentne tvrdnje proizašle su iz pogrešnih dokaza petog postulata. Najčešće su korištene kao očite tvrdnje pomoću kojih se peti postulat dokazivao, dok se nije shvatilo da su mu ekvivalentne. Ekvivalentne tvrdnje također su se pokušavale dokazati, no pri njihovom dokazivanju javljale su se iste teškoće kao i pri pokušajima neposrednog dokazivanja petog postulata. Mnogi su matematičari 17. i 18. stoljeća vjerovali da su dokazali peti postulat. No, svaki je od njihovih dokaza u sebi sakrivao pogrešku. Zato se matematičari počinju pitati: Može li se peti postulat uopće dokazati pomoću preostalih? Postoji li neki drugi geometrijski sustav u kojem se umjesto petog postulata može uzeti njemu proturječna tvrdnja?[10]

1.3 Neeuklidske geometrije

Suprotno uobičajenu mišljenju, ideja o neeuklidskim geometrijama ne pojavljuje se tek u 19. stoljeću, nego se spominje već u antičkoj Grčkoj. Već su Autolikus u svom radu *O rotirajućim sferama* i Euklid u svom radu *Phenomena* 300 godina prije Krista spominjali **sfernu geometriju**. Prvi sustavni rad na temu sferne geometrije bila je *Sphaerica* matematičara Teodozija oko 200 godina prije Krista. *Sphaerica* je bila sastavljena od triju knjiga teorema i kostruktivnih problema. Razvoj sferne geometrije pratio je razvoj geometrije proizašao iz navigacije i promatranja zvijezda, a možemo reći i da je sferna geometrija prva neeuklidska geometrija. Kasnije je, u 19. stoljeću, Carl Fridrich Gauss razvio koncepte zakrivljenosti i konstantne zakrivljenosti promatrajući površinu Zemlje te koristeći teoreme sferne geometrije.[13] U sfernoj geometriji ulogu pravaca imaju glavne kružnice na sferi, odnosno kružnice koje pripadaju ravnini koja prolazi središtem sfere.[2] Uočimo da u sfernoj geometriji Euklidov peti postulat vrijedi, pa je u početku sferna geometrija bila uklopljena u euklidsku. Sjetimo se ekvivalentne tvrdnje petom postulatu koju smo već naveli:

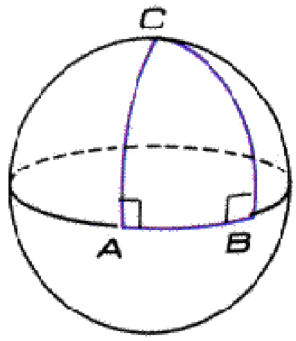
- Neka je zadan pravac u ravnini i točka koja mu ne pripada. Tada postoji **najviše jedan** pravac koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan sa zadanim pravcem.

Sferna geometrija zadovoljava tu tvrdnju jer ne postoji pravac koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan sa zadanim pravcem. Danas koristimo formulaciju postulata:

- Neka je zadan pravac u ravnini i točka koja mu ne pripada. Tada postoji **točno jedan** pravac koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan sa zadanim pravcem.

Tako formuliran postulat zadovoljava samo euklidska geometrija. Sfernom geometrijom se u 19. stoljeću bavio i Bernhard Riemann koji je u svom nastupnom predavanju reformulirao koncept geometrije. To je predavanje imalo velik utjecaj na razvoj različitih tipova geometrije.[7] Poopćenje sferne geometrije je **eliptična geometrija** u kojoj se svaka dva pravca sijeku. U sfernoj i eliptičnoj geometriji vrijedi da je zbroj veličina kutova trokuta veći od $180°$.[3]

Problem petog Euklidovog postulata naveo je matematičare da se pitaju: Što ako izostavimo peti postulat i promatramo geometriju koja zadovoljava samo prva četiri Euklidova postulata? Tako je otkrivena **apsolutna geometrija**. Adrien-Marie Legendre je u 18. stoljeću dokazao da je u apsolutnoj geometriji zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta uvijek manji ili jednak $180°$.[13] Uočimo, euklidska geometrija je apsolutna geometrija, a sferna geometrija i eliptična geometrija nisu apsolutne geometrije. Apsolutnu geometriju u kojoj vrijedi da je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta manji od $180°$ zovemo **hiperbolična geometrija**.



Slika 1.6: Zbroj veličina kutova trokuta na sferi veći je od 180°. ($http://www.fayar.net/east/teacher.web/math$)

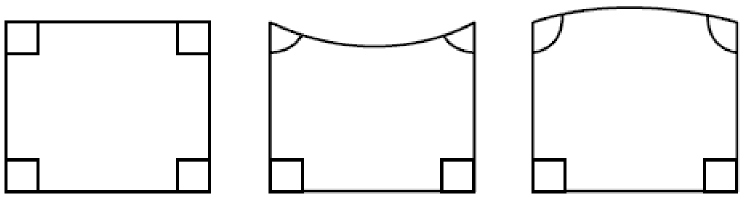
1.4 Hiperbolična geometrija

Prva izučavanja hiperbolične geometrije vezana su uz Lambertov četverokut i Saccherijev četverokut. Lambertov četverokut je četverokut u kojem su tri kuta prava, a jedan šiljast. Prvi ga je opisao arapski matematičar Al-Haytham (10./11. stoljeće). Saccherijev četverokut ima dvije stranice iste duljine koje su okomite na bazu, a prvi ga je proučavao perzijski matematičar Omar Khayyam (11./12. stoljeće). Još jedan značajan arapski matematičar koji se pavio petim postulatom je Al-Tusi (13. stoljeće). Prvi je razmatrao mogućnost postojanja hiperbolične i eliptične geometrije, ali ih je ubrzo odbacio.[7] U 17. stoljeću matematičar Girolamo Saccheri pokušao je, ne koristeći peti postulat, dokazati da za četverokut,kasnije nazvan po njemu, koji ima dvije stranice iste duljine koje su okomite na bazu vrijedi da su i preostala dva kuta prava. Najprije je, koristeći teoreme o sukladnosti, dokazao da preostala dva kuta moraju biti sukladna. U tom dokazivanju korisitio je samo prva četiri Euklidova postulata. Općenito, iz prva četiri postulata proizlaze mnoge tvrdnje u geometriji. Euklid je svojih 28 propozicija u *Elementima* izveo samo iz prva četiri postulata.[3]

Saccheri je zatim promatrao tri slučaja:

- Preostala dva kuta su prava.
- Preostala dva kuta su šiljasta.
- Preostala dva kuta su tupa.

Saccheri je želio, koristeći samo prva četiri Euklidova postulata, dokazati da za zadani četverokut može vrijediti samo da su preostala dva kuta prava, čime bi dokazao peti Euklidov postulat.[7] Za slučaj kada su preostala dva kuta tupa ne postoji paralela kroz zadanu



Slika 1.7: Saccherijev četverokut (*http : //www.learner.org/courses/mathilluminated/*)

točku sa zadanim pravcem, pa taj slučaj možemo odbaciti. Ostaju nam slučajevi da su preostala dva kuta prava i da su preostala dva kuta šiljasta. Za slučaj da su preostala dva kuta prava slijedi da se sa zadanim pravcem kroz zadanu točku koja ne pripada pravcu može konstruirati točno jedna paralela. Za slučaj da su preostala dva kuta šiljasta slijedi da se sa zadanim pravcem kroz zadanu točku koja ne pripada pravcu mogu konstruirati najmanje dvije paralele. Saccheri je proučavajući taj slučaj nesvjesno otkrio hiperboličnu geometriju, ali kako je mislio da je to nespojivo s prirodom pravca, smatrao je da je tako dokazao da ni taj slučaj ne vrijedi.

U 18. stoljeću je matematičar Johann Heinrich Lambert došao do zaključka da za geometriju u kojoj za Saccherijev četverokut vrijedi da su preostala dva kuta šiljasta vrijedi da što je trokut manje površine to je zbroj veličina kutova trokuta veći i bliži 180°. Kako za geometriju na sferi vrijedi da je zbroj veličina kutova trokuta veći od 180°, Lambert je zaključio da bi zbroj veličina kutova trokuta manji od 180° mogao vrijediti na sferi imaginarnog radijusa.[7]

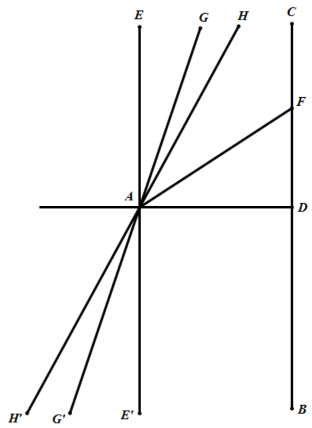
Rješavanjem problema petog postulata bavio se i matematičar Georg Klügel (18. stoljeće). On je u svojoj doktorskoj disertaciji analizirao 28 različitih pokušaja dokazivanja petog postulata. Svaki pokušaj je imao nedostatak, te je Klügel zaključio da je moguće da se peti postulat uopće ne može dokazati i da ga ljudi intuitivno smatraju istinitim. Takav način razmišljanja motivirao je matematičare da problem sagledaju iz drugog kuta, odnosno da proučavaju kakva bi geometrija bila da peti postulat ne vrijedi.[7]

