SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Sabljić

TEORIJA POTENCIJALA MARKOVLJEVIH LANACA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ante Mimica

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U klasičnoj teoriji potencijala poznati su pojmovi kao što su harmonijska funkcija, ekscesivna funkcija, Greenova funkcija, potencijal i kapacitet. U ovom radu definirali smo analogone navedenih pojmova u teoriji Markovljevih lanaca s diskretnim prostorom stanja. Funkcija je harmonijska ako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu. Ako sa P označimo matricu prijelaza Markovljevog lanca te sa I jediničnu matricu, analogon operatora $\frac{1}{2}\Delta$, gdje je Δ Laplaceov operator, je operator $P - I$. Laplaceov operator čvrsto je povezan sa Newtonovim potencijalom. Nadalje, Newtonov potencijal usko je povezan s pojmom kapaciteta. U elektrostatici se pojam kapaciteta nekog tijela B definira na sljedeći način. Promotrimo sve distribucije φ pozitivnog naboja tijela B, čiji potencijali u bilo kojoj točki prostora nisu veći od jedan. Maksimum takvih potencijala naziva se ravnotežni potencijal, dok je pripadajuća distribucija naboja ravnotežna distribucija. Ukupni naboj ravnotežne distribucije naziva se kapacitet tijela B. U radu ovo sve primjenjujemo u terminima kapaciteta prolaznog skupa Markovljevog lanca te analogone precizno definiramo.

Sada dajemo kratak pregled rada po poglavljima. U Poglavlju 1 bavimo se simetričnom slučajnom šetnjom na prostoru $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 1$, možda najpoznatijim primjerom Markovljevog lanca. Vjerojatnost da se slučajna šetnja, krenuvši iz nekog stanja $x \in \mathbb{Z}^l$, nakon n koraka nalazi u stanju $y \in \mathbb{Z}^l$, tj. $\mathbb{P}_x(X_n = y)$, nazivamo prijelazna funkcija. Pokazujemo da se ona može izraziti pomoću karakteristične funkcije slučajnog vektora X_n. Nadalje, definiramo pojam Greenove funkcije te promatramo ponašanje slučajne šetnje u beskonačnosti. U Poglavlju 2 definiramo harmonijske funkcije, te malo općenitije, superharmonijske i subharmonijske funckije. One su usko povezane sa diskretnom teorijom martingala. Za kraj poglavlja, pokazujemo još neka svojstva harmonijskih funkcija. U Poglavlju 3 uvodimo pojam potencijala, koji se definiramo u slučaju prolaznog Markovljevog lanca. Također, navodimo određena svojstva potencijala. Poglavlje 4 započinjemo definicijom ekscesivne funkcije. To je jednostavno nenegativna superharmonijska funkcija. Pokazujemo važan rezultat pod nazivom Rieszova dekompozicija. Ona daje rastav ekscesivne funkcije na zbroj potencijala i nenegativne harmonijske funkcije. Pomoću Rieszove dekompozicije pokazuje se da je, u slučaju prolaznog i ireducibilnog Markovljevog lanca, vjerojatnost da on posjeti neki skup zapravo potencijal. Konačno, u Poglavlju 5 dolazimo do kapaciteta prolaznog skupa. Uvodimo pojam ravnotežne distribucije i ravnotežnog potencijala. Sva svojstva kapaciteta koja smo definirali u slučaju prolaznog Markovljevog lanca, mogu se primjeniti na simetričnu slučajnu šetnju, ukoliko promatramo prolazne skupove. U slučaju simetrične slučajne šetnje dobivamo još neke dodatne rezultate. Na kraju dajemo bitnu primjenu kapaciteta. Za slučaj simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^3$, kriterij povratnosti konačnog skupa iskazan je preko kapaciteta.

Poglavlje 1

Slučajna šetnja

1.1 Općenito o jednostavnoj simetričnoj slučajnoj šetnji

U ovome ćemo poglavlju promotriti simetričnu slučajnu šetnju, svima dobro poznati primjer Markovljevog lanca. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli na $\{1, -1\}$ te neka je vjerojatnost uspjeha p jednaka $1/2$. Preciznije $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Y_k = -1)$. Slučajna šetnja $X = (X_n : n \geq 0)$ definirana je sa

$$X_0 = x \, , \, x \in \mathbb{Z} \, , X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k, \; n \geq 1.$$

Dakle, Markovljev lanac X kreće iz nekog stanja $x \in \mathbb{Z}$, te se u svakom koraku pomiče samo za jedno mjesto ulijevo ili udesno. Skup stanja koja poprima slučajna šetnja jest skup cijelih brojeva, tj. $S = \mathbb{Z}$.

Pokazat ćemo sada da slučajna šetnja koja kreće iz nekog proizvoljnog stanja, s vjerojatnosti 1 pogađa bilo koje drugo stanje nakon konačnog broja koraka. Posebno ćemo ovime pokazati povratnost jednostavne simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$. Budući da su sva stanja jednako vjerojatna, dovoljno je pokazati da će Markovljev lanac X krenuvši iz bilo kojeg stanja $x \in \mathbb{Z}$ nakon konačnog broja koraka doći u stanje 0. Označimo sa $\pi_0(x)$ vjerojatnost pogađanja stanja 0 ukoliko lanac, tj. šetnja kreće iz stanja x. Očito je $\pi_0(0) = 1$. Prema formuli potpune vjerojatnosti

$$
\begin{aligned}
\pi_0(x) &= \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } X_n = 0) \\
&= \mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x + \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x + \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 \mid Y_1 = -1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x + \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0 \mid Y_1 = 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x - 1 + \sum_{k=2}^{n} Y_k = 0\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x + 1 + \sum_{k=2}^{n} Y_k = 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (x - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} Y_{k+1} = 0\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (x + 1) + \sum_{k=1}^{n-1} Y_{k+1} = 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi_0(x-1) + \frac{1}{2}\pi_0(x+1)\,, \text{ za } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Prema gornjoj jednakosti očito je da bilo koje tri susjedne točke grafa funkcije $\pi_0(x)$, za $x = 0, 1, 2, ...$ leže na pravcu (konveksnost). Zaključujemo da sve točke grafa funkcije $\pi_0(x)$ za $x \geq 0$ leže na pravcu. Budući da je $\pi_0(0) = 1$, pravac prolazi kroz točku $(0, 1)$. Kada bi $\pi_0(x)$ bilo manje od 1 za neki $x \geq 0$, pravac bi sijekao x os, te bi za dovoljno velike $x \in \mathbb{Z}$ imali $\pi_0(x) < 0$ što je nemoguće. Dakle $\pi_0(x) = 1$ za sve $x \geq 0$. Zbog simetrije slučajne šetnje, $\pi_0(x) = 1$ i za sve $x < 0$.

Slučajnu šetnju na skupu $\mathbb{Z}$ možemo generalizirati promatrajući slučajnu šetnju na l-dimenzionalnoj rešetci $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$. Sa e_i označimo vektor $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^l$ s jedinicom na i-tom mjestu. Pretpostavimo da je $Y = (Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih vektora s vrijednostima u skupu $\{\pm e_1, \pm e_2, ..., \pm e_l\}$ i distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = e_i) = \mathbb{P}(Y_1 = -e_i) = 1/2l$, za $i = 1, ..., l$. Definiramo

$$X_0 = 0\,,\ X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k\,,\ \text{za } n \geq 1.$$

Tada se $X = (X_n : n \geq 0)$ zove jednostavna simetrična l-dimenzionalna slučajna šetnja. U svakom trenutku X se može pomaknuti na jedno od $2l$ susjednih mjesta na rešetki. Stanja ovog Markovljevog lanca zapisujemo

$$x = x_1 e_1 + ... + x_l e_l,$$

gdje su $x_1, ..., x_l$ cijeli brojevi. Dakle povećanjem ili smanjenjem jedne od koordinata za 1, ostavljajući ostale koordinate jednakima, dobivamo $2l$ susjednih točaka od x. Posebno, u dvodimenzionalnom slučaju svaka točka ima 4 susjedne točke: gore, dolje, lijevo i desno. U svakom koraku lanac se sa jednakom vjerojatnosti od $1/2l$ pomiče u bilo koje susjedno stanje, neovisno o prethodnom stanju. Napomenimo još samo da slučajna šetnja, naravno, može krenuti i iz bilo kojeg drugog stanja $x \in \mathbb{Z}^l$, ne nužno iz 0.

Kao što smo pokazali u jednodimenzionalnom slučaju na $\mathbb{Z}$, i u dvodimenzionanom slučaju Markovljev lanac X posjeti bilo koje stanje s vjerojatnosti 1, bez obzira na početno stanje iz kojega kreće. Za slučajnu šetnju na skupu $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 3$ pokazuje se da je ta vjerojatnost manja od 1. Dakle simetrična slučajna šetnja na skupu $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}^2$ je povratan Markovljev lanac, dok je za dimenzije 3 i više, simetrična slučajna šetnja prolazan Markovljev lanac. Definirajmo konkretno povratnost i prolaznost skupa stanja.

Definicija 1.1.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s matricom prijelaza P i skupom stanja S. Za $B \subset S$ vjerojatnost da Markovljev lanac posjeti skup B ukoliko kreće iz stanja $x \in S$ je*

$$\pi_B(x) := \mathbb{P}_x(T_B < \infty),$$

gdje je $T_B = inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$. Skup B je povratan ako je $\pi_B(x) = 1$ za sva stanja $x \in S$. Ukoliko postoji stanje $x \in S$ za koje je $\pi_B(x) < 1$, skup B je prolazan.

1.2 Integralna reprezentacija funkcije prijelaza

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$ (skup stanja $S = \mathbb{Z}^l$) s matricom prijelaza $P = (p(x, y) : x, y \in S)$. Znamo da je

$$p^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y).$$

Funkciju $p^{(n)}(x, y)$ zovemo *prijelazna funkcija*.

Za $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l) \in \mathbb{R}^l$ i $x = (x_1, x_2, ..., x_l) \in S$ označimo s $\theta(x) = \theta_1 x_1 + ... + \theta_l x_l$ i definirajmo funkciju

$$F(\theta) = \sum_{y \in S} p^{(n)}(x, y) \exp(i\theta(y)) = \mathbb{E}_x[\exp(i\theta(X_n))]. \tag{1.1}$$

To je karakteristična funkcija slučajnog vektora X_n. Primijetimo da je suma u (1.1) konačna jer slučajna šetnja nakon n koraka može posjetiti najviše $(2l)^n$ različitih stanja. Želimo prijelaznu funkciju $p^{(n)}_{xy}$ izraziti preko funkcije $F(\theta)$. Pomnožimo (1.1) sa $\exp(-i\theta(z))$, $z \in \mathbb{Z}^l$ i integrirajmo po skupu $Q := [-\pi, \pi]^l$:

$$\int_Q F(\theta) e^{-i\theta(z)} d\theta = \int_Q \sum_{y \in S} p^{(n)}(x, y) e^{i(\theta(y) - \theta(z))} d\theta. \tag{1.2}$$

Budući da je suma konačna možemo zamijeniti sumu i integral. Nakon zamjene imamo sljedeći integral:

$$\begin{aligned}\int_Q e^{i\theta(y)-i\theta(z)}d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left[\theta_1(y_1-z_1)+\dots+\theta_l(y_l-z_l)\right]}d\theta_1\dots d\theta_l \\ &= \prod_{k=1}^{l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_k(y_k-z_k)}d\theta_k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Za $y = z$ (1.3) je očito jednako $(2\pi)^l$. Za $y \neq z$ postoji k t.d. $y_k \neq z_k$. Izračunajmo onaj faktor iz umnoška (1.3), tj. onaj integral u kojem se javlja upravo ta $k - ta$ komponenta:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_k(y_k-z_k)}d\theta_k &= \frac{1}{i\left(y_k-z_k\right)}e^{i\theta_k(y_k-z_k)}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{i\left(y_k-z_k\right)}\left[e^{i\pi(y_k-z_k)} - e^{-i\pi(y_k-z_k)}\right] \\ &= \frac{1}{i\left(y_k-z_k\right)}\left[\cos\left(\pi\left(y_k-z_k\right)\right) + i\sin\left(\pi\left(y_k-z_k\right)\right)\right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\pi\left(y_k-z_k\right)\right) + i\sin\left(\pi\left(y_k-z_k\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{i\left(y_k-z_k\right)}2i\sin\left(\pi\left(y_k-z_k\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

jer su y i z vektori sa cjelobrojnim komponentama. Dakle, dobijemo

$$\int_Q e^{i\theta(y)-i\theta(z)}d\theta = \begin{cases}(2\pi)^l, & \text{za } y = z \\ 0, & \text{za } y \neq z\end{cases}$$

Polazna jednadžba (1.2) sada se svodi na

$$\int_Q F(\theta)\,e^{-i\theta(z)}d\theta = p^{(n)}(x,z)\,(2\pi)^l,$$

odakle slijedi

$$p^{(n)}(x,z) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_Q F(\theta)\,e^{-i\theta(z)}d\theta. \tag{1.5}$$

Preostaje još pronaći funkciju $F(\theta)$. Kako je $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$, slijedi

$$F(\theta) = \mathbb{E}_x\left[e^{i\theta(X_n)}\right] = e^{i\theta(x)}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{i\theta(Y_k)}\right].$$

Budući da su $Y_1, ..., Y_n$ nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori, imamo

$$F(\theta) = e^{i\theta(x)} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{\theta(Y_1)}\right] = e^{i\theta(x)} \Phi^n(\theta), \tag{1.6}$$

gdje je $\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{i\theta(Y_1)}\right]$. Dobili smo konačno izraz za prijelaznu funkciju $p_{xy}^{(n)}$ pomoću funkcije $F(\theta)$, točnije dokazali smo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.2.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajna šetnja tako da je $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$, gdje su $(Y_n : n \geq 1)$ nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori na $\mathbb{Z}^l$. Tada je za $x, y \in \mathbb{Z}^l$*

$$p^{(n)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q e^{i\theta(x-y)} \Phi^n(\theta)\, d\theta,$$

gdje je $\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{i\theta(Y_1)}\right]$.

