Kromatski polinomi i njihovi korijeni

Rehlicki, Josipa

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josipa Rehlicki

KROMATSKI POLINOMI I NJIHOVI KORIJENI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Da bismo pobliže objasnili temu ovog rada, vratit ćemo se u povijest na problem koji je preko 120 godina zadavao teškoće matematičarima. *Problem 4-boje* dugo vremena je bio jedan od najslavnijih problema u matematici. Postavio ga je Francis Guthrie 1852. godine nastojeći sa što manje boja obojiti grofovije Engleske tako da susjedne budu različito obojene. Uočio je da su 4 boje dovoljne i postavio pitanje vrijedi li isto za svaku kartu. Da vrijedi, tek su 1976. godine uspjeli dokazati Appel i Haken, koristeći računalo i dokazom na preko 100 stranica. Ekvivalent ovom problemu u teoriji grafova kaže da je svaki jednostavan planaran graf 4-obojiv. Dosta lakše i bez računala, moguće je dokazati da je svaki jednostavan planaran graf 5-obojiv.

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada ćemo općenito govoriti o grafovima i njihovim svojstvima. Grafovi su vrlo korisne matematičke strukture. Pomoću njih lako možemo čitatelju približiti apstraktne matematičke pojmove.

Zatim ćemo u drugom poglavlju definirati pojmove vezane za kromatske polinome. Sama riječ *kroma* dolazi iz grčkog jezika i znači boja. To znači da su kromatski polinomi vezani za bojenje grafova. Grafove možemo bojiti tako da im bojimo vrhove ili bridove. U ovom radu bojenje će se odnositi isključivo na bojenje vrhova grafova. Definirat ćemo pravilno bojenje i kromatski broj. Za određene grafove kao što su potpuni graf, ciklus ili put, kromatski broj možemo odmah odrediti. Na kraju ćemo definirati kromatski polinom i sva njegova važna svojstva. Detaljan uvid u pojmove vezane za kromatske polinome nalazi se u danom poglavlju.

Kao uz svaki polinom, tako i uz kromatski polinom veže se pojam nultočke ili korijena polinoma. U trećem poglavlju tražimo vezu između poznatih brojeva i kromatskih korijena. Za neke točke trivijalno ćemo zaključiti da su kromatski korijeni. Najzanimljiviji će nam biti Fibonaccijevi brojevi, uz koje se veže i zlatni rez. Pozabavit ćemo se n-tim Fibonaccijevim konstantama i njihovim potencijama. Zatim nastavljamo s ostalim metalnim sredinama kao što su srebrna i brončana, ali ćemo generalno gledati sve metalne sredine kao skup brojeva sa zajedničkim svojstvom vezanim za kromatske korijene. Spomenut ćemo također i možda manje poznate brojeve kao što su Berahini brojevi i Pisot–Vijayaraghavanovi brojevi.

Na kraju, u zadnjem poglavlju, vratit ćemo se opet na pojam kromatskih intervala. U ovom poglavlju, ti će nam intervali biti zanimljivi za posebnu klasu grafova za koje će vrijediti neki dodatni rezultati.

Poglavlje 1

Uvod u teoriju grafova

1.1 Osnovni pojmovi

Grafovi su jedna od osnovnih i najčešće primjenjivanjih matematičkih struktura. Često se upotrebljavaju u modeliranju raznih pojava i situacija upravo zbog svoje jasne geometrijske predodžbe. Grafove smatramo univerzalnim matematičkim jezikom kojim je moguće opisati sasvim apstraktne matematičke strukture. Krenimo od same definicije grafa.

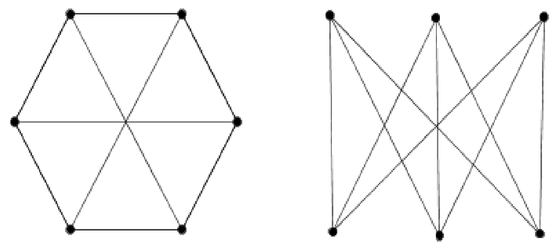
Definicija 1.1.1. *Graf je uređena trojka $G = (V, E, \phi)$ gdje je $V = V(G)$ neprazan skup čije elemente zovemo vrhovima (eng. vertex), $E = E(G)$ skup bridova (eng. edge) disjunktan s V i ϕ funkcija koja svakom bridu e iz E pridružuje dvočlani multiskup vrhova $\phi(e) = \{u, v\}$ koji se zovu krajevi od e.*

Za vrhove u i v koji su *krajevi* od e kažemo da su *susjedni* vrhovi i *incidentni* s e. Graf skraćeno označavamo samo s G. U ovom radu ćemo koristiti isključivo jednostavne, konačne grafove. Kažemo da je graf *konačan* ako su skupovi V i E konačni, inače je beskonačan. *Jednostavni* grafovi su oni koji nemaju ni *petlje* (bridovi čiji se krajevi podudaraju) ni *višestruke bridove* (dva ili više bridova s istim parom krajeva). Može se, naravno, dogoditi da graf ima samo jedan vrh - tada ga zovemo *trivijalnim* grafom, a graf gdje je $E(G) = \emptyset$ zovemo *prazan* graf. Broj vrhova od G ćemo označavati s $|V(G)|$, a broj bridova s $|E(G)|$. Kažemo da je graf *planaran* ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Definirajmo još pojam izomorfnosti grafova.

Definicija 1.1.2. *Kažemo da su grafovi G i H izomorfni, $G \approx H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\psi : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je vrh $\theta(v)$ incidentan s bridom $\psi(e)$ u H. Uređen par $f = (\theta, \psi) : G \to H$ se zove izomorfizam iz G u H.*

Izomorfizam čuva incidenciju i susjednost te za izomorfne grafove vrijedi $|V(G)| = |V(H)|$ i $|E(G)| = |E(H)|$. Primjer izomorfnih grafova dan je slikom 1.1



Slika 1.1: Izomorfni grafovi

1.2 Neki specijalni grafovi

U ovom podpoglavlju ćemo definirati neke specijalne grafove koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Definicija 1.2.1. ***Potpun graf*** *je jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom. Do na izomorfizam postoji jedinstveni potpun graf s n vrhova i* $\binom{n}{2}$ *bridova koji označavamo s* K_n.

Definicija 1.2.2. *Graf G je* ***bipartitan*** *ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija (X,Y) zove se biparticija grafa.*

Definicija 1.2.3. ***Potpun bipartitan graf*** *je jednostavan, bipartitan graf s biparticijom (X,Y) u kojem je svaki vrh iz X spojem sa svakim vrhom u Y. Ako je* $|X| = m$ *i* $|Y| = n$, *takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označava se sa* $K_{m,n}$ *te je* $|V(K_{m,n})| = m + n$, $|E(K_{m,n})| = mn$.

Definicija 1.2.4. ***Šetnja*** *u grafu G je niz* $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,...,e_k,v_k$ *čiji su članovi naizmjenice vrhovi* v_i *i bridovi* e_i *takvi da su krajevi od* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i, *za* $1 \leq i \leq k$.