Smatra se da je Carl Friedrich Gauss prvi došao do ozbiljnijih rezultata o hiperboličnoj geometriji, ali ih nikada nije objavio. Svoja razmišljanja o hiperboličnoj geometriji podijelio je s F. A. Taurinusom i Farkasem Bolyaijem.[13] Gauss je bio uvjeren u neovisnost petog postulata od preostalih četiri, ali i u postojanje geometrije u kojoj bi kroz zadanu točku postojalo više od jedne paralele sa zadanim pravcem.[7]

Pravi preokret u razumijevanju petog postulata dogodio se u 19. stoljeću, kada su, neovisno jedan o drugome, János Bolyai i Nikolaj Ivanovič Lobačevski razvili apsolutnu geometriju u kojoj peti postulat ne vrijedi, kasnije poznatu kao hiperbolična geometrija. [13]

Jánosa Bolyaija je otac Farkas Bolyai upoznao s problemom petog postulata, ali mu je i savjetovao da se tim problemom ne bavi. János ga nije poslušao, te su njegovi rezultati objavljeni 1825. godine na 24 strane dodatka u očevoj knjizi. Gauss je, u pismu Farkasu Bolyaiju, pohvalio Jánosev rad nazvavši ga prvorazrednim genijem, te je napomenuo da je i sam to već otkrio, ali nije objavio, što je uvrijedio Jánosa Bolyaija.[7] Iako je Gauss imao moć da usmjeri pozornost matematičara toga doba na otkrića Jánosa Bolyaija, iz nepoznatih razloga to nije učinio, te je Jánosev rad u to doba ostao nezapažen.[13] Ideja Jánosa Bolyaija o geometriji u kojoj kroz zadanu točku postoji beskonačno mnogo paralela sa zadanim pravcem, sastojala se od toga da uzme krug u ravnini te pravcima smatra samo dijelove unutar kruga. Tada za zadani pravac u ravnini očito postoji beskonačno mnogo pravaca kroz zadanu točku koji su paralelni sa zadanim pravcem.[7]

Nikolaj I. Lobačevski je do sličnih zaključaka došao nezavisno o Jánosu Bolyaiju, ali su i njegovi rezultati prošli nezapaženo. Lobačevski je svoje rezultate objavio 1829., a za to nisu znali ni Gauss ni Bolyai jer se radilo o članku na ruskom jeziku u lokalnoj sveučilišnoj publikaciji sveučilišta u Kazanu. Lobačevski je 1840. objavio knjižicu od 61 stranice u kojoj opisuje svoju neeuklidsku geometriju. U toj knjižici peti Euklidov postulat zamjenjen je postulatom Lobačevskog: Kroz zadanu točku postoje dva pravca paralelna zadanom pravcu. Lobačevski je razvio model u kojem je njegov postulat zadovoljen. Svi pravci ravnine kroz zadanu točku podijele se u dva skupa; pravci koji sijeku zadani pravac i pravci koji ne sijeku zadani pravac. Tada postoje dva pravca koji čine rub između ta dva skupa i upravo su ti pravci paralele sa zadanim pravcem kroz zadanu točku. [7]

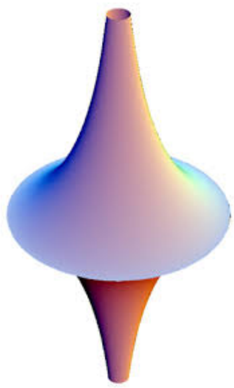


Slika 1.8: Dijagram Lobačevskog

Neovisno o problemu petog postulata, razvijao se koncept zakrivljenosti, a s njim i problem plohe konstantne negativne zakrivljenosti. Leonard Euler je u 18. stoljeću uveo pojam zakrivljenosti plohe. Razlikujemo pozitivnu zakrivljenost, negativnu zakrivljenost i zakrivljenost 0. Gauss je pokazao da, određujemo li zakrivljenost plohe, ne moramo znati kako je ona uložena u prostor, nego samo njena intrizična svojstva. Ploha konstantne pozitivne zakrivljenosti je sfera, a ravnina ima zakrivljenost 0. Nama je zanimljiva ploha konstantne negativne zakrivljenosti. Već je i Gauss tražio takvu plohu, i premda je nije otkrio, vjerovao je da postoji i zaključio da ima zanimljiva geometrijska svojstva.

Tek je Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1854. godine, zaključio da bi hiperbolična geometrija mogla biti intrizična geometrija plohe s konstantnom negativnom zakrivljenošću koja se širi u beskonačnost u svim smjerovima.

Prvi koji je uspio pronaći plohu konstantne negativne zakrivljenosti je bio Eugenio Beltrami. On je 1866. godine pokazao da površina pseudosfere ima konstantnu negativnu zakrivljenost, odnosno lokalno hiperboličnu geometriju. Problem s tim modelom hiperbolične geometrije je da se ne može neograničeno širiti u beskonačnost.[13]



Slika 1.9: Pseudosfera ($http://www.learner.org/courses/mathilluminated/$)

Prvi model hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini je dao Jules Henri Poincaré.[13]

Felix Klein je 1871. dao modele hiperbolične geometrije i drugih neeuklidskih geometrija, primjerice Riemannove sferne geometrije. Pokazao je da postoje tri osnovna tipa dvodimenzionalne geometrije i imenovao ih:

- geometrija u kojoj pravci imaju po dvije beskonačno daleke točke - **hiperbolična geometrija**
- geometrija u kojoj pravci nemaju beskonačno dalekih točaka - **sferna geometrija**
- geometrija u kojoj svaki pravac ima dvije podudarne (tj. jednu) beskonačno daleke točke - **euklidska geometrija** [7]

David Hilbert je dokazao konzistentnost Euklidovih aksioma i 1899. godine dao novu aksiomatizaciju euklidske geometrije.[7] Osim toga, 1901. je dokazao da se beskonačne plohe s hiperboličnom geometrijom ne mogu opisati jednadžbom. [13]

Jednadžbom možemo opisati pseudosferu. Pseudosfera je ploha s lokalno hiperboličnom geometrijom, odnosno ploha konstantne negativne zakrivljenosti konačne površine.

Parametrizacija pseudosfere [3]:
$x = \operatorname{sech}(u)\cos(v)$
$y = \operatorname{sech}(u)\sin(v)$
$z = u - \tanh(u)$,
gdje su $u \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ i $v \in [0, 2\pi\rangle$.

Razlikujemo:

- plohe s negativnom zakrivljenošću (sedlaste plohe)
- ograničene plohe s konstantnom negativnom zakrivljenošću (plohe s lokalno hiperboličnom geometrijom, npr.pseudosfera)
- neograničene plohe s konstantnom negativnom zakrivljenošću (hiperbolična ravnina)

Poglavlje 2

Vizualizacija hiperbolične geometrije

2.1 Problem vizualizacije hiperbolične geometrije

Od otkrića analitičke geometrije (17. stoljeće), uobičajeno je da matematičari plohe opisuju pomoću jednadžbi. David Hilbert je 1901. godine dokazao da je nemoguće pronaći jednadžbu koja opisuje plohu konstantne negativne zakrivljenosti koja se može širiti u svim smjerovima u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. Mnogi matematičari su zaključili da to znači da je nemoguće da postoji takva ploha (hiperbolična ploha) u euklidskom prostoru. Ipak, 1954. godine, matematičar Nicolaas Kuiper pokazao je da je moguće da takva ploha postoji, ali nije znao opisati njenu konstrukciju. Tim se problemom bavio i matematičar John Nash koji je, 1956. godine, došao do općenitijeg zaključka. Rezultati tih dvaju matematičara dani su *Nash-Kuiperovim teoremom* koji sadrži i tvrdnju da postoji neograničena ploha s hiperboličnom geometrijom u nekom (moguće višedimenzionalnom) euklidskom prostoru.

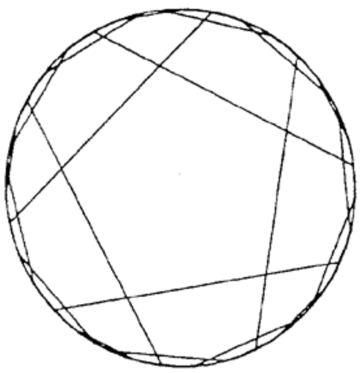
Prije pojave prvih modela hiperbolične ravnine u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, hiperboličnu ravninu se opisivalo projekcijom u euklidsku ravninu. Prvi su u tome uspjeli Eugenio Beltrami i Jules Henri Poincaré krajem 19. stoljeća.

Ipak, i dalje se postavljalo pitanje: Kako napraviti model hiperbolične geometrije u trodimenzionalnom euklidskom prostoru? Matematičarima su bile poznate plohe koje su na cijeloj svojoj površini negativno zakrivljene, ali ta zakrivljenost nije konstantna (sedlasta ploha), te plohe koje imaju konstantnu negativnu zakrivljenost, ali nisu neograničene (pseudosfera).

