Geometrijski oblici u arhitekturi

Šćepanović, Zaga

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:123358

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Zaga Šćepanović

GEOMETRIJSKI OBLICI U ARHITEKTURI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, veljača 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem svim članovima svoje drage malobrojne obitelji, posebno svojoj seki Danki, koji su mi omogućili da studiram i koji su mi bili podrška kada mi je ona bila potrebna.
Zahvaljujem i svojoj najboljoj prijateljici Renati koja je bila sveprisutna.
Na kraju zahvaljujem svim svojim profesorima na Prirodoslovno-matematičkome fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, koji su mi, dijeleći sa mnom svoja stručna znanja, pomogli u svladavanju puta do cilja.
Velika hvala mojoj dragoj mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš, koja mi je pomagala u procesu pisanja i dovršavanja djela koje sada držite u rukama.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Plohe u $\mathbb{R}^3$ **3**
1.1 Rotacijske plohe 11
1.2 Translacijske plohe 21
1.3 Helikoidalne plohe 27
1.4 Pravčaste plohe 30

2 Krivulje i plohe slobodnih oblika **51**
2.1 Bézierove krivulje 51
2.2 Bézierove plohe 59

3 Booleove operacije **66**

Bibliografija **70**

Uvod

"Nema iznimne ljepote koja nema nečeg neobičnog u proporciji." (Francis Bacon)

Matematika je vrlo bitan alat koji se primjenjuje u arhitekturi. Svaki arhitekt primjenjuje matematičke (geometrijske) koncepte u svojim radovima i njihovi se projekti oslanjaju na njihovom razumijevanju. Prvi poznati teoretičar arhitekture, Marcus Vitruvius, vjerovao je da se svaki arhitekt mora držati triju osnovnih tema prilikom dizajniranja, a to su: snaga, funkcionalnost i ljepota. Ljepota je prema njemu bila u prirodi, koja je prikaz univerzalnih zakona proporcije i simetrije. No postoji li univerzalna ljepota ili je ona subjektivan dojam?
Kompleksnija geometrija i razni oblici ploha pojavljuju se već dosta rano u arhitekturi. Dvostruko zakrivljene plohe, koje vidimo na kupolama i ornamentima građevina, tek su u 19. stoljeću dobile veću primjenu zbog slobode arhitekata u stvaranju oblika i stilova, što je posljedica industrijalizacije i poboljšanja građevnog materijala. Početkom 20. stoljeća konstrukcijske metode postaju sve bolje, a graditeljstvo karakterizira upotreba pravčastih ploha, posebice vitoperih pravčastih ploha 2. reda s dvama sustavima izvodnica koje se koriste i kao zidne i kao krovne konstrukcije.
Današnja arhitektura primjenjuje mnoštvo suvremenih ideja koje definira jedinstvena geometrija. Dolaskom računalnih softvera, ovu je profesiju sasvim preuzelo eksperimentiranje, kako u tehnikama tako i u izgledu. Rezultati su noviteti koji predstavljaju različite načine pristupanja konceptualnom dizajnu i svaki od njih zasebno prenosi neku značajnu kulturnu poruku.
Cilj ovog rada jest da se u današnjem svijetu prepunom nezamislivih objekata prepoznaju osnovne geometrijske plohe/krivulje i da se prepozna nastanak (dijelova) čudesnih zdanja koja zapanjuju čovječanstvo.
Diplomski rad podijeljen je na tri dijela. U prvom dijelu navedena je osnovna podjela ploha u na rotacijske, translacijske, helikoidalne i pravčaste plohe te njihova matematička svojstva. Nakon navođenja vrsta ploha i njihovih tipičnih predstavnika prikazana je njihova primjena u stvarnom svijetu: svjetske građevine čiji su dijelovi (ili one cijele) građeni u obliku navedenih ploha. Za četiri se primjera pravčastih ploha određuju strikcijske krivulje i računa se parametar distribucije. Pokazani su i primjeri natkrivanja paraboličkim kono-

idom i hiperboličkim paraboloidom. U drugom dijelu objašnjene su Bézierove krivulje, njihova svojstva i nastajanje. Osim krivulja obrađene su i Bézierove plohe, koje se koriste za dizajn ploha slobodnih oblika. U zadnjem dijelu govori se o Booleovim operacijama i njihovoj primjeni u arhitekturi.
Slike koje su se koristile u ovom radu nacrtane su pomoću dvaju programa za crtanje: *Rhinoceros* i *Mathematica*.

Poglavlje 1

Plohe u $\mathbb{R}^3$

Plohu definiramo kao podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ kojeg "po dijelovima" opisujemo funkcijama $\mathbf{x}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definicija 1.0.1. *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \in \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\boldsymbol{x} : U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \in \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi:*

I. ***x*** *je homeomorfizam otvorenih skupova*
II. ***x*** *je glatko preslikavanje.*

Ako vrijedi i svojstvo

III. *diferencijal* ***dx*** *je injektivan,*

onda plohu nazivamo regularnom.

Preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(u, v), \quad (u, v) \in U \\ &= (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \quad \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

nazivamo lokalna parametrizacija ili koordinatna karta.

Preslikavanje $\mathbf{x}$ mora biti homeomorfizam što znači da mora biti neprekidna bijekcija čiji je i inverz neprekidan. Preslikavanje mora biti glatko, dakle sve parcijalne derivacije moraju biti neprekidne.

Uređeni par brojeva (u,v) nazivamo krivolinijskim koordinatama točke $P(x, y, z)$. Za $v = v_0$ uz u koji varira, $u = t$, dobiva se krivulja na plohi koja se naziva parametarska u-krivulja. Analogno, za $u = u_0$ uz v koji varira, dobiva se parametarska v-krivulja. Te dvije familije krivulja čine parametarsku ili koordinatnu mrežu na plohi.

Diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ je linearni operator $\boldsymbol{dx} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ koji za matrični prikaz u paru kanonskih baza od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ima Jacobijevu matricu

$$J_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Slika od diferencijala je razapeta stupcima Jacobijeve matrice stoga slijedi da je diferencijal injektivan ako i samo ako su vektori $\mathbf{x}_u := \frac{\partial x}{\partial u}$ i $\mathbf{x}_v := \frac{\partial x}{\partial v}$ linearno nezavisni, odnosno ako i samo ako vrijedi $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$.

Definicija 1.0.2. *Parametrizacija* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *je reparametrizacija od* $\boldsymbol{x}$ *ako postoji glatka bijekcija s glatkim inverzom (tj. glatki difeomorfizam)* $\theta : \tilde{U} \to U$ *takva da je* $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \circ \theta$.

Definicija 1.0.3. *Svako glatko preslikavanje* $c : I \to S$ *nazivamo krivuljom na plohi. Pritom, za preslikavanje* $c : I \to S$ *kažemo da je glatko ako je preslikavanje* $\boldsymbol{x}^{-1} \circ c : I \to U$ *glatko za neku kartu* $\boldsymbol{x} : U \to S$.

Pojam glatkog preslikavanja na S je dobro definiran, tj. ne ovisi o izboru karte $\mathbf{x}$. Kako su svake dvije karte glatko povezane, odnosno $\tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x} : U \to \tilde{U}$ je glatka funkcija, tada je i preslikavanje $\tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ c : I \to \tilde{U}$ glatko jer je

$$\tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ c = \tilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x} \circ x^{-1} \circ c$$

glatko preslikavanje.

Propozicija 1.0.4. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *krivulja takva da je* $c(U) \subset \boldsymbol{x}(U)$. *Tada postoje jedinstvene glatke funkcije* $u = u(t)$, $v = v(t) : I \to \mathbb{R}$ *takve da je*

$$c(t) = \boldsymbol{x}\Big(u(t), v(t)\Big).$$

Definicija 1.0.5. *Neka je* S *regularna ploha,* $\boldsymbol{x} : U \to \mathbb{R}^3$ *karta i* $p \in \boldsymbol{x}(U)$. *Tangencijalni vektor karte* $\boldsymbol{x}$ *u točki* $p = \boldsymbol{x}(u_0, v_0)$ *je vektor* $v_p \in \mathbb{R}^3_p$ *za koji postoji krivulja* $c : I \to S$, $c(U) \subset \boldsymbol{x}(U)$ *takva da je*

$$c(0) = p, c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u p označavamo s T_pS.

Skup T_pS je potprostor prostora $T_p\mathbb{R}^3$ s bazom $\{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)\}$. Potprostor T_pS se naziva tangencijalna ravnina plohe S u točki p.

Definicija 1.0.6. *Prva fundamentalna forma plohe S u točki* $p \in S$ *je simetričan, bilinearan funkcional* $I : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ *definiran s*

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p = v \cdot w.$$

Pridruženu kvadratnu formu $I : T_pS \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p$$

također nazivamo prvom fundamentalnom formom.

Budući da krivulju c prikazujemo u karti $\mathrm{c(t)} = \mathbf{x}\big(\mathrm{u(t)},\mathrm{v(t)}\big)$ i znamo da vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0),$$

imamo:

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2\, u'^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v\, u'v' + \mathbf{x}_v^2\, v'^2.$$

Definiramo funkcije $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ koje nazivamo fundamentalnim veličinama prvog reda plohe S u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$.

$$E = \mathbf{x}_u^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v^2.$$

Tangencijalna ravnina T_pS plohe S u točki p razapeta je vektorima $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, pa je jedinični vektor normale te ravnine

$$n = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

Propozicija 1.0.7. *Neka je S ploha zadana jednadžbom* $g(x, y, z) = a$, *gdje je* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *glatka funkcija. Tada je* Δg *jedno normalno polje koje ne iščezava niti u jednoj točki od S.*

Funkcijom g definirana je regularna ploha ako je $\Delta g \neq 0$ u svim točkama od S. Jer je Δg normalno polje, za svaki vektor v iz T_pS vrijedi $\Delta g \cdot v = 0$.

Promjenu jediničnog normalnog polja n promatrat ćemo pomoću usmjerene derivacije D_v polja n u smjeru nekog tangencijalnog vektora v.

Definicija 1.0.8. *Preslikavanje* $S_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ *definirano s* $S_p(v_p) = -D_{v_p}n$ *nazivamo operatorom oblika plohe S u točki p. (*$D_{v_p}n$ *označava usmjerenu derivaciju polja n u smjeru vektora* v_p*).*

Propozicija 1.0.9. *Preslikavanje* S_p *je linearni operator i vrijedi*

$$S_p(v_p) \in T_pS, \quad \forall v_p \in T_pS.$$

Propozicija 1.0.10. *Linearni operator* $S_p : T_pS \to T_pS$ *je simetričan, tj. vrijedi*

$$S_p(v_p) \cdot w_p = v_p \cdot S_p(w_p), \quad w_p, v_p \in T_pS.$$

Jer je S_p simetričan operator, može se dijagonalizirati, tj. postoji ortonormirana baza u T_pS, označimo ju s $\{e_1,e_2\}$, takva da vrijedi

$$S_p(e_i) = k_i e_i, \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

Svojstvene vektore od S_p nazivamo glavnim vektorima, a svojstvene vrijednosti k_1,k_2 glavnim zakrivljenostima plohe S u točki p.

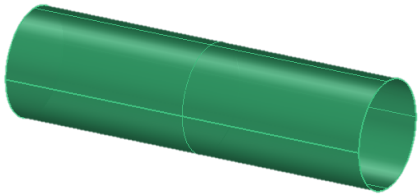
Kleinova boca

Kleinova boca je neorijentabilna ploha Eulerove karakteristike nula. Eulerova karakteristika zatvorene plohe je broj njenih karakterističnih točaka. Jedan od načina na koji ju računamo računanja je da se od broja vrhova i strana plohe oduzme broj rubova, odnosno stranica plohe. Broj koji je povezan s Eulerovom karakteristikom naziva se genus. Genus je topološka invarijanta, svojstvo koje jedinstveno određuje vrstu zatvorene plohe odnosno možemo reći da je genus broj ”rupa” na plohi. Veza između Eulerove karakteristike χ i genusa g za zatvorene plohe dana je s

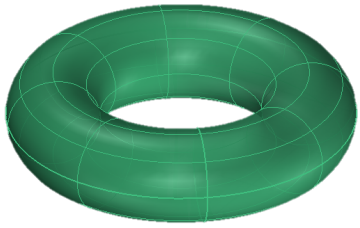
$$\chi = 2 - 2g.$$

Na primjer, sfera ima genus 0 jer je njezina Eulerova karakteristika 2. Eulerova karakteristika Kleinove boce je 0, što znači da je njezin genus 1, odnosno da ova ploha ima jednu ”rupu”.

