SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Branimir Stojanović

RIEMANNOV TENZOR ZAKRIVLJENOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dragutin Svrtan

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Tema ovog diplomskog rada je Riemannov tenzor zakrivljenosti. To je fundamentalni pojam Riemannove geometrije.

Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826. - 1866.) bio je njemački matematičar koji je dao revolucionarne i trajne doprinose analizi, teoriji brojeva i diferencijalnoj geometriji. Riemannova ideja je svakoj točki prostora pridružiti kolekciju brojeva koji bi opisivali koliko je ona izkrivljena. To je velika značajka njegove geometriji poznatija kao Riemannova metrika.

Rad je podijeljen na dva dijela. U prvom poglavlju se pokazuje kako izgleda Riemannov tenzor zakrivljenosti za regularne plohe iz $\mathbb{R}^3$. Prvo poglavlje, "Regularne plohe u $\mathbb{R}^3$", podjeljeno je na podpoglavlja : Regularne plohe, Unutarnja geometrija ploha (Izometrije, Vektorska polja i kovarijantne derivacije) , Riemannov tenzor.

U drugom poglavlju, naslovljenom kao "Definicija Riemannovog tenzora na mnogostrukostima", proučen je pojam diferencijabilnih mnogostrukosti zatim Riemannova metrika i tenzor zakrivljenosti. Poglavlje je podijeljeno na podpoglavlja : Abstraktne mnogostrukosti , Tangencijalni svežnjevi , Vektorska polja , Tenzorski svežnjevi , Riemannova metrika , Tenzor zakrivljenosti .

Poglavlje 1

Regularne plohe u $\mathbb{R}^3$

1.1 Regularne plohe

Osnovne definicije

Definicija 1.1.1. *Za podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je* ***regularna ploha*** *ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina V oko p u $\mathbb{R}^3$, i ako postoje otvoreni podskup $U \subset \mathbb{R}^2$ i glatka funkcija $F : U \to \mathbb{R}^3$ tako da je:*

(i) $F(U) = S \cap V$ i $F : U \to S \cap V$ je homeomorfizam

(ii) Jakobijan $D_u F$ je ranga 2 za svaku točku $u \in U$.

Definicija 1.1.2. *Preslikavanje $F : U \to S \cap V$ iz definicije 1.1.1 zajedno sa trojkom (U, F, V) se naziva* ***lokalna parametrizacija*** *od S u točki p. Skup $S \cap V$ se naziva* ***koordinatna okolina*** *točke p. Za komponente u^1 i u^2 od $u = (u^1, u^2)^T$ kažemo da su* ***koordinate*** *točke $F(u) \in S$ (s obzirom na parametrizaciju F).*

Propozicija 1.1.3. *Neka je $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ otvoren, neka je $f : V_0 \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Definirajmo $S := \{(x, y, z)^\top \in V_0 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Ako je*

$$grad f(p) \neq (0, 0, 0)^\top \tag{1.1}$$

za sve $p \in S$, tada je S regularna ploha.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija od S. Neka je $W \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, i $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ t.d. $\varphi(W) \subset S \cap V$. Tada je φ, kao funkcija sa W u $\mathbb{R}^3$, glatka onda i samo onda ako je $F^{-1} \circ \varphi : W \to U \subset \mathbb{R}^2$ glatka.*

Korolar 1.1.5. *Neka je S regularna ploha sa lokalnim parametrizacijama (U_1, F_1, V_1) i (U_2, F_2, V_2). Tada je*

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2) \tag{1.2}$$

glatka funkcija.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha, $p \in S$, i $f : S \to \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) Postoji otvorena okolina točke p u $\mathbb{R}^3$ i proširenje $\tilde{f}$ od $f_{|S\cap V}$ na V koje je glatko u okolini točke p.

(2) Postoji lokalna parametrizacija (U, F, V), $p \in V$, takva da je $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ glatka u okolini točke $F^{-1}(p)$.

(3) Za svaku lokalnu parametrizaciju (U, F, V) oko točke p, funkcija $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ je glatka u okolini točke $F^{-1}(p)$.

Definicija 1.1.7. *Ako vrijedi neko od svojstava (1), (2) ili (3) iz prethodne propozicije, tada za f kažemo da je **glatka u blizini** točke p.*

Definicija 1.1.8. *Neka su $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ regularne plohe. Neka je $p \in S_1$ i $f : S_1 \to S_2$ neprekidna funkcija. Kažemo da je f **glatka u blizini** točke p, ako postoji lokalna parametrizacija (U_1, F_1, V_1) od S_1 oko p i lokalna parametrizacija (U_2, F_2, V_2) od S_2 oko $f(p)$ tako da je $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to U_2$ glatka u blizini točke p.*

Tangencijalna ravnina

Definicija 1.1.9. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha, neka je $p \in S$. Tada*

$$\begin{aligned} T_pS = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid & \text{ postoji } \varepsilon > 0 \text{ i glatka parametrizirana} \\ & \text{krivulja } c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ t. d. } c(0) = p \text{ i } \dot{c}(0) = X\} \end{aligned}$$

*nazivamo **tangencijalna ravninan** od S u točki p. Element tangencijalne ravnine zovemo **tangencijalni vektori**.*

Propozicija 1.1.10. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha, neka je $p \in S$. Neka (U, F, V) bude lokalna parametrizacija od S oko p. Definirajmo $u_0 := F^{-1}(p) \in U$. Tada je*

$$T_pS = Image(D_{u_0}F) = D_{u_0}F(\mathbb{R}^2).$$

Korolar 1.1.11. *$T_pS \subset \mathbb{R}^3$ je dvodimenzionalni vektorski prostor.*

Propozicija 1.1.12. *Neka je $V \subset \mathbb{R}^3$ otvoren, neka je $f : V \to \mathbb{R}$ glatka funkcija i neka je $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Pretpostavimo da $gradf(p) \neq 0$ za sve $p \in S$. Tada je, za $p \in S$, gradinet od f okomit na tangencijalnu ravninu:*

$$T_pS = gradf(p)^{\top}$$

.

Definicija 1.1.13. *Neka su $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ regularne plohe, neka je $f : S_1 \to S_2$ glatka funkcija i neka je $p \in S_1$.* ***Diferencijal*** *od f u p je preslikavanje*

$$d_pf : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2,$$

koje je dano sljedećim pravilom: za $X \in T_pS_1$ odaberemo glatku parametriziranu krivulju $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$. za koju je $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = X$, te definiramo

$$d_pf(X) := \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} \in T_{f(p)}S_2$$

Propozicija 1.1.14. *Definicija diferencijala d_pf je dobra, t.j. $d_pf(X)$ ovisi samo o X, a ne i o odabiru parametrizirane krivulje c. Nadalje, d_pf je linearan.*

Dokaz. Izrazimo d_pf preko lokalne parametrizacije. Neka je (U_1, F_1, V_1) lokalna parametrizacija plohe S_1 oko točke p i neka je (U_2, F_2, V_2) lokalna parametrizacija plohe S_2 oko točke $f(p)$. Ako je potrebno, možemo smanjiti U_1 i V_1 te pretpostaviti da je $f(S_1 \cap V_1) \subset V_2$. Stavimo

$$\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \to U_2$$

i $u_0 := F_1^{-1}(p) \in U_1$. Za krivulju $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ za koju je $c(0) = p$ i $\dot{c}(0) = X$ stavljamo

$$u := F_1^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_1.$$

Sada, ako je potrebno, možemo odabrati manji ε kako bi osigurali da je c cijela sadržana u V_1. Prema propoziciji 1.1.4 u je glatka parametrizirana krivulja u U_1 pa imamo sljedeće:

$$D_{u_0}F_1(\dot{u}(0)) = \frac{d}{dt}(F_1 \circ u)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}c\Big|_{t=0} = X.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} d_pf(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ F_1 \circ u)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(F_2 \circ \tilde{f} \circ u)\Big|_{t=0} \\ &= D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f})(\dot{u}(0)) \\ &= D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f}) \circ (D_{u_0}F_1)^{-1}(X). \end{aligned} \tag{1.3}$$

□

Napomena 1.1.15. *Dokaz je pokazao da je, gledano preko lokalnih parametrizacije* (U_1, F_1, V_1) *i* (U_2, F_2, V_2) *,* $d_p f$ *zadan Jakobijevom matricom* $D_{u_0}\tilde{f}$*.*

Prva fundamentalna forma

U svakoj točki $p \in S$ tangencijalna ravnina T_pS je 2-dimenzionaln potprostor od $\mathbb{R}^3$. Stoga, možemo restringirati standardni skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iz $\mathbb{R}^3$ na T_pS, i dobiti skalarni produkt na T_pS. Preslikavanje koje pridružuje svakoj točki $p \in S$ restrikciju $g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pS \times T_pS}$, nazivamo **prva fundamentalna forma** na S. Označavat ćemo ju sa :

$$I_p(X, Y) = g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle,$$

gdje su $X, Y \in T_pS$. Kao što je poznato, iz linearne algebre, svaki euklidski skalarni produkt na vektorskom prostoru možemo prikazati kao pozitivno definitnu simetričnu matricu u odgovarajućoj bazi. Bazu za T_pS možemo dobit preko parametrizacije (U, F, V) od S oko točke p. Ako su e_1, e_2 vektori standardne baze na $\mathbb{R}^2$, onda $D_uF(e_1) = (\partial F/\partial u^1)(u)$ i $D_uF(e_2) = (\partial F/\partial u^2)(u)$, $u = F^{-1}(p)$, tvore bazu za T_pS. S obzirom na tu bazu matrični zapis od g_p je dan sa

$$g_{ij}(u) := g_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle.$$

Gornji izraz pokazuje da je $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija za svaki i i j.

Neka su (U, F, V) i $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ dvije parametrizacije. Neka su $(g_{ij})_{ij}$ i $(\tilde{g}_{kl})_{kl}$ pripadni matrični zapisi prvih fundamentalnih formi. Neka je $\phi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ funkcija prijelaza, tada imamo jednakost:

$$\Big(g_{ij}(u)\Big)_{ij} = (D_u\phi)^T \cdot (\tilde{g}_{kl}(\phi(u)))_{kl} \cdot D_u\phi. \tag{1.4}$$

Druga fundamentalna forma

Definicija 1.1.16. *Neka je* $S \subset \mathbb{R}^3$ *regularna ploha.* ***Normalno polje*** *na* S *je funkcija*

$$N : S \to \mathbb{R}^3,$$

takva de je $N(p) \perp T_pS$ *za sve* $p \in S$*. Za normalno polje na* S *kažemo da je* ***jedinično normalno polje****, ako je* $\|N(p)\| = 1$ *za sve* $p \in S$*.*

Definicija 1.1.17. *Regularna ploha* $S \subset \mathbb{R}^3$ *je* ***orijentabilna*** *ako postoji glatko jedinično normalno polje na* S*.*

Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentabilna regularna ploha sa glatkim jediničnim normalnim poljem N. Na N možemo gledati kao preslikavanje na plohama, t.j. $N : S \to S^2$, i nazivamo ga **Gaussovo preslikavanje**.
Neka je $p \in S$. Promotrimo diferencijal od N u točki p:

$$d_pN : T_pS \to T_{N(p)}S^2.$$

Sada vidimo da je $T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS$. Dakle, d_pN je endomorfizam na T_pS.