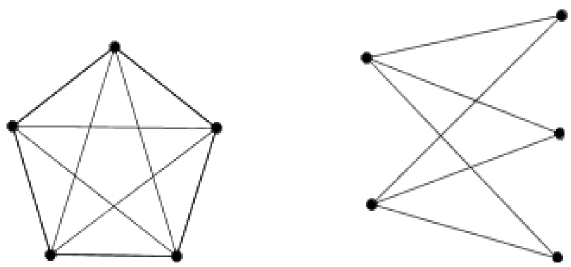
Definicija 1.2.5. ***Put*** *je šetnja u kojoj su svi bridovi i svi vrhovi međusobno različiti. Označavamo ga s* C_n.

Definicija 1.2.6. ***Ciklus*** *je put kojem su početni i završni vrh jednaki. Označavamo ga s* P_n.

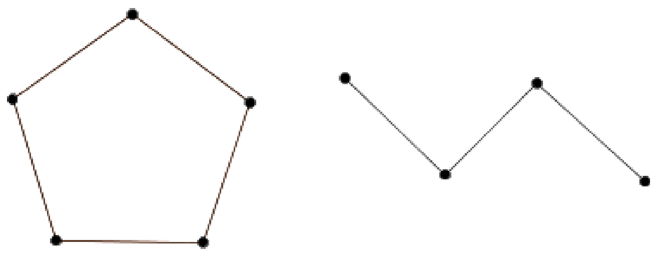
Definicija 1.2.7. ***Stablo*** *je povezan graf bez ciklusa.*

Neka su G i H grafovi. Ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$, a svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G, onda kažemo da je H *podgraf* od G i pišemo $H \subseteq G$, a G zovemo *nadgraf* od H. Ako je $H \subseteq G$ i $H \neq G$, pišemo $H \subset G$ i zovemo *pravi podgraf* od G. Podgraf $H \subseteq G$ za koji je $V(H) = V(G)$ zovemo *razapinjući podgraf* od G.

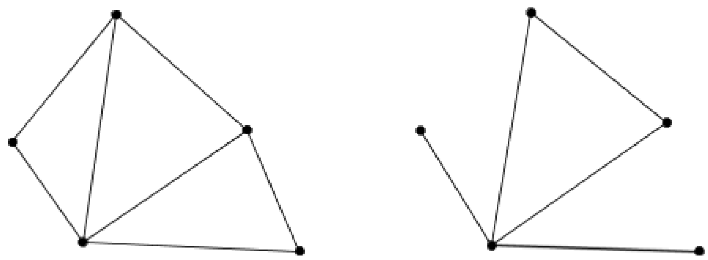
Kažemo da je graf *povezan* ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem. *Komponenta povezanosti* grafa G je maksimalni povezani podgraf od G, odnosno povezani podgraf koji nije sadržan niti u jednom većem povezanom podgrafu. Ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti, onda je povezan, a inače je nepovezan.



Slika 1.2: Grafovi K_5 i $K_{2,3}$



Slika 1.3: Ciklus C_5 i put P_4



Slika 1.4: Graf G i njegov razapinjući podgraf

Poglavlje 2

Bojenje grafova

2.1 Pravilno bojenje i kromatski broj

Da bismo mogli definirati kromatski polinom, prvo moramo znati što je to kromatski broj te kako se definira bojenje grafova.

Definicija 2.1.1. *Neka je G jednostavan graf, a $k \in \mathbb{N}$ neki zadani broj. Tada je k-bojenje vrhova od G funkcija $f : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ koja svakom vrhu pridruži jednu od k boja.*

Bojenje f je *pravilno* ako su susjedni vrhovi različito obojeni što znači da samo grafovi bez petlji dopuštaju *pravilno bojenje*. Tada možemo reći da je graf *k-obojiv* ako dopušta pravilno k-bojenje. Zanimljivo je da je graf 1-obojiv ako i samo ako je prazan, tj. ako je E(G)=∅ (inače to bojenje ne bi bilo pravilno), a 2-obojiv ako i samo ako je bipartitan.

Lako je zaključiti da je svaki graf s n vrhova zapravo n-obojiv. Ono što je ipak zanimljivije promatrati je koji je najmanji broj $k \in \mathbb{N}$ za koji je graf G k-obojiv. Taj broj ćemo zvati *kromatski broj* grafa G i označavat ćemo ga s $\gamma(G)$, a za graf G ćemo reći da je *k-kromatski* ako je $\gamma(G) = k$.

Za neke specijalne grafove,koje smo prethodno definirali, lako je naći kromatski broj tog grafa. Na primjer,

- $\gamma(P_n) = 2$;
- $\gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{za } n \text{ paran} \\ 3, & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}$;
- $\gamma(K_n) = n$;
- $\gamma(K_{m,n}) = 2$.

2.2 Kromatski polinom

Promatrajući ne samo egzistenciju bojenja grafa s zadanim brojem boja k, nego i broj svih pravilnih *k-bojenja*, američki matematičar George D. Birkhoff uveo je prebrojavanje različitih k-bojenja grafa u nastojanju da riješi problem 4 boje. Broj svih različitih k-bojenja grafa G označavamo s $P(G, k)$. Dva bojenja smatramo različitim ako je neki vrh u ta dva bojenja različito obojen. Dakle, $P(G, k) > 0$ ako i samo ako je G k-obojiv. Za prazan graf K_n^c s n vrhova vrijedi $P(K_n^c, k) = k^n$. Osnovna rekurzija za računanje brojeva $P(G, k)$ dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.2.1. *Za jednostavan graf G i svako $e \in E(G)$ vrijedi*

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G \cdot e, k), \tag{2.1}$$

gdje je $G - e$ je graf G bez brida e, a $G \cdot e$ je graf nastao spajanjem vrhova incidentnih s e u jedan vrh.

Dokaz. Neka je e=xy. Svako k-bojenje od $G - e$ ili ima kod x i y iste boje ili različite boje. Zato bojenju od $G - e$ kod kojeg su x i y različito obojeni, pridružimo bojenje od G, a ako su isto obojeni pridružimo mu bojenje od $G \cdot e$. Ovo pridruživanje je bijekcija pa slijedi $P(G - e, k) = P(G, k) + P(G \cdot e, k)$. □

Funkcija koja varijabli k pridružuje $P(G, k)$ zove se *kromatski polinom* od G te vrijedi sljedeći rezultat.