Broj strana i broj rubova neke plohe su karakteristike po kojima se mogu razvrstati plohe. Spojimo li dva nasuprotna brida papira pravokutnog oblika (rubovi su jednake orijentacije), dobit ćemo cilindar – plohu s dvije strane i dvama rubovima, Slika 1.1.



Slika 1.1: Cilindar



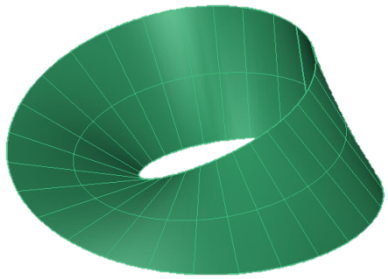
Slika 1.2: Torus

Spojimo li zatim ta dva kružna ruba cilindra, dobit ćemo torus – dvostranu i zatvorenu plohu bez rubova, Slika 1.2.

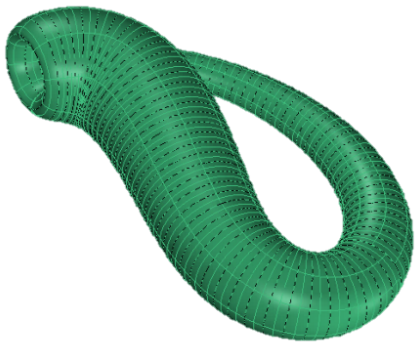
Ako su pak nasuprotni rubovi suprotno orijentirani (prije spajanja zaokrenemo jedan rub) i ako ih spojimo, nastaje Möbiusova traka – jednostrana neorijentabilna ploha s jednim rubom, Slika 1.3.

Kleinova boca nastaje tako da jednom rubu cilindra prije spajanja promijenimo orijentaciju odnosno da cilindar savinemo, a nasuprotne rubove spojimo uz zaokret, Slika 1.4.

Ova ploha je zatvorena, bez rubova, jednostrana glatka ploha koja siječe samu sebe u 3D prostoru. Ako je realizirana u četverodimenzionalnom prostoru, onda ne siječe samu sebe. Preslikavanje $f : S \to \mathbb{R}^3$ koje svakoj točki Kleinove plohe S pridružuje točku prostora $\mathbb{R}^3$ nije bijekcija. Bijekcija je samo lokalno. Kleinova ploha je također neorijentabilna. Općenito možemo reći da je ploha neorijentabilna ako sadrži barem jednu Möbiusovu traku, odnosno ako rezanjem plohe možemo dobiti barem jednu Möbiusovu traku. U ovom primjeru, uzdužnim presjekom ćemo dobiti dvije trake suprotne orijentacije. No, vrijedi i obrnuto: ako spojimo rubove dviju zrcalno simetričnih Möbiusovih traka, možemo dobiti



Slika 1.3: Möbiusova traka



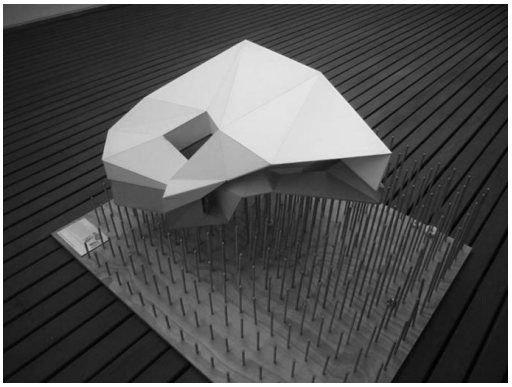
Slika 1.4: Kleinova boca

Kleinovu bocu. Možemo reći da je to ploha koja nastaje rotacijom "osmice" oko osi, ali tako da se zakrene. Kao što nastaje i Möbiusova traka rotacijom i zakretanjem, ovdje te transformacije vršimo na krivulji osmice, a ne na dijelu pravca. Parametrizacija ove plohe je

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,v) &= \Big(\Big(a+\cos\frac{u}{2}\sin v-\sin\frac{u}{2}\sin 2v\Big)\cos u, \Big(a+\cos\frac{u}{2}\sin v-\sin\frac{u}{2}\sin 2v\Big)\sin u,\\ &\quad \sin\frac{u}{2}\sin v+\cos\frac{u}{2}\sin 2v\Big).\end{aligned}$$

Sve v-krivulje ove plohe su osmice. Kako se u mijenja od 0 do 2π, osmica se zakreće od 0 do π.

Temeljne ideje Kleinove boce primjenjuju se i u arhitekturi. ”Dijelovi boce” u ovoj kući iz 2008. godine su pravocrtne platforme i zidovi koji omogućuju da primjeri iz apstraktne geometrije budu mogući za život, Slika 1.5.



Slika 1.5: Model kuće u obliku Kleinove boce

Definicija 1.0.11. *Gaussova zakrivljenost plohe S u točki p je funkcija $K : S \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$K(p) = \det S_p.$$

Srednja zakrivljenost plohe S u točki p je funkcija $H : S \to \mathbb{R}$ definirana s

$$H(p) = \frac{1}{2} tr S_p.$$

Operator S_p možemo zapisati matrično u bazi $\{e_1, e_2\}$ na sljedeći način:

$$S_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2, \end{pmatrix}$$

gdje su λ_1, λ_2 svojstvene vrijednosti operatora odnosno glavne zakrivljenosti plohe S u točki p koje označavamo s k_1,k_2 . Vrijedi:

$$K = \lambda_1 \lambda_2$$

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Predznak Gaussove zakrivljenosti daje nam informaciju o točkama plohe: one mogu biti eliptičke, hiperboličke i paraboličke.

Definicija 1.0.12. *Za plohu S kažemo da je:*

1. *plosnata ako je* $K(p) = 0$ *za svaku točku p plohe (primjer: ravnina, cilindrična ploha i tangentna ploha neke krivulje)*
2. *minimalna ako je* $H(p) = 0$ *za svaku točku p plohe (primjer: helikoid, katenoid)*
3. *konstantne zakrivljenosti ako je* $K(p) = const.$ *za svaku točku p plohe (primjer: sfera, pseudosfera)*

Definicija 1.0.13. *Druga fundamentalna forma plohe S u točki p je simetričan, bilinearan funkcional* $II : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ *definiran s*

$$II(v_p, w_p) = S_p(w_p) \cdot w_p.$$

Pridruženu kvadratnu formu $II : T_pS \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

nazivamo drugom fundamentalnom formom.

Budući da krivulju c prikazujemo u karti $c(t) = x\Big(u(t), v(t)\Big)$ i znamo da vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0),$$

imamo:

$$II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = S_p(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u\, u'^2 + S_p(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v\, u'v' + \mathbf{x}_u \cdot S_p(\mathbf{x}_v) u'v' + S_p(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v v'^2.$$

Definiramo funkcije $L, M, N : U \to \mathbb{R}$ koje nazivamo fundamentalnim veličinama drugog reda plohe S u karti $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$.

$$L = S_p(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u, \quad M = S_p(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u \cdot S_p(\mathbf{x}_v), \quad N = S_p(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v.$$

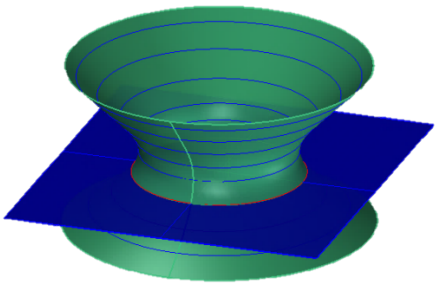
Definicija 1.0.14. *Normalna zakrivljenost plohe S u točki p u smjeru tangencijalnog vektora* v_p *je realan broj:*

$$k(v_p) = \frac{S_p(v_p) \cdot v_p}{v_p \cdot v_p}.$$

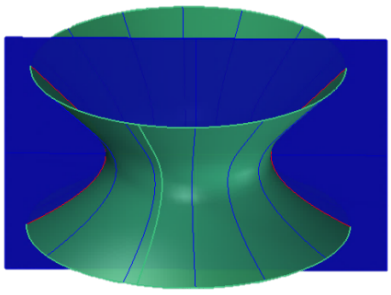
1.1 Rotacijske plohe

Rotacijska ploha je skup točaka koji nastaje rotacijom neke ravninske krivulje oko nekog pravca. Krivulju koja rotira nazivamo generatrisom plohe, a os oko koje krivulja rotira nazivamo os rotacije. Svaka točka na krivulji rotacijom opisuje kružnicu. Ravnina u kojoj leži ta kružnica okomita je na os rotacije. Rotacijske plohe često se koriste u umjetnosti, dizajnu i arhitekturi.

Neka je c krivulja. Točke krivulje c prilikom rotacije oko osi opisuju kružnice koje nazivamo paralelama rotacijske plohe, Slika 1.6. Dakle, paralele su krivulje presjeka rotacijske plohe i ravnine koja je okomita na os rotacije. Paralele leže u ravninama koje su okomite na os rotacije, a središta su im na rotacijskoj osi.



Slika 1.6: Paralele



Slika 1.7: Meridijani

Ako rotacijsku plohu presiječemo ravninom koja sadrži os rotacije, dobit ćemo krivulju koju nazivamo meridijanom, Slika 1.7. Svi meridijani neke rotacijske plohe su sukladni.

Svaki se meridijan sastoji od dva polumeridijana koji su međusobno simetrični s obzirom na os rotacije i sukladni su s generatrisom plohe. Rotacijska ploha može nastati rotacijom bilo kojeg svog polumeridijana oko rotacijske osi. Normale točaka rotacijske plohe koje leže na istoj paraleli sijeku se u istoj točki na osi rotacije. Ta je točka središte sfere koja dodiruje rotacijsku plohu duž te paralele.

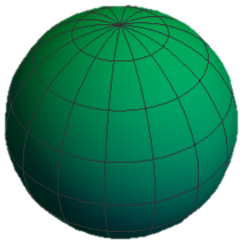
Pretpostavimo da krivulju rotiramo oko z-osi u xz-ravnini, gdje je u kut rotacije $0 \leq u < 2\pi$. Krivulja koja rotira dana je parametarski s $c(v) = \big(x(u), 0, z(u)\big)$. Ako točka $P(x_0,0,z_0)$ pripada generatrisi, paralela koja sadrži točku P bit će kružnica u xz-ravnini dana s $(x_0 \cos v, x_0 \sin v, z_0)$. Stoga će parametarska reprezentacija rotacijske plohe tada biti:

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)\big).$$

Koordinatna mreža rotacijskih ploha u ovoj parametrizaciji sastoji se od dvije familije krivulja: paralela i meridijana. Najpoznatiji predstavnici rotacijskih ploha su sfera, cilindar, stožac, katenoid, torus, paraboloid, hiperboloid i elipsoid.

Sfera nastaje rotacijom polukružnice oko svog promjera, Slika 1.8. Njezina parametrizacija je

$$\mathbf{x}(u, v) = \big(R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u\big).$$

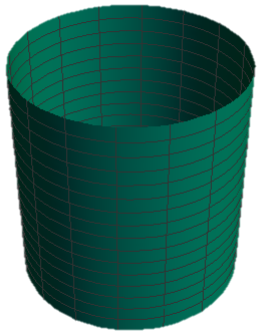


Slika 1.8: Sfera

U slučaju sfere, parametri u i v predstavljaju geografsku širinu i dužinu, a krivulje su geografski meridijani i paralele.