William Thurston je sedamdesetih godina dvadesetog stoljeća osmislio model od isječaka kružnog vijenca koji prikazuje hiperboličnu ravninu. Još neki modeli, nastali nakon Thurstonovog, kojima se prikazuje hiperbolična ravnina su poliedrični model i hiperbolična nogometna lopta. Navedeni modeli prikazuju hiperboličnu ravninu, ali kao i model nastao projekcijom u euklidsku ravninu, zbog različitih razloga nisu podobni za prikaz različitih svojstava hiperbolične ravnine. Kukičani modeli koje je 1997.godine osmislila latvijska matematičarka Daina Taimina vjerno prikazuju hiperboličnu ravninu, a zbog njihove fleksibilnosti vrlo je jednostavno otkrivati i svojstva hiperbolične geometrije.[13]

2.2 Modeli hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini

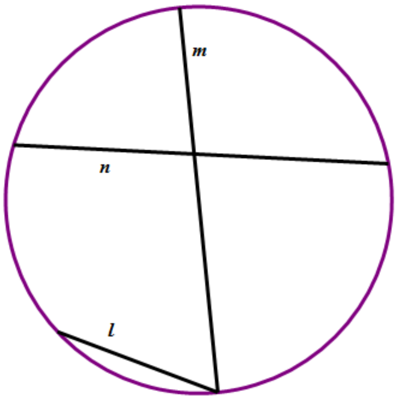
U geografiji površinu Zemlje (sfere) prikazujemo na geografskim kartama različitim projekcijama, odnosno površinu sfere prikazujemo u euklidskoj ravnini. Slično tome, model hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini zapravo je mapa (karta) hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini.[13] Jedan od prvih takvih modela je **Beltrami-Kleinov model**.



Slika 2.1: Beltrami-Kleinov model (*http : //www.mi.sanu.ac.rs/*)

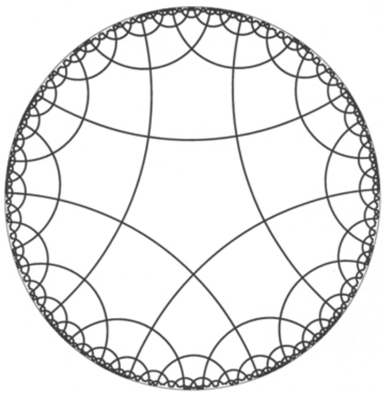
U Beltrami-Kleinovom modelu točke hiperbolične ravnine su predstavljene točkama euklidske ravnine koje pripadaju krugu. Pravci hiperbolične ravnine su predstavljeni dijelovima pravaca koji pripadaju krugu, odnosno dužinama čije rubne točke pripadaju krugu. Ovaj model je otvoren, odnosno točke kružnice koja obrubljuje krug ne pripadaju prikazu hiperbolične ravnine.

Promotrimo odnose pravaca u hiperboličnoj ravnini na Beltrami-Kleinovom modelu (Slika 2.2). Pravci n i m se sijeku. Pravci n i l nemaju zajedničkih točaka, pa su paralelni. Pravci m i l se sijeku u točki na rubu kruga, a kako ta točka ne pripada modelu, pravci m i l nemaju zajedničkih točaka u hiperboličnoj ravnini, odnosno paralelni su. Uočimo, oba pravca n i m paralelna su s pravcem l. Dakle, postoje barem dva pravca kroz zadanu točku paralelna sa zadanim pravcem. Veličine kutova u hiperboličnoj ravnini sačuvane su u Beltrami-Kleinovom modelu samo za kutove s vrhom u središtu graničnog kruga.[12]



Slika 2.2: Odnos pravaca u Beltrami-Kleinovom modelu

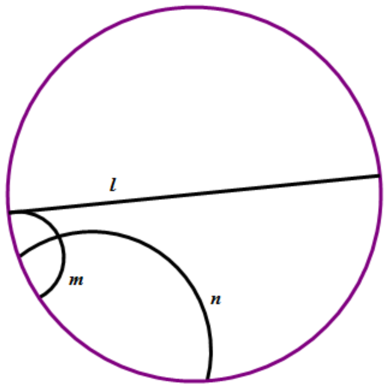
Model koji čuva veličine kutova je **Poincaréov disk**.



Slika 2.3: Poincaréov disk ($http : //www.mi.sanu.ac.rs/$)

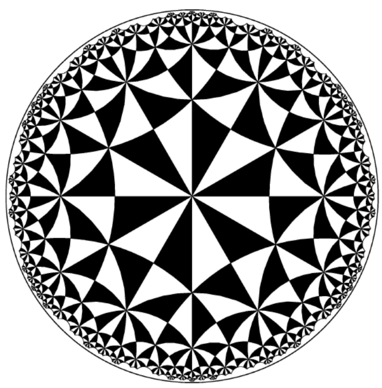
I u Poincaréovom modelu, točke hiperbolične ravnine su predstavljene točkama euklidske ravnine koje pripadaju nekom krugu, također otvorenom. Pravci hiperbolične ravnine predstavljeni su kružnim lukovima okomitim na granični krug, s krajevima na rubu kruga.

Promotrimo odnose pravaca u hiperboličnoj ravnini na Poincaréovom disku.(Slika 2.4) Kružni lukovi m, n i l predstavljaju pravce u hiperboličnoj ravnini. Iako je l polumjer granične kružnice, promatramo ga kao kružni luk kružnice beskonačnog polumjera. Kružni lukovi na modelu, odnosno pravci n i m, u hiperboličnoj ravnini, se sijeku. Pravci n i l nemaju zajedničkih točaka, pa su paralelni. Pravci m i l se sijeku u točki na rubu kruga, a kako ta točka ne pripada modelu, pravci m i n nemaju zajedničkih točaka u hiperboličnoj ravnini, odnosno paralelni su. Uočimo, oba pravca n i m paralelna su s pravcem l. Dakle, postoje barem dva pravca kroz zadanu paralelna sa zadanim pravcem. Poincareov disk čuva veličine kutova, pa je kut između pravaca m i n u hiperboličnoj ravnini jednak kutu između kružnica kojima pripadaju kružni lukovi m i n u euklidskoj ravnini.[12]



Slika 2.4: Odnosi pravaca na Poincareovom disku

Gotovo stoljeće kasnije, nizozemski umjetnik M.C. Escher upoznao je matematičara i umjetnika H.S.M. Coxetera. Iako Escher nije imao nikakvu matematičku naobrazbu, izuzetno je razumio matematiku, vizualno i intuitivno. Utjecaj matematike posebno se vidio u njegovim radovima vezanim uz popločavanja ravnine i uz pravilne poliedre. Nakon što ga je Coxeter upoznao s Poincaréovim diskom i svojim popločavanjem Poincaréovog diska, Escher je napravio svoje poznate radove *Circle Limit I, II, III i IV*. [13]



Slika 2.5: Coxeterovo popločavanje Poincareovog diska (*http://www.math.cornell.edu/*)

Slika 2.6: Circle Limit I, II, III i IV (*http : //www.mcescher.com/*)

U Escherovim prikazima hiperbolične ravnine pravce u hiperboličnoj ravnini ne prikazuju kružni lukovi već različite izlomljene linije. Primjerice, u Circle Limit I imamo linije koje prikazuju leđnu kost ribe. Uzmemo li dvije takve linije koje imaju zajedničku početnu i krajnju točku, one će u svim točkama biti jednako udaljene (ekvidistantne). Također, motiv koji se ponavlja ostaje istog oblika koliko god se približavali graničnoj kružnici. To je svojstvo Escheru bilo posebno zanimljivo. [9]

2.3 Vizualizacija pomoću modela od papira

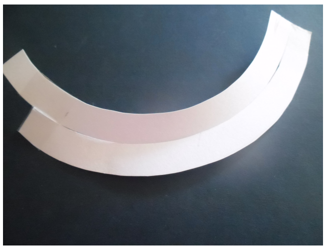
Model od isječaka kružnog vijenca

Model od isječaka kružnog vijenca prvi je izradio William Thurston sedamdesetih godina dvadesetog stoljeća.

Za izradu ovog modela potrebno je što više sukladnih isječaka kružnog vijenca od papira čijim ćemo spajanjem dobiti model hiperbolične ravnine.

Slika 2.7: Primjer isječka kružnog vijenca

Isječke kružnog vijenca spajamo tako da spojimo unutarnji dio prvog isječka kružnog vijenca s vanjskim dijelom drugog isječka kružnog vijenca.



Slika 2.8: Spajanje dvaju isječaka kružnih vijenaca

Na taj način spajamo i preostale isječke kružnog vijenca.