Definicija 1.1.18. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha čija je orijentacija dana jediničnim normalnim poljem N. Endomorfizam*

$$W_p : T_pS \to T_pS,$$

$$W_p(X) = -d_pN(X).$$

*se naziva **Weingartenovo preslikavanje**.*

Primjer 1.1.19. *Neka je $S = \{(x, y, 0)^\top | x, y \in \mathbb{R}\}$ x-y ravnina, $N(x, y, z) = (0, 0, 1)^\top$. Tada je N konstantna i zato je $W_p = 0$ za sve $p \in S$.*

Primjer 1.1.20. *Neka je $S = S^1 \times \mathbb{R}$ cilindar, $N(x, y, z) = (x, y, 0)^\top$.*
Tangencijalna ravnina T_pS u točki $p = (x, y, z)^\top \in S$ razapeta je vektorima $(-y, x, 0)^\top$ i $(0, 0, 1)^\top$. Računamo

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -d_pN \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Kako bi izračunali $W_p(-y, x, 0)^\top$, odaberimo $t_0 \in \mathbb{R}$, tako da je $(\cos(t_0), \sin(t_0)) = (x, y)$. Tada za $c(t) := (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z)^\top$ imamo da je $c(0) = (x, y, z)^\top = p$ i $\dot{c}(0) = (-\sin(t_0), \cos(t_0), 0)^\top = (-y, x, 0)^\top$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} &= -d_pN \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ z \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t+t_0) \\ \sin(t+t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} \sin(t_0) \\ -\cos(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Matrični zapis preslikavanja W_p, s obzirom na bazne vektore $(-y, x, 0)^\top$ i $(0, 0, 1)^\top$ je

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propozicija 1.1.21. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentirana regularna ploha sa Weingartenovim preslikavanjem $W_p : T_pS \to T_pS$, $p \in S$. Tada je W_p samo-adjungirano s obzirom na prvu fundamentalnu formu.*

Iz linearne algebre znamo da ako je V konačnodimenzionalni realni vektorski prostor sa euklidskim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, onda je samoadjungiranom endomorfizmu W na V jedinstveno pridružena bilinearna forma β na V. Veza između W i β je

$$\beta(X, Y) = \langle W(X), Y \rangle, \qquad X, Y \in V.$$

Definicija 1.1.22. *Bilinearna forma pridružena Weingartenovom preslikavanju W_p se zove* ***druga fundamentalna forma*** *(plohe S u točki p):*

$$II_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y), \qquad X, Y \in T_pS.$$

Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija regularne plohe S oko točke p. Neka je $u := F^{-1}(p)$. Neka su

$$X_1 := D_uF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$$

i

$$X_2 := D_uF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$$

pripadni vektori baze za T_pS. Vrijedi

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \equiv 0.$$

Deriviranjem ove jednakosti po t dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j)\Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), d_pN \circ D_uF(e_j) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$h_{ij}(u) := I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j)\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}, N(p) \right\rangle.$$

Sada je $h_{ij}(u))_{i,j=1,2}$ simetrična matrica pridružena drugoj fundamentalnoj formi. Nadalje, imamo maticu $(w_i^j(u))_{i,j}$ pridruženu Weingartenovu preslikavanju tako da vrijedi:

$$W_p(D_u F(e_i)) =: \sum_{j=1}^{2} w_i^j(u) D_u F(e_j).$$

Zakrivljenost

Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentirana regularna ploha sa glatkim jediničnim normalnim poljem N, $p \in S$. Neka je $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ krivulja parametrizirana duljinom luka takva da je $c(0) = p$. Promatrana kao krivulja u $\mathbb{R}^3$, krivulja c u točki 0 ima zakrivljenost $\kappa(0)$, koja je u slučaju $\kappa(0) \neq 0$ je dana sa

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0),$$

gdje je n normala na c. Sada želimo razdvojiti tu zakrivljenost na dio koji je posljedica zakrivljivanja krivulje c unutar S, i dijela koji je odraz zakrivljenosti plohe u $\mathbb{R}^3$. Stoga razdvajamo $n(0)$ na dio koji je tangencijalanna S i dio koji je okomit na S :

$$n(0) = n(0)^{tang} + n(0)^{\perp},$$

gdje $n(0)^{\perp} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$. Dakle, imamo

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0) = \kappa(0) \cdot n(0)^{tang} + \kappa(0) \cdot \langle n(0), N(p)\rangle N(p).$$

Kako nas zanima dio koji je odraz zakrivljenosti plohe u $\mathbb{R}^3$, definiramo

$$\kappa_{nor} := \langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle = \begin{cases} \kappa(0) \cdot \langle n(0), N(p)\rangle, & \text{ako je } \kappa(0) \neq 0, \\ 0, & \text{ako je } \kappa(0) = 0. \end{cases}$$

Za κ_{nor} kažemo da je **normalna zakrivljenost** od S u točki p u smijeru $\dot{c}(0)$.

Teorem 1.1.23 (Meusnierov teorem)**.** *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentirana regularna ploha sa jediničnim normalnim poljem N i drugom fundamentalnom formom II. Neka je $p \in S$. Neka je $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ krivulja parametrizirana duljinom luka takva da je $c(0) = p$. Tada za normalnu zakrivljenost κ_{nor} od c imamo:*

$$\kappa_{nor} = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0)).$$

Posebno, sve krivulje parametriizirane duljinom luka u S koje prolaze korz p sa istim tangencijalnim vektorom imaju i iste normalne zakrivljenosti.

Iz propozicije 1.1.21 Weingartenovo preslikavanje $W_p : T_pS \to T_pS$ je uvijek samoadjungirano. Stoga, možemo naći ortonormiranu bazu X_1, X_2 od T_pS. koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora W_p,

$$W_p(X_i) = \kappa_i \cdot X_i, \quad i = 1, 2.$$

Definicija 1.1.24. *Svojstvene vrijednosti κ_1 i κ_2 zovu se **glavne zakrivljenosti** od S u točki p. Pripadni svojstveni vektori $\pm X_1$ i $\pm X_2$ su **smjerovi glavne zakrivljenosti**.*

Primjer 1.1.25. *Neka je $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ x-y ravnina u $\mathbb{R}^3$. Kako je $W = 0$, imamo da je $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ pa znači da je svaki smijer smijer glavne zakrivljenosti.*

Primjer 1.1.26. *Neka je $S = S^1 \times \mathbb{R}$ cilindar, $p = (x, y, z)^\top$. Kao što je pokazano u primjeru 1.1.20, Weingartenovo preslikavanje W_p s obzirom na unutarnje jedinično normalno polje i bazu $X_1 = (-y, x.0)^\top$ i $X_2 = (0, 0, 1)^\top$ ima matrični zapis*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To znači da su X_1 i X_2 smijerovi glavnih zakrivljenosti za glavne zakrivljenosti $\kappa_1 = 1$ i $\kappa_2 = 0$.

Definicija 1.1.27. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentabilna regularna ploha, neka je $p \in S$. Neka su κ_1 i κ_2 glavne zakrivljenosti od S u točki p. Tada je*

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = det(W_p)$$

***Gaussova zakrivljenost** od S u p. Nadalje,*

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} Tr(W_p)$$

*nazivamo **srednja zakrivljenost** od S u p.*

1.2 Unutarnja geometrija ploha

Izometrije

Definicija 1.2.1. *Neka su S_1 i S_2 regularne plohe u $\mathbb{R}^3$. Glatko preslikavanje $f : S_1 \to S_2$ je lokalna izometrija, ako je za svaku točku $p \in S_1$ diferencijal*

$$d_p f : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$$

linearna izometrija s obzirom na prvu fundamentalnu formu, t.j.

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

za sve $X, Y \in T_p S_1$.

Primjer 1.2.2. *Neka je $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ x-y ravnina, i $S_2 = S^1 \times \mathbb{R}$ cilindar. Tada je preslikavanje*

$$f : S_1 \to S_2, \quad f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)^\top$$

lokalna izometrija.

Sve što možemo "mjeriti" unutar plohe, t.j. duljine krivulja koje leže na plohi ili kutovi između dva tangencijalna vektora, ovisi o prvoj fundamentalnoj formi. Znači, ako postoji lokalna izometrija, onda je kut između dva vektora u slici isti kao kut između dva tangencijalna vektora u originalu. U tom smisli , "male" otvorene podskupove $U \subset S_1$ ne možemo razlikovati od njihovih izometričnih slika $f(U) \subset S_2$. Zbog toga geometrijske vrijednosti koje se ne mijenjaju u lokalnim izometrijama nazivamo **vrijednosti unutarnje geometrije**.
Ako je geometrijska vrijednost funkcija $F_S : S \to \mathbb{R}$ na plohi, npr. Gaussova zakrivljenost ili srednja zakrivljenost, tada ovo znači da svaka lokalna izometrija $f : S_1 \to S_2$ zadovoljava

$$F_{S_1} = F_{S_2} \circ f.$$

Primjer 1.2.3. *Srednja zakrivljenost H nije vrijednost unutarnje geometrije, jer je za ravninu $H_{ravnina} \equiv 0$, dok je za cilindar $H_{cilindar} = \frac{1}{2}$. Neka je f lokalna izometrija iz primjera 1.2.2, tada bi $H_{cilindar} = H_{ravnina} \circ f$ trebalo vrijediti kada bi srednja zakrivljenost bila vrijednost unutarnje geometrije.*

Budući da srednja zakrivljenost nije vrijednost unuternje geometrije ,ni glavne zakrivljenosti ne mogu biti vrijednosti unutarnje geometrije.