Kružni cilindar (kružna cilindrična ploha) , Slika 1.9, nastaje rotacijom pravca paralelnog s osi rotacije i na udaljenosti R od osi, a parametarski je dan s

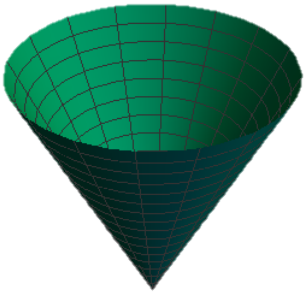
$$\mathbf{x}(u, v) = (R\cos v, R\sin v, u).$$



Slika 1.9: Cilindar

Rotacijski stožac (rotacijska konusna ili stožasta ploha) , Slika 1.10, nastaje rotacijom pravca koji s rotacijskom osi ima jednu zajedničku točku, a njegova parametrizacija je

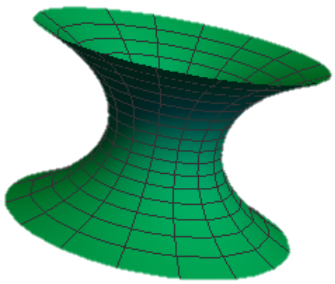
$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, au).$$



Slika 1.10: Stožac

Katenoid nastaje rotacijom lančanice $y = a \cosh x$ oko x-osi i to je jedina minimalna rotacijska ploha, Slika 1.11. Njegova parametrizacija glasi:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u).$$



Slika 1.11: Katenoid

Torus nastaje kada kružnica c radijusa r rotira u xz-ravnini oko z-osi. Tijekom te rotacije, središte kružnice rotira po tzv. centralnoj kružnici radijusa s. Kružnicu c možemo parametrizirati s $c(v) = (s + r \cos v, 0, r \sin v)$, pa dobivamo parametrizaciju torusa:

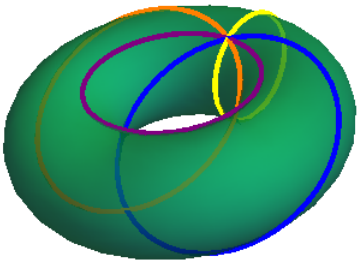
$$x(u, v) = (s + r \cos v) \cos u$$

$$y(u, v) = (s + r \cos v) \sin u$$

$$z(u, v) = r \sin v$$

gdje su u, v iz $[0,2\pi]$. Radijusi r i s mogu biti u različitim odnosima, pa razlikujemo tri vrste torusa:

- $r < s$ prstenasti torus
- $r = s$ trnoliki torus
- $r > s$ vretenasti torus



Slika 1.12: Četiri klase kružnica na torusu

Na torusu postoje četiri klase kružnica: presjeci torusa ravninom koja sadrži os rotacije, presjeci torusa ravninom koja je okomita na os rotacije i dvije klase Villarceau-ovih kružnica, odnosno presjeka torusa "dijagonalnim" ravninama kroz središte torusa pod određenim kutom, Slika 1.12.

Rotacijske plohe možemo dobiti i rotacijom čunjosječnica oko osi: jednoplošni rotacijski hiperboloid, dvoplošni rotacijski hiperboloid, rotacijski paraboloid, izdužen rotacijski elipsoid i spljošten rotacijski elipsoid.

Jednoplošni rotacijski hiperboloid, Slika 1.13, nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ oko z-osi. Njegova jednadžba jest:

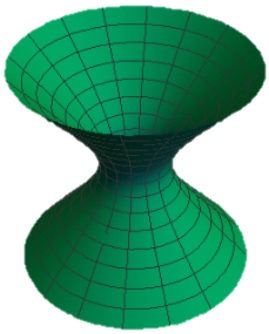
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dvoplošni rotacijski hiperboloid, Slika 1.14, nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = -1$ oko z-osi. Njegova jednadžba jest:

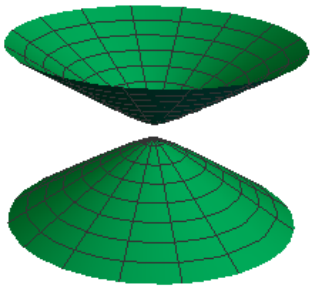
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Rotacijski paraboloid, Slika 1.15, nastaje rotacijom parabole oko svoje osi. Njegova jednadžba jest:

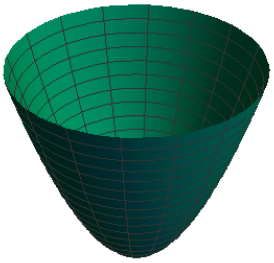
$$z = a(x^2 + y^2).$$



Slika 1.13: Jednoplošni rotacijski hiperboloid



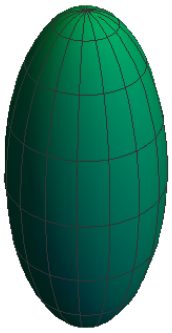
Slika 1.14: Dvoplošni rotacijski hiperboloid



Slika 1.15: Rotacijski paraboloid

Izduženi rotacijski elipsoid, Slika 1.16, nastaje rotacijom elipse oko svoje glavne osi. Njegova jednadžba jest:

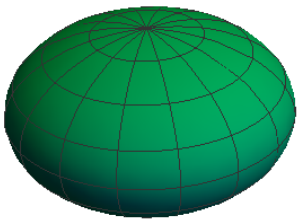
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a^2 < c^2).$$



Slika 1.16: Izduženi rotacijski elipsoid

Spljošteni rotacijski elipsoid, Slika 1.17, nastaje rotacijom elipse oko svoje sporedne osi. Njegova jednadžba jest:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a^2 > c^2).$$



Slika 1.17: Spljošteni rotacijski elipsoid

Primjena rotacijskih ploha u arhitekturi

Slika 1.18: Crkva preobraženja Spasitelja, Kizhi, Rusija

Crkva Preobraženja Spasitelja, Slika 1.18 , sagrađena je 1714. godine, a glavni materijal izrade je bilo drvo, pri čemu u konstrukciji nisu upotrebljavani čavli. Osmerokutna baza omogućila je širinu unutarnjeg prostora crkve. Zidovi crkve pružaju se uvis i postepeno se s visinom smanjuje njihova širina kako bi dobili izgled piramide na koju su stavljene 22 kupole. Svaka se kupola nalazi na cilindru koji je montiran na zakrivljenom dijelu krova. Kupole su postavljene simetrično po redovima i prekrivene su tisućama ručno rađenih ukrasa od jasike (trepetljike). Jasika se je koristila prvenstveno zato što se lako obrađuje s ručnom sjekiricom i ne savija se, a i njezin srebrnkasti sjaj reflektirao je sunčeve zrake na mnoge načine. Cijela crkva visoka je oko 30 metara i jedna je od najviših građevina izrađena od drveta. Crkva je 1966. godine postala muzej, a 1990. godine uvrštena je na popis UNESCO-ve svjetske baštine.

Ova Industrijska građevina, Slika 1.19, primjer je torusa na kojem se mogu lijepo vidjeti paralele i meridijani kružnica torusa. Zapravo su ti ”meridijani” i ”paralele” izrađeni od hrastovine i ti lukovi čine strukturu koja prekriva cijelu građevinu. Na krajevima su lukovi poduprti betonom. Građevina je podijeljena na tri dijela po dužini, a u središnjem brodu nalazi se mašinerija za preradu žitarica. Cijela zgrada prekrivena je s 1 691 tankom pločicom reflektirajućeg stakla. Početna ideja bila je koristiti svježe drvo kako bi se spriječilo dodatno savijanje lukova. Osnovni strukturni element je dvoslojni luk sastavljen od više različitih pravokutnih dijelova drveta, dugačkih oko 6.8 metara.

Slika 1.19: Industrijska građevina, Marche-en-Famenne, Belgija

Slika 1.20: Kupola Reichstaga, Berlin, Njemačka

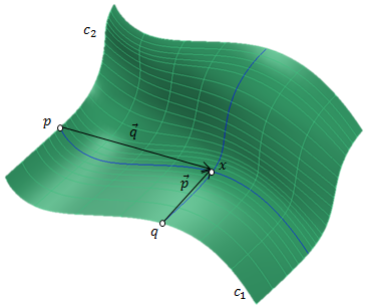
Jedan primjer elipsoida je kupola Raichstaga u Berlinu, Slika 1.20, djelo Fostera i njegovih suradnika. Ona predstavlja simbol demokracije i slobode. Čelična i staklena struktura omogućuje direktan pogled u prostor Bundestaga. U središtu kupole nalazi se reflektor svjetala od 30 redova: u svakom redu ima 12 ogledala pomoću kojih se reflektira svjetlost u prostoriju koja se nalazi 10 metara niže.
Sama kupola sastoji se od 24 čelična rebra (dijelova elipse; meridijana plohe). Paralele ovog elipsoida čini 17 željeznih prstena između kojih se nalazi 17 prozorskih stakala. Kupolu se može cijelu okružiti jer postoje dvije isprepletene spiralne platforme izrađene od čeličnih ploča.

Slika 1.21: Aspire Tower, Doha, Katar

Aspire Tower, Doha, Katar, Slika 1.21, primjer je jednoplošnog rotacijskog hiperboloida. Dizajnirao ga je arhitekt Hadi Simaan i on je bio simbol Azijskih igara 2006. godine. Glavni građevinski materijal je armirani beton, dok je vanjski dio zgrade prekriven čeličnom konstrukcijom na koju su se postavile LED lampe kako bi noću bila osvijetljena jarkim svjetlima. Fasada se sastoji od 3 452 zasebna elementa. Donji dio tornja ima promjer oko 70 metara, u najužem dijelu on iznosi 27 metara, a na vrhu tornja je oko 45 metara. Hiperboloid je na vrhu ”presječen kosom ravninom”. Kao presjek je dobivena jedna elipsa koja čini ”krov” građevine.

1.2 Translacijske plohe

Translacijske plohe nastaju gibanjem jedne krivulje po drugoj. Krivulja c_1 giba se paralelno samoj sebi na način da se točka na toj krivulji giba duž krivulje c_2. Dakle, translacijska krivulja sadrži familiju krivulja koje su kongruentne polaznoj krivulji c_1. Točku na translacijskoj plohi možemo dobiti translatirajući točku q, koja je na krivulji c_1, za neki vektor $\vec{p}$ duž krivulje c_2. Isto tako možemo i translatirati točku p, koja je na krivulji c_2, za vektor $\vec{q}$ duž krivulje c_1. Krivulje c_1 i c_2 nazivamo generatrisama plohe, Slika 1.22.



Slika 1.22: Translacija krivulje c_1 po krivulji c_2

Krivulje c_1 i c_2 dane su svojim parametarskim reprezentacijama s parametrima u i v, pa parametrizacija translacijske plohe glasi:

$$\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v).$$

Da bi skup točaka definiran ovom parametrizacijom bio regularna ploha, nužno je da tangencijalni vektori krivulja generatrisa ne budu kolinearni, tj. $\dot{c_1}(u) \times \dot{c_2}(v) \neq 0$.
Izravno generiranje translacijskih ploha gibanjem jedne krivulje po drugoj krivulji te činjenica da translacijske plohe nose dvije familije kongruentnih krivulja, čine ih pogodnim za primjenu u dizajnu i graditeljstvu.

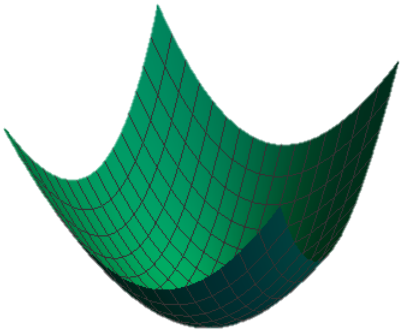
Najpoznatiji primjer translacijske plohe je cilindar koji nastaje gibanjem pravca po kružnici ili kružnice po pravcu. Ravninske krivulje koje leže u ortogonalnim ravninama često se koriste za generiranje translacijskih ploha.

Kod rotacijskih ploha imali smo rotacijski paraboloid dan jednadžbom $z = a(x^2 + y^2)$. Ploha je nastala rotacijom parabole $z = ax^2$ oko z-osi. Vidjet ćemo da rotacijski paraboloid

može također biti i translacijska ploha. Uvedemo li parametre $u = x$ i $v = y$, dobit ćemo parametarsku jednadžbu paraboloida

$$(x, y, z) = (u, v, au^2 + av^2) = (u, 0, au^2) + (0, v, av^2).$$

Odavde vidimo parametarsku jednadžbu translacijske plohe koja govori da je ploha nastala translacijom parabole $c_1(u) = (u, 0, au^2)$ iz xz-ravnine duž parabole $c_2(v) = (0, v, av^2)$ koja se nalazi u yz-ravnini (Slika 1.23).