Korolar 2.2.2. *Funkcija $k \mapsto P(G, k)$ grafa G s n vrhova je polinom u varijabli k stupnja n s cjelobrojnim koeficijentima. Vodeći član je k^n, slobodni član je 0, a koeficijenti alterniraju po predznaku.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju bridova m grafa G. Ako je m=0, tada je $P(G, k) = k^n$ pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s manje od m bridova. Neka je G graf s $m \geq 1$ bridova i neka je $e \in E(G)$. Tada je $|E(G - e)| = |E(G \cdot e)| = m - 1$ pa prema pretpostavci indukcije postoje $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b_1, b_2, ..., b_{n-1} \in \mathbb{N}_0$ tako da vrijedi

$$P(G - e, k) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i k^i + k^n$$

$$P(G \cdot e, k) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i-1} b_i k^i + k^{n-1}$$

Prema prethodnoj rekurziji (2.1) imamo

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G \cdot e,k) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i}(a_i + b_i)k^i - (a_{n-1}+1)k^{n-1} + k^n$$

pa tvrdnja slijedi. □

Dokazi prethodnog korolara i propozicije preuzeti su iz knjige prof. Veljana [14].

Kao što smo za određene specijalne grafove našli *kromatski broj*, tako možemo naći i *kromatski polinom* tih grafova.

- $P(P_n, k) = k(k-1)^{n-1}$;
- $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$;
- $P(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Korijen, odnosno nultočku kromatskog polinoma zovemo *kromatski korijen*. Graf ne može biti 0-obojiv pa je 0 uvijek kromatski korijen. Zbog pretpostavke da radimo isključivo s nepraznim grafovima, 1 je također kromatski korijen.

U sljedećem poglavlju pozabavit ćemo se vezom kromatskih korijena i nekih poznatih brojeva.

Poglavlje 3

Kromatski korijeni

Budući da ćemo sada govoriti o polinomima i njihovim nultočkama, trebamo definirati neke osnovne pojmove vezane uz to. Za komplekasan broj ζ kažemo da je *algebarski broj*, odn. *algebarski cijeli broj*, ako je korijen nekog normiranog polinoma s racionalnim, odn. cjelobrojnim koeficijentima. *Normiran polinom* je polinom kojem je vodeći član jednak 1. Za algebarski broj ζ postoji jedinstveni normirani polinom p s racionalnim koeficijentima, sa svojstvom da p dijeli svaki polinom s racionalnim koeficijentima kojemu je ζ nultočka. Takav polinom zovemo *minimalni polinom*. Dva algebarska broja ζ i ζ^* zovemo *konjugati* ako imaju isti minimalni polinom. Ako je ζ kromatski korijen grafa G, tada je i ζ^* kromatski korijen grafa G.

Primjer 3.0.1. *Brojevi* $B_5 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *i* $B_5^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *su konjugati jer imaju isti minimalni polinom* $p(x) = x^2 - 3x + 1$.

Ako kromatski polinom promatramo kao polinom u cjelobrojnoj varijabli k s cjelobrojnim koeficijentima takvim da je koeficijent uz vodeći član jednak 1, njegove će nultočke, po definiciji, biti algebarski cijeli brojevi. Tada graf G nema nultočke u intervalu $[\gamma(G), \infty)$. Ako promatramo kromatski polinom kao polinom realne varijable, tu ćemo dobiti nešto veći skup kromatskih korijena. Pitanje na koje ćemo tražiti odgovor je koji algebarski broj može biti korijen kromatskog polinoma? Odgovori koje smo dobili govore da je lakše naći brojeve koji ne mogu biti korijeni niti jednog kromatskog polinoma.

Kao što smo već rekli, 0 i 1 su uvijek kromatski korijeni. Također je poznato da jednostavan, neprazan graf G nema kromatske korijene u intervalima $(-\infty, 0), (0, 1)$ i $(1, 32/27]$ (Jackson [6]) te da je skup kromatskih korijena gust u intervalu $(\frac{32}{27}, \infty)$. (Thomassen [12])

Neko vrijeme se smatralo da kromatski korijeni moraju imati nenegativan realan dio. To je istina za grafove s manje od 10 vrhova. No Sokal [10] je pokazao da je skup kromatskih korijena zapravo gust u cijeloj kompleksnoj ravnini.

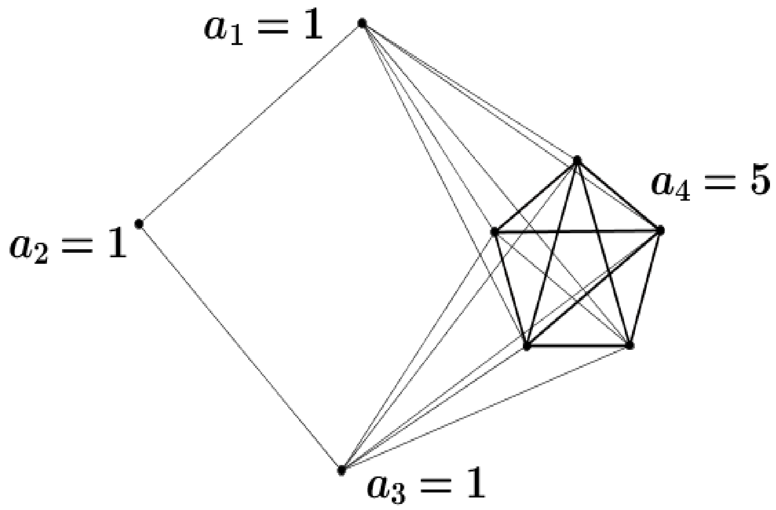
Definirajmo sada graf koji zovemo *krug podgrafova*.

Definicija 3.0.2. ***Krug podgrafova*** *je graf čiji je skup vrhova disjunktna unija potpunih podgrafova poredanih cikličkim redom tako da su vrhovi svakog podgrafa spojeni sa svim vrhovima iz dva susjedna podgrafa.*

Ako *podgrafovi* imaju veličine $a_1, a_2, ..., a_n$, tada graf označavamo s $R(a_1, a_2, ..., a_n)$. Cameron, međutim, u svom radu [4] koristi malo drukčiju notaciju *kruga podgrafova*, u kojoj je skup vrhova disjunktna unija $n + 1$ potpunih podgrafova veličine $1, a_1, a_2, ..., a_n$ tako da su vrhovi svakog podgrafa spojeni sa svim vrhovima iz dva susjedna podgrafa. Također u oznaci $R(a_1, a_2, ..., a_n)$. Slijedom te definicije dobivamo kromatski polinom od $R(a_1, a_2, ..., a_n)$ kao produkt linearnih faktora i polinoma

$$\frac{1}{q}\left(\prod_{i=1}^{n}(q - a_i) - \prod_{i=1}^{n}(-a_i)\right). \tag{3.1}$$

Graf koji će nam koristiti u sljedećem primjeru je $R(1, 1, 5)$ prikazan na slici 3.1.



Slika 3.1: Graf R(1,1,5)

U raspisu kromatskog polinoma grafa $R(1, 1, 5)$ zanimat će nas samo faktor $q^2 - 7q + 11$ dobiven iz (3.1) te dobivamo da su $q_1 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ i $q_2 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ kromatski korijeni danog grafa $R(1, 1, 5)$.