Vektorska polja i kovarijantne derivacije

Definicija 1.2.4. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha.* ***Vektorsko polje*** *na S je preslikavanje $v : S \to \mathbb{R}^3$, tako da je $v(p) \in T_pS$ za sve $p \in S$.*

Primjer 1.2.5. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Kako je prva fundamentalna forma nedegenerirana, za čvrstu točku p, postoji jedinstveni vektor $v(p) \in T_pS$ sa svojstvom*

$$d_pf(X) = I(v(p), X)$$

za sve $X \in T_pS$. Na taj način smo definirali ***gradientno vektorsko polje*** *$v := gradf$.*

Diferencijabilnost vektorskog polja možemo provijeriti korištanjem lokalne parametrizacije. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija regularne plohe S. Tada za svaku točku

$p \in S \cap V$ vektori $(\partial F/\partial u^1)(F^{-1}(p))$ i $(\partial F/\partial u^2)(F^{-1}(p))$ tvore bazu od T_pS. Dakle, vektorsko polje v na S se za svaki $p \in S \cap V$ može na jedinstven način prikazati u sljedećem obliku:

$$v(p) = \sum_{j=1}^{2} \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

Kako su bazna vektorska polja $(\partial F/\partial u^j)(F^{-1}(p))$ glatka, imamo da je v na $V \cap S$ neprekidno, diferencijabilno ili glatko, ako i samo ako funkcije

$$\xi^j : V \to \mathbb{R}$$

imaju pripadno svojstvo.

Primjer 1.2.6. *Provjerim da je gradijentno vektorsko polje glatke funkcije $f : S \to \mathbb{R}$ glatko. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija. Tada je $\tilde{f} := f \circ F : U \to \mathbb{R}$ također glatka funkcija.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}\left(F^{-1}(p)\right) &= d_p f\left(\frac{\partial F}{\partial u^k}\left(F^{-1}(p)\right)\right) \\
&= I\left(gradf(p), \frac{\partial F}{\partial u^k}\left(F^{-1}(p)\right)\right) \\
&= I\left(\sum_{j=1}^{2} \xi^j(p)\frac{\partial F}{\partial u^j}\left(F^{-1}(p)\right), \frac{\partial F}{\partial u^k}\left(F^{-1}(p)\right)\right) \qquad (1.7) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \xi^j(p) g_{jk}\left(F^{-1}(p)\right).
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\xi^j \circ F = \sum_{k=1}^{2} g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}.$$

Znači funkcije ξ^j su glatke, pa je i $gradf$ glatko vektorsko polje.

Definicija 1.2.7. *Neka je S regularna ploha, $p \in S$ točka, $X_p \in T_pS$ tangencijalno vektorsko polje i $f : S \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada*

$$\partial_{X_p} f := d_p f(X_p) = I(gradf(p), X_p) \in \mathbb{R}$$

nazvamo ***usmjerena derivacija od f u smijeru*** *X_p. Ako je X vektorsko polje na S, onda je*

$$\partial_X f : S \to \mathbb{R}, \quad \partial_X f(p) := \partial_{X(p)} f$$

usmjerena derivacija od f u smijeru vektorskog polja *X.*

Definicija 1.2.8. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha, i neka je $c : I \to S$ parametrizirana krivulja.* ***Vektorsko polje na** S **duž** c* *je preslikavanje $v : I \to \mathbb{R}^3$, takvo da je $v(t) \in T_{c(t)}S$ za sve $t \in I$.*

Definicija 1.2.9. *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna ploha, neka je $c : I \to S$ parametrizirana krivulja, i neka je $v : I \to \mathbb{R}^3$ diferencijabilno vektorsko polje na S duž c. Neka je $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_pS$ ortogonalna projekcija za svaki $p \in S$, t.j. ako je $N(p)$ jedinična normala na S u točki p, onda*

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p)\rangle N(p).$$

Tada

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)),$$

$t \in I$, nazivamo ***kovarijantna dervacija*** *od v.*

Kovarijantnu derivaciju možemo izračunati korištenjem lokalne parametrizacije (U, F, V) na S. U tu svrhu izrazimo vektore $(\partial^2 F/\partial u^i \partial u^j)(u) \in \mathbb{R}^3$ preko baznih vektora $(\partial F/\partial u^1)(u)$, $(\partial F/\partial u^2)(u)$ i $N(F(u))$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \Gamma^1_{ij}(u)\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + \Gamma^2_{ij}(u)\frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}N(F(u)). \tag{1.8}$$

Definicija 1.2.10. *Funkcije*

$$\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R},$$

$1 \leq i, j, k \leq 2$, nazivamo ***Cristoffelovi simboli****.*

Neka je $c : I \to S$ parametrizirana krivulja. Ako je potrebno možemo smanjiti I tako da je $c(I) \subset V$. Postavimo da je $\tilde{c} := F{-}1 \circ c : T \to U$. Neka je $v : I \to \mathbb{R}^3$ glatko vektorsko polje na S duž c. Izrazimo v u bazi danoj sa parametrizacijom,

$$v(t) = \xi^1(t)\frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \xi^2(t)\frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)).$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}v(t) &= \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t)) \\
&= \Pi_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{\xi}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \xi^i(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t))\dot{\tilde{c}}^j(t)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\dot{\xi}^i(t)\frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\xi^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t)\frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)\xi^i(t)\dot{\tilde{c}}(t)\right)\frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)).
\end{aligned}
$$

Sada na kovarijantnu derivaciju možemo gladati kao na preslikavanje

$$
\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\dot{\xi}^1 + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^1(\tilde{c})\xi^i\dot{\tilde{c}}^j \\ \dot{\xi}^2 + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^2(\tilde{c})\xi^i\dot{\tilde{c}}^j\end{pmatrix}.
$$

Kovarijantna derivacija je vrijednost unutarnje geometrije pošto ju možemo izraziti u terminima prve fundamentalne forme.

Lema 1.2.11. *Cristoffelovi simboli zadovoljavaju sljedeće:*

$$
\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)g^{mk}
$$

Dokaz. Računamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i}\left\langle\frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m}\right\rangle \\
&= \left\langle\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^m}\right\rangle \\
&= \left\langle\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{im}^k\frac{\partial F}{\partial u^k}\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj}\right). \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Analogno dobijemo

$$
\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ji}^k g_{km} + \Gamma_{jm}^k g_{ki}\right)
$$

i

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = \sum_{k=1}^{2} \left(\Gamma^k_{mi} g_{kj} + \Gamma^k_{mj} g_{ki} \right).$$

Slijedi da je

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2 \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} g_{km}.$$

Množenjem sa inverznom matricom (g^{km}) riješavamo jednadžbu po Γ^k_{ij} i dobivamo tvrdnju leme. □

Definicija 1.2.12. *Neka je S regularna ploha, v diferencijabilno vektorsko polje na S i $w_p \in T_pS$ tangencijalni vektor. Tada je **kovarijantna derivacija** $\nabla_{w_p} v \in T_pS$ od v u smijeru w_p definirana na sljedeći način:*
odaberemo parametriziranu krivulju $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tako da je $\dot{c}(0) = w_p$ i stavimo

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt}(v \circ c)(0).$$

Definicija 1.2.13. *Za vektorska polja v i w na S, definiramo vektorsko polje $\nabla_w v$ na sljedeći način:*

$$(\nabla_w v)(p) := \nabla_{w(p)} v.$$

1.3 Riemannov tenzor zakrivljenosti

Definicija

Ako su v, w i z vektorska polja na regularnoj plohi S, onda možemo kovarijantno derivirati vektorsko polje $\nabla_w z$ u odnosu na v. Ali na taj način se pojavljuje i derivacija vektorskog polja w u odnosu na v. Zato, ako nas zanima samo druga derivacija od z u smijerovima v i w, onda moramo neutralizirati tu pojavu.

Definicija 1.3.1. ***Druga kovarijantna derivacija*** *od z s obzirom na v i w je definirana na sljedeći način:*

$$\nabla^2_{v,w} := \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z.$$

Lema 1.3.2. *Neka je S regularna ploha i v,w i z vektorska polja na S. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija od S. Ako v izrazimo u bazi danoj parametrizacijom, $v = \sum_{i=1}^{2} v^i(\partial F / \partial u^i)$,*

i analogno za vektroska polja w i z.
Tada u bazi $\partial F/\partial u^m$ imamo koeficjente od $\nabla^2_{v,w} z$

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{i,j,k} \Gamma^m_{ij} \frac{\partial z^i}{\partial u^k} (v^j w^k + v^k w^j) - \sum_{i,j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial u^i} + \sum_l \left(\Gamma^m_{li} \Gamma^l_{kj} - \Gamma^m_{kl} \Gamma^l_{ij} \right) v^i w^j z^k \right) \right)_{m=1,2}$$

Prva suma je dva puta primjenjena kovarijantna derivacija, u smjerovima $(v^1, v^2)^\top$ i $(u^1, u^2)^\top$. Također možemo primjetiti da se u gornjim izrazima ne pojavljuju derivacije od $(v^1, v^2)^\top$ i $(u^1, u^2)^\top$.

Korolar 1.3.3. *Druga kovarijantna derivacija $\nabla^2_{v,w} z$ u točki $p \in S$ ovisi samo o $v(p), w(p)$ i o derivacijama od z do reda* 2.
Stoga, za vektorsko polje z na S možemo definirat drugi kovarijantni diferencijal

$$\nabla^2 z : T_pS \times T_pS \to T_pS,$$

$$(v_p, w_p) \mapsto \left(\nabla^2_{v,w} z \right)(p),$$

gdje su v i w vektorska polja na S za koje je $v(p) = v_p$ i $w(p) = w_p$.

Kako prva kovarijantna derivacija ovisi samo o unutarnjoj geometriji plohe, tako isto vrijedi i za drugu kovarijantnu derivaciju.

Vrijednost druge kovarijantne derivacije ovisi o poretku deriviranja. Riemannov tenzor zakrivljenosti definiramo uprvao da mjeri razliku koja se javlja kod zamjene smjerova deriviranja.