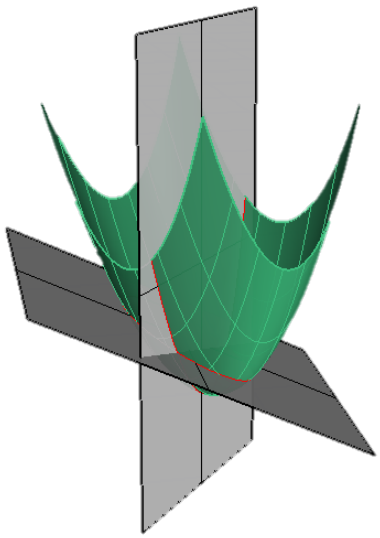
Slika 1.23: Paraboloid kao translacijska ploha

Osim rotacijskog paraboloida, u translacijske plohe spadaju i eliptički paraboloid te hiperbolički paraboloid (hipar). Ove plohe nastaju gibanjem jedne parabole po drugoj.
Kod **eliptičkog paraboloida**, nivo krivulje su elipse, pa stoga i naziv "eliptički". Obje parabole su okrenute na istu stranu, a ravnine u kojima leže parabole su međusobno okomite. Os eliptičkog paraboloida je paralelna ravninama kojima pripadaju obje parabole (generatrise) i dobije se kao presjek te dvije simetrične ravnine.
Jednadžba eliptičkog paraboloida dana je s:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Ako gledamo presjek eliptičkog paraboloida i ravnine koja je paralelna njegovoj osi (ravnine paralelne xz i yz-ravninama, kao rezultat ćemo dobiti parabolu (za $x = 0$ ili $y = 0$, dobit ćemo jednadžbu $z=\frac{y^2}{b^2}$ ili $\frac{x^2}{a^2}$, što je jednadžba parabole). U bilo kojem drugom slučaju

ravnine, presjek će biti ravninska krivulja elipsa (za sve ravnine oblika $z = c, c > 0$; posebno, za $z = 1$, dobivamo elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$). (vidi Sliku 1.24)



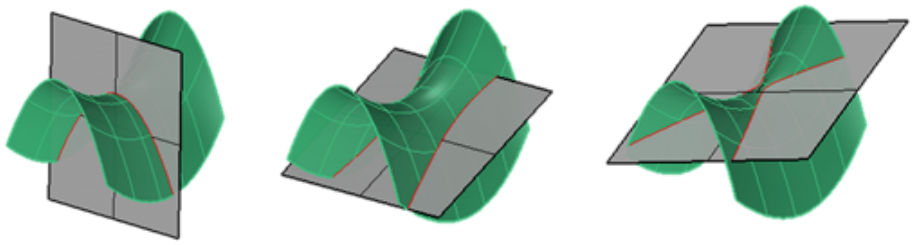
Slika 1.24: Presjek eliptičkog paraboloida ravninom

Hiperbolični paraboloid nastaje klizanjem parabole s tjemenom okrenutim prema gore po paraboli čije je tjeme okrenuto prema dolje, s tim da su parabole međusobno okomite. Ova ploha ima oblik sedla, pa se i ona sama često naziva sedlastom plohom ili sedlom. Presjek dviju ravnina koje sadrže generatrise je os hiperboličnog paraboloida. Vrh ove plohe je presjek njezine osi i same plohe, a tangencijalna ravnina u tom vrhu okomita je na os. Jednadžba ove plohe je

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Ako hiperbolični paraboloid presiječemo ravninom, kao rezultat presjeka možemo dobiti tri moguća slučaja. Ako je ravnina kojom siječemo paralelna xz i yz-ravninama, presjek je parabola. Kod presjeka ove plohe s tangencijalnom ravninom, kao rezultat ćemo dobiti jedan par pravaca. Ovo nam govori da hiperbolični paraboloid sadrži dvije familije pravaca, što znači da spada u pravčaste plohe. U svim ostalim slučajevima, presjek hiperboličkog paraboloida i ravnine bit će hiperbola. (Slika 1.25)

Promjenom koordinata, ta ploha može imati i jednadžbu $z = axy$. Zbog svojih svojstava, ova ploha je pronašla veliku primjenu u arhitektonskom dizajnu.



Slika 1.25: Presjek hiperboličkog paraboloida ravninom

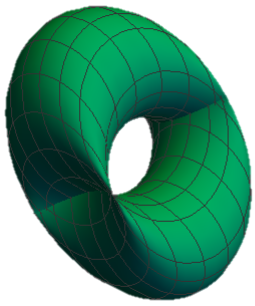
Češka kupola je dio oble plohe izveden nad pravokutnim tlocrtom, kod kojega je dijagonala pravokutnika manja od promjera polukugle.
Neka je dana kružnica k_c i ravnina E koja je okomita na ravninu te kružnice i neka je k_d kružnica jednakog radijusa kao i k_c čije se središte nalazi na kružnici k_c. Translacijom kružnice k_d na način da u svakom položaju bude paralelna ravnini E, nastaje češka kupola, Slika 1.26.
Njezina parametrizacija je:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u, b \cos v, a \sin u + b \sin v),$$

a njezina jednadžba:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2\right)^2 = 4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

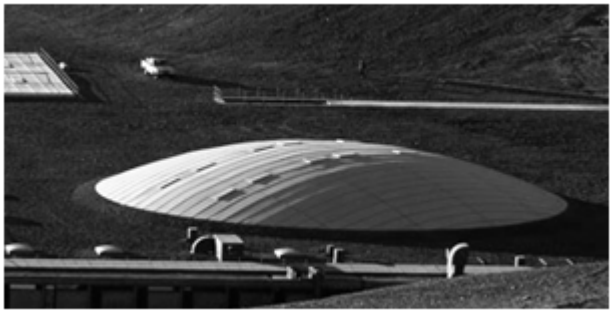
Vidimo da je češka kupola algebarska ploha 4. stupnja.



Slika 1.26: Češka kupola

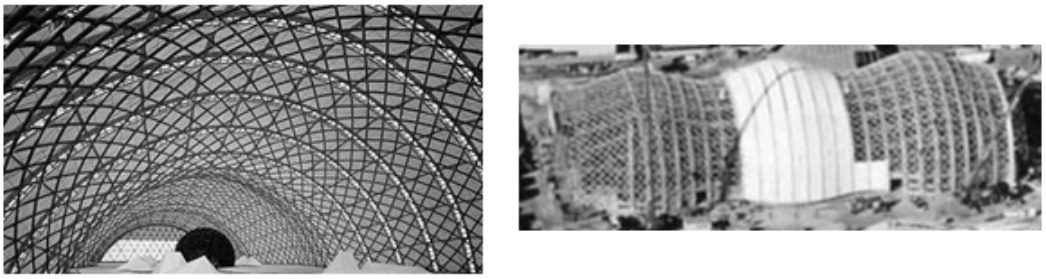
Primjena translacijskih ploha u arhitekturi

U okolišu u kojem vladaju ekstremni uvjeti života (vlažnost ispod 10%, jaka ultraljubičasta zračenja, velika nadmorska visina, izolacija) smješten je hotel koji omogućuje znanstvenicima i tehnolozima, koji vrše istraživanja, da prežive u ovakvim uvjetima, Slika 1.27. Dizajniran je od strane arhitekata Auer + Weber. Ova kupola je dio hotela koji natkriva unutrašnji vrt. Prirodni materijali i boje omogućuju da se ova građevina integrira u pustinjsko područje. Kupola je promjera 35 metara i natkrivena je armiranim betonom i čeličnom strukturom.



Slika 1.27: Eso Hotel, Cerro paranal, Čile

Sljedeći primjer je paviljon izložbe u Njemačkoj, Expo 2000. Tema izložbe bila je okoliš. Osnovni koncept izgradnje ovog paviljona bio je napraviti jedan objekt koji će imati što je manje moguće industrijskog otpada kada se rastavi. Cilj je bio ili reciklirati ili ponovno upotrijebiti sve materijale koji se budu koristili u izgradnji. Tunelski svod ovog paviljona, Slika 1.28, dugačak je oko 74 metra, širok 25 metara i visok 16 metara. Umjesto jednostavnog svoda, koristio se svod s mrežom trodimenzionalnih krivulja s različitim udubljenjima i širinama. Tunelski svod bio je prekriven mrežom od papira koju su činili jednakostranični trokuti. Cijela se građevina, umjesto betonskog temelja, oslanja na kutijama čeličnih okvira i na pločama koje su punjene pijeskom. Dva polukružna krajnja zida trebala su dobiti na čvrstini, što se postiglo uporabom drvenih svodova koji su pričvrstili krajeve papirnatog pokrova. Čvrstoća se postigla razvlačenjem žica pod kutom od 60 ° od tla.



Slika 1.28: Japanski paviljon, Expo 2000, Hannover, Njemačka

Zračna luka JFK, Slika 1.29, djelo je Eeroa Saarinena. Ideja je bila uhvatiti ”duh leta” što je i učinjeno primjenom betonskog krova koji predstavlja pticu u letu. Struktura terminala sastoji se od četiri dijela armiranog betona koji se šire prema van iz središta. Osim betona, građevina je ojačana i primjenom čelika. Na beton se nadovezuju i staklene ploče koje su poduprte čelikom. Ti stakleni zidovi su postavljeni pod određenim kutom prema unutrašnjosti oponašajući time pravi prozor na avionu. Terminal je zatvoren 2011. godine.

Slika 1.29: Zračna luka JFK, New York, SAD

1.3 Helikoidalne plohe

Helikoidalne plohe nastaju tzv. helikoidalnim gibanjem prostorne krivulje. To je gibanje u kojem prostorna krivulja rotira oko neke osi u ravnini i istovremeno vrši pomak u smjeru te osi. Krivulja koja se giba je generatrisa. Svaka točka na generatrisi tijekom gibanja opisuje jednu novu krivulju - cilindričnu spiralu. Dakle, mreža kongruentnih generatrisa i cilindričnih spirala čine helikoidalnu plohu. Tangencijalna ravnina proizvoljne točke na plohi određena je tangentama generatrise i obične cilindrične spirale (koju opisuje jedna točka generatrise u gibanju) u toj točki. Presjek ravnine koja sadrži os plohe i same plohe je krivulja koju zovemo meridijan m.
Kako bismo odredili parametrizaciju helikoidalnih ploha, prisjetimo se helikoidalne transformacije. Imamo točku q koja se rotira oko rotacijske osi (za kut u_1) i translatira se paralelno osi do položaja q_1. Udaljenost točaka je s_1. Ovo ponovimo n puta, do konačnog položaja. Omjer udaljenosti dviju točaka i kuta rotacije je konstantan i jednak je parametru p. Nakon jednog punog okreta, rotacije za 2π, udaljenost točaka jednaka je h, pa je parametar p jednak $p = \frac{h}{2\pi}$. Bez smanjenja općenitosti, plohu ćemo parametrizirati tako da kod helikoidalne transformacije primjenjujemo rotaciju oko z-osi i translaciju po z-osi.

Uzimajući za meridijan krivulju $(x(u), 0, z(u))$ u xz-ravnini kao generatrisu, parametrizacija je:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(u) + pv).$$

Od helikoidalnih ploha, najveću primjenu u arhitekturi imaju one kojima je generatrisa pravac ili kružnica.

Ako je generatrisa pravac koji podvrgavamo helikoidalnom gibanju, onda zapravo imamo primjer pravčaste plohe. Pravac koji se giba može:

- biti paralelan s osi gibanja (dobivena ploha je kružni cilindar)
- sjeći os gibanja (specijalno sjeći je ortogonalno – dobivena ploha je helikoid)
- biti mimoilazan s osi gibanja (specijalno, biti mimoilazan, ali ortogonalan na os gibanja; u ovom slučaju, dobivena ploha je poopćeni helikoid)

Kod helikoida imamo pravac koji je okomit na os oko koje rotira i siječe je te po kojoj se translatira. Tijekom cijelog helikoidalnog gibanja, pravac je okomit na os i paralelan ravnini (ravnina je okomita na os plohe). Ako spiralu po kojoj se giba pravac i os gibanja interpretiramo kao direktrise pravčaste plohe, vidimo da je ovaj helikoid specijalan slučaj konoida.