Slika 2.9: Model hiperbolične ravnine od isječaka kružnih vijenaca

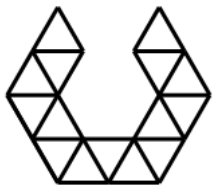
Što „uži" isječak kružnog vijenca uzmemo, to će model biti bolji. Neka je širina isječka kružnog vijenca označena s δ. Tada za $\delta \to 0$ i za konstantan radijus dobivamo precizan model hiperbolične ravnine. [13]

Poliedrični model

Poliedrični model dobivamo spajajući sedam jednakostraničnih trokuta u svaki vrh. Poliedrični model je jednostavniji za izraditi od modela od isječaka kružnog vijenca. Ipak, negativna strana ovog modela je što se, za razliku od modela od kružnih isječaka gdje se smanjenjem širine kružnog isječka dobiva bolja aproksimacija hiperbolične ravnine, smanjenjem veličine trokuta ne dobiva bolja aproksimacija hiperbolične ravnine. To je očito, jer se promjenom veličine jednakostraničnog trokuta ne mijenjaju veličine njegovih unutarnjih kutova. Osim toga, negativna strana ovog modela je ta da je uglat. David Henderson je modificirao ovaj model postavljajući sedam trokuta zajedno u jedan vrh, a šest u preostale vrhove.[13] Postoje još neke modifikacije ovog modela, primjerice ona u kojem se ne uzimaju jednakostranični trokuti, nego jednakokračni trokuti s kutovima veličina 63^o, 63^o i 54^o [5], no te modifikacije nećemo promatrati.

Izrada Hendersonovog poliedričnog modela hiperbolične ravnine može se provesti na tri načina.

Prvi način izrade je sličan izradi hiperbolične ravnine od isječaka kružnog vijenca. U ovom modelu nemamo isječke kružnog vijenca nego dijelove kao na Slici 2.10. Spajamo ih tako da spojimo unutarnji rub jednog takvog dijela s vanjskim rubom drugog takvog dijela. Najlakše je da krenemo od lijevog ili desnog kraja vanjskog ruba drugog dijela i zatim spajamo (lijepimo) dužinu po dužinu. Uočimo da se unutarnji rub sastoji od manje dužina, pa će se model širiti na jednu stranu.(Slika 2.11).



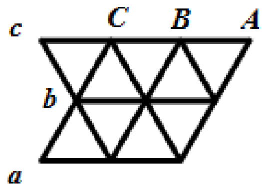
Slika 2.10: Dijelovi za izradu poliedričnog modela (1.način)

Slika 2.11: Poliedrični model (1.način)

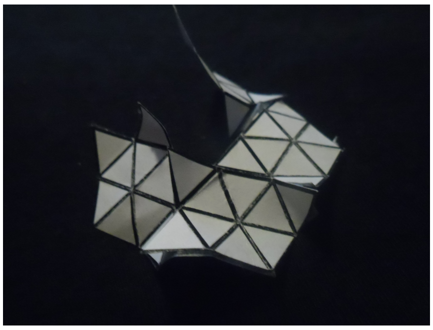
Kod drugog načina izrade spajamo dijelove kao na Slici 2.12. prema uputama $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, $c \leftrightarrow C$ i tako dobivamo dva spojena dijela kao na Slici 2.13.

Treći način je i najbrži način. Potrebno nam je što više sukladnih traka koje se sastoje od jednakostraničnih trokuta kao na Slici 2.14. O duljini traka odlučujemo sami. Trake spajamo kao na slici 2.15. Pritom koristimo dodatnih 5 trokuta koja su na slici označena crvenom bojom. Nakon toga u prostor između traka ubacujemo iduću traku, te nastavljamo postupak. Što više traka koristimo u modelu, to će model biti precizniji.

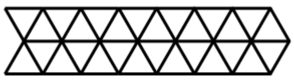
Model hiperbolične ravnine možemo dobiti i tako da u početku spojimo tri trake i nastavimo postupak analogno kao i za četiri trake. [13]



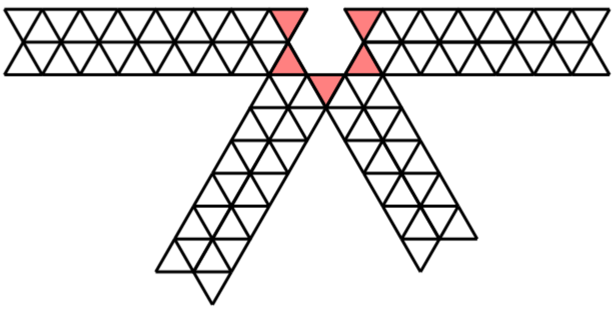
Slika 2.12: Dijelovi za izradu poliedričnog modela (2. način)



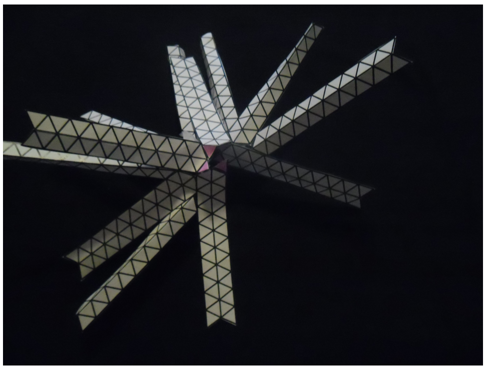
Slika 2.13: Poliedrični model (2.način)



Slika 2.14: Dijelovi za izradu poliedričnog modela (3. način)



Slika 2.15: Spajanje dijelova kod poliedričnog modela (3.način)



Slika 2.16: Poliedrični model (3.način)

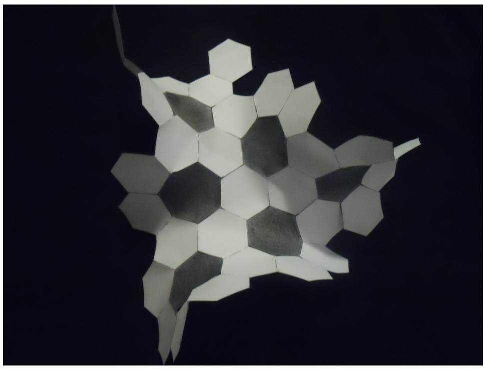
U svakom od triju načina izrade poliedričnog modela hiperbolične ravnine bilo bi dobro papir, barem lagano, savinuti po linijama, odnosno po stranicama trokuta. Na taj način je lakše spojiti pojedinačne dijelove, a model postaje savitljiviji i lakši za korištenje.

Hiperbolična nogometna lopta

Znamo da u izradi klasične nogometne lopte koristimo peterokute i šesterokute. Kada izrađujemo nogometnu loptu krećemo od peterokuta. Nad svaku stranicu peterokuta postavljamo šesterokut. U svaki vrh zajednički dvama šesterokutima postavljamo peterokut. Nastavljamo postupak tako da nad svakom stranicom svakog peterokuta budu šesterokuti sve dok se dobivena ploha ne zatvori. Na taj način dobivamo nogometnu loptu, točnije krnji ikozaedar - aproksimaciju sfere.

Slika 2.17: Nogometna lopta ($http://www.clipartbest.com/$)

Model hiperbolične nogometne lopte otkrio je Keith Henderson. Keith Henderson je peterokute nogometne lopte zamijenio sedmerokutima. U tom slučaju se dobivena ploha ne zatvara u sferu, već se neograničeno širi, odnosno dobivamo model hiperbolične ravnine kojeg nazivamo hiperbolična nogometna lopta. Još jedan način da dobijemo hiperboličnu ravninu je da koristimo samo peterokute, te da u svaki vrh spojimo po četiri peterokuta.[13]



Slika 2.18: Hiperbolična nogometna lopta

Fizički modeli hiperbolične ravnine koje smo opisali pomažu u predočavanju izgleda hiperbolične ravnine, ali ćemo na njima teško uočiti karakteristike hiperbolične geometrije. Poliedrični model i hiperbolična nogometna lopta su uglati i na njima ne možemo promatrati kutove, paralelne pravce i mnogokute. Model od isječaka kružnog vijenca,ako je dovoljno velik i precizan, omogućava nam promatranje kutova, paralelnih pravaca i mnogokuta. Ipak, morat ćemo pripaziti u rukovanju takvim modelom jer se zbog nesavitljivosti i krhkosti vrlo brzo raspada. Također, zbog nesavitljivosti, promatrane karakteristike neće uvijek biti jasno prikazane. Zato je potrebno izraditi fizički model hiperbolične ravnine kojim ćemo s lakoćom rukovati i na kojem možemo jednostavno prikazivati karakteristike hiperbolične geometrije.