Posebno, vrijedi sljedeći rezultat.

Korolar 1.2.2. *U slučaju jednostavne simetrične slučajne na $\mathbb{Z}^l$, slučajni vektor Y_1 poprima bilo koju vrijednost iz skupa $\{\pm e_1, ... \pm e_l\}$ s vjerojatnosti $1/2l$ pa je očekivanje*

$$\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{i\theta(Y_1)}\right] = \frac{1}{2l} \sum_{m=1}^{l} \left(e^{i\theta_m} + e^{-i\theta_m}\right) = \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{l} \cos\theta_m.$$

1.3 Slučajna šetnja kada $n \to \infty$

Pretpostavljamo da je $l \geq 3$, tj. promatramo slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 3$. Pokazat ćemo da u tom slučaju $X_n \to \infty$ kada $n \to \infty$. Vidjet ćemo da ovo vodi prolaznosti svakog ograničenog skupa $B \subset S$.

Promotrimo slučajnu šetnju koja kreće iz stanja x i pretpostavljamo uspjeh u n-tom koraku ako je $X_n = y$. Suma

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x, y) = \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}$$

je očekivani broj posjeta stanju y. Funkcija $g(x, y)$ je zapravo Greenova funkcija, tj. Greenova matrica. Preciznije, *Greenova funkcija* $G = (g(x, y) : x, y \in S)$ definirana je sa

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$$

odakle slijedi da je

$$g(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,y).$$

Znamo da je u slučaju prolazne slučajne šetnje $g(x,y) < \infty$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}^l$. Ponekad je koristan i sljedeći dovoljan uvjet Chung-Fuchsovog tipa.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 1$, tj. $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$, gdje su $(Y_n : n \geq 1)$ nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori na $\mathbb{Z}^l$ i neka je $\Phi(\theta) = \mathbb{E}\left[e^{i\theta(Y_1)}\right]$, $\theta \in \mathbb{R}^l$. Ako je*

$$\int_Q \frac{d\theta}{1 - |\Phi(\theta)|} < \infty,$$

onda je $g(x,y) < \infty$.

Dokaz. Iz Propozicije 1.2.1 slijedi

$$(2\pi)^l g(x,y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_Q |\Phi^n(\theta)| \, d\theta = \int_Q \frac{d\theta}{1 - |\Phi(\theta)|}.$$

Zamjena sume i integrala opravdana je Beppo-Levijevim teoremom. □

U slučaju simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 3$ uvjet iz gornje propozicije je zadovoljen.

Korolar 1.3.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 3$. Tada je*

$$g(x,y) < \infty,$$

za sve $x, y \in \mathbb{Z}^l$.

Dokaz. Funkcija $\Phi(\theta)$ koju smo izračunali u Korolaru 1.2.2 je neprekidna i $|\Phi(\theta)| < 1$ na cijelom skupu Q osim u točkama $(0, 0, ..., 0)$ i 2^l točaka oblika $(\pm\pi, ..., \pm\pi)$, u kojima je $|\Phi(\theta)| = 1$. Kako je $\cos\alpha \sim 1 - \alpha^2/2$ za $\alpha \to 0$, postoji okolina U oko točke $\theta = (0, ..., 0)$ gdje je

$$0 < \cos\theta_m \leq 1 - \frac{\theta_m^2}{4}, m = 1, ..., l. \tag{1.7}$$

Prema Korolaru 1.2.2, za $\theta \in U$ vrijedi

$$\begin{aligned}|\Phi(\theta)| = \Phi(\theta) &= \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l}\cos\theta_m \\ &\leq \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l}\left(1-\frac{\theta_m^2}{4}\right) \\ &= 1-\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l}\frac{\theta_m^2}{4} \\ &= 1-\frac{1}{4l}\left(\theta_1^2+...+\theta_l^2\right). \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Time dobijemo

$$\int_U \frac{d\theta}{1-|\Phi(\theta)|} < \int_U \frac{4l\, d\theta}{\theta_1^2+...+\theta_l^2}, \tag{1.9}$$

te prelaskom na polarne koordinate

$$\int_{K(0,a)} \frac{d\theta}{\theta_1^2+...+\theta_l^2} = c\int_0^a \frac{r^{l-1}dr}{r^2} = c\int_0^a r^{l-3}dr,$$

gdje je $c > 0$ neka konstanta. Zadnji integral postoji, tj. konačan je ako i samo ako je $l-3 > -1$, odnosno ako i samo ako je $l \geq 3$. Konveregencija integrala

$$\int \frac{d\theta}{1-|\Phi(\theta)|}$$

na isti se način pokaže i za okolinu točaka $\theta = (\pm\pi, ..., \pm\pi)$. Dakle,

$$\int_Q \frac{d\theta}{1-|\Phi(\theta)|} < \infty \tag{1.10}$$

te iz Propozicije 1.3.1 slijedi tvrdnja. □

Iz Korolara 1.3.2 slijedi da je broj posjeta stanju $y \in \mathbb{Z}^l$, za $l \geq 3$, konačan s vjerojatnosti 1. Dakle, slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 3$, će s vjerojatnosti 1 svako stanje posjetiti konačan broj puta. Kako je presjek prebrojivog skupa sigurnih događaja i sam siguran događaj, za svaki ograničen skup stanja B postoji trenutak nakon kojega slučajna šetnja više ne posjećuje skup B.

Korolar 1.3.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 3$. Svaki ograničen skup stanja $B \subset \mathbb{Z}^l$ je prolazan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je B povratan. Promotrimo događaj

$$A_n = \{\text{slučajna šetnja posjeti skup } B \text{ nakon n-tog koraka}\}.$$

Vjerojatnost događaja A_n, za bilo koje početno stanje $x \in \mathbb{Z}^l$ i bilo koji $n \geq 0$ je prema formuli potpune vjerojatnosti jednaka

$$\mathbb{P}_x(A_n) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^l} \mathbb{P}_x(A_n | X_n = y) \mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^l} \pi_B(y) p^{(n)}(x, y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^l} p^{(n)}(x, y) = 1,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz $\pi_B(y) = 1$ za sve $y \in \mathbb{Z}^l$ zbog pretpostavke o povratnosti skupa B. Dakle, vjerojatnost događaja A_n jednaka je 1 za sve $n \geq 0$, tj. slučajna šetnja X krenuvši iz proizvoljnog stanja $x \in \mathbb{Z}^l$ posjeti skup B u proizvoljno udaljenim vremenskim trenucima.
Uzmimo sada $X \in B$ i označimo

$$g(x, B) = \sum_{y \in B} g(x, y) < \infty, \tag{1.11}$$

gdje konačnost slijedi iz konačnosti skupa B. S druge strane je

$$g(x, B) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in B\}} \right] < \infty$$

pa je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in B\}} < \infty$ $\mathbb{P}_x$ - gotovo sigurno. Sada slijedi da je

$$\mathbb{P}_x(X_n \in B \text{ za samo konačno mnogo } n) = 1,$$

što je u kontradikciji s time da slučajna šetnja posjeti skup B nakon proizvoljnog trenutka $n \in \mathbb{N}$, tj. iz dokazanog smo vidjeli da je

$$\mathbb{P}_x(\text{slučajna šetnja } X \text{ posjeti } B \text{ nakon proizvoljnog trenutka } n \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}_x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

Dakle, skup B je prolazan. □

Ponekad se u teoriji potencijala kaže da je $g(x, B)$ definirana s (1.11) Greenova mjera skupa B.

Koristeći Propozicije 1.2.1 i 1.3.1 te Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji koji nam kaže da možemo zamijeniti sumu i integral, dobivamo sljedeću formulu u slučaju jednostavne simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^l, l \geq 3$:

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q e^{i\theta(x-y)} \Phi^n(\theta)\, d\theta = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q \frac{e^{i\theta(x-y)} d\theta}{1 - \Phi(\theta)}. \tag{1.12}$$

Ova jednakost omogućuje nam da izvedemo sljedeću asimptotsku ocjenu funkcije $g(x, y)$, za $l \geq 3$:

$$g(x, y) \sim \frac{c_l}{\|x-y\|^{l-2}} \text{ za } \|x-y\| \to \infty, \tag{1.13}$$

gdje je $\|z\|$ duljina vektora z, a c_l su određene pozitivne konstante.

Primjer 1.3.4. *U slučaju simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^2$ vrijedi $g(x, x) = \infty$.*

Prema (1.12) *slijedi*

$$\begin{aligned}
g(x, x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{1 - \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{1 - \cos\theta_1 + 1 - \cos\theta_2} \\
&\geq \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}} \\
&= c \int_0^1 \frac{r}{\frac{1}{2}r^2} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

gdje nejednakost slijedi iz već spomenute ocjene (1.7), a prezdadnja jednakost prelaskom na polarne koordinate, gdje je c neka konstanta (kao u Korolaru 1.3.2).

Propozicija 1.3.5. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$, onda su svi jednočlani skupovi $\{x\}, x \in \mathbb{Z}^2$ povratni.*

Dokaz. Vrijedi

$$g(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = 1 + \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}.$$

Definirajmo

$$Z_k := \begin{cases} 1, & \text{ako } X \text{ posjeti stanje } x \text{ barem } k \text{ puta krenuvši iz stanja } x \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

za $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}} = \mathbb{E}_x \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_k = 1\}}.$$

Primijetimo da je, prema jakom Markovljevom svojstvu, za $k \geq 1$

$$\mathbb{P}_x(Z_k = 1) = \mathbb{P}_x\left(T_{\{x\}} < \infty\right)^k,$$

odakle dobijemo

$$g(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(T_{\{x\}} < \infty\right)^k.$$

Budući je $g(x,x) = \infty$ (vidi Primjer 1.3.4), slijedi da je $\mathbb{P}_x\left(T_{\{x\}} < \infty\right) = 1$. Neka je $y \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq x$. Tada postoji $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $p^{(m)}(x,y) > 0$. Označimo s A događaj $A = \{X \text{ neće ponovno posjetiti } x\}$. Primjenom Markovljevog svojstva slijedi

$$0 = \mathbb{P}_x(A) \geq \mathbb{P}_x(A|X_m = y)\,\mathbb{P}_x(X_m = y) = \mathbb{P}_y(A)\,p^{(m)}(x,y).$$

Dakle, $0 = \mathbb{P}_y(A)$, odnosno $\pi_{\{x\}}(y) = 1$ te smo pokazali povratnost jednočlanih skupova. $\square$

Poglavlje 2

Harmonijske funkcije

2.1 Harmonijske funkcije i simetrična slučajna šetnja

U ovome poglavlju i dalje pretpostavljamo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i stohastičkom matricom prijelaza $P = (p(x, y) : x, y \in S)$.

Za realnu funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ definiramo funkciju $Pf : S \to \mathbb{R}$ kao

$$Pf(x) := \sum_{y \in S} p(x, y) f(y).$$

Posebno, ako promatramo simetričnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^l$, znamo da šetnja u jednom koraku može prijeći iz nekog stanja $x \in \mathbb{Z}^l$ u jedno od 2^l susjednih stanja oblika $x' = x \pm e_k$ za $k = 1, ..., l$ i da je vjerojatnost prelaska u svako susjedno stanje $p(x, x') = \frac{1}{2l}$. Ako je sada $f : \mathbb{Z}^l \to \mathbb{R}$ dobivamo

$$Pf(x) = \frac{1}{2l} \sum_k f(x + e_k),$$

gdje smo pojednostavnili zapis, tj. k poprima vrijednosti $\pm 1, ..., \pm l$ i $e_{-k} = -e_k$.

Linearni operator

$$A = P - I,$$

gdje je I jedinični operator, je diskretni analogon operatora $\frac{1}{2}\Delta$, gdje je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$$

Laplaceov operator. Za dovoljno glatke funkcije f definirane na cijelom prostoru $\mathbb{Z}^l$, vrijedi

$$\Delta f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum f(x + he_k) - 2lf(x)}{h^2},$$

tako da se Laplaceov operator dobije kao limes operatora $P - I$ beskonačnom particijom rešetke. Sličnost između operatora $\frac{1}{2}\Delta$ i A ima dalekosežne posljedice. Vođeni ovom sličnosti primijenit ćemo neke analogone pojmova iz teorije diferencijalnih jednadžbi na slučajne šetnje.

Definicija 2.1.1. *Realna funkcija $h : S \to \mathbb{R}$ je harmonijska na S ako vrijedi*

$$Ph(x) = h(x), \text{ za svaki } x \in S.$$

Kažemo da je funkcija h superharmonijska na S ako vrijedi

$$Ph(x) \leq h(x), \text{ za svaki } x \in S.$$

Funkcija h je subharmonijska ako je $-h$ superharmonijska.

U terminima uvedenog operatora A, kažemo da je funkcija f harmonijska ako je $Af(x) = 0$ i superharmonijska ako je $Af(x) \leq 0$.