Definicija 1.3.4. *Neka je S regularna ploha, $p \in S$ točka, $v_p, w_p \in T_pS$ tangencijalni vektori, i z vektorsko polje na S. Tada **Riemannov tenzor zakrivljenosti**, ili samo **tenzor zakrivljenosti**, definiramo sa*

$$R(v_p, w_p)z := \nabla^2_{v_p,w_p} z - \nabla^2_{w_p,v_p} z.$$

Riemannov tenzor zakrivljenosti možemo izraziti i u terminima lokalne parametrizacije. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacije naše regularne plohe, $p = F(u_0)$. Izrazimo v_p, w_p i z u terminima lokalne parametrizacije:

$$v_p = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}(u_0),$$

$$w_p = \sum_j w^j \frac{\partial F}{\partial u^j}(u_0),$$

$$z = \sum_k z^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(u_0).$$

Lema 1.3.5. *Oblik Riemannovog tenzora zakrivljenosti s obzirom na lokalnu parametrizaciju je*

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{ijkl=1}^{2} R^l_{ijk}(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u_0),$$

gdje je

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial u^j} + \sum_m \left(\Gamma^l_{mi} \Gamma^m_{kj} - \Gamma^l_{mj} \Gamma^m_{ki} \right).$$

Dokaz. Svi izrazi iz leme 1.3.2 koji sadrže derivacije od z su simetrični u odnosu na v_p i w_p i zato se poništavaju. Nadalje iskoristimo činjenicu da je Cristoffelov simbol Γ^k_{ij} simetričan u doljnjim indeksima i i j. □

Korolar 1.3.6. *(a) Tangencijalni vektor $R(v_p, w_p)z$ u točki $p \in S$ ovisi samo o $z(p)$, a ne i o vrijednostima vektorskog polja z na $S - \{p\}$. Stoga je preslikavanje*

$$R_p : T_pS \times T_pS \times T_pS \to T_pS,$$

$$R_p(v_p, w_p)z_p := R(v_p, w_p)z,$$

dobro definirano, gdje je z vektorsko polje na S takvo da je $z(p) = z_p$.

(b) R_p je linearno po svakom argumentu.

(c) R_p je koso-simetrično u prva dva argumenta,

$$R_p(v_p, w_p)z_p = -R_p(w_p, v_p)z_p.$$

Gaussov veličanstveni teorem

Teorem 1.3.7 (Gaussova jednakost)**.** *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentirana regularna ploha, $p \in S$. Tada svaki $v, w, z \in T_pS$ zadovoljava sljedeće:*

$$R(v, w)z = II(w, z) \cdot W(v) - II(v, z) \cdot W(w).$$

S obzirom na lokalnu parametrizaciju to izgleda ovako:

$$R_{ijk} l = h_{jk} w^l_i - h_{ik} w^l_j.$$

Dokaz. Neka je (U, F, V) lokalna parametrizacija.Prisjetimo se iz 1.8:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij} \cdot (N \circ F).$$

Deriviranjem ove jednakosti po u^l dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) \\
&+ \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \cdot (N \circ F) + h_{ij} \cdot \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^l} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{komponenta uz normalu} \right) \\
&+ \text{komponenta uz normalu} + h_{ij} \cdot \left(-W \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \\
&\sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{komponenta uz normalu}
\end{aligned}$$

Po Schwartzovom teoremu možemo zamjeniti derivacije po u^i i u^l ite dobivamo:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\
&= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\Gamma_{lj}^m}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m \right) - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\
&\quad + \text{komponenta uz normalu} \\
&= \sum_m \left(R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{komponenta uz normalu.}
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$R_{lij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m = 0.$$

To je tvrdnja do na zamjenu indeksa. □

Teorem 1.3.8 (Gaussov veličanstveni teorem)**.** *Gaussovu zakrivljenost možemo izračunati iz Riemannovog tenzora zakrivljenosti na sljedeći način: neka je $p \in S$. Odaberemo ortonormiranu bazu v, w za $T_p s$. Tada je*

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Posebno, Gaussova zakrivljenost je vrijednost unutarnje geometrije plohe.

Dokaz. Prema Gaussovoj jednakosti imamo:

$$\begin{aligned} I(R(v,w)w,v) &= I(II(w,w\cdot W(v) - II(v,w)\cdot W(w),v) \\ &= II(w,w)II(v,v) - II(v,w)II(w,v) \\ &= \det(W) \\ &= K. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.9. *Neka je S regularna ploha, $p \in S$ i $v,w,x,y \in T_pS$. Tenzor zakrivljenosti ima sljedeće simetrije:*

1. $R(v,w)x = -R(w,v)x$;
2. $I(R(v,w)x,y) = -I(R(v,w)y,x)$;
3. $I(R(v,w)x,y) = I(R(x,y)v,w)$;
4. *Bianchijev identitet:*

$$R(v,w)x + R(x,v)w + R(w,x)v = 0.$$

Dokaz. Tvrdnja (c) slijedi iz Gaussove jednakosti:

$$\begin{aligned} I(R(v,w)x,y) &= I\left(II(w,x)\cdot W(v) - II(v,x)\cdot W(w),y\right) \\ &= II(w,x)\cdot II(v,y) - II(v,x)\cdot II(w,y), \end{aligned}$$

zamjene $v \leftrightarrow x$ i $w \leftrightarrow y$ ne mijenjaju gornji izraz. Tvrdnja (b) slijedi direktnom primjenom (a) i (c). Tvrdnju (d) također možemo izvesti iz Gaussove jednakosti:

$$\begin{aligned} &R(v,w)x + R(x,v)w + R(w,x)v \\ &= II(w,x)W(v) - II(v,x)W(w) + II(v,w)W(x) \\ &\quad - II(x,w)W(v) + II(x,v)W(w) - II(w,v)W(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.10. *Neka je S regularna ploha,$p \in S$. Za sve $v,w,x \in T_pS$ imamo*

$$R(v,w)x = K(p)\cdot(I(w,x)v - I(v,x)w).$$

u lokalnim koordinatama imamo

$$R^l_{ijk} = K\cdot\left(g_{jk}\delta^l_i - g_{ik}\delta^l_j\right).$$

Dokaz. □

Poglavlje 2

Definicija Riemannovog tenzora na mnogostrukostima

2.1 Abstraktne mnogostrukosti

Definicija 2.1.1. *Podskup $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je n-dimenzionalna podmnogostrukost klase C^p od $\mathbb{R}^{n+k}$ ako, za svaki $x \in M$, postoji okolina $U \in \mathbb{R}^{n+k}$ oko x i C^p submerzija $f : U \to \mathbb{R}^k$ takva da je $U \cap M = f^{-1}(0)$.*
*(Za funkciju f kažemo da je **submerzija** ako je njezin diferencijal u svakoj točki surjektivan).*

Propozicija 2.1.2. *Sljedeće je ekvivalentno:*

(i) M je C^p podmnogostrukost dimenzije n u $\mathbb{R}^{n+k}$.

(ii) Za svaki $x \in M$, postoje otvorene okoline $U, V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ redom od x i 0, i C^p difeomorfizam $f : U \to V$ takav da je $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

(iii) Za svaki $x \in M$, postoji okolina $U \subset M$ od x, okolina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ koja sadrži 0, i C^p preslikavanje $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ tako da je (Ω, g) lokalna parametrizacija od $M \cap U$ oko x (odnosno g je homeomorfizam iz Ω na $M \cap U$ i $g'(0)$ je injektivan).

Definicija 2.1.3. *C^p **atlas** na Hausdorffovom topološkom prostoru M je zadan sa:*

i) otvorenim pokrivačem $U_i, i \in I$, od M;

ii) familijom homeomorfizama $\phi_i : U_i \to \Omega_i$ (gdje su Ω_i otvoreni podskupovi u $\mathbb{R}^n$), takvih da za svaki $i, j \in I$, homeomorfizmi $\phi \circ \phi^{-1}$ su C^p deifeomorfizmi iz $\phi_i(U_i \cap U_j)$ na $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

Za parove (U_i, ϕ_i) kažemo da su **karte** od M, a za funkcije $\phi_i \circ \phi_j^{-1}, i, j \in I$, **funkcije prijelaza**.

Definicija 2.1.4. *Dva C^p atlasa na M, zadani sa (U_i, ϕ_i) i (V_j, ψ_j), su C^p ekvivalentni ako je njihova unija C^p atlas, t.j. ako su $\phi_i \circ \psi_j^{-1}$ C^p difeomorfizmi iz $\psi_j(U_i \cap V_j)$ na $\phi_i(U_i \cap V_j)$.*

Definicija 2.1.5. *C^p Diferencijabilna struktura na M je klasa ekvivalentnih C^p atlasa.* ***Diferencijabilna mnogostrukost*** *je par Hausdorffovog topološkog prostora i jednog atlasa.*

Kada je M povezan topološki prostor, prirodni broj n iz definicije ne ovisi o izboru karte i uzimamo ga za dimenziju mnogostrukosti M.

Definicija 2.1.6. *Neka je M glatka mnogostrukost dimenzije d. Podskup $N \subset M$ je podmnogostrukost od M ako za svaki $n \in N$ postoji karta (U, ϕ) od M oko točke n takva da je $\phi(U \cap N)$ podmnogostrukost otvorenog skupa $\phi(U) \cap \mathbb{R}^n$.*

Definicija 2.1.7. *Za glatku mnogostrukost M kažemo da je* ***orijentabilna*** *ako postoji atlas za M takav da su jakobiani svih njegovih funkcija prijelaza pozitivni.*

Definicija 2.1.8. *Neka su X i Y C^p mnogostrukosti. Neprekidna funkcija $f : X \to Y$ je klase C^k, za $k \leq p$, ako za svaki $x \in X$ postoje karte (U, ϕ) i (V, ψ) za X i Y redom oko x i $f(x)$, $f(U) \subset V$, takve da je preslikavanje*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

klase C^k.

Definicija 2.1.9. *Glatka funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ je* ***submerzija(imerzija)*** *u $x \in R^n$ ako joj je diferencijal $D_x g$ u x surjekcija(injekcija) iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^p$.*

Definicija 2.1.10. *Neka su M i N glatke mnogostrukosti. Glatko preslikavanje $f : M \to N$ je imerzija u točki $m \in M$ ako je za kartu (U, ϕ) od M oko točke m, i kartu (V, ψ) od N oko točke $f(m)$, funkcija $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ imerzija.*

Definicija 2.1.11. *Preslikavanje $f : M \to N$ je submerzija(imerzija) ako je to u svakoj točki od M.*
Preslikavanje f je difeomorfizam ako je bijekcija, i ako su f i f^{-1} glatki.
Preslikavanje f je smještenje ako je imerzija i ako je homeomorfizam na svoju sliku.

2.2 Tangencijalni svežnjevi

Tangencijalni prostor podmnogostrukosti u $\mathbb{R}^{n+k}$:

Definicija 2.2.1. *Neka je M n-dimenzionalna podmnogostrukost u* $\mathbb{R}^{n+k}$, $m \in M$ *i* $v \in \mathbb{R}^{n+k}$. *Za v kažemo da je* ***tangencijalan*** *na M u točki m ako postoji krivulja c sadržana u M takva da je* $c(0) = m$ *i* $c'(0) = v$.

Teorem 2.2.2. *Skup tangencijalnih vektora na M u točki m je n-dimenzionalni linearni potprostor od* $\mathbb{R}^{n+k}$, *i označavamo ga sa* T_mM.