2.4 Vizualizacija pomoću kukičanih modela

Tragovi *naalebindinga*, preteče kukičanja i pletenja, sežu do šestog stoljeća prije Krista, a prvi tragovi korištenja čvorova sežu i do 5000 godina prije Krista. Ne postoje zapisi kada se počelo kukičati na način kakav danas poznajemo. Ručni rad, pa tako i kukičanje, neovisno se razvijao u različitim dijelovima svijeta. Dok se u hladnim regijama sjeverne i jugoistočne Europe kukičalo tople i korisne odjevne predmete poput rukavica, u bogatoj zapadnoj Europi kukičanje se koristilo za izradu čipke. Danas je popularno kukičanje „slobodnim stilom", gdje se ne kukiča prema već postojećim obrascima, već se stvaraju originalni radovi. Kukičanje kao sredstvo kojim se objašnjavaju matematičke ideje pojavilo se već u 19. stoljeću kada je profesor Alexander Crum Brown kukičane modele koristio u svojim predavanjima o kristalografiji. Ideja koja se koristi u izradi kukičanih modela hiperbolične ravnine je kako iz ravninskih oblika prijeći u trodimenzionalne oblike. Nađene su trodimenzionalne lutke koje potječu iz antičke Kine. Tom su se idejom bavili i nematematičari u izradi tabletića s naborima. Tabletići s naborima dobro prikazuju plohe s negativnom zakrivljenosti, ali ne nužno s konstantnom negativnom zakrivljenosti, jer se najčešće u njihovoj izradi ne zadržava omjer rasta.[13]

Slika 2.19: Tabletić s naborima

Kukičani modeli hiperbolične ravnine koje je 1997.godine otkrila Daina Taimina motivirali su i biologe za izradu modela koralja, mahunarki i ostalih organizama negativne zakrivljenosti ili organizama s naborima. Ipak, kao što u prirodi ništa nije precizno sferno, tako nije ni precizno hiperbolično, odnosno nema konstantnu negativnu zakrivljenost. Modeli koralja, mahunarki i organizama negativne zakrivljenosti zato podsjećaju na hiperboličnu ravninu, ali zapravo nisu modeli hiperbolične ravnine. [13]

Slika 2.20: Kukičani model mahunarke

Kukičanje hiperbolične ravnine

Kukičanje hiperbolične ravnine zahtijeva samo znanje o osnovama kukičanja.
Pribor koji se koristi u kukičanju hiperbolične ravnine je:

- kukica za kukičanje,
- konac za kukičanje.

Kukice se razlikuju po veličini. Odabiremo kukicu ovisno o debljini konca i željenoj napetosti pletiva.

Slika 2.21: Kukica i konac za kukičanje

Osnovne tehnike potrebne za kukičanje hiperbolične ravnine su:

- **kukičanje lančića**

  Lančić je niz očica kojim počinjemo gotovo svako kukičano pletivo, pa tako i model hiperbolične ravnine. Očica nastaje izradom petljice oko kukice.

Slika 2.22: Kukičani lančić

- **kukičanje niskog štapića**

  Nakon što napravimo lančić, pletivo nastavljamo kukičanjem štapića. Iako, osim niskog štapića, postoje i visoki štapić, poluvisoki štapić, dvostruki štapić itd., mi ćemo koristiti samo niski štapić. Da bismo izradili niski štapić kukicu moramo provući kroz pletivo na za to predviđenom mjestu (očicu). Kukicom zahvaćamo konac i provlačimo kroz prvu očicu na kukici. Sada imamo dvije očice na kukici. Konac provlačimo kroz obje očice na kukici i na taj način dobivamo štapić. Zatim postupak nastavljamo provlačenjem kukice kroz iduću očicu i tako do kraja reda.

Slika 2.23: Kukičanje niskog štapića

- **prijelaz u idući red**

  Od lančića prelazimo u prvi red pomoću zadnje očice na lančiću. Zadnju očicu ne brojimo jer ona zapravo prelazi u idući red. Izradu novih štapića iznad prethodnog reda počinjemo jednom dodatnom očicom na kraju prethodnog reda. Navedenu očicu ne brojimo u daljnjem radu.

Na ovaj način nastaje osnovno kukičano pletivo s niskim štapićima. Broj štapića u svim redovima je isti. [16]

Slika 2.24: Kukičano pletivo

Za kukičanje hiperbolične ravnine potrebne su male modifikacije navedene tehnike kukičanja.

Ideja o kukičanju hiperbolične ravnine proizašla je iz grafa koji prikazuje eksponencijalni rast. Daina Taimina je uočila da taj graf može postati nacrt za kukičanje hiperbolične ravnine. Iako je prvobitna tehnika kojom je pokušala izraditi hiperboličnu ravninu bila pletenje, Daina je ubrzo shvatila da se u pletenju nakon određenog broja redova broj očica toliko poveća da je praktički nemoguće nastaviti postupak. Za razliku od pletenja, kukičamo jednu po jednu očicu, pa je kukičanje puno povoljnija tehnika za izradu hiperbolične ravnine. Daina Taimina je do kukičanog modela hiperbolične ravnine došla metodom pokušaja i promašaja. Najprije je u svaku drugu očicu postavljala po dva štapića, i tako red po red. Takav model je prebrzo dobivao nabore, pa je Daina shvatila da mora promijeniti omjer u kojem dodaje nove štapiće. Naposljetku je došla do postupka kojim se dobiva kukičani model hiperbolične ravnine. Kod kukičanja je bitno pripaziti da očice budu podjednako čvrste na cijelom modelu, kako bi se dobio što precizniji model hiperbolične ravnine.

Kukičanje hiperbolične ravnine počinjemo kukičanjem lančića od dvadesetak očica, s tim da je zadnja očica ona koja prelazi u drugi red i koju nećemo brojati. Odaberemo broj N očica nakon kojih ćemo dodavati očicu više. Zatim kukičamo niske štapiće u prvom redu. Za prvih N očica kukičamo po jedan štapić. U $(N + 1)$-vu očicu kukičamo dva štapića. Analogan postupak nastavljamo do kraja reda. Za prijelaz u idući red napravimo jednu dodatnu očicu koju nećemo brojati, te nastavljamo postupak. Kada model dosegne željenu veličinu završavamo model provlačenjem niti kroz posljednju očicu. [13]

Na kukičanom modelu hiperbolične ravnine lako se uočava eksponencijalan rast broja očica. Kada kukičamo hiperboličnu ravninu uočavamo kako se vrlo brzo, iz retka u redak, povećava broj štapića, odnosno očica. Očice više ne stanu u ravninu, pa se pojavljuju nabori na modelu, odnosno model se širi u prostor.

Kod izrade modela hiperbolične ravnine sami biramo N, odnosno broj očica nakon kojeg stavljamo dodatni štapić. Primjerice, možemo odabrati da ćemo u prve četiri očice kukičati po jedan štapić, a u petu očicu, odnosno $(N + 1)$-vu očicu dva štapića. Za takav model kažemo da je model hiperbolične ravnine s omjerom 4 : 5. Možemo kukičati hiperbolične ravnine različitih omjera. Jedino je bitno da u svakom modelu zadržimo isti omjer od početka do kraja. [13] Kasnije će biti puno lakše raditi s modelima čiji omjer je bliži broju 1.

Slika 2.25: Hiperbolična ravnina s omjerom 3 : 4

Slika 2.26: Hiperbolična ravnina s omjerom 4 : 5

Slika 2.27: Hiperbolična ravnina s omjerom 9 : 10

Polumjer hiperbolične ravnine

Znamo da se sfere međusobno razlikuju po svom polumjeru, ali sferna geometrija vrijedi na sferama svih polumjera. Isto vrijedi i za hiperbolične ravnine.

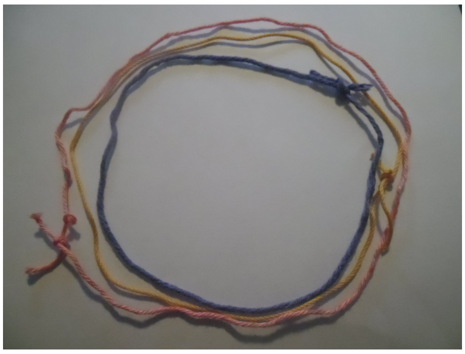
Polumjer kukičane hiperbolične ravnine ovisi o omjeru hiperbolične ravnine, ali i o stilu kukičanja. Možemo uočiti da na kukičanom modelu redovi nisu ravni, već se savijaju, odnosno tvore prstene istog polumjera. Polumjer tih prstena zapravo je polumjer hiperbolične ravnine.[13] Drugim riječima, polumjer hiperbolične ravnine je polumjer najveće kružnice koja pripada dijelu hiperbolične ravnine koji se ne nabire, odnosno dijelu koji pripada euklidskoj ravnini.[4] Polumjer hiperbolične ravnine možemo približno izmjeriti tako da postavimo kukičani model na ravnu površinu i pokušamo ga izravnati. Tada će se na modelu formirati mali trodimenzionalni luk. Taj luk obrubljujemo u krug koncem, te mjerimo polumjer tog kruga. Taj polumjer ujedno je i polumjer te hiperbolične ravnine.[13] Najjednostavnije ćemo izmjeriti polumjer hiperbolične ravnine tako da uzmemo jedan nabor, spojimo ga u krug i gledamo najveći krug koji tako možemo formirati, a da cijeli pripada euklidskoj ravnini.[4]

Slika 2.28: Polumjer hiperbolične ravnine

Možemo uočiti da se smanjenjem polumjera hiperbolične ravnine povećava zakrivljenost. Znamo da isto vrijedi i za sferu. Zakrivljenost sfere polumjera R definirana je kao $\frac{1}{R^2}$, a zakrivljenost hiperbolične ravnine $-\frac{1}{R^2}$. I za sferu i za hiperboličnu ravninu beskonačnog polumjera zakrivljenost teži nuli, odnosno ploha teži euklidskoj ravnini.