Pozivajući ponovno se na Camerona [4], iznosimo dvije slutnje

Slutnja 3.0.3 ($\alpha + n$ slutnja)**.** *Neka je α algebarski cijeli broj. Tada postoji prirodan broj n takav da je $\alpha + n$ kromatski korijen.*

Slutnja 3.0.4 ($n\alpha$ slutnja)**.** *Neka je α kromatski korijen. Tada je $n\alpha$ kromatski korijen za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Ako je slutnja $\alpha + n$ istinita, možemo se pitati, za dano α, koji je najmanji broj n za koji je $\alpha + n$ kromatski korijen? Navest ćemo primjer vezan uz *zlatni rez*, iako ćemo tek u sljedećem podpoglavlju dokazati da zlatni rez nije kromatski korijen. U ovom primjeru ćemo samo koristiti tu činjenicu.

Primjer 3.0.5. *Zlatni rez $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je algebarski cijeli broj, ali nije kromatski korijen. Broj $\tau + 1$ nije kromatski korijen jer je njegov konjugat u intervalu (0,1). Za $\tau + 2$ ne znamo je li kromatski korijen ili ne. Međutim broj $\tau + 3 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ je kromatski korijen grafa $R(1, 1, 5)$.*

Broj $\tau + 2$ je zapravo Berahin broj, tj. $\tau + 2 = B_{10}$. Berahine brojeve ćemo kasnije definirati te ćemo vidjeti da je B_{10} poseban slučaj što se tiče kromatskih korijena.

Definicija 3.0.6. ***Združivanje*** *dvaju grafova G i H, u oznaci G + H, je graf sa skupom vrhova V(G)$\bigcup$V(H) i skupom bridova E(G)$\bigcup$E(H)$\bigcup$ $\{uv \mid u \in V(G) \text{ i } v \in V(H)\}$.*

Saeid Alikhani i Roslan Hasni [5] u svom radu su dokazali da ako je α kromatski korijen, tada je i $\alpha + n$ kromatski korijen, za svaki prirodan broj n. Međutim to vrijedi samo u slučaju kada je α kromatski korijen nekog grafa G, a H je graf nastao združivanjem grafa G i nekog potpunog grafa K_n. Tada je kromatski polinom grafa H jednak $P(H, x) = x(x-1)\cdots(x-n+1)P(G, x-n)$. Tvrdnja tada trivijalno slijedi.

U tom slučaju je $\tau + n$ kromatski korijen za svaki $n \geq 3$, gdje je $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zlatni rez.

3.1 Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez

Za početak ćemo definirati Fibonaccijeve brojeve te istražiti mogu li n-anaccijeve konstante biti korijeni kromatskog polinoma.

Definicija 3.1.1. *Fibonaccijev niz n-tog stupnja* $F_k^{(n)}$, *k=1,2,...* $(n \geq 2)$ *je niz brojeva za koje je* $F_1^{(n)} = F_2^{(n)} = ... = F_n^{(n)} = 1$, *a za svaki* $k > n$ *vrijedi linearna rekurzija*

$$F_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} F_{k-i}^{(n)}$$

Limes

$$\varphi_n = \lim_{k\to\infty} \frac{F_k^{(n)}}{F_{k-1}^{(n)}}$$

se zove n-annacijeva konstanta.

Broj φ_n je nultočka polinoma $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - ... - x - 1$, koji je ujedno i minimalni polinom za φ_n, i gdje za n paran dobijemo 2 realne nultočke, jednu veću od 1, drugu manju od 1, a za n neparan jednu realnu nultočku uvijek veću ili jednaku od 1.

Za $n = 2$, Fibonaccijev niz $F_k^{(2)}$ je niz brojeva 1,1,2,3,5,8,13,... i $\varphi_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{F_k^{(2)}}{F_{k-1}^{(2)}} \approx 1.618033...$ te su nultočke funkcije $f_2(x) = x^2 - x - 1$ jednake $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Broj $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ poznatiji je kao *zlatni rez*. Zlatni rez je omjer u kojem se manji dio prema većem odnosi kao veći dio prema ukupnom. Najčešće se veže za umjetnost, a veza Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza je upravo u tome da je $\varphi_2 = \tau$, gdje je $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Također vrijedi $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 2$. Sljedećom tablicom dano je prvih nekoliko Fibonaccijevih nizova n-tog stupnja za $n \geq 2$.

n	**ime**	**niz**
2	Fibonacci	1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...
3	tribonacci	1,1,1,3,5,9,17,31,57,105,...
4	tetranacci	1,1,1,1,4,7,13,25,49,94,...
5	pentanacci	1,1,1,1,1,5,9,17,33,65,129,...
6	heksanacci	1,1,1,1,1,1,6,11,21,41,81,...

Sada ćemo dokazati da $2n$-anaccijeve konstante i njihove potencije s cjelobrojnim pozitivnim eksponentom ne mogu biti nultočke niti jednog kromatskog polinoma. Prije toga navodimo dvije definicije te jedan teorem koji ćemo koristiti u dokazu.

Definicija 3.1.2. *Neka je $\mathbb{K}$ polje i $a_k \in \mathbb{K}, k = 0, ..., n$. Izraz*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

zovemo algebarski polinom po x nad poljem $\mathbb{K}$. Elementi a_k su koeficijenti polinoma P(x).

Definicija 3.1.3. *Skup svih polinoma nad A, gdje je A komutativan prsten s jedinicom, označava se s $A[x]$, tj. $A[x]$=skup svih polinoma $P(x)$ s koeficijentima iz A.*

Teorem 3.1.4. *Polinom $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - ... - x - 1$ je ireducibilan polinom nad poljem $\mathbb{Q}$.*

Teorem 3.1.5 ([7])**.** *Za svaki cijeli broj $n \geq 1$, 2n-anaccijeva konstanta φ_{2n} ne može biti nultočka niti jednog kromatskog polinoma.*

Dokaz. Znamo da je φ_{2n} nultočka polinoma $f_{2n}(x) = x^{2n} - x^{2n-1} - ... - x - 1$ koji je ujedno i minimalni polinom za tu nultočku. Jasno je da $f_{2n}(x)$ nije kromatski polinom. Pretpostavimo sada da postoji kromatski polinom $P(x)$ takav da je $P(\varphi_{2n}) = 0$. Prema teoremu 3.1.4., $f_{2n}(x)|P(x)$. Budući da je $f_{2n}(0) = -1 < 0$, a $f_{2n}(-1) = 1 > 0$, prema teoremu srednje vrijednosti, $f_{2n}(x)$ ima nultočku na intervalu (-1,0) što povlači da $P(x)$ ima nultočku na intervalu (-1,0), a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $P(x)$ kromatski polinom. □

Teorem 3.1.6 ([7])**.** *φ_{2n}^m ne može biti kromatski korijen, za bilo koje $n, m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je φ_{2n}^m kromatski korijen. Tada postoji kromatski polinom

$$P(G, \lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + a_1\lambda$$

takav da je $P(G, \varphi_{2n}^m) = 0$. Tada je

$$\varphi_{2n}^{mk} + a_{k-1}\varphi_{2n}^{m(k-1)} + ... + a_1\varphi_{2n}^m = 0.$$