Definicija 2.2.3. *Neka je M abstraktna mnogostrukost i* $m \in M$. ***Tangencijalni vektor*** *na M u točki m je klasa ekvivalencije* $\sim$ *krivulja* $c : I \to M$, *gdje je I interval oko nule takav da je* $c(0) = m$, *a relacija ekvivalencije* $\sim$ *je definirana na sljedeći način:*

$$c \sim \gamma \text{ ako i samo ako u karti } (U, \phi) \text{ oko } m,$$

$$\text{vrijedi } (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ c)'(0).$$

Relacija $\sim$ ne ovisio izboru karata

$$(\phi \circ c)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1})'\,(\phi(m))\,\dot{}(\phi \circ c)'(0).$$

Tangencijalni prostor na M u točki m, u oznaci T_mM, je skup svih tangencijalnih vektora na M u m. To je n-dimenzionalni linearni prostor, a linearna struktura se prenosi preko karte (U, ϕ) sa tangencijalnog prostora od $\mathbb{R}^n$ u $\phi(m)$. Za tangencijalni vektor na abstraktnoj mnogostrukosti imamo još jednu definiciju ekvivalentnu prvoj.

Definicija 2.2.4. *Neka je M mnogostrukost,* $m \in M$, (U, ϕ) *i* (V, ψ) *dvije karte za M oko točke m. Neka su u i v vektori u* $\mathbb{R}^n$ *(gledamo na njih kao na tangencijalne vektore u* $\phi(m)$ *i* $\psi(m)$ *respektivno). Definiramo relaciju*

$$(U, \phi, u) \sim (V, \psi, v) \quad \text{ako i samo ako} \quad (\psi \circ \phi^{-1})'_{\phi(m)} \cdot u = v.$$

Sada definiramo tangencijalni vektor na M u točki m kao klasu svih trojki (U, ϕ, u) *u relaciji* $\sim$.

U prvoj definiciji vektor $\xi \in T_mM$ je reprezentiran krivuljom c. U drugoj definicij je taj vektor reprezentiran u karti (U, ϕ) vektorom $u \in \mathbb{R}^n$. Ekvivalneciju dviju definicija dobijemo uparivanjem $u = (\phi \circ c)'(0)$. Za zadanu kartu (U, ϕ) oko točke m, pomoću druge definicije možemo istaknuti sljedeći izomorfizam između $\mathbb{R}^n$ i T_mM:

$$\theta_{U,\phi,m} : u \to class(U, \phi, u).$$

Definicija 2.2.5. *Sa TM označavamo disjunktnu uniju tangencijalnih prostora na M po svim točkama iz M. TM nazivamo* ***tangencijalni svežanj*** *od M.*

Teorem 2.2.6. *Neka je M n-dimenzionalna C^p mnogostrukost ($p \geq 1$). Tada njegov tangencijalni svežanj TM možemo kanonski snabdijeti strukturom $2n$-dimenzionalne i C^{p-1} abstraktne mnogostrukosti.*

Dokaz. Označimo sa $\pi : TM \to M$ preslikavanje koje vektoru $\xi \in TM$ pridružuje točku m u kojoj je njegovo "hvatište" (odnosno $\xi \in T_mM$). Zasada TM nema topologiju. Za svaku kartu (U, ϕ) od M, definiramo "kartu"(bijektivno, regularnost nemamo) $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ za TM sa

$$\Phi(\xi) = \left(\phi \circ \pi(\xi), \theta^{-1}_{U,\phi,\pi(\xi)}(\xi)\right).$$

Sada na TM stavimo topologiju tako da svaki Φ bude homeomorfizam. Za sustav okolina oko $\xi \in \pi^{-1}(U)$ uzimamo slike inverznog preslikavanja ϕ^{-1} okolina od $\Phi(\xi) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^{2n}$. Tako dobijemo Hausdorffovu topologiju. TM sada ima strukturu topološke (C^0) mnogostrukosti. Obratimo sada pažnju na funkcije prijelaza. Ako su (U, ϕ) i (V, ψ) dvije karte za M oko točke m, funkcija prijelaza za njima pripadne karte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ i $(\pi^{-1}(V), \Psi)$ je

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

dana sa

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(p, u) = \left(\psi \circ \phi^{-1}(p), D_p(\psi \circ \phi^{-1}) \cdot u\right).$$

Ta funkcija je iz C^{p-1}. □

Definicija 2.2.7. *Neka su E i B dvije glatke mnogostrukosti, i $\pi : E \to B$ glatko preslikavanje. Za (π, E, B) kažemo da je* ***vektorski svežanj*** *ranga n (E je totalni prostor, B je baza, i $\mathbb{R}^n$ vlakno) ako:*

(i) *π je surjekcija;*

(ii) *postoji otvoreni pokrivač $(U_i)_{i \in I}$ za B,i difeomorfizmi*

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n,$$

takvi da za svaki $x \in U_i$:

$$h_i(\pi^{-1}(x)) = x \times \mathbb{R}^n.$$

(iii) *i takvi da za $i, j \in J$, difeomorfizmi*

$$h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

su oblika

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, y) = (x, g_{ij}(x) \cdot v),$$

gdje je $g_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl_nR$ glatka funkcija.

Svako vlakno $\pi^{-1}(x)$ ima strukturu linearnog prostora. Preslikavanja h_i se zovu trivijalizacije vektorskog svežnja.

Definicija 2.2.8. *a) Vektorski svežanj ranga n , $\pi : E \to B$, je* ***trivialan*** *ako postoji difeomorfizam $h : E \to B \times \mathbb{R}^n$ koji čuva vlakna (odnosno $h : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ je izomorfizam vektorskih prostora).*

b) ***Prerez*** *svežnja je glatko preslikavanje $s : B \to E$ takvo da $\pi \circ s = Id$ (glatki odabir po jednog vektora u svakom vlaknu).*

Neka su M i N dvije mnogostrukosti redom dimenzije n i k , i $f : M \to N$ glatka funkcija. Neka $m \in M$, i (U, ϕ) i (V, ψ) karte za M i N oko točke m i $f(m)$.

Definicija 2.2.9. *Diferencijal od f u m je linearno preslikavanje*

$$T_m f : T_n M \to T_{f(m)} N$$

koje je kao preslikavanje među kartama zapravo diferencijal funkcije f također promatrane kao funkcija među kartama.

Teorem 2.2.10. *Neka su M, N, P glatke mnogostrukosti, $f : M \to N$ i $g : N \to P$ glatka preslikavanja. Za $m \in M$ vrijedi:*

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)} g \circ T_m f.$$

2.3 Vektorska polja

Definicija 2.3.1. *Glatko* ***vektorsko polje*** *na mnogostrukosti M je glatki prerez tangencijalnog svežnja TM (odnosno glatko preslikavanje X sa M na TM takvo da, za svaki $m \in M$, $X(m) \in T_m M$). Sa $\Gamma(TM)$ označavamo vektorski prostor vektorskih polja na M.*

Sada ćemo definirati tangencijalni prostor na još jedan način. Na skupu (neprekidnih, C^p, glatkih, analitičkih) funkcija definiranih na nekoj okolini točke $m \in M$ (okolina ovisi o funkciji) uvodimo relaciju ekvivalencije:

$$(f : U \to \mathbb{R}) \sim (g : V \to \mathbb{R}) \text{ ako i samo ako postoji}$$

$$\text{okolina } W \subset U \cap V \text{ od } m \text{ takva da je } f_{|W} = g_{|W}.$$

Definicija 2.3.2. *Klase ekvivalencije u odnosu na ovu relaciju se nazivaju* ***klice (germs)*** *(neprekidnih, C^p, glatkih, analitičkih) funkcija u točki m. Prostore tih klasa označavat ćemo sa ($C^0_m(M)$, $C^p_m(M)$, $C^\infty_m(M)$, i $C^\omega_m(M)$).*

Napomena 2.3.3. *Ako je M C^p mnogostrukost, prostor $C^p_m(M)(0 \leq p \leq \infty)$ je izomorfan prostoru $C^p_0(\mathbb{R}^n)$. Izomorfizam dobijemo tako da odaberemo kartu (U, ϕ) za M oko točke m, i svakoj funkciji f definiranoj na okolini V točke m pridružimo funkciju $f \circ \phi^{-1}$ definiranu na $\phi(U \cap V)$.*

Definicija 2.3.4. ***Derivacija*** *na $C^p_m(M)$ je linearno preslikavanje $\delta : C^p_m(M) \to \mathbb{R}$ takvo da za $f, g \in C^p_m(M)$ vrijedi:*

$$\delta(f \cdot g) = f(m)\delta(g) + g(m)\delta(f).$$

Skup svih derivacija označavamo sa $\mathcal{D}^p_m(M)$ ili $\mathcal{D}_m(M)$.

Lema 2.3.5. *Neka je f funkcija klase C^p oko 0 u $\mathbb{R}^n$. Tada f ima zapis:*

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} x^j h_j(x),$$

gdje su h_j klase C^{p-1}.

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \ldots, tx_n) \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \frac{d(tx)}{dt} dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)(tx) dt \end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.6. *Svaka derivacija od $C^p_0(\mathbb{R}^n)(p \geq 1)$ je oblika:*

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^{n} \delta(x^j) \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{|0}.$$

Dokaz. Neka je $\dot{f} \in C^p_0(\mathbb{R}^n)$, i f reprezentant od $\dot{f}$. Vrijedi da je $\delta(f) = \delta(f - f(0))$, jer iz definicije imamo $\delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ pa je $\delta(\text{konst.}) = 0$. Iz prethodne leme imamo:

$$\delta(f) = \sum_{j=1}^{n} \delta(x^j) h_j(0) \quad \text{gdje je} \quad h_j(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{|0}.$$

Preslikavanje $f \to \frac{\partial f}{\partial x^j}(0)$ ne ovisi o izboru reprezentanta $\dot{f}$, i to preslikavanje je derivacija. □

Analogni teorem vrijedi i za mnogostrukosti. Vektoru $\xi \in T_mM$ pridružimo derivaciju L_ξ definiranu sa $L_\xi(f) = T_mf \cdot \xi$ (Lieva derivacija u smjeru ξ).