Osim preko polumjera hiperbolične ravnine i sfere, pozitivnu i negativnu zakrivljenost možemo promatrati i na drugi način. Konstruiramo li kružnicu određenog polumjera u euklidskoj ravnini, na sferi i u hiperboličnoj ravnini, one će se razlikovati. Kružnica danog polumjera na sferi bit će manjeg opsega i površine od kružnice istog polumjera u euklidskoj ravnini, a kružnica istog polumjera u hiperboličnoj ravnini bit će većeg opsega i površine.

Slika 2.29: Kružnica određenog polumjera na sferi, u euklidskoj ravnini i u hiperboličnoj ravnini



Slika 2.30: Usporedba veličina kružnica određenog polumjera na sferi (ljubičasta), u euklidskoj ravnini (žuta) i u hiperboličnoj ravnini (ružičasta)

To možemo povezati i s činjenicom da, pokušamo li sferu izravnati u euklidsku ravninu, ona će se razdvojiti i površina koju pokriva bit će isprekidana. No, pokušamo li hipeboličnu ravninu izravnati u euklidsku ravninu, neki dijelovi hiperbolične ravnine neće stati u euklidsku ravninu, već će se preklapati.[13]

Uočimo da, konstruiramo li kružnicu zadanog polumjera na sferi većeg polumjera, kružnica će imati veći opseg i površinu. Za hiperboličnu ravninu vrijedi suprotno, kružnica zadanog polumjera konstruirana na hiperboličnoj ravnini većeg polumjera imat će manji opseg i površinu.

Paralelni pravci u hiperboličnoj ravnini

Uzmimo da papir predstavlja euklidsku ravninu. Tada pravac u euklidskoj ravnini možemo dobiti presavijanjem papira. Isto tako, presavijanjem kukičanog modela dobit ćemo pravac u hiperboličnoj ravnini. Pravac ćemo označavati tako da ga ušijemo u hiperboličnu ravninu pomoću igle i konca.

Slika 2.31: Pravac u hiperboličnoj ravnini

Promotrimo pravce u hiperboličnoj ravnini. Dva pravca okomita na kukičane redove u jednom smjeru se približavaju jedan drugome, a u drugom smjeru se udaljavaju, odnosno ponašaju se asimptotski. Općenito, dva pravca koja zatvaraju sukladne kutove s kukičanim redovima, ponašaju se asimptotski.

Slika 2.32: Asimptotski pravci u hiperboličnoj ravnini

Dva pravca koji ne zatvaraju sukladne kutove s kukičanim redovima u jednom dijelu ravnine se približavaju, ali u oba smjera od tog dijela se udaljavaju (divergiraju).

Slika 2.33: Paralelni pravci u hiperboličnoj ravnini koji divergiraju u oba smjera

Sada možemo, na kukičanom modelu, pokazati karakteristiku hiperbolične geometrije, a to je da za zadani pravac i zadanu točku koja mu ne pripada u hiperboličnoj ravnini postoji beskonačno mnogo pravaca kroz tu točku, koji su paralelni sa zadanim pravcem.

Najprije označimo zadani pravac na kukičanom modelu. Zatim odaberemo točku na modelu i presavijanjem pokušavamo pronaći paralelan pravac kroz tu točku. Uočavamo da takvih pravaca ima beskonačno mnogo. Također, uočavamo da razlikujemo asimptotske pravce koji se približavaju zadanom pravcu slijeva i asimptotske pravce koji se približavaju zadanom pravcu zdesna.

Slika 2.34: Pravci kroz zadanu točku paralelni sa zadanim pravcem

Presavijanjem kukičanog modela možemo prikazati i okomite pravce u hiperboličnoj ravnini. I ovdje primjenjujemo analogiju s euklidskom ravninom i presavijanjem papira. Da bismo u euklidskoj ravnini prikazali okomite pravce presavinemo papir da bismo dobili prvi pravac. Zatim označimo neku točku, presavinemo papir kroz tu točku tako da se prvi pravac preklapa. Navedeni postupak provodimo na kukičanom modelu i dobivamo okomite pravce. Možemo uočiti da je pravac kroz zadanu točku, okomit na zadani pravac, jedinstven.

Slika 2.35: Okomiti pravci

Zaključili smo, presavijajući kukičani model, da imamo beskonačno mnogo pravaca kroz zadanu točku, paralelnih sa zadanim pravcem. Ako kroz tu zadanu točku konstruiramo okomicu na zadani pravac, uočit ćemo da će taj pravac biti okomit samo na jedan od pravaca paralelnih sa zadanim pravcem. Također, dva pravca imaju najviše jednu zajedničku okomicu, što također možemo provjeriti presavijanjem modela. [13]

Slika 2.36: Okomiti i paralelni pravci

Presavijanjem kukičanog modela otkrili smo aksiom hiperbolične geometrije koji zamijenjuje peti Euklidov postulat:

Aksiom. *Neka je zadan pravac u ravnini i točka koja mu ne pripada. Tada postoji više od jednog pravca paralelnog s danim pravcem kroz danu točku. Odnosno, točka koja ne pripada pravcu u ravnini sadržana je u barem dva pravca koja ne sijeku dani pravac.*[8]

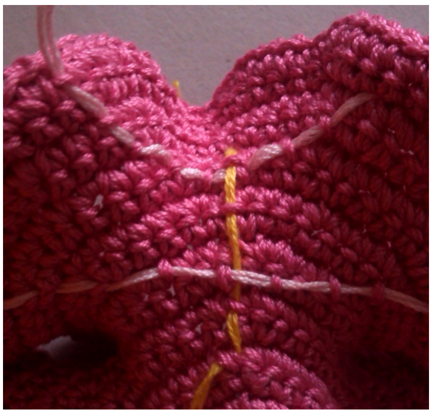
Na modelima smo ilustrirali da vrijede neki teoremi hiperbolične geometrije, primjerice[11]:

Teorem 2.4.1. *Ako se dva pravca približavaju zadanom pravcu slijeva (zdesna), tada se oni i jedan drugome približavaju slijeva (zdesna).*

Slika 2.37: Crveni pravac i žuti pravac približavaju se bijelom pravcu zdesna (asimptotski), pa se crveni i žuti pravac približavaju jedan drugome zdesna (asimptotski)

Teorem 2.4.2. *Neka je pravac AB zajednička okomica pravaca p_1 i p_2, gdje je $A \in p_1$, a $B \in p_2$, te neka je $C \in p_1$, $C \neq A$ i $D \in p_2$, $D \neq B$. Tada vrijedi $|AB| < |CD|$.*

Teorem 2.4.3. *Paralelni pravci imaju najviše jednu zajedničku okomicu.*



Slika 2.38: Zajednička okomica dvaju paralelnih pravaca

Kutovi trokuta u hiperboličnoj ravnini

U euklidskoj geometriji vrijedi da je zbroj veličina kutova svakog trokuta 180° . U sfernoj geometriji zbroj veličina kutova trokuta je veći od 180° (vidi Sliku 1.6)

Želimo na kukičanom modelu pokazati da je u hiperboličnoj geometriji zbroj veličina kutova trokuta manji od 180°. Na modelu označavamo tri točke i pomoću konca označavamo dužine koje spajaju te tri točke. Na taj način smo prikazali trokut u hiperboličnoj ravnini. Možemo uočiti da je zbroj veličina kutova trokuta manji od 180°.[13]

Slika 2.39: Trokut u hiperboličnoj ravnini

Što je trokut veći to je zbroj veličina njegovih kutova manji. Najveći trokut koji možemo smjestiti u hiperboličnu ravninu zove se *idealan trokut*. Za njegove kutove vrijedi da zbroj njihovih veličina teži nuli. Možemo pronaći više idealnih trokuta na svojem kukičanom modelu, ali će svi biti sukladni.

Slika 2.40: Zbroj veličina kutova većeg trokuta manji je od zbroja veličina kutova manjeg trokuta

Slika 2.41: Idealni trokut

Površinu trokuta u hiperboličnoj ravnini računamo po formuli:

$$P = (180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot R$$

Gore su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta u stupnjevima, a R radijus hiperbolične ravnine. Možemo uočiti da će površina idealnog trokuta u hiperboličnoj ravnini s radijusom 1 biti jednaka π.[13]

Na kukičanom modelu smo dokazali da vrijedi teorem:

Teorem 2.4.4. *Zbroj veličina kutova trokuta u hiperboličnoj ravnini manji je od* 180°.

Kukičanje simetrične hiperbolične ravnine

Sjetimo se da su modeli hiperbolične ravnine u euklidskoj ravnini bili simetrični u odnosu na središte kružnice koja je predstavljala rub modela. Fizički modeli koje smo do sada promatrali nisu simetrični. Ipak, možemo napraviti kukičani model simetrične hiperbolične ravnine koji će biti simetričan u odnosu na središte modela.