Vidimo da je svojstvo harmoničnosti zapravo svojstvo srednje vrijednosti: za svako stanje $x \in S$ vrijednost $h(x)$ je težinski prosjek vrijednosti funkcije h sa težinama $p(x, y), y \in S$. Svojstvo superharmoničnosti interpretiramo na sljedeći način: vrijednost funkcije u točki veća je od srednje vrijednosti funkcije na okolini te točke. Najjednostavniji primjer harmonijske funkcije bio bi konstanta. Sljedeći rezultat poznat je pod nazivom Liouvilleov teorem. Dokazat ćemo ga prvo za specijalni slučaj jednostavne simetrične slučajne šetnje.

Teorem 2.1.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$. Svaka ograničena harmonijska funkcija $h : \mathbb{Z}^l \to \mathbb{R}$ je konstantna.*

Dokaz. Promotrimo prvo slučaj kada funkcija h dostiže svoj maksimum M. Neka je $y_0 \in S$ (znamo da je kod simetrične slučajne šetnje $S = \mathbb{Z}^l$) točka u kojoj se postiže maksimum, tj. $h(y_0) = M$. Označimo sa $y_1, y_2, ..., y_{2l}$ susjedne točke od y_0. Promotrimo aritmetičku sredinu brojeva $h(y_0) - h(y_k)$ za $k = 1, 2, ..., 2l$:

$$\begin{aligned} h(y_0) - h(y_k) &= Ph(y_0) - h(y_0 + e_k) \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{j=1}^{2l} h\left(y_0 + e_j\right) - h(y_0 + e_k) \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}(h(y_0) - h(y_1)) + ... + (h(y_0) - h(y_{2l})) &= \frac{2l}{2l}\sum_{j=1}^{2l} h\left(y_0 + e_j\right) - \sum_{k=1}^{2l} h(y_0 + e_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

Budući da su svi $h(y_0) - h(y_k)$ nenegativni, slijedi

$$h(y_0) - h(y_k) = 0, \text{ za svaki } k = 1, 2, ..., 2l.$$

Promotrimo sada slučaj kada funkcija h ne postiže svoj maksimum. S obzirom da je h ograničena postoji najmanja gornja međa, odnosno supremum M. Ta se vrijednost ne postiže u nijednoj točki skupa S, ali za svaki $\epsilon > 0$ postoji točka $y \in S$ tako da je $h(y) \geq M - \epsilon$. Slično kao u prvom slučaju pokazujemo da, ukoliko je h harmonijska, tada za svaku točku y' susjednu točki y vrijedi ocjena $h(y') \geq M - 2l\epsilon$:

$$M - \epsilon \leq h(y) = Ph(y) = \frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{2l} h(y + e_k) \leq \frac{1}{2l}(h(y') + (2l-1)M)$$

Slijedi

$$\begin{aligned}2l(M - \epsilon) &\leq h(y') + (2l-1)M \\ M - 2l\epsilon &\leq h(y').\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $M > 0$ i neka je y_0 točka takva da je $h(y_0) \geq M - \epsilon$. Uzmimo nadalje niz točaka $y_1 = y_0 + e_1, y_2 = y_1 + e_1, ..., y_n = y_{n-1} + e_1$. Promotrimo sumu

$$\begin{aligned}s &= h(y_0) + h(y_1) + ... + h(y_n) \\ &\geq M - \epsilon + M - 2l\epsilon + M - (2l)^2\epsilon + ... + M - (2l)^n\epsilon \\ &= (n+1)M - \epsilon\frac{(2l)^{n+1} - 1}{2l - 1} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Neka je sada $N > 0$ proizvoljan. Odaberimo prvo dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$ tako da je $nM > 2N$, a zatim $\epsilon > 0$ dovoljno mali tako da vrijedi

$$\frac{(2l)^{n+1} - 1}{2l - 1}\epsilon < N$$

Time iz (2.1) slijedi

$$s > 2N - N = N.$$

Dakle suma s je veća od proizvoljno odabranog broja N.

Za proizvoljnu ograničenu harmonijsku funkciju f slijedi da je i funkcija $h(x) = f(x+e_1) - f(x)$ također harmonijska i ograničena. Za tu funkciju h suma

$$s = f(y_n + e_1) - f(y_0)$$

je manja od dvostruke gornje ograde funkcije f. Dakle, gornja granica funkcije h ne može biti pozitivna, tj.

$$h(x) = f(x+e_1) - f(x) \leq 0.$$

Ukoliko vektor e_1 zamijenimo vektorom $-e_1$ (što je dopušteno) dobivamo

$$f(x-e_1) - f(x) \leq 0.$$

Posebno, za $x = z + e_1$ slijedi

$$f(z) - f(z+e_1) \leq 0.$$

Konačno, dobivamo željenu tvrdnju

$$f(x+e_1) = f(x).$$

Analogno se pokazuje da je $f(x+e_k) = f(x)$ za svaki $k = 2, ..., 2l$. Dakle proizvoljna ograničena harmonijska funkcija je konstantna. □

Sada dajemo jedan primjer harmonijske funkcije te ćemo konkretno izračunati njezinu vrijednost.

Propozicija 2.1.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$. Vjerojatnost da Markovljev lanac, krenuvši iz stanja x, posjeti neki skup $B \subset \mathbb{Z}^l$ beskonačan broj puta je harmonijska funkcija. Tu ćemo vjerojatnost označavati $\overline{\pi}_B(x)$. Također vrijedi*

$$\overline{\pi}_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je skup } B \text{ prolazan} \\ 1, & \text{ako je skup } B \text{ povratan} \end{cases}$$

za sve $x \in S$.

Dokaz. Funkcija

$$P\,\overline{\pi}_B(x) = \sum_{y \in S} p(x,y)\,\overline{\pi}_B(y)$$

je vjerojatnost da Markovljev lanac, krenuvši iz stanja x, posjeti skup B beskonačno mnogo puta nakon prvog koraka. Ta je vjerojatnost očito jednaka $\overline{\pi}_B(x)$. Budući da je $\overline{\pi}_B$ ograničena i harmonijska, prema Teoremu 2.1.2 $\overline{\pi}_B$ je konstantna.

Pokažimo sada drugi dio tvrdnje, tj. koje su to konkretno konstante u ovisnosti o povratnosti, odnosno prolaznosti skupa B. Neka je prvo skup B prolazan. Prisjetimo se oznake $T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ za prvo vrijeme posjeta skupu B. Tada je $\mathbb{P}_x(X_{T_B} = y, T_B = n)$ vjerojatnost da Markovljev lanac krenuvši iz stanja x prvi put posjeti skup B u n-tom koraku i da se tada nalazi upravo u stanju $y \in B$. Očito je

$$\pi_B(x) = \mathbb{P}_x(T_B < \infty) = \sum_{y\in B} \mathbb{P}_x(X_{T_B} = y, T_B < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in B} \mathbb{P}_x(X_{T_B} = y, T_B = n)$$

Da bi lanac posjetio skup B beskonačno mnogo puta, prvo mora posjetiti skup B po prvi puta u nekom koraku i onda posjetiti B beskonačno mnogo puta. Računajući vjerojatnost ovoga događaja prema formuli potpune vjerojatnosti, dobivamo

$$\overline{\pi}_B = \overline{\pi}_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in B} \mathbb{P}_x(X_{T_B} = y, T_B = n)\,\overline{\pi}_B(y) = \overline{\pi}_B \pi_B(x),$$

gdje je $x \in S$ bilo koje stanje. Budući je skup B prolazan, postoji $x \in S$ t.d. $\pi_B(x) < 1$. Dakle $\overline{\pi}_B = 0$.

Ako je skup B povratan, vjerojatnost događaja C_n ={ Markovljev lanac X se ne vraća u skup B nakon n-tog koraka} jednaka je 0, za sve $n \geq 0$ i sva početna stanja $x \in S$. Stoga je

$$\begin{aligned} 1 - \overline{\pi}_B(x) &= \mathbb{P}_x\{\text{ML posjeti skup } B \text{ samo konačan broj puta}\} \\ &= \mathbb{P}_x(C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup ...) \\ &\leq \mathbb{P}_x(C_0) + \mathbb{P}_x(C_1) + \mathbb{P}_x(C_2) + ... \\ &= 0 \end{aligned}$$

te dobivamo $\overline{\pi}_B = 1$. □

Vidimo da smo zapravo dobili kriterij prolaznosti, odnosno povratnosti skupa $B \subset S$: skup B je povratan ako i samo ako je $\overline{\pi}_B(x) = 1$, za sva stanja $x \in S$, tj. ako ML krenuvši iz bilo kojeg stanja x posjeti skup B beskonačno mnogo puta s vjerojatnosti 1. Ukoliko je ta vjerojatnost manja od 1 za neko stanje $x \in S$, slijedi da je jednaka 0 za sva stanja, te je skup B prolazan.

2.2 Martingali i harmonijske funkcije

Teorija martingala usko je povezana sa harmonijskim funkcijama. Martingali, kao i razni rezultati vezani uz iste trebali bi čitatelju biti dobro poznati, stoga ovdje navodimo samo definiciju martingala.

Definicija 2.2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran s obzirom na* $\mathbb{F}$*, te da je* $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$*, za sve* $n \geq 0$*.*
(i) X *se zove* martingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

(ii) X *se zove* supermartingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-supermartingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leq X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

(iii) X *se zove* submartingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-submartingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \geq X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

Teorem 2.2.2. *Lévyjev martingal*
Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ *Markovljev lanac s matricom prijelaza* P *i skupom stanja* S*, i neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *ograničena funkcija. Proces* $M^f = \left(M_n^f : n \geq 0\right)$ *definiran s*

$$M_n^f = f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} (P - I) f(X_n) \tag{2.2}$$

je martingal u odnosu na prirodnu filtraciju procesa X*.*

Dokaz. Budući da je f ograničena funkcija, recimo ograničena sa K, imamo

$$|(Pf)(x)| = \left|\sum_{y \in S} p(x, y) f(y)\right| \leq K.$$

Stoga slijedi

$$\begin{aligned}
\left|M_n^f\right| &\leq |f(X_n)| + |f(X_0)| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} Pf(X_k)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\right| \\
&\leq K + K + \sum_{k=0}^{n-1} |Pf(X_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(X_k)| \\
&\leq K + K + nK + nK \\
&= 2(n+1)K \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Posebno, M_n^f je integrabilna. Također,

$$M_{n+1}^f - M_n^f = f(X_{n+1}) - Pf(X_n),$$

i budući da je

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\sigma(X_0,...,X_n)] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n] = Pf(X_n),$$

imamo

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^f - M_n^f|\sigma(X_0,...,X_n)\right] = 0.$$

□

Između martingala i harmonijskih funkcija postoji izravna veza, točnije karakterizacija harmonijskih funkcija preko martingala.

Teorem 2.2.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S i neka je $f : S \to \mathbb{R}$ takva da je $\mathbb{E}[|f(X_n)|] < \infty$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Funkcija f je harmonijska (superharmonijska, subharmonijska) ako i samo ako je $f(X) = (f(X_n) : n \geq 0)$ martingal (supermartingal, submartingal).*

Dokaz. Neka je f harmonijska. Nužnost očito vrijedi što vidimo iz definicije harmonijske funkcije. Vrijedi $Pf = f$, što je ekvivalentno tome da je

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n = x] = f(x),$$

za sva stanja $x \in S$. Dakle, $(f(X_n))_{n\geq 0}$ je martingal. Slučaj ako je funkcija f superharmonijska (subharmonijska), tada je $f(X)$ supermartingal (submartingal) pokazuje se analogno. Ako je f superharmonijska (subharmonijska) vrijedi $Pf \leq f$ ($Pf \geq f$), što je ekvivalentno tome da je

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n = x] \leq f(x) \quad (\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n = x] \geq f(x)),$$

za sva stanja $x \in S$. Dakle, $(f(X_n))_{n\geq 0}$ je supermartingal (submartingal).

Pokažimo sada drugi smjer. Pretpostavimo da je $(f(X_n))_{n\geq 0}$ martingal. Tada posebno vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X_1)|X_0] = f(X_0),$$

pa po definiciji uvjetnog očekivanja za skup $A = \{X_0 = x\}$ dobijemo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_1)|X_0 = x] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_1)|X_0]|X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[f(X_0)|X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[f(x)|X_0 = x],\end{aligned} \tag{2.3}$$

odakle slijedi $\mathbb{E}_x[f(X_1)] = f(x)$, što drugačije zapisujemo $P(x) = f(x)$. Dakle, funkcija f je harmonijska. Slučaj supermartingala (submartingala) opet se dokazuje analogno. U tom slučaju vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X_1)|X_0] \geq f(X_0),$$

pa se (2.3) svodi na

$$\begin{aligned} E[f(X_1)|X_0 = x] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_1)|X_0]|X_0 = x] \\ &\geq \mathbb{E}[f(X_0)|X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[f(x)|X_0 = x], \end{aligned}$$

odakle slijedi $\mathbb{E}_x[f(X_1)] \geq f(x)$, odnosno $P(x) \geq f(x)$. □

Teorem o konvergenciji martingala bi čitatelju trebao biti poznat te ga stoga navodimo kao podsjetnik, bez dokaza, budući da ćemo ga koristiti u dokazu važnog rezultata u nastavku.

Teorem 2.2.4. *Konvergencija supermartingala*
Neka je $(M_n : n \geq 0)$ nenegativan supermartingal ili ograničen submartingal. Tada, gotovo sigurno, $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ postoji i konačan je.