Teorem 2.3.7. *Preslikavanje $\xi \to L_\xi$ je linearni izomorfizam između T_mM i $\mathcal{D}(M)$.*

Dokaz. Neka je (U, ϕ) karta za M takva da je $\phi(m) = 0 \in \mathbb{R}^n$, i (U, ϕ, v) odgovarajući reprezentant za ξ(u smislu druge definicije za tangencijalni vektor). Tada

$$L_\xi(f) = d(f \circ \phi^{-1})(0) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v^j \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(0).$$

Sada iskoristimo izomorfizam iz napomene2.3.3 i primjenimo prethodni teorem. □

Ako je (U, ϕ) karta oko točke m i $(x^1, \ldots, x^n)$ pripadne koordinatne funkcije, onda stavljamo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{|m}(f) := \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(f \circ \phi^{-1})(\phi(m)).$$

Za $m \in U$, to su derivacije na $C_m(M)$, ili po prethodnom teoremu, vektori u T_mM.
Neka su sada $X^1, \ldots, X^n$ glatke funkcije na U, tada možemo zadati vektorsko polje

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

i preslikavanje L_X iz $C^\infty(U)$ u samoga sebe definirano sa:

$$L_X f(m) = \sum_{i=1}^{n} X^i(m) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{|m} \tag{2.1}$$

U nastavku se koristi oznaka $X.f := L_X f$ za derivaciju funkcije f u smijeru vektorskog polja X.

Sada želimo poopčiti prethodni teorem(sve promatrane mnogostrukosti i funkcije na njima su glatke).

Definicija 2.3.8. *Derivacija na M je linearno preslikavanje δ sa $C^\infty(M)$ na samog sebe tako da je :*

$$\text{za } f, g \in C^\infty(M), \quad \delta(f \cdot g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f).$$

Teorem 2.3.9. *Preslikavanje $X \to L_X$ je izomorfizam vektorskog prostora vektorskih polja $\Gamma(TM)$ i vektorskog prostora derivacija $\mathcal{D}(M)$.*

Skup derivacija prirodno ima strukturu linearnog prostora. Ali kompozicija dviju derivacija ne mora biti derivacija, jer

$$\delta\delta'(fg) = f \cdot (\delta\delta' g) + (\delta\delta' f) \cdot g + (\delta f) \cdot (\delta' g) + (\delta' f) \cdot (\delta g).$$

Iz ove formule možemo odmah primjetiti sljedeće svojstvo:

Lema 2.3.10. *Ako su δ i δ' dvije derivacije, tada je*

$$\delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

također derivacija

Definicija 2.3.11. ***Operator Liejeve zagrade*** *dvaju vektorskih polja X i Y, u oznaci $[X, Y]$, je vektorsko polje pridruženo derivaciji $L_X L_Y - L_Y L_X$.*

Prethodnu lemu možemo dokazati i direktno. U lokalnim koordinatama imamo :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{i} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Schwarzova lema za glatku funkciju f daje sljedeće:

$$(L_X L_Y - L_Y L_X) f = \sum_{i=1}^{n} Z^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad Z^i = \sum_{j=1}^{n} \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right).$$

Lema 2.3.12 (Jacobijev identitet)**.** *Za vektorska polja X,Y i Z na M vrijedi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

2.4 Tenzorski svežnjevi

Za dani vektorski svežanj E na mnogostrukosti M možemo konstruirati razne svežnjeve $E^*, \otimes^p E, \ldots$ sa odgovarajućima vlaknima $E^*_m, \otimes^p E_m$ u točki m . konstrukciju provodimo za $E = TM$.
Prvo definiramo $\otimes^p T_m M$ i $\otimes^p TM$ oponašanjem konstrukcije za $T_m M$ i TM iz teorema 2.2.6. Ako su (U, ϕ) i (V, ψ) dvije karte na M takve da je $m \in U \cap V$ i $\phi(m) = \psi(m) = 0$, i ako su $u, v \in (\mathbb{R})^{\otimes p}$, kažemo da su trojke (U, ϕ, u) i $((V, \psi, v)$ ekvivalentne ako:

$$\left[(\psi \circ \phi^{-1})'(0) \right]^{\otimes p} \cdot u = v.$$

Sada definiramo $\otimes^p T_m M$ kao skup svih klasa ekvivalencije gornje relacije i, kao u definiciji 2.2.4, preslikavanje $u \to [(U, \phi, u)]$ u oznaci $\theta^{\otimes p}_{U,\phi,m}$ je bijekcija. Ovo preslikavanje prenosi strukturu linearnog prostora na $\otimes^p T_m M$ koja ne ovisi o izboru karte. Sada imamo $\otimes^p TM = \cup_{m \in M} \otimes^p T_m M$.
Na isti način definiramo i T^*M , gdje na prostor E^* gledamo kao na prostor transponiranih vektora iz E. Trojke će ovdje biti ekvivalentne ako vrijedi

$$\xi \left[(\psi \circ \phi^{-1})'(0) \right]^t \cdot \eta.$$

Kod definiranja svežnja $(\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M)$, relacija ekvivalencije na trojkama (U, ϕ, r) i (V, ψ, s) za

$$r, s \in (\otimes^p \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^q (\mathbb{R}^n)^*),$$

dana je sa

$$s = \left((\psi \circ \phi^{-1})'(0) \right)^{\otimes p} \otimes \left(\left[(\phi \circ \psi^{-1})'(0) \right]^t \right)^{\otimes p} \cdot r.$$

Definicija 2.4.1. *Prostor $T^*_m M$ je **kotangencionalni prostor** na M u točki m, a T^*M je **kotangencijalni svežanj**.*

Definicija 2.4.2. (p, q))*-**tenzor** na M je glatki prerez svežnja T^p_q, gdje T^p_q oznaka za* $(\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M)$,.

Izraz tenzor se koristi kao pokrata za "tenzorsko polje". Za (p, q)-tenzor se kaže da je p (puta) kontravariantan i q (puta) kovariantan tenzor. Skup tenzora tipa (p, q) se označava sa $\Gamma(T^p_q M)$. To je realni vektorski prostor i C^∞-modul.

Za tenzore na vektorskim prostorima imamo algebarske operacije:

i) tenzorski produkt, t.j. za sve (p, q, p', q') prirodno bilinearno preslikavanje

$$E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q} \otimes E^{\otimes p'} \otimes (E^*)^{\otimes q'} \to E^{\otimes (p+p')} \otimes (E^*)^{\otimes (q+q')};$$

ii) kontrakcije $(c_{i,j})_{((i=1,\ldots,p),(j=1,\ldots,q))}$, što su linearna preslikavanja

$$c_{i,j}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y^*_1 \otimes \cdots \otimes y^*_q)$$

$$= y^*_j(x_i) x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y^*_1 \otimes \cdots \otimes \hat{y}_j \otimes \cdots \otimes y^*_q.$$

Primjer 2.4.3. *Na $E \otimes E^*$, što je izomorfno sa $EndE$ $(A \to v^t \cdot Aw)$, jedinstvena kontrakcija je trag.*

Produkt tenzora i kontrakcije na mnogostrukosti M definiramo na svakom vlaknu pojedinačno.

Definicija 2.4.4. ***Unutarnji produkt*** *vektorskog polja X i kovarijantnog tenzora tipa $(0, p)$ je tenzor $c_{1,1}(X \otimes S)$ (tipa $(0, p-1)$) , definiran sa:*

$$(i_X S)_m(x_1, \cdots, x_{p-1}) = S_m(X(m), x_1, \cdots, x_{p-1}).$$

Propozicija 2.4.5. *Neka je $\phi : M \to N$ glatko, i S $(0, p)$-tenzor na N. formulom*

$$S^1_m(x_1, \cdots, x_{p-1}) = S_m(T_m\phi \cdot x_1, \cdots, T_m\phi \cdot x_p),$$

(gdje je $m \in M$ i $x_i \in T_mM$) je definiran $(0, p)$-tenzor na M, nazivamo ga povlak od S po ϕ, i označavamo ϕ^*S.

Propozicija 2.4.6. *a) Neka je $\phi : M \to N$ glatko. Tada za α i β redom iz $\Gamma T^0_p N$ i $\Gamma T^0_q N$, $\phi^*(\alpha \otimes \beta) = \phi^*\alpha \otimes \phi^*\beta$.*

b) Ako je $\psi : N \to P$ drugo glatko preslikavanje, onda $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Ako pretpostavimo da je ϕ difeomorfizam, onda možemo definirati ϕ^* za sve tipove tenzora. Za vektorsko polje $\Gamma(TN)$, stavljamo da je $\phi^*X(m) = T_{\phi(m)}\phi^{-1} \cdot X(\phi(m))$. Nadalje proširujemo ϕ^* do $\Gamma(T^p_q M)$ uz uvjet da je zadovoljeno svojstvo a) iz prethodne propozicije. Tako definirano preslikavanje ϕ^* komutira s kontrakcijama.

Primjer 2.4.7. *Neka je $\{(U_i, \phi_i)\}$ atlas na M. Za (p, q)-tenzor S na M, promotrimo tenzore $S_i = (\phi_i^{-1})^*S$ definirane na otvorenim podskupovima $\phi_i(U_i)$ od $\mathbb{R}^n$. Za svaki par (i, j) za koji je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, vrijedi sljedeće:*

$$\left(\phi_j \circ \phi_i^{-1}\right)^* (S_{j|\phi_j(U_i \cap U_j)})$$
$$= S_{i\phi_i(U_i \cap U_j)}.$$

Obratno, za zadanu familiju tenzora S_i na $\phi_(U_i)$ koja zadovoljava prethodne uvjete, postoji jedinstveni tenzor S na M takav da je

$$S_i = (\phi_i^{-1})^*S.$$

Stoga, kad god su tenzori i povlak definirani na otvorenim skupovima u $\mathbb{R}^n$, možemo definirati tenzore na mnogostrukostima.

Propozicija 2.4.8. *Neka je P $\mathbb{R}$-linearno preslikavanje među prostorima $\Gamma(T^p_q M)$ i $\Gamma(T^r_s M)$. Sljedeće je ekvivalentno:*

a) P je $C^\infty(M)$-linearan,

b) za s, s' u $\Gamma(T^q_p M)$, i točku m u M za koju je $s_m = s'_m$, tada je $(Ps)_m = (Ps')_m$.

Neka je $P : \Gamma(T^1_0 M) \to C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-linearno preslikavanje. Za svako vektorsko polje X i svaki $m \in M$, prethodna propozicija osigurava da $P(X)_m$ ovisi samo o $X_m \in T_m M$. Nadalje, jasno je da je $X_m \to P(X)_m$ linearna forma na $T_m M$. Sada možemo, prelaskom na lokalnu trivijalizaciju od $T^1_0 M$, pokazati da je tako dobivena sekcija svežnja T^*M glatka. Obratno, ako je ξ glatka sekcija od T^*M, preslikavanje $X \to \xi(X)$ iz $\Gamma(T^1_0 M)$ u $C^\infty(M)$ je $C^\infty(M)$-linearno. Ovo je dio poopćenog slučaja gdje se iskoriste izomorfizmi $E^* \otimes F = Hom(E, F)$ i $(E \otimes F)^* = E^* \otimes F^*$ (za konačnodimenzionalne vektorske prostore), i prethodna propozicija , da se pokaže kako je ekvivalentno zadati C^∞-linearno preslikavanje iz $\Gamma(T^p_q M)$ na $\Gamma(T^r_s M)$, ili sekciju svežnja $\Gamma\left((T^p_q M)^* \otimes (T^p_q M)\right)$, t.j. $(q + r, p + s)$-tenzor.