Možemo reći da je φ_{2n} nultočka sljedećeg polinoma

$$Q(\lambda) = \lambda^{mk} + a_{k-1}\lambda^{mk-m} + ... + a_1\lambda^m$$

u $\mathbb{Z}[x]$. Znamo da je $f_{2n}(\lambda) = \lambda^{2n} - \lambda^{2n-1} - ... - \lambda - 1$ minimalni polinom od φ_{2n} nad $\mathbb{Z}[x]$, što znači da $f_{2n}(\lambda)|Q(\lambda)$. Budući da je $f_{2n}(0) = -1 < 0$ i $f_{2n}(-1) = 1 > 0$, polinomi $f_{2n}(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ imaju zajedničku nultočku, nazovimo ju α, na intervalu (-1,0). Tada je α^m nultočka polinoma $P(G, \lambda)$, a budući da je $\alpha^m \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ dobivamo kontradikciju. □

Kao što smo već spomenuli, φ_2 je jednak zlatnom rezu pa prema prethodnim teoremima direktno slijedi da zlatni rez i svaka njegova potencija s cjelobrojnim pozitivnim eksponentom ne može biti nultočka niti jednog kromatskog polinoma.

Prirodno se postavlja pitanje što je s $(2n + 1)$-anaccijevim konstantama. Vrijede li i za njih isti rezultati? Sluti se da vrijede, no to još nije dokazano. Jedino što možemo dokazati vezano za $(2n + 1)$-anaccijeve konstante je sljedeći teorem.

Teorem 3.1.7 ([7]). *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, φ_{2n+1} ne može biti nultočka kromatskog polinoma za povezan graf G s $|V(G)| \leq 4n + 2$.*

Dokaz. Znamo da je φ_{2n+1} nultočka polinoma $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1} - x^{2n} - ... - x - 1$ koji je ujedno i minimalni polinom za φ_{2n+1}. Jasno je da $f_{2n+1}(x)$ nije kromatski polinom. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji kromatski polinom

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad (m > 2n + 1)$$

takav da je $P(\varphi_{2n+1}) = 0$. Tada $f_{2n+1}(x) | P(x)$, odnosno postoji polinom $g(x)$ oblika

$$g(x) = b_{m-2n-1} x^{m-2n-1} + b_{m-2n-2} x^{m-2n-2} + ... + b_1 x + b_0$$

takav da je $P(x) = f_{2n+1}(x) g(x)$. Vrijede sljedeće jednakosti između koeficijenata od $g(x)$ i $P(x)$, za $m \leq 4n + 2$.

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = 0 \\ a_1 &= -b_1 \\ a_2 &= -b_2 - b_1 \\ a_3 &= -b_3 - b_2 - b_1 \\ &\vdots \\ a_{m-2n-1} &= -b_{m-2n-1} - b_{m-2n-2} - ... - b_1 \end{aligned}$$

Budući da je $P(x)$ kromatski polinom, vrijedi $(x - 1) | P(x)$ iz čega slijedi

$$(x - 1) | b_{m-2n-1} x^{m-2n-1} + b_{m-2n-2} x^{m-2n-2} + ... + b_1 x + b_0.$$

Dakle, 1 je nultočka polinoma $g(x)$ i $b_0 = 0$ pa je $b_{m-2n-1} + b_{m-2n-2} + ... + b_1 = 0$ odnosno, prema gornjim jednakostima, $a_{m-2n-1} = 0$, što je kontradikcija s činjenicom da su koeficijenti $a_m, a_{m-1}, ..., a_1$ kromatskog polinoma različiti od nule. Budući da gornje jednakosti vrijede samo za $m \leq 4n + 2$, broj φ_{2n+1} ne može biti kromatski korijen niti jednog grafa G s $|V(G)| \leq 4n + 2$. $\square$

3.2 Metalne sredine

Definirat ćemo prvo pojam verižnih razlomaka i preko njih ćemo definirati metalne sredine.

Definicija 3.2.1. ***Verižni razlomak*** *je izraz oblika*

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + ...}}$$

gdje su a_i, b_i proizvoljni izrazi i zapisujemo ga kao $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$.

Izrazi a_i zovu se *parcijalni kvocijenti*. *Jednostavan* verižni razlomak je verižni razlomak kojem su svi $b_i = 1$. Od sada pa nadalje ćemo koristiti isključivo jednostavne verižne razlomke pa ćemo riječ 'jednostavan' izostavljati. *Konačan verižni razlomak* je verižni razlomak s konačno mnogo parcijalnih kvocijenata, tj. $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n]$. *Beskonačan verižni razlomak* je verižni razlomak oblika $\alpha = [a_0, a_1, ...] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + ...}}$.

Ako je verižni razlomak konačan i svi a_i racionalni brojevi, tada je i α racionalan broj. Vrijedi i obrat. Beskonačan verižni razlomak je iracionalan.

Metalne sredine su niz iracionalnih brojeva definiranih sljedećim beskonačnim verižnim razlomkom

$$n + \cfrac{1}{n + \frac{1}{n + ...}} = [n, n, n, ...] = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Najpoznatije metalne sredine su zlatna sredina, srebrna sredina i brončana sredina. Svaka metalna sredina je korijen pripadne kvadratne jednadžbe $x^2 - nx - 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}$. Prikaz prvih nekoliko metalnih sredina nalazi se u sljedećoj tablici

n	**metalne sredine**
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033989$ (zlatna sredina)
2	$\frac{2+\sqrt{8}}{2} = 2.414213562$ (srebrna sredina)
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.302775638$ (brončana sredina)
4	$\frac{4+\sqrt{20}}{2} = 4.236067978$
5	$\frac{5+\sqrt{29}}{2} = 5.192582404$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{n+\sqrt{4+n^2}}{2}$

Kao što smo pokazali da $2n$-anaccijeve konstante, samim time i zlatni rez, ne mogu biti nultočke niti jednog kromatskog polinoma, tako ćemo analogno dokazati da metalne sredine ne mogu biti nultočke niti jednog kromatskog polinoma. Isto vrijedi i za potencije metalnih sredina.