Sada smo spremni dokazati Liouville-ov teorem u općenitom slučaju. Tvrdnja zapravo vrijedi i šire, točnije za superharmonijske i subharmonijske funkcije, a onda posebno i za harmonijske funkcije.

Teorem 2.2.5. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac s vrijednostima u skupu S. Tada je svaka nenegativna superharmonijska ili ograničena subharmonijska funckija $h : S \to \mathbb{R}$ konstantna.*

Dokaz. Ako je h nenegativna superharmonijska (ograničena subharmonijska) funkcija, tada je $(Y_n)_{n\geq 0}$ definiran sa $Y_n = h(X_n)$ nenegativan supermartingal (ograničen submartingal) te prema Teoremu 2.2.4 konvergira konačnom limesu Y. Budući da je broj posjeta Markovljevog lanca $(X_n)_{n\geq 0}$ svakom stanju $x \in S$ beskonačan, mora biti $Y = h(x)$ gotovo sigurno za sve $x \in S$. Posebno, h je konstantna. □

Propozicija 2.1.3 koja daje rezultat u slučaju jednostavne simetrične slučajne šetnje, može se poopćiti na ireducibilne i povratne Markovljeve lance. Dokaz je analogan dokazu Propozicije 2.1.3.

Propozicija 2.2.6. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac na skupu stanja S. Vjerojatnost da Markovljev lanac, krenuvši iz stanja x, posjeti neki povratan skup $B \subset S$ beskonačan broj puta je harmonijska funkcija. Ako označimo tu vjerojatnost sa $\overline{\pi}_B(x)$, vrijedi*

$$\overline{\pi}_B(x) = 1, \text{ za sve } x \in S.$$

Pokažimo sada obrat tvrdnje Teorema 2.2.5.

Teorem 2.2.7. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S takav da je svaka superharmonijska funkcija konstantna. Tada je X ireducibilan i povratan Markovljev lanac.*

Dokaz. Za $x, y \in S$ definiramo

$$f(x,y) := \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty\right),$$

gdje je $T_y = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}$ prvo vrijeme povratka u stanje y.
Sada računamo

$$\begin{aligned}
f(x,y) = \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty\right) &= \sum_{z \neq y} \mathbb{P}_x\left(X_1 = z, T_y < \infty\right) + \mathbb{P}_x\left(X_1 = y, T_y < \infty\right) \\
&= \sum_{z \neq y} p(x,z)\, \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty | X_1 = z\right) + p(x,y) \\
&= \sum_{z \neq y} p(x,z)\, \mathbb{P}_z\left(T_y < \infty\right) + p(x,y) \\
&= \sum_{z \neq y} p(x,z)\, f(z,y) + p(x,y) \\
&\geq \sum_{z \in S} p(x,z)\, f(z,y),
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog jakog Markovljevog svojstva, a nejednakost u posljednjem retku zbog $f(y,y) \leq 1$. Dakle, funkcija $x \mapsto f(x,y)$ je superharmonijska pa je po pretpostavci konstantna (po x, ali može ovisiti o y). Označimo $c(y) = f(x,y)$, $x \in S$. Zamijenimo $f(x,y)$ u gornjem računu sa $c(y)$. Dobivamo,

$$c(y) = \sum_{z \neq y} p(x,z)\, c(y) + p(x,y) = (1 - p(x,y))\, c(y) + p(x,y),$$

otkud slijedi da je

$$p(x,y)(1 - c(y)) = 0, \text{ za sve } x \in S.$$

Zaključujemo da je ili (*i*) $c(y) = 1$, ili (*ii*) $p(x,y) = 0$ za sve $x \in S$. Pokažimo da je drugi slučaj nemoguć. Zaista, pretpostavimo da je $p(x,y) = 0$ za sve $x \in S$, te definirajmo funkciju $h : S \to \mathbb{R}$ sa

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$

Tada je za $x \in S$,

$$Ph(x) = \sum_{z \in S} p(x,z)\, h(z) = \sum_{z \neq y} p(x,z)\, h(z) + p(x,y) = 0,$$

zbog $h(z) = 0$, $z \neq y$, te $p(x,y) = 0$. Slijedi $Ph \leq h$, pa je h superharmonijska funkcija koja nije konstantna. Budući da je to suprotno pretpostavci, slučaj (*ii*) je nemoguć. Dakle, preostaje

$$1 = c(y) = f(x,y) = \mathbb{P}_x\left(T_y < \infty\right), \text{ za sve } x \in S.$$

To znači da je stanje y dostižno iz svakog stanja x, te da je povratno ($\mathbb{P}_y\left(T_y < \infty\right) = 1$). Zbog toga što je $y \in S$ proizvoljan, lanac je ireducibilan i povratan. □

Primijetimo da smo ovime dobili kriterij prolaznosti Markovljevih lanaca.

2.3 Svojstva harmonijskih funkcija

Pretpostavljamo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac. Podijelimo skup stanja S na dva disjunktna podskupa, D i ∂D. Skup ∂D zovemo granicom od D. Dopušteno je da je $\partial D = \emptyset$ u kojem slučaju je $D = S$. Svojstvo harmoničnosti neke funkcije $h : S \to \mathbb{R}$ možemo promatrati i samo na skupu D.

Definicija 2.3.1. *Funkcija $h : S \to \mathbb{R}$ je harmonijska na skupu $D \in S$ ako je*

$$Ph(x) = h(x),$$

za sve $x \in D$.

Sljedeći je rezultat poznat pod nazivom princip maksimuma.

Lema 2.3.2. *Pretpostavimo da je skup stanja S konačan. Neka je funkcija $h : S \to \mathbb{R}$ harmonijska na D i neka je $M = \max_{x \in S} h(x)$. Tada postoji $y \in \partial D$ takav da je $h(y) = M$.*

Ako h nije konstantna, tada je $h(x) < M$ za sve $x \in D$.

Dokaz. Izmijenimo malo matricu prijelaza:

$$\tilde{p}(x,y) = \begin{cases} p(x,y), & \text{za } x \in D,\ y \in S \\ 1, & \text{za } x \in \partial D, y = x \\ 0, & \text{za } x \in \partial D,\ y \neq x \end{cases}$$

Dobili smo novu matricu prijelaza $\tilde{P} = (\tilde{p}(x,y) : x, y \in S)$, prema kojoj su sva stanja iz ∂D absorbirajuća. Radi pretpostavke o ireducibilnosti, također u odnosu na matricu prijelaza $\tilde{P}$ vrijedi

$$x \to y \text{ za sva stanja } x \in D,\ y \in S.$$

Funkcija h je harmonijska na D u odnosu na matricu prijelaza P ako i samo ako je $h(x) = \tilde{P}h(x)$, za sve $x \in S$:

$$\begin{aligned} x \in D \Rightarrow & \tilde{P}h(x) = \sum_{y \in D} p(x,y)\, h(y) = h(x) \\ x \in \partial D \Rightarrow & \tilde{P}h(x) = 1 \cdot h(x) + \sum_{y \neq x} 0 \cdot h(y) = h(x). \end{aligned}$$

Posebno je $\tilde{P}^n h(x) = h(x)$ za sva stanja $x \in S$.

Pretpostavimo sad suprotno, da postoji $x \in D$ takav da je $h(x) = M$. Uzmimo proizvoljan $x' \in S$. Tada je $\tilde{p}^{(n)}(x,x') > 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} M = h(x) &= \tilde{p}^{(n)}(x,x')\, h(x') + \sum_{y \neq x'} \tilde{p}^{(n)}(x,y)\, h(y) \\ &\leq \tilde{p}^{(n)}(x,x')\, h(x') + \sum_{y \neq x'} \tilde{p}^{(n)}(x,y)\, M \\ &= \tilde{p}^{(n)}(x,x')\, h(x') + \left(1 - \tilde{p}^{(n)}(x,x')\right) M, \end{aligned}$$

odakle slijedi $h(x') \geq M$. Kako je M maksimum, mora biti $h(x') = M$. Vidimo da h mora biti konstantna. Posebno, ako h nije konstantna, maksimum se ne može postizati u skupu D. □

Skup stanja S ne mora nužno biti konačan kao što smo to pretpostavili u Lemi 2.3.2. Sada ćemo navesti neke rezultate gdje ne pretpostavljamo nužno tu konačnost. No i dalje radimo sa ireducibilnim Markovljevim lancima. Pretpostavljamo da su sve funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ u nastavku P-integrabilne:

$$\sum_{y \in S} p(x,y)\, |f(y)| < \infty, \text{ za sve } x \in S.$$

Primijetimo da je gornja tvrdnja zadovoljena kada je skup stanja S konačan ili kada je skup $\{y \in S : p(x,y) > 0\}$ konačan za sva stanja x.

Pokazujemo u nastavku poseban slučaj Leme 2.3.2, gdje ne pretpostavljamo konačnost skupa stanja S.

Korolar 2.3.3. *Ako je funkcija $h : S \to \mathbb{R}$ harmonijska na S i ako postoji $x \in S$ takav da je $h(x) = M = \max_{x \in S} h(x)$, tada je h konstantna.*

Dokaz. Koristimo ireducibilnost Markovljevog lanca. Ako je $x' \in S$ proizvoljno stanje i $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p^{(n)}(x, x') > 0$ imamo

$$M = h(x) \leq \sum_{y \neq x'} p^{(n)}(x, y) M + p^{(n)}(x, x') h(x')$$
$$= \left(1 - p^{(n)}(x, x')\right) M + p^{(n)}(x, x') h(x').$$

Dakle $h(x') = M$. □

Primijetimo da je ovo na neki način generalizacija Teorema 2.1.2. Razlika je što ovdje ne pretpostavljamo ograničenost funkcije. Također, nismo uzeli u obzir slučaj kada funkcija ne dostiže nužno svoj maksimum.

Slijedi zanimljiv rezultat o superharmonijskim funkcijama. Prisjetimo se da one zadovoljavaju nejednakost $h(x) \geq Ph(x)$, $x \in S$.

Lema 2.3.4. *(i) Ako je funkcija h superharmonijska na S i $h(x) \geq 0$, za sve $x \in S$, tada je i $P^n h$ superharmonijska i P-integrabilna funkcija na S te $P^n h(x) \geq 0$. Vrijedi sljedeće: ili $h \equiv 0$ ili $h(x) > 0$, za sve $x \in S$.*

(ii) Neka je h_i, $i \in I = \{1, ..., m\}$ familija superharmonijskih funkcija i $h(x) = \inf_{i \in I} h_i(x)$ P-integrabilna funkcija. Tada je h također superharmonijska funkcija.

Dokaz. (i) Kako je $0 \leq Ph \leq h$, P-integrabilnost od h povlači P-integrabilnost od Ph te po indukciji od $P^n h$. Nadalje, operator prijelaza P ima svojstvo monotonosti: ako je $f \leq g$ tada je i $Pf \leq Pg$. Posebno, $P^n h \leq h$.
Pretpostavimo da je $h(x) = 0$ za neki $x \in S$. Tada je za svaki $n \geq 0$

$$0 = h(x) \geq \sum_{y \in S} p^{(n)}(x, y) h(y).$$

Kako je prema pretpostavci $h \geq 0$, mora biti $h(y) = 0$ za sva stanja y takva da je $p^{(n)}(x, y) > 0$. Ireducibilnost povlači $h \equiv 0$.

(ii) Monotonost od P daje $Ph \leq Ph_i \leq h_i$ za sve $i \in I$. Stoga je $Ph \leq \inf_I h_i = h$. □

Poglavlje 3

Potencijal

3.1 Uvod u potencijale

Laplaceov operator Δ čvrsto je povezan sa Newtonovim potencijalom. Neka je masa distribuirana u 3-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa gustoćom $\varphi(y)$. Prema Newtonovom zakonu gravitacije, ova masa djeluje na masu u točki x silom koja je proporcionalna gradijentu funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(y)\, dy}{\|x - y\|},$$

gdje je $\|x - y\|$ udaljenost između točaka x i y. Funkcija $f(x)$ naziva se potencijal distribucije $\varphi(y)$. Može se također interpretirati kao potencijal elektrostatskog polja induciranog nabojem s gustoćom φ.

Pokazuje se, uz vrlo slaba ograničenja na funkciju φ, da je potencijal f rješenje Poissonove jednadžbe

$$\frac{1}{2}\Delta f(x) = -\varphi(x) \tag{3.1}$$

Potpuno analogno, rješenje jednadžbe (3.1) u l-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^l$, $l \geq 3$ je integral

$$f(x) = b_l \int_{\mathbb{R}^l} \frac{\varphi(y)\, dy}{\|x - y\|^{l-2}}, \tag{3.2}$$

gdje je b_l neka pozitivna konstanta. Ovaj integral naziva se potencijal distribucije φ u l-dimenzionalnom prostoru.

U diskretnom slučaju jednadžba (3.1) svodi se na

$$Af(x) = -\varphi(x), \tag{3.3}$$

gdje su f i φ funkcije na rešetki skupu stanja S. Prisjetimo se da je operator $A = P - I$ diskretni analogon operatora $\frac{1}{2}\Delta$, gdje je Δ Laplaceov operator. U prethodnom poglavlju uveli smo pojam Greenove funkcije $G = (g(x,y) : x, y \in S)$ koja je definirana sa $G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$. Promotrimo sada operator

$$G\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + ... + P^n\varphi + ... , \tag{3.4}$$

gdje je $\varphi \geq 0$. Neka je

$$f = G\varphi.$$

Prema (3.4),

$$PG\varphi = G\varphi - \varphi,$$

te je stoga

$$Af = (P - I) f = (P - I) G\varphi = G\varphi - \varphi - G\varphi = -\varphi.$$

Dakle, operator G je analogon integralnog operatora (3.2). Stoga kažemo da je funkcija $G\varphi$ potencijal funkcije φ, gdje je $\varphi \geq 0$.