Primjer 2.4.9. *Ako operator zagrade gledamo kao bilinearno preslikavanje iz* $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ *u* $\Gamma(TM)$*, onda to nije tenzor. Za* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *i* $f, g \in C^\infty(M)$*, imamo:*

$$[fX, gY] = f(X.g)Y - g(Y.f)X + fg[X, Y]. \tag{2.2}$$

Izvod:

$$\begin{aligned}
L_{[fX,gY]} &= L_{fX}L_{gY} - L_{gY}L_{fX} \\
&= L_{fX}g \cdot L_Y - L_{gY}f \cdot L_X \\
&= f \cdot \left(L_X g L_y\right) - g \cdot (L_Y f L_X) \\
&= f \cdot (L_X g \cdot L_Y + g \cdot L_X L_Y) - g \cdot (L_Y f \cdot L_X + f \cdot L_Y L_X) \\
&= f \cdot X.g \cdot L_Y - g \cdot Y.f \cdot L_X + fg \cdot L_{[X,Y]}
\end{aligned}$$

Primjer 2.4.10. *Možemo gledati na q-kovarijantni tenzor kao na q linearnu formu na* $C^\infty(M)$ *modulu* $\Gamma(TM)^q$*. Ovaj način gledanja će nam biti koristan u nastavku, gdje ćemo se susretati sa podsvežnjevima od* T^0_2 *bilinearnih simetričnih formi, u oznaci* S^2M*, podsvežnjevima od* $T^0_k M$ $(k = 1, \cdots, n = \dim M)$ *vanjskih k-formi, u oznaci* $\Lambda^k M$*, i sa pripadnim prostorima prereza, bilinearnih simetričnih formi i vanjskih formi na M.*

Definicija 2.4.11. ***Vanjska forma stupnja*** *k na mnogostrukosti M je glatki prerez svežnja* $\Lambda^k M$.

Za vektorski prostor E, na $\otimes^k E$ postoji operator antisimetrizacije, koji je definiran na komponentinim tenzorima na sljedeći način:

$$\mathrm{Ant}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{s \in S_k} sign(s) x_{s(1)} \otimes \cdots \otimes x_{s(k)}.$$

Na k-formama to izgleda ovako: za $f \in \otimes^k E^*$ imamo

$$(\mathrm{Ant})(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{s \in S_k} sign(s) f(x_{s(1)}, \cdots, x_{s(k)}).$$

vanjski produkt od $f \in \Lambda^k E^*$ i $g \in \Lambda^l E^*$ je $(k+l)$-antisimetrična forma definirana sa

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!}\mathrm{Ant}(f \otimes g).$$

Gornji pojmovi se proširuju na podsvežanj $\Lambda^k M$, antisimetričnih tenzora iz $T_k^0 M$.

2.5 Riemannova metrika

Teorem o egzistenciji

Definicija 2.5.1. *Riemannova metrika na M je glatka i pozitivno definitna sekcija g svežnja S^2T^*M simetričnih bilinearnih formi na M.*

Neka su $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(1\leq i\leq n)}$ koordinatna vektorska polja u lokalnoj karti oko točke m. Neka su $u, v \in T_m M$ sa zapisima

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|m} \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|m}.$$

Tada je $g_m(u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(m)u^i v^j$, gdje je

$$g_{ij}(m) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_{|m}, \frac{\partial}{\partial x^j}_{|m}\right).$$

označavati ćemo $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, ili skraćeno:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Kako bi dokazali teorem o egzistenciji za Riemannovu metriku, iskoristit ćemo skalarne produkte definirane na otvorenim skupovima u $\mathbb{R}^n$, spojiti ih preko karti, te tako dobiti skalarni produkt na cijeloj mnogostrukosti. Zato nam treba pojam particije jedinice.

Teorem 2.5.2. *Neka je M glatka i prebrojiva u beskonačnosti(prebrojiva unija kompakata). Neka je $(U_i)_{(i\in I)}$ otvoreni pokrivač za M. Tada:*

i) postoji lokalno konačan otvoren pokrivač $(V_k)_{(k\in K)}$, upisan pokrivaču (U_i), odnosno:

- *a) svaki V_k je sadržan u nekom U_i,*
- *b) oko svake točke $m \in M$ postoji otvoren skup W koji siječe samo konačan broj skupova V_k,*

ii) postoji familija $(\alpha_k)_{(k\in K)}$ realnih glatkih funkcija na M takva da je:

a) nosač od α_k sadržan u V_k,

b) α_k je nenegativna, i za svaki $m \in M$, vrijedi:

$$\sum_{k\in K} \alpha_k(m) = 1,$$

(za fiksni m, suma je konačna). Kažemo da je (α_k) ***particija jedinice*** *upisana u pokrivač (V_k).*

Sve mnogostrukosti koje promatramo u ovom radu su povezane i prebrojive u beskonačnosti. Uz ove predpostavke imamo sljedeće:

Teorem 2.5.3. *Na svakoj mnogostrukosti postoji barem jedna Riemannova metrika.*

Dokaz. Neka je $(U_k, f_k)_{(k\in K)}$ atlas takav da je (U_k) lokalno konačan pokrivač za M, i neka mu je (α_k) upisana particija jedinice. Za skalarni produkt q na $\mathbb{R}^n$ $(n = dimM)$ i $k \in K$, neka je $q_k = f_k^*(q)$ (q_k je Riemannova metrika na U_k) i $g = \sum_k \alpha_k q_k$. q je glatka i pozitivno definitna sekcija od S^2T^*M. Ako je $m \in M$, postoji najmanje jedan $j \in K$ takav de je $\alpha_j(m) > 0$ i ako je $u \in T_mM$ nenul vektor, tada

$$g(u,u) = \sum_k \alpha_k q_k(u,u) \geq \alpha_j(m) q_j(u,u) > 0.$$

□

Neka su (U, f) i (V, f') dvije lokalne karte na M. Ako je g zadana sa (g_{kl})(odnosno (g'_{ij})) s obzirom na odgovarajuće koordinatne sustave (x_k)(odnosno (y_j)), tada je

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

odnosno

$$(g'_{ij}) = (\Phi^{-1})^t (g_{kl})(\Phi^{-1}),$$

gdje je Φ jakobijeva matrica funkcije prijelaza $(f' \circ f^{-1})$.

Primjeri

Primjer 2.5.4. *Euklidski prostor $\mathbb{R}^2$ uz standardni skalarni produkt g već ima Riemannovu strukturu. Izračunajmo lokalne izraze za tu metriku u polarnim koordinatama.*

$$\frac{\partial}{\partial r}(r,\theta) = (cos\theta, sin\theta) \ i \ \frac{\partial}{\partial \theta}(r,\theta) = (-rsin\theta, rcos\theta),$$

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = 1, \ g(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} = r^2,$$

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = 0,$$

dakle $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

Primjer 2.5.5. *Neka je na $\mathbb{R}^{n+1}$ dana kvadratna forma*

$$\langle x, x\rangle = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

i neka je H^n podmnogostrukost od $\mathbb{R}^{n+1}$ definirana sa:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \langle x, x\rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Bilinearna simetrična 2-forma

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 \in \Gamma(S^2 T^* R^{n+1})$$

na H^n inducira pozitivno definitan simetričan 2-tenzor g.
Za $a \in H^n$, $T_a H^n$ možemo zadati kao ortogonalni komplement od a u odnosu na danu kvadratnu formu $\langle , \rangle$, a možemo kao restrikciju od $\langle , \rangle$ na taj podprostor. Kako je $\langle a, a\rangle < 0$, g_a je pozitivno definitna forma.

Kovarijantne derivacije

Vektorsko polje Y na $\mathbb{R}^n$ možemo gledati kao glatko preslikavanje iz $\mathbb{R}^n$ na samog sebe. Derivacij od Y u $m \in \mathbb{R}^n$ u smijeru vektora $v \in T_m R^n \simeq \mathbb{R}^n$ je vektor $T_m Y \cdot v = d_m Y \cdot v$. Ako je X drugo vektorsko polje, derivacija od Y u točki m u smijeru X_m će biti $T_m Y \cdot X_m$. Tako dobivamo vektorsko polje $dY(X)$ kad m ide po $\mathbb{R}^n$. Jasno je da, za svaki $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $dY(fX) = f dY(X)$, a račun po koordinatama pokazuje da je $dY(X) - dX(Y) = [X, Y]$. Za mnogostrukosti ne postoji kanonski način definiranja usmijerenih derivacija vektorskog polja. Stoga radimo sljedeće:

Definicija 2.5.6. ***Koneksija*** *na glatkoj mnogostrukosti M je $\mathbb{R}$-bilinearno preslikavanje sa $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ u $\Gamma(TM)$, koje zadovoljava sljedeće uvjete :*

i) Za $X, Y \in \Gamma(TM)$ i $f \in C^\infty(M)$, imamo

$$D_{fX}Y = fD_XY \quad i \quad D_X(fY) = (X.f)Y + fD_XY,$$

gdje je $X.f = L_Xf$ derivacija funkcije f u smijeru vektorskog polja X (L_X je preslikavanje sa $C^\infty(M)$ na samog sebe definirano sa 2.1),

ii)

$$D_XY - D_YX = [X, Y].$$

Sljedeći rezultat je ”Deus ex machina” diferencijalne Riemannove geometrije.