Pravac koji se giba dan je s $c(v) = (v, 0, 0)$, pa je parametrizacija helikoida:

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, pu).$$

Za izgradnju brojnih stubišta, primjenjuje se presjek helikoida i rotacijskog cilindra. Neka os cilindra siječe x-os u točki $m(r, 0, 0)$. Prema tome, jednadžba cilindra dana je s $x^2 - 2rx + y^2 = 0$. Odredimo presjek cilindra i helikoida.

$$(v \cos u)^2 - 2r(v \cos u) + (v \sin u)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v^2 \cos^2 u - 2rv \cos u + v^2 \sin^2 u = 0$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 2rv \cos u = 0$$

$$\Leftrightarrow v(v - 2r \cos u) = 0$$

Vidimo dva moguća rješenja jednadžbe: ili je $v = 0$ (zajednička z-os) ili je $v = 2r \cos u$. U ovom drugom slučaju imamo parametrizaciju krivulje presjeka:

$$x(u) = 2r \cos u \cos u$$

$$y(u) = 2r \cos u \sin u$$

$$z(u) = pu.$$

Primijenimo li translaciju za vektor $t = (-r, 0, 0)$ i formule za trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta, imamo:

$$x(u) = r(\cos(2u) + 1$$

$$y(u) = r\sin(2u)$$

$$z(u) = pu = \frac{p}{2} \cdot 2u.$$

Ovime smo dobili parametrizaciju krivulje (spirale) koja je presjek helikoida i cilindra. Još jedan važan primjer helikoidalne plohe koji pripada pravčastim plohama je razvojna pravčasta ploha koja se dobije helikoidalnim gibanjem tangente točke na helikoidalnoj plohi.

Primjena helikoidalnih ploha u arhitekturi

Helikoidalne plohe najvećim se dijelom primjenjuju u izradi stepeništa. Tu postoji mnoštvo različitih ideja za dizajn kombinirajući razne materijale u izradi. Razlikuju se helikoidalna i spiralna stepeništa. Spiralna su ona koja imaju vidljivu os oko koje rotiraju i po kojoj se translatiraju stepenice. Ovakva stepeništa imaju rukohvat samo s jedne strane i "smještena" su unutar cilindra.

Slika 1.30: Primjer spiralnog i helikoidalnog stepeništa

Za razliku od njih, helikoidalna stubišta imaju rukohvat s obiju strana jer nemaju vidljive osi. Nisu ograničeni kružnim oblikom, već mogu biti rađeni u obliku elipse. Budući da nemaju os koja podupire drugi kraj stepenica, moraju imati bolji građevni materijal i konstrukciju.

1.4 Pravčaste plohe

Pravčaste plohe nastaju gibanjem pravca duž neke krivulje c. Dakle, generirane su jednom familijom pravaca koje zovemo izvodnice. Svaka takva ploha dopušta parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u), \quad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

Krivulja $c(u)$ je direktrisa ili bazna krivulja plohe koja siječe svaku izvodnicu u jednoj točki, a pravci određeni vektorom smjera $e(u)$ su izvodnice plohe. Možemo bez smanjenja općenitosti uzeti $e(u)$ kao jedinično polje duž krivulje c.

Ako se svake dvije izvodnice plohe, koje su međusobno blizu, sijeku ili su paralelne, plohu nazivamo razvojnom pravčastom plohom. Razvojne je plohe moguće razviti u ravninu. Gaussova zakrivljenost razvojnih ploha jednaka je 0. Tu spadaju cilindrične, konusne i tangentne plohe.
Ako su svake dvije izvodnice plohe, koje su međusobno blizu, mimosmjerne, plohu nazivamo vitoperom pravčastom plohom. Ove se plohe ne mogu razviti u ravninu. Gaussova zakrivljenost vitoperih pravčastih ploha je različita od 0. Tu spadaju Möbiusova traka, jednoplošni hiperboloid, hiperbolički paraboloid i helikoid. Postoji više načina izvođenja pravčastih ploha. Jedan od njih je taj da su pravčaste plohe familije pravaca koje sijeku tri prostorne krivulje. Te krivulje nazivamo ravnalicama, a pravce koji ih sijeku nazivamo izvodnicama pravčaste plohe.

Primjeri vitoperih pravčastih ploha

Kod **Möbiusove trake** direktrisa je kružnica parametarski zadana s $c(u) = (r\cos u, r\sin u, 0)$. Pravci (izvodnice) rotiraju u ravnini kojoj pripada normala kružnice pod kutom $\frac{u}{2}$. Stoga vrijedi $e(u) = (\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2})$. Ova ploha dana je parametarski s:

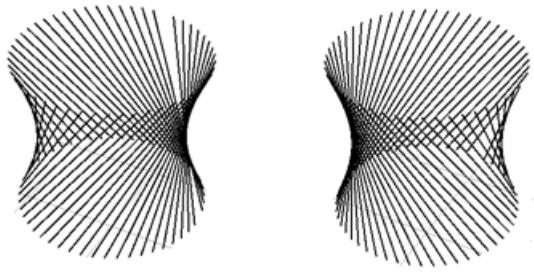
$$\mathbf{x}(u, v) = \left(r\cos u + v\cos\frac{u}{2}\cos u, r\sin u + v\cos\frac{u}{2}\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right).$$

Möbiusova traka je neorijentabilna ploha. Za plohu kažemo da je orijentabilna ako za svaku funkciju prijelaza između različitih karata vrijedi $\det J > 0$, gdje je J Jacobijeva matrica funkcije prijelaza $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$, odnosno ako je

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) > 0.$$

To će biti ako i samo ako na plohi postoji glatko, normalno polje koje nigdje ne iščezava.

Jednoplošni hiperboloid kao pravčasta ploha nastaje rotacijom pravca oko njemu mimosmjerne osi. Projektivno, bilo koja tri mimosmjerna pravca koji nisu paralelni s istom ravninom direktrise su jednoplošnog hiperboloida, a izvodnice čine njihove transverzale. Hiperboloid kao pravčasta ploha ima dva sustava izvodnica, što znači da svakom njegovom točkom prolaze dvije izvodnice, svaka iz jednog sustava, Slika 1.31. Sve izvodnice istog sustava su međusobno mimosmjerne, a svaka od njih siječe sve izvodnice drugog sustava. Bilo koje tri izvodnice jednog sustava možemo odabrati za direktrise jednoplošnog hiperboloida.



Slika 1.31: Sustavi izvodnica jednoplošnog hiperboloida

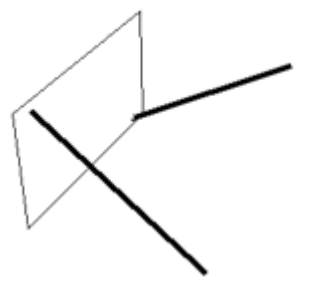
Jednoplošni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ kao pravčasta ploha dan je parametarski:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c).$$

Krivulja $c(u) = (a \cos u, b \sin u, 0)$ je elipsa u xy-ravnini. Gaussova zakrivljenost u svakoj točki jednoplošnog hiperboloida je negativna. Takve točke zovemo hiperboličkim točkama plohe.

Osim jednoplošnog hiperboloida, dva sustava izvodnica ima i **hiperbolički paraboloid - hipar**. Projektivno gledano, direktrise hipara su tri mimosmjerna pravca – dva u konačnosti i jedan u beskonačnosti, Slika 1.32. Beskonačno daleki pravac zadaje se direkcijskom ravninom. Direktrise pripadaju jednom od dva sustava izvodnica plohe. Izvodnice plohe su pravci koji sijeku direktrise u konačnosti, a paralelni su s direkcijskom ravninom.
Svakom točkom hipara prolazi po jedna izvodnica iz svakog sustava. Bilo koje tri izvodnice jednog sustava mogu se odabrati kao direktrise, a transverzale direktrisa su izvodnice drugog sustava. Hiperbolički paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ kao pravčasta ploha dan je parametarski:

$$\mathbf{x}(u, v) = (au, 0, u^2) + v(a, \pm b, 2u).$$



Slika 1.32: Projektivno nastajanje hiperboličkog paraboloida

Ako ovu plohu još podvrgnemo rotaciji, dobit ćemo jednadžbu $z = axy$, pa imamo još jednu pravčastu parametrizaciju hiperboličkog paraboloida:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u).$$

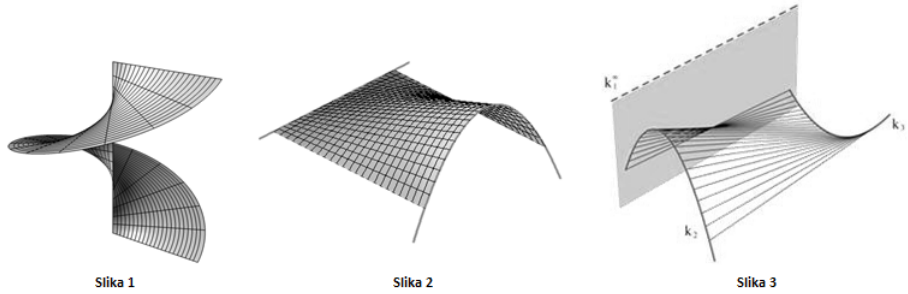
Pravčasta ploha s parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ nije cilindrična ploha ako su vektori $e(u)$ i $e'(u)$ linearno nezavisni, odnosno ako je zadovoljen uvjet

$$e(u) \times e'(u) \neq 0.$$

Pravčasta ploha koja nije cilindrična i čije su izvodnice paralelne nekoj fiksnoj direkcijskoj ravnini naziva se *Catalanovom* ili *konoidalnom plohom*. Projektivno, kod Catalanovih ploha direktrisa je beskonačno daleki pravac. Ta fiksna ravnina koja sadrži beskonačno daleku direktrisu naziva se direkcijskom ravninom pravčaste plohe. Ako izvodnice sijeku pritom neki pravac (koji zovemo osi konoida), ploha je **konoid**.
Jedna direktrisa (koja nije beskonačno dalek pravac) i izvodnica su međusobno okomiti pravci, ali direktrise konoida mogu biti i parabola i dva pravca, od kojih je jedan beskonačno dalek pravac zadan direkcijskom ravninom, odnosno mogu biti dvije parabole i jedan beskonačno daleki pravac (Slika 1.33). U tom slučaju je direkcijska ravnina paralelna s osi parabole, što znači da se beskonačno daleki pravac i parabola sijeku, pa iz opće teorije izlazi da je ploha 3. stupnja. Izvodnica konoida je spojnica probodišta ravnine paralelne direkcijskoj ravnini s direktrisama (pravcem i parabolom).
Za izračunavanje stupnja pravčaste plohe koristimo sljedeće teoreme:

Teorem 1.4.1. *Ako ravnalice k_1, k_2, k_3 redova n_1, n_2, n_3 nemaju zajedničkih točaka, tada je red pravčaste plohe $2n_1n_2n_3$.*

Teorem 1.4.2. *Ako se krivulje k_1 i k_2 sijeku u s_3, krivulje k_1 i k_3 u s_2, a krivulje k_2 i k_3 u s_1 točaka, tada je red pravčaste plohe jednak $2n_1n_2n_3 - (n_1s_1 + n_2s_2 + n_3s_3)$.*



Slika 1.33: Nastajanje konoida

Iz definicije konoida slijedi da je on generiran pravcem koji se giba po fiksnoj osi i oko nje istovremeno rotira. Istovremenom translacijom i rotacijom pravca okomitog na os oko te osi takvom da je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije nastaje konoid koji nazivamo *uspravni helikoid*. Helikoid kao pravčasta ploha dan je parametrizacijom:

$$\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, bu) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

Generalizacija uspravnog helikoida je eliptički helikoid parametarski dan:

$$\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, cu) + v(a \cos u, b \sin u, 0)$$

Helikoid je jedina pravčasta ploha koja je minimalna, odnosno koja ima srednju zakrivljenost 0.
Poopćeni helikoid je ploha koja nastaje istovremenom rotacijom pravca oko fiksne osi pri čemu je nagnut prema osi pod konstantnim kutom θ i translacijom duž fiksne osi (s međusobno proporcionalnim brzinama). Ako je $\theta = 90°$, onda je helikoid *uspravni poopćeni helikoid*, Slika 1.34.

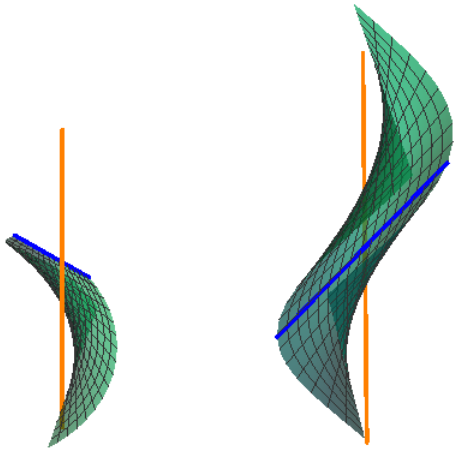
Poopćeni helikoidi imaju parametrizaciju:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, bu) + v(-a \cos \alpha \sin u, \cos \alpha \cos u, \sin \alpha).$$

Pravac koji rotira, odnosno koji se giba helikoidalno dan je parametrizacijom:

$$c(u) = (a, 0, 0) + v(0, \cos \alpha, \sin \alpha)$$

gdje su a, α konstante.