Znamo da su u slučaju povratnog Markovljevog lanca elementi Greenove matrice $g(x,y) = \infty$, za sve $x, y \in S$. U slučaju prolaznog i ireducibilnog Markovljevog lanca vrijedi

$$0 < g(x,y) < \infty, \text{ za sve } x, y \in S.$$

Stoga nadalje pretpostavljamo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac.

Definicija 3.1.1. *Funkcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ je G-integrabilna ako vrijedi*

$$\sum_{y \in S} g(x,y) |\varphi(y)| < \infty,$$

za sve $x \in S$. Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x) = G\varphi(x) = \sum_{y \in S} g(x,y) \varphi(y)$$

je potencijal funkcije φ, dok φ zovemo trošak funkcije f.

3.2 Svojstva potencijala

Ako označimo sa $\varphi^+ = \max\{\varphi(x), 0\}$ i $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$, onda je φ G-integrabilna ako i samo ako su φ^+ i φ^- G-integrabilne, i $G\varphi = G\varphi^+ - G\varphi^-$. U nastavku, pri proučavanju potencijala $G\varphi$, prešutno ćemo pretpostavljati G-integrabilnost funkcije φ. Prisjetimo se također definicije nosača funkcije u oznaci $\operatorname{supp} f$. To je skup svih točaka domene funkcije, u kojima je vrijednost funkcije različita od 0:

$$\operatorname{supp} f = \{x \in S : f(x) \neq 0\}.$$

Lema 3.2.1. *(i) Ako je f potencijal funkcije φ, tada je $\varphi = (I - P) f$. Štoviše, $P^n f \to 0$ po točkama.*
(ii) Ako je φ nenegativna, tada je $f = G\varphi$ superharmonijska i nenegativna. Nadalje, potencijal f je harmonijska funkcija na skupu $S \backslash \operatorname{supp} \varphi$, odnosno vrijedi $Pf(x) = f(x)$, za sve $x \in S \backslash \operatorname{supp} \varphi$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\varphi \geq 0$ (u protivnom rastavimo φ na pozitivni i negativni dio, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$). Budući da su svi sumandi nenegativni, konvergencija nizova parcijalnih suma je apsolutna i

$$PG\varphi = GP\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P^n \varphi = G\varphi - \varphi,$$

odnosno uvrštavanjem $f = G\varphi$

$$Pf = f - \varphi.$$

Ovime smo pokazali prvi dio tvrdnje (i), te tvrdnju (ii). Nadalje,

$$P^n f(x) = GP^n \varphi(x) = \sum_{k=n}^{\infty} P^k \varphi(x)$$

je n-ti ostatak konvergentnog reda, dakle teži u 0. □

Diskretni potencijal ima jasnu vjerojatnosnu interpretaciju.

Propozicija 3.2.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s matricom prijelaza $P = (p(x, y) : x, y \in S)$ i neka je $\varphi : S \to [0, \infty)$. Tada je*

$$P^n \varphi(x) = \sum_{y \in S} p^{(n)}(x, y) \varphi(y) = \mathbb{E}_x [\varphi(X_n)], \text{ za sve } n \geq 0.$$

Dokaz. Za $n = 0$ i $n = 1$ tvrdnja jasno vrijedi. Za $n > 1$ dokazujemo matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prema Chapman-Kolmogorovljevoj jednakosti,

$$p^{(n+1)}(x,y) = \sum_{z \in S} p(x,z)p^{(n)}(z,y).$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\varphi\left(X_{n+1}\right)\right] &= \sum_{y \in S} p^{(n+1)}(x,y)\varphi\left(y\right) \\
&= \sum_{z \in S} p(x,z)\left[\sum_{y \in S} p^{(n)}(z,y)\varphi\left(y\right)\right] \\
&= \sum_{z \in S} p(x,z)\left[P^n\varphi\left(z\right)\right] \\
&= P^{n+1}\varphi\left(x\right).
\end{aligned}$$

□

Iz dokazane Propozicije 3.2.2 sada slijedi

$$G\varphi\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\varphi\left(X_n\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(X_n\right)\right]. \tag{3.5}$$

Zamjena sume i očekivanja opravdana je Beppo Levijevim teoremom. Ova jednakost daje nam sljedeću važnu interpretaciju potencijala. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja. Pretpostavimo da je uspjeh ako se lanac nalazi u stanju $y \in S$ i da to donosi isplatu $\varphi\left(y\right)$. Tada je $G\varphi\left(x\right)$ srednja vrijednost svih isplata prikupljenih tijekom slučajne šetnje koja kreće iz stanja x.

Pokažimo slučaj kada potencijal nije konačan.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S i $\epsilon > 0$ neka konstanta. Ako je $\varphi\left(x\right) \geq \epsilon$, za sve $x \in B$, gdje je $B \subset S$ povratan skup, potencijal $G\varphi$ je beskonačan.*

Dokaz. Iz jednakosti (3.5), odnosno Propozicije 3.2.2 slijedi da je

$$G\varphi\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\varphi\left(X_n\right)\right] \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\varphi\left(X_n\right); X_n \in B\right] \geq \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(X_n \in B\right).$$

Promotrimo događaj

$$A_n = \{\text{slučajna šetnja posjeti skup } B \text{ nakon } n\text{-tog koraka}\}.$$

Kao što smo pokazali u Korolaru 1.3.3, za proizvoljan $n \in N$, $\mathbb{P}_x(A_n) = 1$ budući da je skup B povratan. Također vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in B\}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{A_n\}}.$$

Sada uzimanjem očekivanja dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n \in B) = \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \in B\}} \geq \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{A_n\}} = \infty,$$

odnosno $G\varphi(x) = \infty$. □

Izrazimo li potencijal pomoću Greenove funkcije, dobivamo

$$G\varphi(x) = \sum_{y} g(x, y)\varphi(y).$$

Na kraju 1. poglavlja pokazali smo da za velike $\|x - y\|$ vrijedi (1.13):

$$g(x, y) \sim \frac{c_l}{\|x - y\|^{l-2}}.$$

Stoga je

$$G\varphi(x) = \sum_{y} g(x, y)\varphi(y) \sim c_l \sum_{y} \frac{\varphi(y)}{\|x - y\|^{l-2}},$$

za $\|x\| \to \infty$ kada god je $\varphi(y)$ različit od nule samo za konačan broj točaka. Dakle, za velike $\|x\|$, diskretni potencijal ponaša se poput Newtonovog potencijala (3.2).

Iz Lévyjevog martingala, tj. Teorema 2.2.2 slijedi sljedeći zanimljiv rezultat za potencijale.

Propozicija 3.2.4. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S, te neka su $f : S \to \mathbb{R}$ i $\varphi : S \to [0, \infty)$ funkcije takve da je $f = G\varphi$, tj. f je potencijal funkcije φ. Ako je $B \subset S$ i $T_B = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ vrijeme prvog posjeta Markovljevog lanca X skupu B, tada je*

$$f(x) - \mathbb{E}_x[f(X_{T_B})] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{T_B - 1} \varphi(X_k)\right].$$

Ako Markovljev lanac nikada ne postjeti skup B, tj. $T_B = \infty$, uzimamo $f(X_{T_B}) = 0$.

Dokaz. Prema Teoremu 2.2.2, slučajni proces $\left(M_n^f\right)_{n\geq 0}$ definiran sa

$$M_n^f = f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} (P - I) f(X_k)$$

je martingal. Budući da je T_B vrijeme zaustavljanja, prema Doobovom teoremu o opcionalnom zaustavljanju $\mathbb{E}M_{T_B}^f = \mathbb{E}M_0^f$. Kako je $M_0^f = 0$, slijedi da je $\mathbb{E}_x\left[M_{T_B}^f\right] = 0$, za svako početno stanje $x \in S$. Pretpostavimo da Markovljev lanac kreće iz nekog stanja $x \in S$, tj. $X_0 = x$. Slijedi

$$\mathbb{E}_x\left[f(X_{T_B})\right] - f(x) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{T_B-1} (P - I) f(X_k)\right].$$

Znamo da je $A = P - I$ te je prema Poissonovoj jednakosti u diskretnom slučaju (3.3), $Af(x) = -\varphi(x)$, za sve $x \in S$. Ako uvrstimo to u jednakost dobivamo

$$\mathbb{E}_x\left[f(X_{T_B})\right] - f(x) = -\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{T_B-1} \varphi(X_k)\right].$$

□

Sljedeći je rezultat poznat pod nazivom princip dominacije.

Propozicija 3.2.5. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S te neka su $G\varphi_1$ i $G\varphi_2$ konačni potencijali nenegativnih funkcija. Ako je*

$$G\varphi_1(x) \geq G\varphi_2(x), \text{ za } x \in S \text{ t.d. je } \varphi_2(x) > 0. \tag{3.6}$$

tada je $G\varphi_1(x) \geq G\varphi_2(x)$, za sve $x \in S$.

Dokaz. Neka je $B = \{x \in S : \varphi_2(x) > 0\}$. Tada za $x \notin B$, koristeći Propoziciju 3.2.4 vrijedi

$$G\varphi_1(x) - \mathbb{E}_x\left[G\varphi_1(X_{T_B})\right] = \mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{T_B-1} \varphi_1(X_k) \geq 0,$$

jer je prema pretpostavci $\varphi_1 \geq 0$. Stoga je po (3.6)

$$G\varphi_1(x) \geq \mathbb{E}\left[G\varphi_1(X_{T_B})\right] \geq \mathbb{E}\left[G\varphi_2(X_{T_B})\right]. \tag{3.7}$$

Zbog $B^c = \{x \in S : \varphi_2(x) = 0\}$ je

$$\mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{T_B-1} \varphi_2(X_k) = 0.$$

Zato iz (3.7) i Propozicije 3.2.4 dobijemo

$$G\varphi_1(x) \geq \mathbb{E}_x\left[G\varphi_2\left(X_{T_B}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[G\varphi_2\left(X_{T_B}\right)\right] - \mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{T_B-1} G\varphi_2(X_k) = G\varphi_2(x),$$

jer je, kao gore, $G\varphi_2(X_k) = 0$, za $k < T_B$. □

Poglavlje 4

Ekscesivne funkcije

4.1 Rieszova dekompozicija

Prisjetimo se da je realna funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ superharmonijska na S ako vrijedi $Pf(x) \leq f(x)$, za sve $x \in S$, gdje je P stohastička matrica. Nenegativne superharmonijske funkcije imaju važnu ulogu u teoriji Markovljevih lanaca i zovemo ih ekscesivne funkcije.

Definicija 4.1.1. *Funkcija $f : S \to [0, \infty)$ je ekscesivna na S ako vrijedi*

$$Pf(x) \leq f(x), \ \textit{za sve } x \in S.$$

Primijetimo da je harmonijska funkcija ekscesivna ako je nenegativna. Prisjetimo se također Leme 3.2.1 iz prethodnog poglavlja. Sada možemo malo drugačije izreći tvrdnju (ii). Ona zapravo kaže da je potencijal nenegativne funkcije ekscesivna funkcija.

Sljedeći je teorem diskretni analogon poznatog Rieszovog teorema iz teorije diferencijalnih jednadžbi.

Teorem 4.1.2 (Rieszova dekompozicija)**.** *Ako je $f : S \to [0, \infty)$ ekscesivna funkcija tada postoje potencijal $g = G\varphi$ i nenegativna harmonijska funkcija h takvi da je*

$$f = G\varphi + h.$$

Također, dekompozicija je jedinstvena.

Dokaz. Budući da je $f \geq 0$ i $f \geq Pf$, nenegativnost od P povlači da je za sve $x \in S$ i za svaki $n \geq 0$,

$$P^n f(x) \geq P^{n+1} f(x) \geq 0.$$

Stoga postoji limes

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} P^n f(x).$$

Kako je $0 \leq h \leq f$ i f je P-integrablna, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji

$$Ph(x) = P\left(\lim_{n\to\infty} P^n f\right)(x) = \lim_{n\to\infty} P^n (Pf)(x) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} f(x) = h(x).$$

Dakle, h je harmonijska funkcija. Neka je

$$\varphi = f - Pf.$$

Primijetimo da je $\varphi \geq 0$, P^k-integrabilna. Također, f i Pf su P^k-integrabilne funkcije. Posebno, $P^k\varphi = P^k f - P^{k+1} f$ za sve $k \geq 0$. Slijedi

$$f - P^{n+1} f = \sum_{k=0}^{n} \left(P^k f - P^{k+1} f\right) = \sum_{k=0}^{n} P^k \varphi.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, dobivamo

$$f - h = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \varphi = G\varphi = g.$$

Ovime je pokazana egzistencija rastava. Preostaje još pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da je $f = g_1 + h_1$ neka druga dekompozicija. Imamo $P^n f = P^n g_1 + h_1$ za svaki $n \geq 0$. Prema Lemi 3.2.1 (i), $P^n g_1 \to 0$ po točkama. Stoga $P^n f \to h_1$ pa je $h_1 = h$. No, tada je i $g_1 = g$ i opet je prema Lemi 3.2.1 (i), $\varphi_1 = (I - P) g_1 = (I - P)g = \varphi$. □

4.2 Primjene Rieszove dekompozicije

Propozicija 4.2.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$. Vjerojatnost $\pi_B(x)$ da slučajna šetnja posjeti neki skup B je ekscesivna funkcija. U slučaju da je B prolazan, π_B je potencijal.*

Dokaz. Promotrimo niz događaja

$$A_n = \{\text{slučajna šetnja posjeti skup } B \text{ nakon } n\text{-tog koraka}\}.$$

Očito je $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ....$ Primijetimo također da je $\mathbb{P}(A_0) = \pi_B(x)$. Prema Propoziciji 3.2.2 iz prethodnog poglavlja te primjenom Markovljevog svojstva, slijedi da je za sve $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} p^{(n)}(x,y)\,\pi_B(y) = P^n \pi_B(x). \tag{4.1}$$

Posebno, za $n = 1$
$$P\pi_B(x) = \mathbb{P}_x(A_1) \leq \mathbb{P}_x(A_0) = \pi_B(x),$$
dakle $\pi_B(x)$ je ekscesivna funkcija.