Kukičanje simetrične hiperbolične ravnine nije jednostavno kao kukičanje nesimetrične hiperbolične ravnine. Kod simetrične hiperbolične ravnine kukičati počinjemo od sredine, a omjer nije konstantan, nego ovisi o redu u kojem kukičamo. Omjer određujemo iz formule za opseg kružnice polumjera r (mjeren unutar hiperbolične ravnine):

$$O(n) = \pi \cdot R \cdot (e^{n \cdot h/R} - e^{-n \cdot h/R}),$$

gdje je n broj reda u kojem se nalazimo, h prosječna visina štapića odnosno reda štapića, a R željeni radijus simetrične hiperbolične ravnine. Prosječna visina štapića ovisi o stilu kukičanja i napetosti pletiva, a određujemo ju tako da kukičamo 12 kratkih redova (oko

10 očica u redu), izmjerimo visinu srednjih 10 redova i taj broj podijelimo s 10. Omjer $O(n)/O(n-1)$ zaokružen na najbliži „jednostavni" razlomak određuje u kojem omjeru povećavamo broj očica u n-tom redu.

Primjer. Visina štapića mojeg pletiva je 0,5 cm. Želim napraviti model s radijusom 4 cm. Iz tablice mogu, za svaki red, vidjeti u kojem omjeru povećavam broj očica u svom pletivu.

n	$O(n)$	$O(n)/O(n-1)$	približan razlomak	omjer povećavanja
1	$3,15$			
2	$6,35$	$2,01$	$2/1$	$1:2$
3	$9,65$	$1,52$	$3/2$	$2:3$
4	$13,1$	$1,36$	$4/3$	$3:4$
5	$16,75$	$1,28$	$4/3$	$3:4$
6	$20,67$	$1,23$	$5/4$	$4:5$
7	$24,91$	$1,21$	$5/4$	$4:5$
8	$29,54$	$1,19$	$6/5$	$5:6$
9	$34,63$	$1,17$	$7/6$	$6:7$
10	$40,26$	$1,16$	$7/6$	$6:7$
11	$46,52$	$1,16$	$7/6$	$6:7$
...	...	...	...	...
25	$285,46$	$1,13$	$9/8$	$8:9$
26	$323,61$	$1,13$	$9/8$	$8:9$
27	$366,81$	$1,13$	$9/8$	$8:9$
28	$415,76$	$1,13$	$9/8$	$8:9$
29	$471,22$	$1,13$	$9/8$	$8:9$

Možemo uočiti da se u jednom trenu čini da omjer postaje konstantan. U formuli $O(n) = \pi \cdot R \cdot (e^{n \cdot h/R} - e^{-n \cdot h/R})$ vidimo da se za velike n vrijednost $e^{-n \cdot h/R}$ približava nuli. Odnosno za velike n formula postaje $O(n) \approx \pi \cdot R \cdot e^{n \cdot h/R}$ pa imamo eksponencijalan rast broja očica iz retka u redak, odnosno stalan omjer povećanja.[13]

Posebno, na kukičanom modelu simetrične hiperbolične ravnine sa slike 2.42 možemo dobro vidjeti eksponencijalan rast. U izradu modela su utrošene jednake količine crvenog i ljubičastog konca, ali je crvenog konca bilo dovoljno za izradu 23 kukičana reda, a ljubičastog za izradu 7 kukičanih redova.

Slika 2.42: Simetrična hiperbolična ravnina

Pravilni mnogokuti u hiperboličnoj ravnini

U euklidskoj ravnini za veličinu unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta vrijedi formula:

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°,$$

gdje je n broj stranica pravilnog mnogokuta. Pravilan mnogokut ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine, odnosno pravilan n-terokut ima n stranica koje su sve jednakih duljina, i n unutarnjih kutova koji su svi jednakih veličina. Dakle, svi će pravilni n-terokuti za određeni n imati jednake veličine unutarnjih kutova. Za razliku od euklidske ravnine, u hiperboličnoj ravnini pravilni n-terokuti za određeni n ne moraju imati jednake veličine unutarnjih kutova. Odnosno, veličina unutarnjih kutova ovisi o duljini stranica mnogokuta.

U hiperboličnoj ravnini lako je doći do pravilnog osmerokuta. Središnji kut u hiperboličnoj ravnini podijelimo na osam jednakih dijelova presavijanjem kukičanog modela, kao što bismo radili i na komadu papira odnosno u euklidskoj ravnini.

Odaberemo li točke u svih osam smjerova koje su jednako udaljene od središta, odnosno od vrha središnjeg kuta, kojeg smo već konstruirali, i spojimo ih dužinama, dobit ćemo pravilan osmerokut.

Posebno je zanimljiv slučaj kada je veličina unutarnjeg kuta pravilnog osmerokuta 45°. Takav osmerokut konstruiramo metodom pokušaja i promašaja. Konstruiramo dvije stranice osmerokuta i mjerimo kut između tih dviju stranica. To ćemo najlakše učiniti tako da iz komada papira izrežemo mali kut veličine 22,5° koliko bi trebala iznositi veličina kuta između stranice osmerokuta i najveće dijagonale sa zajedničkom rubnom točkom. Komadić papira postavljamo u kut između stranice osmerokuta i dijagonale i provjeravamo iznosi li taj kut 22,5°. Ako ne, uspoređujemo ga sa željenim kutom i prema tome odlučujemo hoćemo li gledati veći ili manji osmerokut. Kada pronađemo za koju udalje-

Slika 2.43: Osmerokut u hiperboličnoj ravnini

nost od središta osmerokuta dobivamo unutarnji kut od 45°, na toj udaljenosti označavamo i ostale vrhove osmerokuta.

Sada možemo izraditi kukičani model osmerokuta s unutarnjim kutom veličine 45°. Izmjerimo na hiperboličnoj ravnini koje nam duljine treba biti određeni red i na temelju toga kukičamo osmerokut. Dakle, ne kukičamo red do kraja, nego kada vidimo da nam je red dovoljno dug, prelazimo u idući. Bitno je da za kukičani model osmerokuta koristimo isti omjer kao i na modelu hiperbolične ravnine na kojem smo mjerili osmerokut.

Slika 2.44: Osmerokut s unutarnjim kutom veličine 45° u hiperboličnoj ravnini

Pravilni osmerokut s unutarnjim kutom veličine 45° nam je zanimljiv jer pomoću njega možemo složiti tzv. hiperbolične hlače. Hiperbolične hlače su hiperbolična ograničena ploha, a dobivamo ih tako da označimo svaku drugu stranicu dobivenog osmerokuta s unutarnjim kutom veličine 45° i spojimo ih u parovima. Možemo ih spojiti pomoću čičak trake koju smo prethodno ušili na svaku drugu stranicu osmerokuta ili jednostavno pomoću igle i konca.

Slika 2.45: Hiperbolične hlače

U hiperboličnoj ravnini možemo konstruirati i pravokutne mnogokute. Primjerice,pravilni pravokutni šesterokut konstruiramo tako da najprije konstruiram proizvoljnu dužinu i presavijanjem konstruiramo njenu simetralu. Simetrala će biti okomita na dužinu. Zatim preklopimo krajnu točku dužine sa sjecištem dužine i njene simetrale. Pravac okomit na početnu dužinu kojem pripada krajnja točka dužine je pravac u kojem simetrala dodiruje presavinuti model. Analogno ponovimo za drugu krajnju točku. Na dobivene okomice nanosimo duljinu početne dužine. Tako smo dobili tri stranice pravilnog šesterokuta. Nastavljamo postupak dok ne dođemo do pravilnog pravokutnog šesterokuta. Ako odmah ne dobijemo pravilan pravokutan šesterokut, mijenjamo duljinu početne dužine i pokušavamo ponovo. Ne postoji formula kojom možemo odrediti kada ćemo dobiti pravilan pravokutan šesterokut.[13] Na isti način konstruiramo i ostale pravilne pravokutne mnogokute.

Slika 2.46: Pravilni pravokutni šesterokut u hiperboličnoj ravnini

Važno je naglasiti da u hiperboličnoj ravnini ne možemo konstruirati kvadrat, odnosno četverokut kojem su sva četiri kuta prava, jer je u hiperboličnoj ravnini zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta manji od 360°. Navedeno svojstvo možemo povezati sa Saccherijevim četverokutom i **Teoremom 2.4.5.**. Dokaz teorema 2.4.5. proizlazi iz navedenog svojstva četverokuta, jer kada bi dva paralelna pravca imala dvije zajedničke okomice dobiveni četverokut bio bi kvadrat čime dolazimo do kontradikcije.

Kukičanje pseudosfere

Eugenio Beltrami je 1868. godine prvi vizualizirao hiperboličnu ravninu u trodimenzionalnom euklidskom prostoru pomoću pseudosfere. Pseudosfera je rotacijska ploha, nastalo rotacijom traktrise oko njene asimptote. [7]

Traktrisa je krivulja koja nastaje kao trag objekta na jednom kraju špage konstantne duljine, kada se drugi kraj špage povlači duž pravca. Taj pravac je asimptota traktrise.[13] Parametrizirana jednadžba traktrise glasi:

$$x = 1/\cosh(t),\ y = t - \tanh(t).[1]$$

Pseudosfera je ploha konstantne negativne zakrivljenosti, ali se ne može širiti u beskonačnost. Beltrami je pomoću pseudosfere pokazao da postoji geometrija u kojoj ne vrijedi peti Euklidov postulat, no zbog ograničenosti, ona nije bila idealan model hiperbolične geometrije.