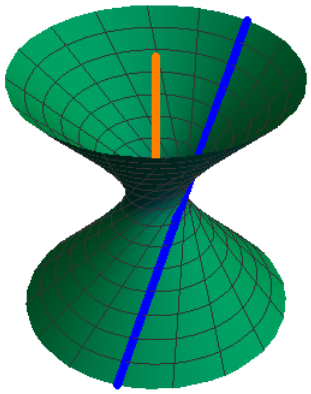


Slika 1.34: Uspravni poopćeni helikoid

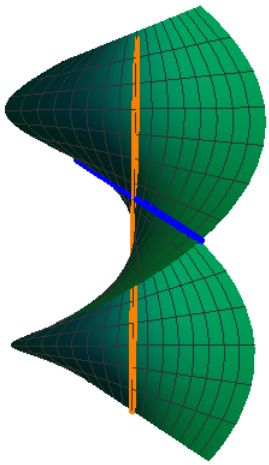
Posebni slučajevi:

I) $b = 0$ ploha je rotacijski jednoplošni hiperboloid (Slika 1.35)

II) $a = \alpha = 0$ ploha je helikoid, a krivulja koja rotira je $c(u) = (0, 0, 0) + v(0, 1, 0) = v(0, 1, 0)$, tj. y-os (Slika 1.36)

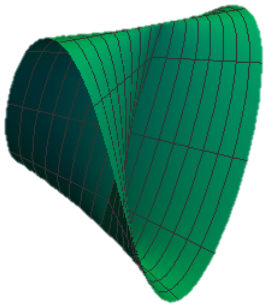


Slika 1.35: Ako je $b = 0$, ploha je jednoplošni hiperboloid



Slika 1.36: Ako vrijedi $a = \alpha = 0$, onda je ploha helikoid

Poseban primjer konoida je *Plückerov konoid* dan jednadžbom $z = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Nastaje translacijom i rotacijom pravca paralelnog s nekom ravninom oko osi okomite na tu ravninu tako da se pravac giba harmonijski gore-dolje na način da se nakon pola kruga okreta oko osi, podudara s početnim položajem.



Slika 1.37: Plückerov konoid

Neka je jedna direktrisa z-os, a direkcijska ravnina okomita ne tu os. Za drugu direktrisu uzimamo elipsu kojoj jedno tjeme (na velikoj osi) pripada z-osi. Ovaj konoid može se "sta-

viti" u rotacijski cilindar. Svaki rotacijski cilindar koji sadrži z-os, siječe Plückerov konoid duž elipse. Kako bismo vidjeli da je ova ploha pravčasta, odnosno kako bismo uočili izvodnice na slici konoida, moramo parametre u i v pretvoriti u polarne koordinate.
Vrijedi:

$$u = r\cos\theta$$

$$v = r\sin\theta.$$

Plückerov konoid dan je parametarski s $\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \frac{2uv}{u^2+v^2}\right)$.

U polarnim koordinatama, konoid je dan na sljedeći način:

$$\mathbf{x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 2\theta) = (0, 0, \sin 2\theta) + r(\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Dakle, generatrisa je z-os, a izvodnice su kružnice dane parametarski u polarnim koordinatama $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ koje prolaze kroz z-os i paralelne su s direkcijskom ravninom.

Generalizacija Plückerova konoida, koji ima n preklapanja, su plohe koje nastaju rotacijom pravca oko z-osi, istovremeno s oscilatornim gibanjem (perioda 2π).
Plückerov konoid dan je jednadžbom:

$$z(x^2 + y^2) - (3x^2 + y^2) = 0.$$

Razvojne pravčaste plohe

Definicija 1.4.3. *Ploha je razvojna ako je njena Gaussova zakrivljenost* $K = 0$.

Razvojne plohe su izometrične s ravninom odnosno mogu se razviti u ravninu pri čemu udaljenosti na plohi ostaju očuvane. Theorema Egregium kaže da ako imamo lokalnu izometriju ploha $S, \tilde{S}$, onda vrijedi $K(p) = \tilde{K}(F(p))$, gdje je F izometrija, a p točka na plohi. Ovaj teorem povlači da sve razvojne plohe imaju jednaku Gaussovu zakrivljenost (u odgovarajućim točkama). Obrat općenito ne vrijedi, no Mindingov teorem kaže da vrijedi ako je Gaussova zakrivljenost jednaka i konstantna, tj. ako je $K = \tilde{K} = const.$, onda su $S, \tilde{S}$ izometrične.

Dakle, ploha je razvojna ako i samo ako je $K = 0$.

Za razvojnu pravčastu plohu vrijedi ako je njezina tangencijalna ravnina jednaka u svim točkama na bilo kojoj izvodnici, odnosno ako vektor normale čuva svoj smjer duž izvodnica. Ako je vektorsko polje $e(u)$ konstantno, onda pravčastu plohu nazivamo ***cilindričnom plohom***. Vektorsko polje $e(u)$ predstavlja smjer osi. Dakle, parametrizacija cilindrične plohe je

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve,$$

gdje je c regularna krivulja. Pravci (izvodnice) cilindrične plohe su međusobno paralelni.

Ako krivulja c (generatrisa) degenerira u točku, pripadna ploha je ***konusna ploha***. Njezina je parametrizacija:

$$\mathbf{x}(u, v) = p + ve(u),$$

Vrh konusa ne zadovoljava definiciju plohe, odnosno konus kao ploha skup je navedenih točaka bez točke p.

Ploha koju čine tangente neke prostorne krivulje, naziva se ***tangentna ploha***. Parametrizacija tangentnih ploha je

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + vc'(u),$$

gdje je c regularna krivulja, a c' njezino tangencijalno polje.

Teorem 1.4.4. *Neka je* $x(u, v) = c(u) + ve(u)$, $\|e(u)\| = 1$, *parametrizacija pravčaste plohe* S.

I) Ako je $c'(u) \equiv 0$, *onda je* S *konusna ploha.*

II) Ako je $e'(u) \equiv 0$, *onda je* S *cilindrična ploha.*

III) Ako c' *i* e' *nikada ne iščezavaju, onda je* S *tangentna ploha.*

Lema 1.4.5. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *regularna krivulja i neka je njezina zakrivljenost* κ *različita od nule u svim točkama. Tangentna ploha je regularna svugdje osim duž krivulje* c.

Tangentna ploha je singularna duž krivulje c, pa se krivulja c kod tangentnih ploha naziva još i grebenom tih ploha. Greben je envelopa (ovojnica) izvodnica tangentne plohe.

Definicija 1.4.6. *Envelopa neke familije pravaca je krivulja koja u svakoj svojoj točki tangencijalno dira jedan pravac te familije. Dakle, u svakoj točki envelope, postoji pravac koji je tangenta na tu krivulju u toj točki.*

Vektori $c'(u) \times e(u)$ i $e'(u) \times e(u)$ su linearno zavisni ako je njihov vektorski produkt jednak nuli, odnosno ako vrijedi uvjet $[c'(u) \times e(u)] \times [e'(u) \times e(u)] = 0$, tj. ako je

$$\Big(c'(u), e'(u), e(u)\Big) = 0.$$

Taj uvjet zovemo uvjetom torzalnosti, a sve plohe koje ga zadovoljavaju nazivaju se torzama. Vidimo da su sve razvojne plohe ujedno i torze.

Strikcijska krivulja

Na plohama koje nisu cilindrične, izvodnice uvijek mijenjaju svoj smjer. Strikcijska krivulja je na tangentnim plohama generalizacija grebena.
Promotrimo dvije susjedne izvodnice pravčaste plohe generirane vektorima $e(u)$ i $e(u+\Delta u)$. Napomenimo da je vektorsko polje e jedinično. Ako ploha nije razvojna, izvodnice su mimoilazni pravci u prostoru. Označimo s PP' njihovu najkraću spojnicu, gdje su $P = (u, v)$, $P' = (u + \Delta u, v + \Delta v)$ točke na odgovarajućim izvodnicama, a parametri u, v su nepoznanice. Udaljenost mimoilaznih pravaca bit će jednaka duljini njihove zajedničke okomice. Segment PP' je jednak:

$$PP' = OP' - OP = \Big(c(u + \Delta u) + (v + \Delta v)e(u + \Delta u)\Big) - \Big(c(u) + ve(u)\Big).$$

Iz razvoja u Taylorov red slijedi:

$$e(u + \Delta u) = e(u) + e'(u)\,\Delta(u),$$

pa imamo:

$$\begin{aligned} PP' &= OP' - OP = \Big(c(u + \Delta u) + (v + \Delta v)e(u + \Delta u)\Big) - \Big(c(u) + ve(u)\Big) \\ &= c(u) + c'(u)\,\Delta u + v\Big(e(u) + e'(u)\,\Delta u\Big) + \Delta v\Big(e(u) + e'(u)\,\Delta u\Big) - c(u) - v\,e(u) \\ &= c'(u)\,\Delta u + ve'(u)\,\Delta u + \Delta v e(u) + \Delta v \Delta u\, e'(u) \end{aligned}$$

Budući da su Δu i Δv jako mali, izraz $\Delta v\,\Delta u\, e'(u)$ možemo zanemariti, pa je segment PP' jednak:

$$PP' = c'(u)\,\Delta u + ve'(u)\,\Delta u + \Delta v e(u). \tag{1.1}$$

Segment PP' je okomit na vektore $e(u)$ i $e(u + \Delta u)$, pa je stoga okomit i na njihovu razliku

$$e(u + \Delta u) - e(u) = e(u) + e'(u)\,\Delta u - e(u) = e'(u)\,\Delta u.$$

Dakle, segment PP' je okomit na vektor $e'(u)$.

Vrijedi:

$$\vec{PP'} \cdot e'(u) = 0. \tag{1.2}$$

Uvrstimo li (1.1) u (1.2), imamo:

$$0 = c'(u)\,\Delta u \cdot e'(u) + v\,e'(u)\,\Delta u \cdot e'(u) + \Delta v\,e(u) \cdot e'(u),$$

odnosno

$$0 = \Delta u\left(c'(u) \cdot e'(u) + v\,(e'(u))^2\right) + \Delta v\,e(u) \cdot e'(u). \tag{1.3}$$

Jer je $e^2 = 1$, vrijedi $e \cdot e' = 0$. Sada iz (1.3) određujemo parametar v:

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{(e'(u))^2}.$$

Znamo da je parametrizacija pravčaste plohe dana s $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + v\,e(u)$, pa dobiveni parametar v uvrstimo u ovu parametrizaciju i dobit ćemo strikcijsku točku, točku na najužem dijelu plohe u okolini izvodnice generirane vektorom $e(u)$:

$$\mathbf{x}(u) = c(u) - \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{(e'(u))^2}\,e(u).$$

Lokus strikcijskih točaka na pravčastoj plohi naziva se strikcijska krivulja. Geometrijski gledano, strikcijske krivulja je krivulja pravčaste plohe na njezinom "najužem" dijelu.
Ako tu krivulju dobivamo za $v = 0$, onda je $\mathbf{x}(u, 0) = c(u)$, tj. bazna krivulja je upravo strikcijske krivulja.

Lema 1.4.7. *Neka je $\tilde{x}$ pravčasta ploha koja nije razvojna dana svojom parametrizacijom $\tilde{x}(u, v) = c_1(u) + ve_1(u)$. Tada $\tilde{x}$ ima reparametrizaciju oblika:*

$$\boldsymbol{x}(u, v) = c_2(u) + ve_2(u)$$

gdje je $\|e_2\| = 1$ i $c_2' \cdot e_2' = 0$. Krivulja c_2 je strikcijska krivulja od $\tilde{x}$.

Može se pokazati da strikcijska krivulja pravčaste plohe ne ovisi o izboru bazne krivulje (direktrise).