Rieszova dekompozicija ekscesivne funkcije $\pi_B(x)$ na harmonijsku funkciju i potencijal je
$$\pi_B(x) = G\varphi_B(x) + h_B(x), \tag{4.2}$$
gdje je $h_B(x) = \lim_{n\to\infty} P^n\pi_B(x)$, i $\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x)$. Prema (4.1),
$$h_B(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(A_n) = \mathbb{P}_x\left(\bigcap_n A_n\right).$$

Dakle, $h_B(x)$ je vjerojatnost da slučajna šetnja posjeti skup B u proizvoljno udaljenim trenucima, drugim riječima, da posjeti skup B beskonačno mnogo puta. Tu smo vjerojatnost već izračunali u Propoziciji 2.1.3. Pokazali smo da vrijedi sljedeće
$$h_B(x) = \overline{\pi}_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je skup } B \text{ prolazan} \\ 1, & \text{ako je skup } B \text{ povratan} \end{cases},$$
za sve $x \in S$. Slijedi da je u slučaju prolaznog skupa B,
$$\pi_B(x) = G\varphi_B(x),$$
tj. vjerojatnost $\pi_B(x)$ je potencijal nenegativne funkcije φ_B. Prema jednakosti (4.1),
$$\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x) = \mathbb{P}_x(A_0) - \mathbb{P}_x(A_1) = \mathbb{P}_x(A_0 \backslash A_1),$$
odnosno $\varphi_B(x)$ je vjerojatnost da, krenuvši iz stanja x, u početnom trenutku se nalazimo u skupu B i uvijek napuštamo skup B u prvom koraku. Očito je ta vjerojatnost različita od 0 samo u slučaju $x \in B$. Izvan skupa B, funkcija φ_B je jednaka 0. □

Napomena 4.2.2. *Iz dekompozicije (4.2) vidimo da je $G\varphi_B(x)$ vjerojatnost da slučajna šetnja posjeti skup B pozitivan konačan broj puta. Raspisom kao gore, dobivamo*
$$P^n\varphi_B(x) = P^n\pi_B(x) - P^{n+1}\pi_B(x) = \mathbb{P}_x(A_n) - \mathbb{P}_x(A_{n+1}) = \mathbb{P}_x(A_n \backslash A_{n+1}),$$
za sve $n \geq 1$. Slijedi da raspis
$$G\varphi_B = \sum_{n=0}^{\infty} P^n\varphi_B = \mathbb{P}_x(A_0\backslash A_1) + \mathbb{P}_x(A_1\backslash A_2) + \ldots + \mathbb{P}_x(A_n\backslash A_{n+1}) + \ldots$$
odgovara rastavu vjerojatnosti da slučajna šetnja posjeti skup B pozitivan konačan broj puta, na sumu vjerojatnosti da šetnja posjeti skup B zadnji puta u n-tom koraku.

Propozicija 4.2.1 može se poopćiti na ireducibilne i prolazne Markovljeve lance. Slučaj prolaznog Markovljevog lanca zanmljiviji je od slučaja povratnog Markovljevog lanca, budući da je u drugom slučaju $\pi_B(x) = 1$, dok je u prvom slučaju, kao u Propoziciji 4.2.1, vjerojatnost $\mathbb{P}_x(T_B < \infty)$ potencijal.

Teorem 4.2.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac sa skupom stanja S. Vjerojatnost da Markovljev lanac posjeti neki konačni skup $B \subset S$ je potencijal:*

$$\mathbb{P}_x(T_B < \infty) = \pi_B(x) = G\varphi_B(x),\ x \in S$$

gdje je $\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x)$. Također, nosač funkcije $\operatorname{supp} \varphi_B$ *sadržan je u skupu B.*

Dokaz. Analogno dokazu Propozicije 4.2.1. Međutim, nije odmah jasno da je harmonijska funkcija iz Rieszove dekompozicije funkcije π_B, $h_B(x) = 0$. Ako pratimo dokaz Propozicije 4.2.1, to slijedi iz Propozicije 2.1.3, čije je poopćenje Propozicija 2.2.6, no ona je pokazana za slučaj ireducibilnog i povratnog Markovljevog lanca. Ovdje se radi o prolaznom Markovljevom lancu, no $h_B(x) = 0$ zaista, što ćemo sada pokazati.

Neka je $x \in S$. Označimo sa N_y broj posjeta Markovljevog lanca X stanju y. Vjerojatnost da X krenuvši iz stanja x posjeti stanje y beskonačno mnogo puta jednaka je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N_y = \infty) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(N_y \geq n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(T^{(n)}_{\{y\}} < \infty) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(T^{(n)}_{\{y\}} < \infty | T_{\{y\}} < \infty)\mathbb{P}_x(T_{\{y\}} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(T_{\{y\}} < \infty) \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_y(T^{(n-1)}_{\{y\}} < \infty).
\end{aligned}$$

Zadnji limes jednak je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_y(T^{(n-1)}_{\{y\}} < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_y(T_{\{y\}} < \infty)^{n-1} = 0,$$

budući da je $\mathbb{P}_y(T_{\{y\}} < \infty) < 1$.

Dakle, dobili smo $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 0$. Zbog konačnosti skupa B je

$$\mathbb{P}_x(X \text{ posjeti } B \text{ beskonačno mnogo puta}) \leq \sum_{y\in B} \mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 0.$$

Ovime smo pokazali da je $h_B(x) = 0$, za sve $x \in S$.

□

Sljedeći korolar pokazuje nam još jedan zanimljiv rezultat vezan za potencijale i harmonijske, odnosno ekscesivne funkcije.

Korolar 4.2.4. *(i) Neka je g nenegativan potencijal. Jedina nenegativna harmonijska funkcija h takva da je $g \geq h$ je $h \equiv 0$.*
(ii) Neka je f ekscesivna funkcija i $g = G\varphi$ tako da vrijedi $g \geq f$. Tada je f potencijal nenegativne funkcije.

Dokaz. (i) Prema Lemi 3.2.1 (i) imamo

$$h = Ph \leq P^n g \to 0$$

po točkama, kada $n \to \infty$.
(ii) Neka je

$$f = G\varphi_1 + h_1$$

Rieszova dekompozicija ekscesivne funkcije f, gdje je h_1 nenegativna harmonijska funkcija i $\varphi_1 \geq 0$. Tada je $h_1 \leq f \leq g$, i prema dijelu (i) Korolara, $h_1 \equiv 0$. □

Korolar nam zapravo kaže sljedeće:
(i) Jedina nenegativna harmonijska funkcija dominirana potencijalom je nul-funkcija.
(ii) Ekscesivna funkcija dominirana potencijalom je i sama potencijal.

Poglavlje 5

Kapacitet

5.1 Kapacitet Markovljevih lanaca

Newtonov potencijal je usko povezan s pojmom kapaciteta. U elektrostatici, pojam kapaciteta nekog tijela B definira se na sljedeći način. Promotrimo sve distribucije φ pozitivnog naboja tijela B, čiji potencijali u bilo kojoj točki prostora nisu veći od jedan. Dokazano je da postoji maksimum takvih potencijala. To je *ravnotežni potencijal*, dok je pripadajuća distribucija naboja *ravnotežna distribucija* φ. Ukupni naboj

$$\mathrm{Cap}\,(B) = \int_B \varphi\,(y)\,dy$$

ravnotežne distribucije φ naziva se kapacitet tijela B. Kapacitet je jedan od navažnijih pojmova u teoriji Laplaceove jednadžbe.

Pri proučavanju kapaciteta, promatramo samo ireducibilne i prolazne Markovljeve lance, budući da je za njih definiran potencijal. Za povratne Markovljeve lance ne definiramo kapacitet.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja S i $B \subset S$ konačan. Označimo sa G pripadni potencijalni operator. Definiramo klasu K_B svih nenegativnih funkcija φ takvih da je nosač funkcije sadržan u skupu B i $G\varphi \leq 1$, tj.

$$K_B = \{\varphi : S \to [0,\infty) : \varphi\,(x) = 0,\ x \notin B \text{ i } G\varphi\,(x) \leq 1,\ x \in S\}\,. \tag{5.1}$$

Za funkciju $f = G\varphi$, gdje je $\varphi \in K_B$, prema Propoziciji 3.2.4 vrijedi

$$f\,(x) = \mathbb{E}_x\left[f\,(X_{T_B})\right],$$

gdje je, prisjetimo se, T_B vrijeme prvog posjeta Markovljevog lanca skupu B. Kako je prema pretpostavci $f \leq 1$ slijedi

$$\mathbb{E}_x \left[f \left(X_{T_B} \right) \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{T_B < \infty\}} \right] = \mathbb{P}_x \left(T_B < \infty \right) = \pi_B \left(x \right),$$

odnosno

$$f \left(x \right) \leq \pi_B \left(x \right), \text{ za sve } x \in S.$$

Kako je skup B konačan, time i prolazan, prema Teoremu 4.2.3, $\pi_B (x) = G\varphi_B (x)$, gdje je $\varphi_B (x) = \pi_B (x) - P\pi_B (x) \in K_B$. Sada je jasno zašto se π_B naziva *ravnotežni potencijal*, a φ_B *ravnotežna distribucija*.

Definicija 5.1.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac na skupu stanja S i $B \subset S$ konačan. Također, neka je $\varphi_B (x) = \pi_B (x) - P\pi_B (x) \in K_B$ ravnotežna distribucija, $\pi_B (x)$ ravnotežni potencijal, za sve $x \in S$. Kapacitet skupa B definiran je formulom*

$$\operatorname{Cap} (B) = \sum_{y \in B} \varphi_B (y).$$

Sljedeći je teorem diskretni analogon Gaussovog teorema iz teorije Newtonovog potencijala.

Teorem 5.1.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan simetričan Markovljev lanac na skupu stanja S i $B \subset S$ konačan. Tada vrijedi*

$$\operatorname{Cap} (B) = \sup \left\{ \sum_{y \in S} \varphi (y) : \operatorname{supp} \varphi \subseteq B, G\varphi (x) \leq 1, \text{ za sve } x \in S \right\}.$$

Suma $\sum_{y \in S} \varphi (y)$ naziva se ukupan naboj odgovarajuće distribucije φ.

Dokaz. Primijetimo da teorem kaže da je je kapacitet skupa B zapravo supremum ukupnog naboja odgovarajuće distribucije φ po svim funkcijama skupa K_B definiranog s (5.1). Uvedimo oznaku

$$(f_1, f_2) = \sum_{y \in S} f_1 (y) f_2 (y).$$

Zbog simetričnosti je $p (x, y) = p (y, x)$, no onda je $p^{(n)} (x, y) = p^{(n)} (y, x)$, za sve $n \in \mathbb{N}$ te je stoga i

$$g (x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} (x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} (y, x) = g (y, x).$$

Konačno, vrijedi

$$\begin{aligned}(Gf_1, f_2) &= \sum_{y\in S} Gf_1(y) f_2(y) \\ &= \sum_{y\in S}\sum_{z\in S} g(y,z) f_1(z) f_2(y) \\ &= \sum_{z\in S}\sum_{y\in S} f_1(z) g(z,y) f_2(y) \\ &= \sum_{z\in S} f_1(z) Gf_2(z) \\ &= (f_1, Gf_2).\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $\pi_B(x) = 1$, za $x \in B$ i $G\varphi \leq 1$, za $\varphi \in K_B$, slijedi da je

$$\sum_{y\in B} \varphi(y) = (\varphi, \pi_B) = (\varphi, G\varphi_B) = (G\varphi, \varphi_B) \leq (1, \varphi_B) = \mathrm{Cap}(B).$$

□

Teorem 5.1.2 nam zapravo kaže da kapacitet prolaznog skupa možemo definirati kao supremum ukupnog naboja koncentriranog u istom skupu, a čiji potencijal nije veći od 1.

Propozicija 5.1.3. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac na skupu stanja S. Ako su $A, B \subset S$ konačni takvi da je $A \subset B$, tada je*

$$\mathrm{Cap}(A) \leq \mathrm{Cap}(B)$$

.

Dokaz. Ako je funkcija $\varphi \geq 0$ takva da je $\mathrm{supp}\,\varphi \subset A$ i $G\varphi(x) \leq 1$, za sve $x \in S$, onda je specijalno i $\mathrm{supp}\,\varphi \subset B$. Prema Teoremu 5.1.2 slijedi da je

$$\sum_{y\in S} \varphi(y) \leq \mathrm{Cap}(B).$$

Uzimanjem supremuma dobivamo

$$\sup\left\{\sum_{y\in S}\varphi(y) : \mathrm{supp}\,\varphi \subset A, G\varphi(x) \leq 1,\ \text{za sve } x \in S\right\} \leq \mathrm{Cap}(B),$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Kapacitet ima svojstvo subaditivnosti.