Teorem 3.2.2. *Za svaki cijeli broj $n \geq 1$, metalna sredina τ_n ne može biti nultočka niti jednog kromatskog polinoma.*

Dokaz. Znamo da je τ_n nultočka polinoma $f_n(x) = x^2 - nx - 1$ koji je ujedno i minimalni polinom za τ_n. Polinom $f_n(x) = x^2 - nx - 1$ nije kromatski polinom jer je slobodni član -1. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji kromatski polinom $P(x)$ takav da je $P(\tau_n) = 0$. Obzirom da je $f_n(x) = x^2 - nx - 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$, vrijedi $f_n(x)|P(x)$. Znamo da je $f_n(0) = -1 < 0$, a $f_n(-1) = n, n \geq 1$, pa prema teoremu srednje vrijednosti, $f_n(x)$ ima nultočku na intervalu (-1,0) što povlači da $P(x)$ ima nultočku na intervalu (-1,0), a to je kontradikcija s činjenicom da je $P(x)$ kromatski polinom. $\square$

Teorem 3.2.3. *τ_n^m ne može biti kromatski korijen, za bilo koje $n, m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je τ_n^m kromatski korijen. Tada postoji kromatski polinom

$$P(G, \lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + a_1\lambda$$

takav da je $P(G, \tau_n^m) = 0$. Tada je

$$\tau_n^{mk} + a_{k-1}\tau_n^{m(k-1)} + ... + a_1\tau_n^m = 0.$$

Možemo reći da je τ_n nultočka sljedećeg polinoma

$$Q(\lambda) = \lambda^{mk} + a_{k-1}\lambda^{mk-m} + ... + a_1\lambda^m$$

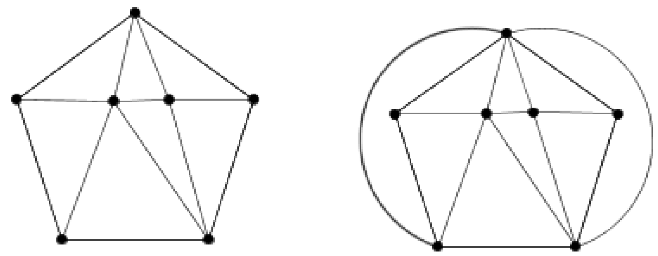
u $\mathbb{Z}[x]$. Znamo da je $f_n(\lambda) = \lambda^2 - n\lambda - 1$ minimalan polinom od τ_n nad $\mathbb{Z}[x]$ što znači da je $f_n(\lambda)|Q(\lambda)$. Budući da je $f_n(0) = -1 < 0$, a $f_n(-1) = n, n \geq 1$, polinomi $f_n(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ imaju zajedničku nultočku α na intervalu (-1,0). Tada je α^m nultočka polinoma $P(G, \lambda)$, a budući da je $\alpha^m \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$, dobivamo kontradikciju. $\square$

3.3 Berahini brojevi

Planaran graf dijeli $\mathbb{R}^2$ na neka područja. Zatvorenja tih područja zovu se *strane* (eng. faces). Svaki planaran graf ima točno jednu neomeđenu stranu, zovemo ju *vanjska strana*. Ostale strane zovemo *omeđene strane*. *Veličina* strane je broj bridova koji čine rub te strane.

Neka je T 2-dimenzionalni simpleks, tj. trokut u ravnini. *Triangulacija* od T je rastav od T na konačno mnogo manjih trokuta tako da se svaka dva trokuta ili ne sijeku ili im je presjek zajednički vrh ili zajednička stranica. *Triangulacijski graf* je planaran graf bez petlji takav da mu je svaka strana veličine tri. *Skoro triangulacijski graf* je planaran graf kojem su sve omeđene strane trokuti.

Na slici 3.2 prikazan je skoro triangulacijski i triangulacijski graf.



Slika 3.2: Skoro triangulacijski i triangulacijski graf

Važnu ulogu u teoriji kromatskih polinoma imaju Berahini brojevi. *$N - ti$ Berahin broj* dan je sljedećom formulom

$$B_n = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Za $n \geq 2$ i k relativno prost s n definiramo *poopćene Berahine brojeve*

$$B_n^{(k)} = 4\cos^2\frac{k\pi}{n}. \tag{3.4}$$

$B_n^{(k)}$ zvat ćemo *n-ti primitivni poopćeni Berahin broj*.

Tablica prvih 10 Berahinih brojeva:

n	B_n	**aproksimacija**
1	4	
2	0	
3	1	
4	2	
5	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	2.618
6	3	
7	$2+2\cos(\frac{2\pi}{7})$	3.247
8	$2+\sqrt{2}$	3.414
9	$2+2\cos(\frac{2\pi}{9})$	3.532
10	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	3.618

Cjelobrojni Berahini brojevi su $B_1 = 4, B_2 = 0, B_3 = 1, B_4 = 2$ i $B_6 = 3$. Brojevi $B_2 = 0, B_3 = 1$ i $B_4 = 2$ su uvijek korijeni kromatskog polinoma svakog triangulacijskog i svakog skoro-triangulacijskog grafa G. Vrijedi i sljedeći rezultat:

Propozicija 3.3.1. *Necjelobrojni Berahini brojevi (npr. B_5, B_7, B_8, itd.) ne mogu biti korijeni niti jednog kromatskog polinoma, uz moguću iznimku B_{10}.*

Ta tvrdnja proizlazi iz činjenice da se konjugati svi necjelobrojnih Berahinih brojeva nalaze u intervalu (0,1). Tutte [13] je to pokazao za $B_5 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \tau + 1$, gdje je τ zlatni rez, a $B_5^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0, 1)$.

Za brojeve $B_{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ i $B_{10}^* = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ znamo samo da ne mogu biti korijeni kromatskog polinoma niti jednog skoro triangulacijskog grafa. To su u svom radu pokazali Salas i Sokal [9].

Beraha je uočio da planarni grafovi često imaju kromatske korijene jako blizu brojevima B_n te se pitao postoji li triangulacijski graf G takav da $P(G, k)$ ima korijene u intervalu $(B_n - \epsilon, B_n + \epsilon)$, za svaki $\epsilon > 0$. Beraha, Kahane i Weiss [3] su našli familiju planarnih grafova čiji kromatski korijeni konvergiraju prema B_5, B_7 ili B_{10}, a znamo da Berahini brojevi konvergiraju prema 4. Štoviše, Royle [8] je pronašao familiju triangulacijskih grafova čiji kromatski korijeni konvergiraju prema 4. Ako je istina ono što se Beraha pitao, tj. da postoji triangulacijski graf G takav da $P(G, k)$ ima korijene u intervalu $(B_n - \epsilon, B_n + \epsilon)$, za svaki $\epsilon > 0$, tada postoji planaran graf čiji kromatski korijeni konvergiraju prema 4. Sada ostaje otvoreno pitanje što je s drugim brojevima iz intervala $(\frac{32}{27}, 4)$, mogu li oni biti gomilišta kromatskih korijena za planarne grafove? Jednu slutnju iznio je Thomassen [12].

Slutnja 3.3.2. *Skup kromatskih korijena familije planarnih grafova sastoji se od 0,1 i gustog podskupa od* $(\frac{32}{27}, 4)$.