Od izvodnice generirane vektorom $e(u)$ do izvodnice generirane vektorom $e(u + \Delta u)$ dolazimo zakretanjem za neki kut $\Delta\varphi$ promjenom početnog položaja za udaljenost $\Delta\lambda = \mid PP' \mid$. Kada Δu teži u nulu, ovaj kvocijent $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}$ teži u graničnu vrijednost. Za pravčastu plohu koja nije razvojna vrijedi:

$$\delta(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{(c', e, e')}{e'^2}.$$

Ova funkcija δu se naziva *parametar distribucije* pravčastih ploha ili *vitoperost*.
Gaussova zakrivljenost može se odrediti pomoću parametra distribucije.

Lema 1.4.8. *Neka je S pravčasta ploha i neka je dana svojom lokalnom parametrizacijom. Ploha je regularna kad god je $v \neq 0$ ili kad je $v = 0$ i $\delta(u) \neq 0$. Gaussova zakrivljenost dana je s:*

$$K = -\frac{\delta^2(u)}{(\delta^2(u) + v^2)^2}.$$

Dokaz. Pravčasta ploha dana je parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$, a Gaussova zakrivljenost dana je izrazom:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{W^2}. \tag{1.4}$$

Raspišimo izraz za Gaussovu zakrivljenost.

$$\mathbf{x}_u = c'(u) + ve'(u), \ \mathbf{x}_v = e'(u)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = c''(u) + ve''(u), \ \mathbf{x}_{uv} = e'(u), \ \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Dakle, fundamentalne veličine prvog i drugog reda su:

$$E = \mathbf{x}_u^2 = c'^2 + 2ve'c' + v^2e'^2 = 1 + v^2e'^2,$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = c'e + ve' \cdot e' = c'e,$$

$$G = \mathbf{x}_v^2 = e^2.$$

$$N = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{W}\det(e', c' + ve', e) \\ &= \frac{1}{W}[\det(e', c', e) + \det(e', ve', e)] \\ &= \frac{1}{W}[\det(e', c', e)]. \end{aligned}$$

Budući da je $N = 0$, ne moramo računati L.
Iz (1.4) slijedi:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{M^2}{W^2} = -\frac{\frac{(\det(c', e, e'))^2}{W^2}}{W^2}.$$

Dakle,

$$K = -\frac{\det^2(c', e, e')}{\left((1 + v^2 e'^2) - c'^2 e^2\right)^2}. \tag{1.5}$$

Pogledajmo izraz za parametar distribucije:

$$\delta^2 = \frac{\det^2(c', e, e')}{\left(e'^2\right)^2}.$$

U prostoru V^3 je $\Gamma(a) = a^2$, tj. korijen Gramove determinante vektora a jednak je duljini tog vektora. Za vektore $a, b \in V^3$ je $\Gamma(a, b) = (a \times b)^2$, tj. korijen Gramove determinante vektora a i b jednak je površini paralelograma što ga ti vektori razapinju. Analogno, za $a, b, c \in V^3$, vrijedi $\Gamma(a, b, c) = (a, b, c)^2$, tj. korijen Gramove determinante vektora a, b i c jednak je volumenu paralelepipeda što ga ti vektori razapinju u prostoru.
Prema tome, $\det^2(c', e, e') = \Gamma(c', e, e')$. Imamo:

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &= \frac{\det^2(c', e, e')}{\left(e'^2\right)^2} = \frac{\Gamma(c', e, e')}{\left(e'^2\right)^2} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot e & c' \cdot e' \\ e \cdot c' & e \cdot e & e \cdot e' \\ e' \cdot c' & e' \cdot e & e' \cdot e' \end{vmatrix}}{\left(e'^2\right)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c' \cdot e & 0 \\ e \cdot c' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e'^2 \end{vmatrix}}{\left(e'^2\right)^2} \\
&= \frac{e'^2\left(1 - (c'e)^2\right)}{\left(e'^2\right)^2} = \frac{1 - (c'e)^2}{e'^2}.
\end{aligned}
$$

U nazivniku trebamo dobiti izraz $\delta^2 + v^2$, pa pogledajmo čemu je on jednak:

$$
\delta^2 + v^2 = \frac{1 - (c'e)^2}{e'^2} + v^2 = \frac{1}{e'^2}\left[1 - (c'e)^2 + e'^2\, v^2\right]. \tag{1.6}
$$

Iz jednakosti (1.6) slijedi

$$
\left[1 - (c'e)^2 + e'^2\, v^2\right] = e'^2\,(\delta^2 + v^2),
$$

što prepoznajemo u nazivniku iz (1.5).
Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{\det^2(c', e, e')}{\left[e'^2\,(\delta^2 + v^2)\right]^2} \\
&= -\frac{\det^2(c', e, e')}{\left(e'^2\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(\delta^2 + v^2\right)^2} \\
&= -\delta^2 \cdot \frac{1}{\left(\delta^2 + v^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

.

Time smo dobili ono što smo i trebali dokazati:

$$
K = -\frac{\delta^2(u)}{\left(\delta^2(u) + v^2\right)^2}.
$$

□

Odredimo strikcijske krivulje i parametre distribucije za sljedeće plohe:

1. helikoid
2. hiperbolički paraboloid
3. jednoplošni hiperboloid
4. poopćeni helikoid

1. Parametrizacija helikoida je $\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, bu) + v(\cos u, \sin u, 0)$.

Parametar v strikcijske krivulje je:

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)}$$

gdje je $c(u) = (0, 0, bu)$ i $e(u) = (\cos u, \sin u, 0)$. U ovoj parametrizaciji vrijedi $\|e(u)\| = 1$.

$$c'(u) = (0, 0, b)$$

$$e'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$e'^2(u) = 1$$

Prema tome,

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)} = -\frac{(0, 0, b) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)}{1} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Parametar v jednak je nuli, pa je strikcijska krivulja helikoida z-os,

$$\mathbf{s}(u) = c(u) = (0, 0, bu).$$

Odredimo sada parametar distribucije:

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \end{vmatrix} = b\,(\cos^2 u + \sin^2 u) = b$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{b}{1} = b.$$

Dakle, parametar distribucije je konstantan i jednak b.

2. Parametrizacija hiperboličkog paraboloida kao pravčaste plohe je

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u).$$

Vidimo da je $c(u) = (u, 0, 0)$ bazna krivulja. U ovom primjeru vrijedi $\|e(u)\| \neq 1$, pa ćemo morati normirati vektor e.

$$e(u) = \frac{1}{\|\,(0, 1, u)\,\|}\,(0, 1, u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\,(0, 1, u)$$

Vrijedi:

$$c'(u) = (1, 0, 0)$$

$$e'(u) = \left(0,\ -\frac{u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$e'^2(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^2}$$

Parametar v strikcijske krivulje je:

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)} = \frac{0}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} = 0$$

Budući da je $v = 0$, strikcijska krivulja je pravac (x-os):

$$\mathbf{s}(u) = c(u) = (u, 0, 0).$$

Odredimo parametar distribucije:

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & \frac{1}{\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}} & \frac{u}{\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & \frac{-u}{\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 + u^2)}$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} = 1 + u^2.$$

Dakle, parametar distribucije hiperboličkog paraboloida nije konstantan i iznosi $1 + u^2$.

3. Parametrizacija jednoplošnog hiperboloida kao pravčaste plohe je

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\cos u, a\sin u, 0) + v(-a\sin u, a\cos u, c).$$

Jer je $\| e(u) \| = a^2 \neq 1$, normirat ćemo vektor e.

$$e(u) = \frac{1}{\| (-a\sin u, a\cos u, c) \|}(-a\sin u, a\cos u, c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(-a\sin u, a\cos u, c) = (-\sin u, \cos u, \frac{c}{a})$$

Vrijedi:

$$c'(u) = (-a\sin u, a\cos u, 0)$$

$$e'(u) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cos u, -\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin u, 0\right)$$

$$e'^2(u) = \frac{a^2}{a^2+c^2}.$$

Parametar v strikcijske krivulje je:

$$v = -\frac{c'(u)\cdot e'(u)}{e'^2(u)} = -\frac{0}{1} = 0$$

Budući da je $v = 0$, strikcijska krivulja je kružnica:

$$\mathbf{s}(u) = c(u) = (a\cos u, a\sin u, 0).$$

To je tzv. „grlena kružnica“ jednoplošnog hiperboloida.
Odredimo parametar distribucije:

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} -a\sin u & a\cos u & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin u & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cos u & \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \frac{ca}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{-\frac{ca}{\sqrt{a^2+c^2}}}{\frac{a^2}{a^2+c^2}} = -\frac{c}{a}\sqrt{a^2+c^2}$$

Dakle, parametar distribucije jednoplošnog hiperboloida je $-\frac{c}{a}\sqrt{a^2+c^2}$.

4. Poopćeni helikoid ima parametrizaciju:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\cos u, a\sin u, bu) + v(-\cos\alpha\sin u, cos\alpha\cos u, \sin\alpha).$$

za neki zadani kut α. Posebno, ako je $a = 0$ i $\alpha = 0$, ploha je helikoid.

Vrijedi:

$$c(u) = (a\cos u, a\sin u, bu)$$
$$e(u) = (-\cos\alpha\sin u, cos\alpha\cos u, \sin\alpha), \quad \|e(u)\| = 1.$$

Odredimo parametar distribucije za ove plohe.

$$c'(u) = (-a\sin u, a\cos u, b)$$
$$e'(u) = -\cos\alpha\cos u, -cos\alpha\sin u, 0)$$
$$e'^2(u) = \cos^\alpha$$

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} -a\ \sin u & a\cos u & b \\ -\cos\alpha\sin u & \cos\alpha\cos u & sin\alpha \\ -\cos\alpha\cos u & -\cos\alpha\sin u & 0 \end{vmatrix} = b\ \cos^2\alpha - a\ \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{\cos\alpha\,(b\ \cos\alpha - a\ \sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = b - a\,\mathrm{tg}\,\alpha = const.$$

Dakle, parametar distribucije poopćenih helikoida je konstantan.

Natkrivanje plohama

Konoidi imaju veliku primjenu u graditeljstvu kao krovne konstrukcije nekih objekata. Za natkrivanje velikih površina, kombinira se više konoida (direktrise mogu biti pravci, kružnice, parabole). Jedan od primjera natkrivanja pravokutnog tlocrta je natkrivanje paraboličkim konoidom. Sada gledamo parabolički konoid s projektivne strane. Jedna njegova direktrisa je parabola p, druga je beskonačno daleki pravac određen direkcijskom ravninom koja je paralelna osi parabole, a treća je pravac l okomit na direkcijsku ravninu i paralelan je ravnini parabole. Izvodnice konoida možemo konstruirati na jedan od sljedeća dva načina.
Jedan način je da svaka ravnina paralelna direkcijskoj ravnini siječe pravac l u točki L_d, a parabolu u konačnoj točki P_d. Tada je spojnica L_dP_d izvodnica konoida.
Drugi način je da svaka ravnina koja sadrži pravac l siječe parabolu u točkama P_l1, P_l2, a beskonačno daleki pravac u točki D_l^∞. U ovom slučaju izvodnice konoida su spojnice $D_l^\infty P_l1$ i $D_l^\infty P_l2$ koje mogu biti realne i različite, mogu se podudarati ili biti konjugirano imaginarne. Ravnine u kojima se točke P_l1 i P_l2 podudaraju nazivamo torzalnim ravninama, a izvodnice u tim ravninama torzalnim pravcima plohe.

Osim paraboličkih konoida, veliku primjenu u natkrivanju građevina imaju i hiperbolički paraboloidi. Razlog tomu je, osim njegove jednostavne konstrukcije, i estetska vrijednost. Projektivno gledano, hipar možemo konstruirati na nekoliko načina:

1. Direktrise plohe su tri mimosmjerna pravca u konačnosti koja su paralelna s istom ravninom, a izvodnice jednog sustava su pravci koji sijeku sve tri zadane direktrise (ako od izvodnica prvog sustava izaberemo bilo koja tri pravca za ravnalice, izvodnice drugog sustava dobijemo na analogan način).

2. Direktrise su tri mimosmjerna pravca, dva u konačnosti i jedan u beskonačnosti koji zadajemo direkcijskom ravninom. Izvodnice jednog sustava čine pravci paralelni s direkcijskom ravninom koji sijeku direktrise u konačnosti (izvodnice drugog sustava se konstruiraju analogno, a druga direkcijska ravnina je paralelna s ravnalicama).