Propozicija 5.1.4. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac na skupu stanja S te $A, B \subset S$. Vrijedi*

$$\mathrm{Cap}\,(A \cup B) \leq \mathrm{Cap}\,(A) + \mathrm{Cap}\,(B)\,.$$

Dokaz. Neka je funkcija φ takva da je $\mathrm{supp}\,\varphi \subset A \cup B$ i $G\varphi\,(x) \leq 1$, za sve $x \in S$. Prisjetimo li se oznake (5.1), vrijedi zapravo $\varphi \in K_{A\cup B}$. Definiramo funkcije

$$\varphi_A\,(x) = \begin{cases} \varphi\,(x) & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases},$$

te analogno

$$\varphi_B\,(x) = \begin{cases} \varphi\,(x) & , x \in B \\ 0 & , x \notin B \end{cases}.$$

Tada je $G\varphi_A, G\varphi_B \leq G\varphi \leq 1$ na skupu stanja S te zbog $\mathrm{supp}\,\varphi \subset A \cup B$ vrijedi

$$\sum_{y\in S} \varphi\,(y) \leq \sum_{y\in S} \varphi_A\,(y) + \sum_{y\in S} \varphi_B\,(y) \leq \mathrm{Cap}\,(A) + \mathrm{Cap}\,(B)\,.$$

Uzimanjem supremuma po takvim funkcijama φ odnosno po skupu $K_{A\cup B}$ te primjenom Teorema 5.1 slijedi tvrdnja propozicije. □

Izračunajmo sada kapacitet jednočlanog skupa.

Primjer 5.1.5. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i prolazan Markovljev lanac na skupu stanja S. Kapacitet stanja $x \in S$ jednak je*

$$\mathrm{Cap}\,(\{x\}) = \frac{1}{g\,(x,x)}.$$

Prema Teoremu 5.1.2 vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}\,(\{x\}) &= \sup\left\{\varphi\,(x) : \varphi\,(y) = 0,\ za\ y \neq x,\ \sum_{z\in S} g\,(y,z)\,\varphi\,(z) \leq 1,\ za\ y \in S\right\} \\ &= \sup\{\varphi\,(x) : g\,(x,x)\,\varphi\,(x) \leq 1\} \\ &= \frac{1}{g\,(x,x)}. \end{aligned}$$

5.2 Kapacitet i jednostavne slučajne šetnje

Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$, možemo promatrati samo prolazne skupove $B \subset S$ i pojam kapaciteta je dobro definiran te vrijede svi dokazani rezultati. Naime, u tom slučaju je π_B uvijek potencijal. Dodatno, za simetričnu slučajnu šetnju vrijede još neki zanimljivi primjeri vezano uz kapacitet koje navodimo u ovom poglavlju.

Neka je $B \subset \mathbb{Z}^l$. Definirajmo rub skupa B s

$$\partial B = \{z \in B^{\mathsf{c}} : \text{ postoji } e_k \text{ takav da je } z + e_k \in B \text{ ili } z - e_k \in B\},$$

gdje $(e_1, e_2, ..., e_l)$ označava standardnu bazu u $\mathbb{Z}^l$. Radi se zapravo o sljedećem. Ako slučajna šetnja koja radi korake samo veličine 1 izlazi iz skupa B, mora to napraviti tako da prođe kroz rub skupa. Općenito, ovo neće biti slučaj za sve Markovljeve lance. Dovoljno je samo pogledati slučajnu šetnju koja radi korake veličine barem 2. Takav Markovljev lanac može "preskočiti" rub.

Propozicija 5.2.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$ i $B \subset \mathbb{Z}^l$ prolazan. Nosač ravnotežne funkcije skupa $B \cup \partial B$ sadržan je u skupu ∂B, tj.*

$$\operatorname{supp} \varphi_{B\cup\partial B} \subset \partial B.$$

Dokaz. Neka je $\varphi_{B\cup\partial B}$ ravnotežna distribucija skupa $B \cup \partial B$. Zbog pretpostavke o prolaznosti skupa $B \cup \partial B$, slijedi da je $\pi_{B\cup\partial B} = G\varphi_{B\cup\partial B}$ pa je

$$\varphi_{B\cup\partial B} = \pi_{B\cup\partial B} - P\pi_{B\cup\partial B}.$$

Tada koristeći Markovljevo svojstvo, za $x \in B$ vrijedi

$$\varphi_{B\cup\partial B}(x) = \mathbb{P}_x\left(T_{B\cup\partial B} < \infty\right) - \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{X_1}\left(T_{B\cup\partial B} < \infty\right)\right] = 1 - 1 = 0,$$

budući da je $X_1 \in B \cup \partial B$ ako je $X_0 \in B$, po definiciji ruba skupa B. Time smo dobili da je $\operatorname{supp} \varphi_{B\cup\partial B} \subset \partial B$. □

Propozicija 5.2.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$ i $B \subset \mathbb{Z}^l$ prolazan. Ravnotežne distribucije skupova $B \cup \partial B$ i ∂B su jednake i, posebno,*

$$\operatorname{Cap}(B \cup \partial B) = \operatorname{Cap}(\partial B).$$

Dokaz. Kako je prema Propoziciji 5.2.1 nosač funkcije $\varphi_{B\cup\partial B}$ sadržan u skupu ∂B, pokazat ćemo da je $\varphi_{B\cup\partial B} = \varphi_{\partial B}$ na skupu ∂B. Neka je $x \in \partial B$. Prema formuli potpune vjerojatnosti

$$\begin{aligned}\varphi_{\partial B}(x) &= \mathbb{P}_x(T_{\partial B} < \infty) - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty)] \\ &= 1 - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in B] - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in B^{\mathsf{c}}\backslash\partial B] \\ &- \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in \partial B].\end{aligned}$$

Očekivanje $\mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in B] = \mathbb{P}_x(X_1 \in B)$ zbog prolaznosti skupa B. Nadalje, $\mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in B^c \backslash \partial B] = \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in B^c \backslash \partial B]$ po definiciji skupa ∂B. I zadnje očekivanje $\mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{\partial B} < \infty), X_1 \in \partial B] = \mathbb{P}_x(X_1 \in \partial B)$, što je jasno. Konačno, dobili smo

$$\varphi_{\partial B}(x) = 1 - \mathbb{P}_x(X_1 \in B) - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in B^c \backslash \partial B] - \mathbb{P}_x(X_1 \in \partial B).$$

S druge strane

$$\begin{aligned}
\varphi_{B\cup\partial B}(x) &= \mathbb{P}_x(T_{B\cup\partial B} < \infty) - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty)] \\
&= 1 - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in B] - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in B^c \backslash \partial B] \\
&- \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in \partial B] \\
&= 1 - \mathbb{P}_x(X_1 \in B) - \mathbb{E}_x[\mathbb{P}_{X_1}(T_{B\cup\partial B} < \infty), X_1 \in B^c \backslash \partial B] - \mathbb{P}_x(X_1 \in \partial B).
\end{aligned}$$

Dakle, $\varphi_{B\cup\partial B}(x) = \varphi_{\partial B}(x)$ za sve $x \in \partial B$, pa jednakost vrijedi i na cijelom skupu $\mathbb{Z}^l$.

Drugi dio tvrdnje sada je trivijalan:

$$\mathrm{Cap}\,(B \cup \partial B) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} \varphi_{B\cup\partial B}\,(y) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} \varphi_{\partial B} = \mathrm{Cap}\,(\partial B)\,.$$

□

5.3 Kriterij povratnosti

U ovoj sekciji promatramo jednostavnu slučajnu šetnju na skupu $\mathbb{Z}^l$ i dajemo nužan i dovoljan uvjet za povratnost skupa $B \subset \mathbb{Z}^l$. Uvjet je formuliran u terminima kapaciteta te je u svojoj suštini analogon Wienerovog kriterija za regularnost rubnih točaka u teoriji diferencijalnih jednadžbi. Konkretno, pokazat ćemo da je kriterij zadovoljen u slučaju jednostavne slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^3$. Poopćenje na slučaj za $l > 3$ nije tako jednostavno pokazati.

Budući da je ograničen skup prolazan, povratnost skupa B ne ovisi o strukturi B unutar određene kugle. Pokazuje se da povratnost skupa B ovisi o tome koliko brzo se smanjuje broj točaka skupa B unutar kugle kako raste radijus.

Promotrimo niz rastućih kugli sa središtem u ishodištu te radijusima $r = 1, 2, 2^2, ..., 2^k, ...$ Označimo sa B_k podskup skupa B koji je upao između k-te i $(k + 1)$-e sfere. Preciznije, definiramo

$$B_0 := \{x \in B : 0 \le \|x\| \le 1\}\,,$$

te za $k = 1, 2, ...$

$$B_k := \left\{ x \in B : 2^{k-1} < \|x\| \leq 2^k \right\},$$

gdje $\|x\|$ označava Euklidsku normu. Skup B_k je konačan za sve $k = 0, 1, 2...$ te je stoga dobro definiran kapacitet $\mathrm{Cap}(B_k)$.

Za dokaz teorema o kriteriju povratnosti biti će nam potreban sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 5.3.1. *Ako red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Cap}\,(B_k)}{2^k} \tag{5.2}$$

konvergira, tada konvergira i red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{B_k}(0)\,. \tag{5.3}$$

Dokaz. Za dokaz koristimo asimptotsku ocjenu (1.13):

$$g(x, y) \sim \frac{Q}{\|x - y\|},\ \text{za } \|x - y\| \to \infty,$$

gdje je $Q = c_3$. Postoji, dakle, $N > 0$ tako da za sve $y \in B_k$, za $k > N$ vrijedi

$$g(0, y) \leq \frac{2Q}{\|y\|}. \tag{5.4}$$

Kako je $\pi_{B_k}(x)$ ravnotežni potencijal skupa B_k, imamo

$$\pi_{B_k}(0) = G\varphi_{B_k}(0) = \sum_{y \in B} g(0, y)\, \varphi_{B_k}(y)\,,$$

gdje je φ_{B_k} ravnotežna distribucija skupa B_k. Vrijedi sljedeća ocjena:

$$\pi_{B_k}(0) \leq \sum_{y \in B_k} \frac{2Q\varphi_{B_k}(y)}{\|y\|} \leq \frac{Q}{2^{k-2}} \sum_{y \in B_k} \varphi_{B_k}(y) = 4Q \frac{\mathrm{Cap}\,(B_k)}{2^k},$$

gdje prva nejednakost slijedi iz ocjene (5.4), druga nejednakost iz činjenice da je $\|y\| > 2^{k-1}$ za $y \in B_k$ te zadnja jednakost iz činjenice da je $\varphi_{B_k}(z) = 0$, za $z \notin B_k$. Dakle, red (5.3) dominiran je redom (5.2), korigiranom za konstantu, te stoga konvergira. □

Konačno, dajemo i kriterij prolaznosti.

Teorem 5.3.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^3$ i $B \subset \mathbb{Z}^3$. Skup B je povratan ako i samo ako red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Cap}(B_k)}{2^k}$$

divergira.

Dokaz. Prvo pokazujemo nužnost. Pretpostavimo suprotno, da red konvergira. Pokazat ćemo da je tada skup B prolazan.
Događaj

$$\left\{ \text{Slučajna šetnja posjeti skup } \overline{B}_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \right\}$$

sadrži uniju događaja

$$\{\text{Slučajna šetnja posjeti skup } B_k\}\,, \text{ za } k = n, n+1, ...$$

Stoga vrijedi

$$\pi_{\overline{B}_n}(0) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \pi_{B_k}(0)\,.$$

Za dovoljno velik n dobivamo

$$\pi_{\overline{B}_n}(0) < 1,$$

dakle skup $\overline{B} := \overline{B}_n$ je prolazan. Kako se skup $\overline{\overline{B}} = B \backslash \overline{B}$ nalazi unutar kugle radijusa 2^n, konačan je te također prolazan. Stoga preostaje dokazati da je unija prolaznih skupova opet prolazan skup.

Prisjetimo se u tu svrhu definicije povratnosti slučajne šetnje koju smo pokazali u Propoziciji 2.1.3. Prema dokazanome, skup je prolazan ako slučajna šetnja posjeti skup konačan broj puta s vjerojatnosti 1. Presjek događaja vjerojatnosti 1 je i sam siguran događaj. To u našem slučaju daje da slučajna šetnja s vjerojatnosti 1 posjeti skup $\overline{B}$ i $\overline{\overline{B}}$ konačan broj puta. Isto, dakle, vrijedi i za njihovu uniju $B = \overline{B} \cup \overline{\overline{B}}$. Slijedi da je skup B prolazan.

Drugi smjer nije tako jednostavno dokazati. Pretpostavimo da red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Cap}(B_k)}{2^k} \tag{5.5}$$

divergira. Podijelimo ga u 4 reda, tako da su u svakom podredu članovi s indeksima koji pri dijeljenju s 4 daju jednaki ostatak. Barem jedan od ova 4 podreda divergira. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}} \tag{5.6}$$

divergira. Označimo sa

$$S_k = \left\{ y \in \mathbb{Z}^3 : 2^{4k-2} \leq \|y\| \leq 2^{4k-2} + 1 \right\}.$$

Slijedi da je B_{4k} sadržan između S_k i S_{k+1}, no znatno bliže S_k.