3.4 Pisot–Vijayaraghavanovi brojevi

Pisot–Vijayaraghavanov broj ili skraćeno *PV broj* je realni algebarski cijeli broj veći od 1 takav da su svi njegovi konjugati po apsolutnoj vrijednosti manji od 1. Skup svih *PV brojeva* najčešće se označava sa S. Primjer jednog PV broja je zlatni rez, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Njegov minimalni polinom je $x^2 - x - 1$, a njegov konjugat iznosi $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$ što je po apsolutnoj vrijednosti manje od 1. Štoviše, sve metalne sredine su *PV brojevi* jer se konjugati svih metalnih sredina nalaze u intervalu (-1,0). Važno svojstvo *PV brojeva* je da se njihove potencije približavaju cijelim brojevima. Također vrijedi da ako je α *PV broj*, tada su i sve njegove potencije $\alpha^n, n \in \mathbb{N}$, *PV brojevi*. Vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 3.4.1. *PV brojevi ne mogu biti kromatski korijeni.*

Najmanji *PV broj* poznat je kao *plastični broj*. To je korijen polinoma $p(x) = x^3 - x - 1$ i iznosi $\theta_1 = 1.324717957....$ To znači da su svi *PV brojevi* veći od $\frac{32}{27}$.

Za *PV* brojeve θ_1^n, razlika $\theta_1^n - \lfloor\theta_1^n\rfloor$, gdje je $\lfloor\theta_1^n\rfloor$ najveće cijelo broja θ_1, nalazi se blizu brojeva 0 ili 1. Potencije od θ_1 koje se približavaju 0 su redom $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 17, ...$ dok su one koje se približavaju 1 redom $2, 9, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, ...$

Poglavlje 4

Kromatski intervali

Rekli smo već da su (-∞,0), (0,1) i (1,$\frac{32}{27}$] intervali bez kromatskih korijena. U svom radu Thomas [11] se bavi grafovima koji imaju Hamiltonove puteve te pokazuje da se za takve grafove interval (1,$\frac{32}{27}$] može proširiti. U ovom poglavlju ćemo iskazati dva teorema za posebnu klasu grafova za koje se intervali bez kromatskih korijena mogu proširiti. Javit će se pojmovi vezani za separaciju grafova i za Hamiltonove puteve pa ćemo prvo njih iskazati.

Definicija 4.0.1. ***Hamiltonov put*** *je put koji sadrži sve vrhove grafa.*

Definicija 4.0.2. *Kažemo da je graf G* ***separabilan*** *ako je nepovezan ili uklanjanjem jednog vrha, kojeg zovemo* ***rezni vrh****, postaje nepovezan. Inače kažemo da je* ***neseparabilan****.*

U prvom poglavlju definirali smo razapinjući podgraf. Postupak kojim dolazimo do *razapinjućeg stabla* je sljedeći: u povezanom grafu G uočimo neki ciklus i iz tog ciklusa uklonimo jedan brid te tako dobijemo povezan graf $G - e$. U ovako dobivenom grafu opet uočimo neki ciklus pa i iz tog ciklusa uklonimo jedan brid. Ovaj postupak je konačan i vodi do povezanog grafa bez ciklusa, dakle stabla, kojeg zovemo *razapinjuće stablo* zadanog grafa G.

Za graf G, *k-razapinjuće stablo* je razapinjuće stablo od G s najviše k listova (list je vrh stupnja 1). Klasu svih neseparabilnih grafova s k-razapinjućim stablima označavat ćemo s $\mathcal{G}_k$. To znači da neseprabilan graf s Hamiltonovim putem mogu označavati s $\mathcal{G}_2$. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.0.3. *Ako je G neseparabilan graf s Hamiltonovim putem, tada* $Q(G, t) > 0$*, za svaki* $t \in (1, t_0]$*, gdje je* $Q(G, t) = (-1)^{|V(G)|} P(G, t)$ *i* $t_0 = 1.2956$ *jedini realni korijen polinoma* $(t-2)^3 + 4(t-1)^2$*. Štoviše, za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji neseparabilni graf s Hamiltonovim putem čiji kromatski polinom ima korijene u intervalu* $(t_0, t_0 + \epsilon)$*.*

Analogon teorema 4.0.3. za klasu grafova $\mathcal{G}_3$ je sljedeći

Teorem 4.0.4. *Ako je G neseparabilan graf s 3-razapinjućim stablom, tada* $Q(G, t) > 0$*, za svaki* $t \in (1, t_1]$*, gdje je* $Q(G, t) = (-1)^{|V(G)|} P(G, t)$ *i* $t_1 = 1.2904$ *najmanji realni korijen polinoma* $(t-2)^6 + 4(t-1)^2(t-2)^3 - (t-1)^4$*. Štoviše, za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji neseparabilni graf s 3-razapinjućim stablom čiji kromatski polinom ima korijene u intervalu* $(t_1, t_1 + \epsilon)$*.*

Dokaz ovog teorema Thomas je proveo koristeći takozvane *Whitneyeve 2-zamjenske* operacije. Više o tome nalazi se u [11].

Poglavlje 5

Zaključak

Za neke posebne grafove kao što su put, ciklus, potpuni graf i potpuni bipartitan graf, mogli smo odmah naći njihov kromatski broj.

- $\gamma(P_n) = 2$;
- $\gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{za } n \text{ paran} \\ 3, & \text{za } n \text{ neparan} \end{cases}$;
- $\gamma(K_n) = n$;
- $\gamma(K_{m,n}) = 2$.

Također za te određene grafove lako je bilo izračunati i njihov kromatski polinom.

- $P(P_n, k) = k(k-1)^{n-1}$;
- $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$;
- $P(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Zatim smo pokušali pronaći algebarske brojeve koji mogu biti korijeni kromatskih polinoma te smo zaključili da je lakše naći brojeve koji ne mogu biti korijeni niti jednog kromatskog polinoma. U traženju tih odgovora, pomogla nam je činjenica da za jednostavan, neprazan graf G intervali (-∞,0), (0,1) i $(1,\frac{32}{27}]$ su intervali koji ne sadrže kromatske korijene. Također, odmah smo mogli zaključiti da su 0 i 1 uvijek kromatski korijeni zbog pretpostavke da radimo isključivo s nepraznim grafovima.

Definirali smo neke poznate brojeve. Prvi od njih su bili Fibonaccijevi brojevi, tj. n-anaccijeve konstante. Dokazali smo da $2n$-anaccijeve konstante ne mogu biti korijeni niti jednog kromatskog polinoma. Isto vrijedi i za potencije $2n$-anaccijevih konstanti. Analogno vrijedi da $(2n + 1)$-anaccijeve konstante ne mogu biti kromatski korijeni, ali uz uvjet da je broj vrhova grafa manji ili jednak od $4n + 2$.

Zatim smo prešli na metalne sredine. Najpoznatije metalne sredine su zlatna, srebrna i brončana sredina. One također ne mogu biti korijeni niti jednog kromatskog polinoma jer se njihovi konjugati nalaze u intervalu koji ne sadrži kromatske korijene. Isto vrijedi i za njihove potencije.