Pseudosferu možemo uočiti u prirodi, graditeljstvu i izradi nekih limenih glazbala, primjerice francuskog roga.

Precizno kukičanje pseudosfere zahtijevalo bi da počnemo od točke, što nije fizički moguće, pa počinjemo od što manje kružnice. Kukičanje započinjemo s velikom petljom u koju kukičamo niske štapiće u krug. Bilo bi dobro da počnemo s oko šest štapića u prvom redu. Kada završimo s prvim redom povlačimo početni kraj petlje s kojom smo počeli i tako zatvaramo i skupljamo prvi red. Nastavljamo kukičati u spiralu s odabranim omjerom, koji i ovdje, kroz cijeli rad, treba biti konstantan. [13]

Slika 2.47: Kukičani model pseudosfere

Primjene kukičanih modela

Kukičanje modela hiperbolične ravnine zahtjeva puno vremena i strpljenja, ali kada je model gotov možemo ga koristiti bez straha da će se raspasti.[13] Također, model je savitljiv i na njemu lako možemo pokazivati i otkrivati karakteristike hiperbolične geometrije koje su bez korištenja modela kontraintuitivne i teško shvatljive. Otkrivanje hiperbolične geometrije pomoću kukičanih modela ne zahtjeva napredno znanje matematike, a model može izraditi svatko tko poznaje osnove kukičanja. Zato, na taj način svakome možemo približiti hiperboličnu geometriju. Na modelu, osim svojstava hiperbolične geometrije, možemo uočiti i eksponencijalni rast broja očica iz retka u redak. Zanimljivo je uspoređivati brzinu rasta broja očica i brzinu nastajanja nabora na modelima s različitim omjerima. Osim modela hiperbolične geometrije kukičati i plesti se mogu i različite plohe, primjerice katenoida, helikoida, Möbiusova vrpca i prethodno opisana pseudosfera. Već se tokom kukičanja ili pletenja određenih ploha otkrivaju njihova svojstva. Kukičanje različitih ploha je privlačno mnogima jer dopušta slobodu, eksperimentiranje i otkrivanje nekih novih formi. Kukičani modeli hiperbolične ravnine ne koriste se samo u matematici, već i u biologiji, ali i u tekstilnoj industriji. Primjerice, u nastavi biologije koriste se kako bi se prikazali koralji i koraljni grebeni i kako bi se osvijestili ekološki problemi vezani uz njih.[13] Inderdisciplinaran pristup kukičanim modelima omogućava uspješniju popularizaciju matematike i hiperbolične geometrije.

Bibliografija

[1] *Tractrix*, (1997), http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Tractrix.html.

[2] *sferna geometrija*, (2012), http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=55624l.

[3] *Wolfram MathWorld*, (2014), http://mathworld.wolfram.com/.

[4] *Hyperbolic Space Crochet Models*, http://www.theiff.org/oexhibits/oe1e.html.

[5] K. Ahara, *Hyplane-Polyhedral Models of Hyperbolic Plane*, (2006), http://www.scipress.org/journals/forma/pdf/2101/21010005.pdf.

[6] F. M. Brueckler, *Povijest matematike*, (2013), http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povijest.html.

[7] F.M. Brueckler, *Povijest matematike II*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2010.

[8] C. Donald, *Hyperbolic Geometry in the High School Geometry Classroom*, (2005), http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05.pdf.

[9] D. Dunham, *M.C. Escher's Use of the Poincaré Models of Hyperbolic Geometry*, (2010), http://math-art.eu/Documents/pdfs/Dunham.pdf.

[10] A.I. Fetisov, *O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[11] Wong Yan Loi, *An Introduction to Geometry*, (2009), http://www.math.nus.edu.sg/~matwyl/Notes_MA2219.pdf.

[12] C. Robles, *Models of Hyperbolic Geometry*, (1996), http://www.geom.uiuc.edu/~crobles/hyperbolic/hypr/modl/.

[13] D. Taimina, *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes*, CRC Press, 2009.

[14] A. Treibergs, *The Hyperbolic Plane and its Immersions into R3*, (2003), http://www.math.utah.edu/~treiberg/Hilbert/Hilber.pdf.

[15] Wertheim C. Wertheim, M., *How To Crochet Hyperbolic Corals*, (2010), http://crochetcoralreef.org/Content/makeyourown/IFF-CrochetReef-HowToHandout.pdf.

[16] S. Whiting, *Velika knjiga kukičanja*, Mozaik knjiga, Zagreb, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisan je povijesni razvoj geometrije, posebno hiperbolične geometrije, te vizualizacija hiperbolične geometrije pomoću fizičkih modela, s naglaskom na kukičanim modelima.

U poglavlju o povijesnom razvoju geometrije, počinjemo od samog nastanka geometrije motiviranog potrebama iz svakodnevnog života tadašnjeg čovjeka. Nastavljamo s razvojem euklidske geometrije i problemom petog Euklidovog postulata. Pokušaji dokazivanja petog Euklidovog postulata pomoću prva četiri često su bili na pragu otkrivanja hiperbolične geometrije. Navodimo i ukratko opisujemo povijest neeuklidskih geometrija općenito. Pravi preokret u razumijevanju petog postulata dogodio se u 19.stoljeću, kada su, neovisno jedan o drugome, Bolyai i Lobačevski razvili geometriju u kojoj peti postulat ne vrijedi, kasnije poznatu kao hiperbolična geometrija. Kasnije Riemann hiperboličnu geometriju povezuje s negativnom zakrivljenošću. Javlja se problem vizualizacije hiperbolične geometrije o kojem više u drugom poglavlju.

Drugo poglavlje započinjemo vizualizacijom hiperbolične ravnine modelima u euklidskoj ravnini. Takvi su modeli zapravo mapa (karta) i ne čuvaju sve karakteristike hiperbolične ravnine. Zato je potrebna vizualizacija u euklidskom prostoru. Najprije navodimo modele od papira i način njihove izrade. Takvi modeli, zbog materijala od kojeg su izrađeni, imaju kratak vijek trajanja i teško je na njima vizualizirati određene karakteristike hiperbolične ravnine. Nastavljamo s modelima koji nemaju te nedostatke, a to su kukičani modeli. Nakon opisivanja načina izrade kukičanih modela hiperbolične geometrije, praktičnom aktivnošću presavijanja otkrivamo svojstva tih modela i povezujemo ih s karakteristikama hiperbolične geometrije. Na kukičanim modelima hiperbolične ravnine promatramo: paralelne i okomite pravce, kutove trokuta i mnogokute. Osim kukičanja hiperbolične ravnine u radu je opisano i kukičanje simetrične hiperbolične ravnine i kukičanje pseudosfere.

Summary

In this diploma thesis the historical development of geometry and especially that of hyperbolic geometry is presented, as well as hyperbolic geometry visualization with the aid of physical models, and with emphasis on crochet models.

In the chapter on the historical development of geometry, we start with the very beginnings of geometry motivated by the everyday needs of the past human life. We continue by giving an overview of the Euclidian geometry and the problem of Euclid's fifth postulate. Attempts at proving Euclid's fifth postulate by referring to the first four have often been on the verge of revealing hyperbolic geometry. We present and briefly describe the history of non-Euclidian geometries in general. The real shift in understanding the fifth postulate occurred in the 19th century when Bolyai and Lobachevsky independently developed a geometry in which the fifth postulate was invalid, which later became known as hyperbolic geometry. Later Riemann connected hyperbolic geometry with negative curvature. Thus the problem of hyperbolic geometry visualization appears, which will be dealt with in the second chapter.

The second chapter starts with a visualization of a hyperbolic plane with models in the Euclidian plane. Such models are actually a map and do not represent all of the characteristics of the hyperbolic plane. That is why a visualisation in the Euclidian space is needed. We first present the paper models and their assembly. Such models, because of the material from which they are made, do not last long and it is difficult to visualize certain characteristics of the hyperbolic plane on them. We continue by presenting models which do not have these shortcomings, i.e. crochet models. After a description of the fabrication process of hyperbolic geometry crochet models, through the practical activity of folding we reveal the properties of such models and connect them with the characteristics of hyperbolic geometry. On the crochet models of hyperbolic plane we observe: parallel and vertical lines, triangle and polygon angles. Apart from crocheting a hyperbolic plane, the thesis describes crocheting of symmetric hyperbolic planes and crocheting a pseudosphere

Životopis

Rođena sam 13.11.1989. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Julija Klovića u Zagrebu upisujem 1996. godine. Godinu dana kasnije upisujem Osnovnu glazbenu školu Rudolfa Matza u Zagrebu gdje učim svirati gitaru. Osnovnu glazbenu školu završavam 2003. godine. Nakon završene osnovne škole, 2004. godine, upisujem Žensku Opću Gimnaziju Družbe sestara milosrdnica s pravom javnosti u Zagrebu. Godine 2008. upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu gdje 2012. godine završavam preddiplomski studij edukacije matematike. Nakon završenog preddiplomskog studija upisujem diplomski studij edukacije matematike.