Budući da se slučajna šetnja u svakom koraku pomakne smo za jedno mjesto na rešetki $\mathbb{Z}^3$, udaljenost šetnje od ishodišta u prvom koraku ne mijenja se za više od jedne jedinice. Dakle, slučajna šetnja ne može preskočiti razinu S_k bez da ju posjeti. Kako slučajna šetnja teži u beskonačnost s vjerojatnosti 1, ona prođe kroz sve razine S_k s vjerojatnosti 1, koje se nalaze oko početnog stanja x.
Promotrimo događaj

$$A_k = \{\text{Slučajna šetnja posjeti } B_{4k} \text{ između vremena prvog posjeta skupu } S_k \text{ i skupu } S_{k+1}\}.$$

U sljedećoj lemi dokazujemo pomoćni rezultat koji nam je potreban za nastavak dokaza teorema.

Lema 5.3.3. *Za dovoljno velike k vrijedi*

$$\mathbb{P}_y(A_k) \geq Q_1 \frac{\text{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}, \ \textit{za } y \in S_k, \tag{5.7}$$

gdje $Q_1 > 0$ *ne ovisi o y niti o k.*

Dokaz. Ako slučajna šetnja, pri napuštanju stanja $y \in S_k$, posjeti skup B_{4k}, moguća su dva ishoda:

$$A_k = \{\text{Slučajna šetnja posjeti } B_{4k} \text{ između vremena prvog posjeta skupu } S_k \text{ i skupu } S_{k+1}\}$$

ili

$$D_k = \{\text{Slučajna šetnja posjeti } B_{4k} \text{ nakon što posjeti } S_{k+1}\}.$$

Zbog subaditivnosti vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\pi_{B_{4k}}(y) \leq \mathbb{P}_y(A_k) + \mathbb{P}_y(D_k).$$

Promotrimo vjerojatnost $\mathbb{P}_y(D_k)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y(D_k) &= \mathbb{P}_y(T_{S_{k+1}} < T_{B_{4k}} < \infty) \\
&= \sum_{z \in S_{k+1}} \mathbb{P}_y(X_{T_{S_{k+1}}} = z, T_{S_{k+1}} < T_{B_{4k}} < \infty) \\
&= \sum_{z \in S_{k+1}} \mathbb{P}_z(T_{B_{4k}} < \infty)\mathbb{P}_y(X_{T_{S_{k+1}}} = z) \\
&\leq \max_{z \in S_{k+1}} \mathbb{P}_z(T_{B_{4k}} < \infty) \sum_{z \in S_{k+1}} \mathbb{P}_y(X_{T_{S_{k+1}}} = z) \\
&= \max_{z \in S_{k+1}} \mathbb{P}_z(T_{B_{4k}} < \infty),
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi iz jakog Markovljevog svojstva. Sada imamo sljedeću ocjenu za vjerojatnost $\mathbb{P}_y(A_k)$:

$$\mathbb{P}_y(A_k) \geq \pi_{B_{4k}}(y) - \max_{z \in S_{k+1}}\{\pi_{B_{4k}}(z)\}. \tag{5.8}$$

Preostaje još samo ocijeniti funkciju $\pi_{B_{4k}}$. To je potencijal ravnotežne distribucije $\varphi_{B_{4k}}$, a $\varphi_{B_{4k}}(x) = 0$, za $x \notin B_{4k}$. Ukupni naboj ravnotežne distribucije jednak je kapacitetu $\mathrm{Cap}(B_{4k})$. Iz nejednakosti (5.8) sada slijedi da je za $y \in S_k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y(A_k) &\geq \sum_{u \in \mathbb{Z}^3} g(y,u)\varphi_{B_{4k}}(u) - \max_{z \in S_{k+1}} \sum_{u \in \mathbb{Z}^3} g(z,u)\varphi_{B_{4k}}(u) \\
&\geq \mathrm{Cap}(B_{4k}) \left[\min_{\substack{y \in S_k \\ u \in B_{4k}}} g(y,u) - \max_{\substack{z \in S_{k+1} \\ u \in B_{4k}}} g(z,u) \right].
\end{aligned}$$

Primjenimo li opet ocjenu (1.13) kao u Lemi 5.3.1, vidimo da za dovoljno velike k i $y \in S_k$

$$\mathbb{P}_y(A_k) \geq \mathrm{Cap}(B_{4k}) \left(\frac{5Q}{6r_k} - \frac{7Q}{6R_k} \right),$$

gdje je

$$r_k = \max_{\substack{y \in S_k \\ u \in B_{4k}}} \|y-u\| \text{ i } R_k = \min_{\substack{z \in S_{k+1} \\ u \in B_{4k}}} \|z-u\|.$$

Iz relativnog odnosa položaja skupova S_k, B_k i S_{k+1} slijedi

$$\begin{aligned}
r_k &\leq 2^{4k-2} + 1 + 2^{4k} \leq 2 \cdot 2^{4k}, \\
R_k &\geq 2^{4k+2} - 2^{4k} = 3 \cdot 2^{4k}.
\end{aligned}$$

Stoga za dovoljno veliki k vrijedi

$$\mathbb{P}_y(A_k) \geq \frac{Q}{36} \frac{\mathrm{Cap}(B_{4k})}{2^{4k}}, \ y \in S_k.$$

□

Nakon što smo pokazali da vrijedi nejednakost (5.7), povratnost skupa B nije više teško dokazati. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in S_m$ te je nejednakost (5.7) zadovoljena za sve $k \geq m$. Označimo sa

$$\tau_k = \min\{n \geq 0 : X_n \in S_k\}$$

vrijeme prvog posjeta slučajne šetnje skupu S_k. Iz Leme 5.3.3 slijedi da je, neovisno o tome kada se τ_k dogodilo i stanju u kojem se šetnja tada nalazi, X_{τ_k}, te kretanju slučajne šetnje prije vremena τ_k, ocjena vjerojatnosti događaja A^{c} jednaka je

$$\mathbb{P}_y(A^{\mathrm{c}}) = \mathbb{P}_y\left(X_n \notin B_k \text{ za } \tau_k \leq n \leq \tau_{k+1}\right) \leq 1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}},$$

pa za $m, l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{P}_x\left(X_n \notin B_k \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l}\right) \leq \prod_{k=m}^{m+l} \left(1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}\right).$$

Zaista, koristeći jako Markovljevo svojstvo,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left(X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l+1}\right)\\
=&\mathbb{P}_x\left(X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l}, X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_{m+l} \leq n \leq \tau_{m+l+1}\right)\\
=&\sum_{y \in S_{m+l}} \mathbb{P}_x\left(X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_{m+l} \leq n \leq \tau_{m+l+1} | X_{\tau_{m+l}} = y, X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l}\right) \cdot\\
&\cdot \mathbb{P}_x(X_{\tau_{m+l}} = y, X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l})\\
=&\sum_{y \in S_{m+l}} \mathbb{P}_y\left(X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_{m+l} \leq n \leq \tau_{m+l+1}\right) \mathbb{P}_x\left(X_{\tau_{m+l}} = y, X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l}\right)\\
\leq&\left(1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}\right) \sum_{y \in S_{m+l}} \mathbb{P}_x\left(X_{\tau_{m+l}} = y, X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_m \leq n \leq \tau_{m+l}\right)\\
=&\left(1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}\right) \mathbb{P}_x\left(X_n \notin B_{4k} \text{ za } \tau_{m+} \leq n \leq \tau_{m+l}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja slijedi indukcijom.

Nadalje, želimo izračunati

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(X \text{ posjeti } B \text{ beskonačno mnogo puta }) &\geq \mathbb{P}_x(A_m \cup A_{m+1} \cup ... \cup A_{m+l} \cup ...)\\
&= 1 - \lim_{l \to \infty} \mathbb{P}_x(A_m^{\mathrm{c}} \cap ... \cap A_{m+l}^{\mathrm{c}}).
\end{aligned}$$

Računamo,

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_x(A_m^{\mathsf{c}} \cap ... \cap A_{m+l}^{\mathsf{c}}) &\leq \ln \prod_{k=m}^{m+l} \left(1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}\right) \\ &= \sum_{k=m}^{m+l} \ln \left(1 - Q_1 \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}}\right) \\ &\leq -Q_1 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\mathrm{Cap}\,(B_{4k})}{2^{4k}} \to -\infty \text{ kada } l \to \infty,\end{aligned}$$

jer je $\ln(1 - x) \leq -x$, pa je stoga $\lim_{l\to\infty} \mathbb{P}_x(A_m^{\mathsf{c}} \cap ... \cap A_{m+l}^{\mathsf{c}}) = 0$, odakle slijedi

$$\mathbb{P}_x(X \text{ posjeti } B \text{ beskonačno mnogo puta}) = 1$$

i skup B je povratan.

$\square$

Bibliografija

[1] P. Brémaud, *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] E. B. Dynkin, A. A. Juschkewitsch, *Markov Processes: Theorems and Problems*, Plenum Press, New York, 1969.

[3] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci: skripta s predavanja*, Zagreb, 2009, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml13-predavanja.html`, (rujan 2014.)

[4] Z. Vondraček, *Slučajni procesi: skripta s predavanja*, Zagreb, 2010, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`, (rujan 2014.)

[5] W. Woess, *Denumerable Markov Chains: Generating Functions, Boundary Theory, Random Walks on Trees*, European Mathematical Society, Zürich, 2009.

Sažetak

U radu smo stavili poznate pojmove iz klasične teorije potencijala u kontekst teorije Markovljevih lanaca. Kroz cijeli rad, glavni primjer Markovljevog lanca je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^l$, za $l \geq 1$. Pri proučavanju svojstava, pa i pri samoj definiciji određenih pojmova, često nam je bitno da li se radi o povratnom ili prolaznom Markovljevom lancu. Konkretno, za slučajnu šetnju smo pokazali da je povratna ako je l jednak 1 ili 2, dok je za $l \geq 3$ prolazna.

Harmonijske funkcije igraju važnu ulogu u teoriji Markovljevih lanaca te su nužne za definiranje ostalih analogona iz klasične teorije potencijala. One su usko povezane sa diskretnom teorijom martingala. Ako je X Markovljev lanac, pokazujemo da je funkcija f harmonijska ako i samo ako je $f(X)$ martingal. Nenegativne superharmonijske funkcije, malo šira klasa funkcija od harmonijskih, nazivamo ekscesivne funkcije. Rieszova dekompozicija daje nam egzistenciju i jedinstvenost rastava ekscesivne funkcije na zbroj potencijala i nenegativne harmonijske funkcije. Pokazuje se da je vjerojatnost da Markovljev lanac posjeti neki skup B, a koja ovisi o početnom stanju, ekscesivna funkcija. Posebno je, u slučaju prolaznog i ireducibilnog Markovljevog lanca, harmonijska funkcija iz Rieszove dekompozicije navedene vjerojatnosti jednaka 0, pa se zapravo radi o potencijalu. Kapacitet je definiran za prolazne Markovljeve lance, budući da je za njih definiran potencijal. No, svi rezultati vezani uz kapacitet za prolazne Markovljeve lance, vrijede i za povratnu i prolaznu sučajnu šetnju. Dovoljno je samo gledati prolazne skupove. Na kraju rada, dali smo važnu primjenu kapaciteta u teoriji Markovljevih lanaca. Kriterij povratnosti skupa za slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^3$ dan je pomoću kapaciteta i predstavlja diskretni analogon Wienerovog kriterija.

Summary

In this thesis we have set some terms of classical potential theory into context of Markov chains. As the basic example of Markov chain in this thesis, we use the simple symmetric random walk on the l-dimensional lattice $\mathbb{Z}^l$, for $l \geq 1$. In the study of properties and definitions of certain terms, it is important whether we talk about recurrent or transient Markov chains. We have shown that symmetric random walk is recurrent if l is 1 or 2, while it is transient for $l \geq 3$.

Harmonic functions play an important role in the theory of Markov chains and are necessary for defining other classical potential theory analogs. They are strongly connected with discrete martingale theory. Considering Markov chain X, f is harmonic if and only if $f(X)$ is martingale. Superharmonic functions make broader class of functions than harmonic. Nonnegative superharmonic functions are called excessive functions. Riesz decomposition gives us existence and uniqueness of an excessive function decomposition into a sum of a potential and a nonnegative harmonic function. It turns out that probability of visiting some set B by a Markov chain, depending on initial state, is an excessive function. In particular, in case of an irredicible and transient Markov chain, harmonic function from Riesz decomposition of mentioned probability equals zero, so we actually talk about potential. Capacity is defined for transient Markov chains, since the potential is well-defined in this case. Regardless, all results for capacity in the case of transient Markov chains can be applied for transient as well as recurrent random walks. We only have to consider transient sets. In the end of this thesis, we give an important application of capacity in the theory of Markov chains. Recurrence criteiron of a set for the simple symmetric random walk on $\mathbb{Z}^3$ is given in terms of capacity and represents a discrete counterpart of the Wiener criterion.

Životopis

Rođena sam 15.10.1990. godine u Zagrebu, gdje se i obrazujem. Nakon završene osnovne škole, 2005. godine upisujem prirodoslovno-matematičku Petu gimnaziju, koju pohađam jednu godinu. Svoje srednjoškolsko obrazovanje nastavljam 2006. godine upisom u drugi razred prirodoslovno-matematičke gimnazije Lucijana Vranjanina. Maturirala sam 2009. godine te iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Zvršetkom istog studija 2012. godine stječem titulu sveučilišni prvostupnik matematike te upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.