Za Berahine brojeve ne možemo općenito reći da svi jesu ili svi nisu kromatski korijeni. Ono što možemo sigurno reći je da ni jedan necjelobrojni Berahin broj, osim možda B_{10}, nije kromatski korijen i da su brojevi $B_2 = 0, B_3 = 1$ i $B_4 = 2$ uvijek korijeni kromatskog polinoma svakog triangulacijskog i svakog skoro-triangulacijskog grafa G. Nakon niza istraživanja kromatskih polinoma i intervala, možemo naslutiti da se skup kromatskih korijena familije planarnih grafova sastoji od 0,1 i gustog podskupa od $(\frac{32}{27}, 4)$.

Zadnji brojevi kojima smo se bavili su Pisot–Vijayaraghavanovi brojevi ili skraćeno PV brojevi. Za njih jedino možemo zaključiti, prema njihovoj definiciji, da ne mogu biti kromatski korijeni.

Na kraju, u zadnjem poglavlju smo se još jednom vratili na kromatske intervale s time da se ovdje radi isključivo s neseparabilnim grafovima koji imaju k-razapinjuće stablo, za $k \leq 3$. Za takve grafove, intervali bez kromatskih korijena se mogu proširiti.

Bibliografija

[1] https://hr.wikipedia.org.

[2] http://mathworld.wolfram.com/.

[3] S. Beraha, J. Kahane i N. J. Weiss, *Limits of chromatic zeros of some families of maps*, Combinatorics, Probability and Computing **28** (1980), 52–65.

[4] P. J. Cameron, *Algebraic properties of chromatic roots*, Proceedings of the 7th Australian and New Zealand Mathematics Convention (2008), New Zealand.

[5] R. Hasni i S. Alikhani, *Algebraic Integers as Chromatic and Domination Roots*, International Journal of Combinatorics (2012).

[6] B. Jackson, *A Zero-Free Interval for Chromatic Polynomials of Graphs*, Combinatorics, Probability and Computing (1993), 325–336, http://journals.cambridge.org/article_S0963548300000705.

[7] Y. Peng i S. Alikhani, *Chromatic zeros and generalized Fibonacci numbers*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics **3** (2009), 330–335, http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/1452-8630/2009/1452-86300902330A.pdf.

[8] G. Royle, *Planar triangulations with real chromatic roots arbitrarily close to four*, Annals of Combinatorics **12** (2008), 195–210, https://arxiv.org/pdf/math/0511304v3.pdf.

[9] J. Salas i A. D. Sokal, *Transfer Matrices and Partition-Function Zeros for Antiferromagnetic Potts Models I. General Theory and Square-Lattice Chromatic Polynomial*, Journal of Statistical Physics **104** (2001), 609–699, http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0004330v2.pdf.

[10] A. D. Sokal, *Chromatic Roots are Dense in the Whole Complex Plane*, Combinatorics, Probability and Computing **13** (2004), 221–261.

[11] P. Thomas, *A zero-free interval for chromatic polynomials of graphs with 3-leaf spanning trees*, Discrete Mathematics **339** (2016), 2706–2714, `http://arxiv.org/pdf/1510.00417v1.pdf`.

[12] C. Thomassen, *The zero free intervals for chromatic polynomials of graphs*, Combinatorics, Probability and Computing **6** (1997), 497–506.

[13] W. T. Tutte, *On chromatic polynomials and the golden ratio*, Journal of Combinatorial Theory **9** (1970), 289–296.

[14] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavili smo se bojenjem grafova. Krenuli smo od problema koji je desetljećima zadavao teškoće matematičarima, *Problem 4-boje*. Taj smo si problem matematički predočili kroz grafove. Nakon što smo definirali glavne pojmove vezane za bojenje grafova kao što su kromatski broj i kromatski polinom, zanimalo nas je postoji li veza između kromatskih korijena i nekih poznatih brojeva. Prvo smo proučavali Fibonaccijeve brojeve i njihovo poopćenje, tj. n-anaccijeve konstante. Nakon što smo došli do važnih zaključaka, prešli smo na metalne sredine. Poveznica tih dvaju skupova brojeva je zlatni rez ili zlatna sredina koja je 2-anaccijeva konstanta, a ujedno i jedna od metalnih sredina. Paralelno prateći dokaz koji vrijedi za $2n$-anaccijeve konstante, dokazali smo da isti rezultat vrijedi i za sve metalne sredine. Zatim smo definirali Berahine brojeve. Tu nismo mogli općenito reći da nešto vrijedi za sve Berahine brojeve, ali najvažnije je da možemo pretpostaviti da se skup kromatskih korijena familije planarnih grafova sastoji od 0,1 i gustog podskupa od $(\frac{32}{27}, 4)$. Zadnje smo još spomenuli Pisot–Vijayaraghavanove brojeve. Glavno obilježje tih brojeva je da su njihovi konjugati po modulu manji od 1 što znači da oni ne mogu biti kromatski korijeni. Na kraju ovog diplomskog rada, vratili smo se na kromatske intervale. Točnije, bavili smo se samo neseparabilnim grafovima s k-razapinjućim stablima, za $k \leq 3$, jer za njih možemo proširiti interval koji ne sadrži kromatske korijene.

Summary

In this thesis we have studied graph coloring. We started with problem that troubled mathematicians for decades, named *4-color problem*. We presented this problem mathematically through graphs. After we defined important terms for graph coloring, like chromatic number and chromatic polynomial, we wondered is there any conection between chromatic roots and some known numbers. First, we analyzed Fibonacci numbers and their generalizations, precisely n-anacci constants. After we came to important conclusions, we considered metallic means. Connection of those two sets of number is the golden ratio or golden mean which is 2-anacci constant, also one of metallic means. Parallel with the following proof that applies to $2n$-anacci constants, we have shown that the same result is true for all metallic means. Secondly, we defined Beraha numbers. Here we couldn't generally say something valid for all Beraha's numbers, but the most important thing is that we can suppose that chromatic roots for plane graph family contain 0,1 and dense subset of $(\frac{32}{27},4)$. At the last, we mentioned Pisot–Vijayaraghavan numbers. The main characteristic of these numbers is that their conjugates are less than 1 in absolute value, which means they can not be chromatic roots. At the end of this thesis, we returned to the chromatic intervals. Precisely, we studied nonseparable graphs with k-spanning trees, for $k \leq 3$, because for them we can expand the interval which does not contains chromatic roots.

Životopis

Rođena sam 7. ožujka 1990. godine u Derventi, u Bosni i Hercegovini. Za vrijeme rata, moja obitelj se doselila u Zagreb gdje smo i ostali živjeti. Nakon osnovne škole upisala sam Gimnaziju Lucijana Vranjanina u Zagrebu, opći smjer. Maturirala sam 2009. godine i iste godine upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike. 2014. godine upisujem željeni diplomski studij Matematičke statistike. Tijekom svog obrazovanja učila sam engleski i njemački jezik te završila tečaj hrvatskog znakovnog jezika. Za vrijeme studiranja radila sam razne studenske poslove te dugi niz godina dajem instrukcije iz matematike pokušavajući približiti matematiku i onima koji je baš ne vole.