Teorem 2.5.7. *Na svakoj Riemannovoj mnogostrukosti (M, g) postoji koneksija koja je u skladu sa zadanom metrikom, t.j. takva da tri vektorska polja X, Y, Z vrijedi:*

$$X.g(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ).$$

Dokaz. $X.g(Y, Z) = L_X(g(Y, Z))$ je derivacije funkcije $m \to g_m(Y_, , Z_m)$ u smijeru vektorskog polja X. Tada

$$X.g(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ),$$
$$Y.g(Z, X) = g(D_YZ, X) + g(Z, D_YX),$$
$$Z.g(X, Y) = g(D_ZX, Y) + g(X, D_ZY).$$

ako zbrojimo prve dvije jednakosti i oduzmemo treću,te iskoristimo svojstvo ii), onda dobijemo

$$\begin{aligned} 2g(D_XY, Z) = X : g(Y, Z) + Y.g(Z, X) - Z.g(X, Y) \\ +g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X), \end{aligned} \tag{2.3}$$

odakle dobivamo jedinstvenost za od D.
Kako bi dokazali egzistenciju od D, provijeri se (korištenjem svojstva 2.2 operatora Liejeve zagrade) da je desna strana u 2.3 C^∞-linearna po Z. Iz propozicije 2.4.8, za zadana vektorska polja X i Y, desna strana definira $(0, 1)$-tenzor, i D_XY će biti vektorsko polje pridruženo tom tenzoru u metrici g. Na kraju se još provijeri (koristeći 2.3) da D_XY zadovoljava svojstva koneksije i), ii). □

Definicija 2.5.8. *Ova koneksija je **Levi-Civita koneksija**, ili **kanonska koneksija**, u odnosu na metriku g.*

Primjer 2.5.9. *Kanonska koneksija Euklidskog prostora je $D_XY = dY(X)$.*

Napomena 2.5.10.

i) *Prisjetimo se da ako imamo jednakost $D_{fX}Y = fD_XY$, za svaku glatku funciju, onda ona za zadani Y povlači da $(D_XY)_m$ ovisi samo o X_m. Stoga, na koneksiju D možemo gledati kao na familiju bilinearnih preslikavanja sa $T_mM \times \Gamma(TM)$ u T_mM, indeksiranu sa $m \in M$, i definiranu sa $(v_m, Y) \to (D_{v_m}Y)_m$.*

ii) *$(D_XY)_m$ ovisi, u svakoj koordinatnoj okolini(za $X_m \neq 0$), o vrijednostima od Y i njegovih "prvih derivacija" u točki m.*

Propozicija 2.5.11. *Neka je g Riemannova metrika, i X, Y dva vektorska polja na mnogostrukosti M, zadan redom u lokalnum koordinatama sa*

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad \sum_{i=1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i \quad \sum_{i=1} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

U ovim koordinatama imamo :

$$D_XY = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

gdje su funkcije Γ^i_{jk} definirane izrazom $D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Stavimo li za $\partial_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}$ onda imamo:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il} \left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{ij} \right).$$

Proširenje kovarijantnih derivacija na tenzore:

Propozicija 2.5.12. *Neka je X vektorsko polje na M. Endomorfizam D_X od $\Gamma(TM)$ ima jedinstveno proširenje do endomorfizma na prostoru tenzora, koji ima istu oznaku D_X, te čuva tip tenzora i zadovoljava sljedeća svojstva:*

i) *za svaki tenzor $S \in \Gamma(T^p_q)$(za $p > 0$ i $q > 0$), i bilo koju kontrakciju c na T^p_qM,*

$$D_X(c(S)) = c(D_XS).$$

ii) *Za sve tenzore S i T,*

$$D_X(S \otimes T) = D_XS \otimes T + S \otimes D_XT.$$

Kako je $D_{fX} = fD_X$, za svaki tenzor S, $(D_XS)_m$ ovisi samo o vrijednosti vektorskog polja X u točki m. Dakle, za svaki $m \in M$ imamo linearno preslikavanje sa T_mM u $(\otimes^p T_mM) \otimes (\otimes^q T^*_mM)$, odnosno glatki prerez svežnja $T^p_{q+1}M$, a to je $(p, q+1)$-tenzor.

Definicija 2.5.13. ***Kovarijantna derivacija***, *u oznaci D, je familija linearnih preslikavanja sa* $\Gamma(T^p_q M)$ *u* $\Gamma T^p_{q+1} M$ *definirana kao gore* ($0 \leq p, q < \infty$). *Oznaka za D je zbog činjenice da za svaki tenzor* S, *tenzor* DS *ima kovarijantni stupanj(degree) za jedan veći od* S.

Primjer 2.5.14. *Ako je* $f \in C^\infty(M)$, *onda iz 2.5.6 imamo da je* $(0, 2)$*-tenzor* Ddf *simetričan. Nazivamo ga Hessijan funkcije f.*

2.6 Tenzor zakrivljenosti

Neka je Z vektorsko polje na Riemannovoj mnogostrukosti (M, g). Kovarijantna derivacija $(1, 1)$-tenzora DZ je $(1, 2)$-tenzor definiran sa

$$(D^2_{x,y})Z_m = D_x(D_Y Z)_m - (D_{D_x Y} Z_m$$

gdje je Y vektorsko polje takvo de je $Y_m = y$.
$(D^2_{x,y}Z - D^2_{y,x}Z)_m$ ovisi samo o Z_m.

Propozicija 2.6.1. *Preslikavanje*

$$(X, Y, Z) \to D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z$$

sa $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ *u* $\Gamma(TM)$ *je* $C^\infty(M)$*-linearno.*

Dokaz. Linearnost u prva dva argumenta je posljedica same definicije kovarijantne derivacije. Za treći, raspisujemo :

$$\begin{aligned} D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z &= D_X D_Y Z - D_{D_X Y} Z - D_Y D_X Z - D_{D_Y X} \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

Iskoristimo svojstvo ii), za koneksije, iz definicije 2.5.6, i dobivamo

$$D^2_{X,Y} fZ - D^2_{Y,X} fZ = f(D^2_{X,Y} - D^2_{Y,X}) + aZ,$$

gdje je a funkcija dana sa $X.(Y.f) - Y.(X.f) - [X, Y].f$. Iz definicije operatora Liejeve zagrade dobivamo da je $a = 0$. □

Definicija 2.6.2. ***Tenzor zakrivljenosti*** *Riemannove mnogostrukosti* (M, g) *je* $(1, 3)$*-tenzor definiran sa*

$$\begin{aligned} R_m(x, y)z &= (D^2_{Y,X} - D^2_{X,Y}Z)_m \\ &= (D_Y(D_X Z) - D_X(D_Y Z) + D_{[X,Y]}Z)_m \end{aligned}$$

gdje su $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *takvi da je* $X_m = x, Y_m = y, Z_m = z$.

Korisno je uvesti $(0,4)$-tenzor pridružen tenzoru R. Označit ćemo ga isto sa R, a definiramo sa $R_m(x,y,z,t) := g_m(R_m(x,y)z,t)$. Točku m u oznaci ćemo izostavljat ako to ne dovodi do zabune.

Propozicija 2.6.3. *Za $x,y,z,t \in T_mM$, imamo*

i) $R(x,y,z,t) = -R(y,x,z,t) = -R(x,y,t,z)$;

ii) $R(x,y,z,t) + R(y,z,x,t) + R(z,x,y,t) = 0$;

iii) $R(x,y,z,t) = R(z,t,x,y)$.

Možemo spojiti svojstva i) i iii) kako bi pomoću R_m dobili simetričnu bilinearnu formu ρ_m na $\Lambda^2 T_mM$. Dobijemo ju tako da stavimo

$$\rho_m(x \wedge y, z \wedge t) = R_m(x,y,z,t).$$

Sada možemo $\Lambda^2 T_mM$ snabdijeti skalarnim produktom koji je pridružen skalarnom produktu g_m, a tako da ρ_m možemo identificirat sa samoadjungiranim endomorfizmom na $\Lambda^2 T_mM$, koji ćemo zvati **operator zakrivljenosti**.
Taj skalarni produkt, koji također označavamo sa g_m, je zadan sa

$$g_m(x \wedge y, z \wedge t) = \det \begin{pmatrix} g_m(x,z) & g_m(x,t) \\ g_m(y,z) & g_m(y,t) \end{pmatrix}.$$

Neka je G^2_mM 2-Grassmann od T_mM, i

$$G^2M = \cup_{m \in M} G^2_m M$$

Ako je P 2-ravnina u T_mM sa bazom (x,y), onda

$$\frac{R_m(x,y,x,y)}{g_m(x \wedge y, x \wedge y)}$$

ne ovisi o izboru baze.

Definicija 2.6.4. ***Prerezna zakrivljenost*** *Riemannove mnogostrukosti (M,g) je funkcija $P \to K(P)$ na G^2M koju smo zadali gornjim razlomkom. Prereznu zakrivljenost ravnine $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ ćemo označiti sa $K(x,y)$. Ako je baza $\{x,y\}$ ortonormalna , onda je $K(x,y) = R_m(x,y,x,y)$.*

Teorem 2.6.5. *Prerezna zakrivljenost u potpunosti određuje tenzor zakrivljenosti.*

Promotrimo opći slučaj, i pretpostavimo da je $K(P)$ konstantna na svakom Grassmanu G_m^2M. Kako tenzor

$$R_m^0(x,y,z,t) = g_m(x,y)g_m(y,t) - g_m(x,t)g_m(y,z)$$

ima sva svojstva navedena u propoziciji 2.6.3, Iz prethodnog teorema slijedi da je $R = fR^0$, gdje je $f \in C^\infty(M)$.

Definicija 2.6.6. *Za Riemannovu mnogostrukost kažemo da je mngostrukost* ***sa konstantnom zakrivljenošću****(odnosno,* ***sa pozitivnom****,* ***sa negativnom****), ako je prerezna zakrivljenost konstantna (odnosno pozitivna, negativna). Za Riemannovu mnogostrukost čiji tenzor zakrivljenosti iščezava kažemo da je* ***ravna****.*

Bibliografija

[1] C. Bär, *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[2] S. Gallot, D. Hullin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] Ž. Milin Šipuš, J. Šiftar, *Glatke i Riemannove mnogostrukosti*, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~milin/skripta.pdf`, (kolovoz 2015.)

Sažetak

U ovom radu prvo navodimo neka svojstva regularnih ploha u $\mathbb{R}^3$, kao što je pojam Riemannovog tenzora definiran na tim plohama, i navodimo dokaz Gaussovog Veličanstvenog teorema. Nakon toga navodimo osnove diferencijalnih mnogostrukosti uključujući i pojam Riemannove metrike. Zatim obrađujemo pojam Riemannovih mnogostrukosti i proučavamo neka njihova svojstva.

Summary

In this thesis we first recall some properties of the regular surfaces in $\mathbb{R}^3$, like the notion of the Riemann tensor of this surfaces and present a proof of the Gauss's Theorema Egregium. Afterwards we present basics of Differential manifolds including a concept of the Riemannian metric on. Then we elaborate the notion of a Riemannian manifolds and study some of its properties.

Životopis

Rodio sam se 14. studenog 1991. godine u Županji. Živim u mjestu Gradište u Vukovarsko - srijemskoj županiji. Nakon završene osnovne škole upisao sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Vinkovcima. Uspješno sam riješio ispite državne mature te se 2010. godine upisao na preddipl. studij matematike na Odijelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Nakon što sam uredno položio sve ispite, s prosjekom ocjena 4.27, stekao sam titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Od akademske godine 2013/2014. upisan sam kao redovni student na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, na studij Teorijske matematike.