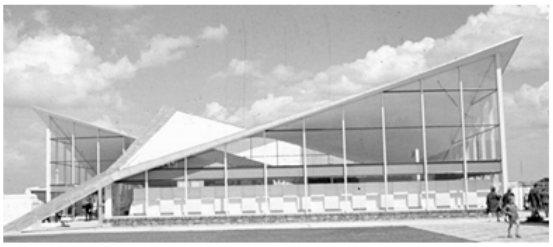
3. Stranice vitoperog četverovrha su dva para izvodnica, a direkcijske ravnine paralelne su s izvodnicama jednog sustava. Izvodnice se konstruiraju na način objašnjen u prethodnom primjeru.

4. Imamo dvije parabole, jedna je konveksna, a jedna konkavna i tjeme jedna parabole leži na drugoj paraboli. Klizanjem jedne parabole po drugoj nastaju dva sustava izvodnica hipara.

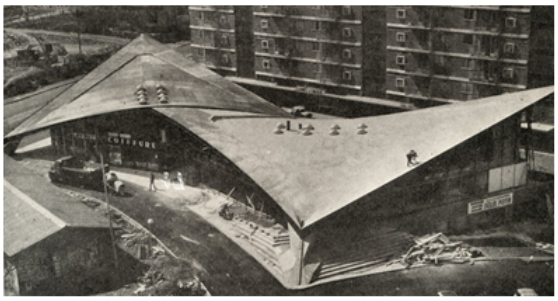
Za izvođenje i betoniranje neke geometrijske plohe najpovoljnije su one dobivene kretanjem izvodnica po ravnalicama. Prvi krovovi oblika ove sedlaste plohe rađeni su 1932.

godine, a nakon krova restorana i robne kuće u Meksiku, brzo se šire zbog brojnih prednosti. Izvođenje je vrlo jednostavno jer se daske za oplatu mogu postavljati duž samih izvodnica.

Primjer:



Slika 1.38: Rostock, Njemačka



Slika 1.39: Trgovački centar, Malakoff, Francuska

Glavna konstrukcijska prednost hiperboličkog paraboloida je dobra nosivost (raspored žica za prednapinjanje). Nosivost konstrukcije ovisi o zakrivljenosti i izvitoperenosti hiperboličkog paraboloida. Jedan od dobrih svojstava je da hipar omogućuje da težište sile prednapinjanja bude što niža. Natkrivanja se obično izvode sastavljanjem nekoliko isječaka hiperboličkog paraboloida, čest je slučaj da se spajaju četiri identična isječka čiji su vanjski uglovi poduprti stupovima.

Primjena pravčastih ploha u arhitekturi

Suvremena primjena razvojnih pravčastih ploha i njihovih geometrijskih manipulacija raste. Njihova primjena je široko rasprostranjena u gotovo svim područjima. Svojstva razvojnih pravčastih ploha koristili su arhitekti koji su načinili neka od najljepših djela moderne arhitekture. Razvojne plohe, upravo zbog svojih linija koje ih generiraju, ostavljaju dojam pokreta i jednostavne su za konstrukciju s obzirom na njihove upečatljive oblike zbog čega ih mnogi arhitekti koriste u svojim dizajnima. Jedna familija izvodnica na pravčastim plohama pruža brojne prednosti u gradnji objekata. Hiperboloid i hiperbolički paraboloid su tipični primjeri pravčastih ploha, a za njima slijede helikoidi i odnedavno Möbiusova traka. Hiperboloide i hiperboličke paraboloide u svojim projektima prvi je upotrijebio Vladimir Shukhov krajem 19. stoljeća. Primjenu pravčastih ploha proširio je Gaudi, dodavši još i helikode. Ove forme ploha koristili su i Candela te LeCorbusier u svojim dizajnima.

Slika 1.40: Most Zubizuri, Bilbao, Španjolska

Jedan primjer pravčaste plohe je most Zubizuri, Slika 1.37. Most za pješake i bicikliste djelo je baskijskog arhitekta Santiaga Calatrave. Luk ovog mosta je iskrivljena parabola pričvršćena za krajeve pješačke staze koja je nagnuta za 80° prema horizontali. Staza mosta je dugačka 75 metara i svaka njezina strana poduprta je s 39 čeličnih kablova koji su spojeni s parabolom.

Ovo su još neki primjeri:

Most za pješake i bicikliste (Slika 1.38), koji je inspiriran Möbiusovom trakom, predstavlja dinamičnu i neprekidnu strukturu koja je fizički i strukturno neovisna o objema obalama rijeke. Geometrija mosta pažljivo je izabrana s ciljem postizanja efikasnog strukturnog rješenja u odnosu na njegov položaj.

Slika 1.41: Möbius most, Bristol, Ujedinjeno Kraljevstvo

Slika 1.42: Japanese Art and Technology Center, Krakow, Poljska

Na slici 1.39 vidimo primjer konoida kao krovne plohe, dok na slici 1.40 jasno vidimo cijelu familiju pravaca koji generiraju plohu.

Slika 1.43: TGV Terminal, Liege-Guillemins, Belgija

Iz ovih primjera vidimo da su pravčaste plohe vrlo pogodne za natkrivanje građevina.

Poglavlje 2

Krivulje i plohe slobodnih oblika

2.1 Bézierove krivulje

Bézierove krivulje su jedne od krivulja slobodnih oblika koje se najviše upotrebljavaju. One su najvažniji predstavnici krivulja u kompjuterskoj grafici i CAD-u. Potpuno su definirane s kontrolnim poligonima, a broj stranica tih poligona označava stupanj Bézierove krivulje. Osim što su ove krivulje standardni alati u raznim softverskim paketima, koriste se i za definiranje fontova True Type i Postscript u kojima sve linije slova čine zapravo Bézierove krivulje 2. i 3. stupnja (Slika 2.1).

Slika 2.1: Jedna od primjena Bézierovih krivulja

U automobilskoj i zračnoj industriji se 1950-ih godina javila potreba za oblikovanjem dizajna s krivuljama kompleksnijim od dijelova parabola. Francuz Paul de Casteljau (radio za Citröen) je 1959. godine razvio algoritam koji se temelji na uzastopnim linearnim interpolacijama. Ovaj algoritam nazvan je Casteljouovim algoritmom; on je rekurzivnom metodom izračunavao vrijednosti polinoma u Bernsteinovom [1] obliku. Ideja je sljedeća:

[1] Bernsteinov polinom stupnja n definiran je na sljedeći način: $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, za $i = 0, 1, \ldots, n$, gdje je $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ binomni koeficijent. Postoji $n+1$ Bernsteinovih polinoma stupnja n. Ako je $i < 0$ ili

umjesto tri kontrolne točke P_0, P_1 i P_2 (što je slučaj kod parabole), počinjemo s n kontrolnih točaka $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Tada započinje linearna interpolacija sve dok na kraju ne dobijemo jednu točku ne krivulji. Mijenjajući parametar t, dobivamo cijelu Bézierovu krivulju, nazvanu po Pierru Bézieru koji je otkrio ove krivulje 1962. godine radeći u Renaultu.

Bézierove krivulje su parametarske krivulje koje se često koriste u računalnoj grafici i u ostalim područjima računalne znanosti. U vektorskoj grafici Bézierove se krivulje koriste za modeliranje glatkih krivulja i dobivanje krivulja tzv. slobodnih oblika. Često se koriste za animacije i dizajniranje sučelja.

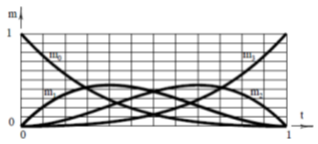
Objasnit ćemo Bézierovu krivulju na primjeru:
zamislimo četiri tijela m_0, m_1, m_2, m_3 smještena u točkama P_0, P_1, P_2, P_3. Centar mase P dan je izrazom

$$\frac{m_0P_0 + m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3}.$$

Zamislimo sada da svaka masa, umjesto da ima stalnu vrijednost, varira u ovisnosti o nekom parametru t. Neka je posebno

$$m_0 = (1-t)^3,\ m_1 = 3t(1-t)^2,\ m_2 = 3t^2(1-t),\ m_3 = t^3.$$

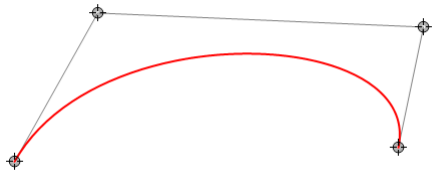
Vrijednosti masa u ovisnosti o parametru t prikazane su na Slici 2.2:



Slika 2.2: Ovisnost mase o parametru t

Za svaku vrijednost parametra t centar masa se mijenja. Kako t ide između 0 i 1, tako centar mase opisuje krivulju. Krivulja koja nastaje je Bézierova krivulja 3. stupnja, Slika 2.3.

$i > n$, stavljamo $B_{i,n} = 0$.
Bernsteinovi polinomi 1. stupnja: $B_{0,1}(t) = 1, B_{1,1}(t) = t$
Bernsteinovi polinomi 2. stupnja: $B_{0,2}(t) = (1-t)^2, B_{1,2}(t) = 2t(1-t), B_{2,2}(t) = t^2$
Bernsteinovi polinomi 3. stupnja: $B_{0,3}(t) = (1-t)^3, B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), B_{3,3}(t) = t^3$



Slika 2.3: Bézierova krivulja 3. stupnja

Za bilo koju vrijednost t vrijedi: $m_0+m_1+m_2+m_3 \equiv 1$. Stoga jednadžbu Bézierove krivulje možemo pisati kao $P = m_0P_0 + m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3$.

Točke P_i nazivamo kontrolnim točkama, a ako budemo spojili redom dane kontrolne točke ravnim linijama, dobit ćemo kontrolni poligon. Mase m_i poznatije su kao Bernsteinovi polinomi. Možemo definirati Bézierove krivulje bilo kojeg stupnja.

Bézierova krivulja n-tog stupnja ima $n + 1$ kontrolnu točku, a polinomi su označeni s $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i}$. Jednadžba Bézierove krivulje jest

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i.$$

Domena varijable t je segment $[0, 1]$, pa su svi polinomi nenegativni. Budući da t i i mogu biti nula, samim time i $1 - t$ te $n - i$, uzimamo da je $0^0 = 1$.

Svojstva Bézierovih krivulja

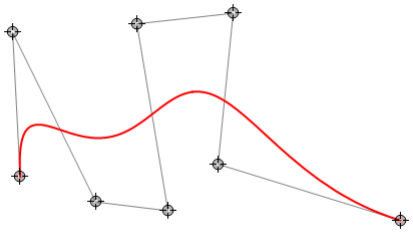
1. Stupanj krivulje definirane s $n + 1$ kontrolnom točkom je n (u svakom polinomu eksponent od t je $i + (n - i) = n$).

2. Krivulja $C(t)$ prolazi početnom P_0 i krajnjom P_n kontrolnom točkom.

3. Svi Bernsteinovi polinomi su nenegativni.

4. Suma svih polinoma za fiksan t je 1 (vrijednosti svih polinoma za različite t su između 0 i 1).

5. Bézierova krivulja definirana s $n + 1$ kontrolnom točkom leži cijela unutar konveksnog poligona čiji su vrhovi kontrolne točke. Početna i završna kontrolna točka su jedine točke koje pripadaju i krivulji i poligonu (Slika 2.4).

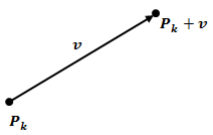


Slika 2.4: Svojstvo 5.

6. Ako je krivulja u ravnini, broj presjeka proizvoljne ravne linije s Bézierovom krivuljom nije veći od broja presjeka krivulje s kontrolnim linijama. To znači da kontrolne linije češće mijenjaju smjer i više se zakreću nego Bézierova krivulja. Linija koja redom spaja kontrolne točke je kompleksnija od same krivulje koja je njome definirana.

7. Ako primijenimo afine transformacije na Bézierove krivulje, rezultat transformacije dobivamo iz afine slike kontrolnih točaka. To znači da, ako želimo primijeniti transformacije na krivuljama, možemo ih primijeniti na kontrolne točke, što je jednostavnije. Nakon što smo transformirali točke, transformirali smo i Bézierovu krivulju, jer je ona sada definirana novonastalim točkama.

Kontrolne točke koje određuju krivulju možemo mijenjati. Promjenom kontrolne točke, mijenja se i izgled krivulje. Pretpostavimo da je kontrolna točka P_k promijenila svoj položaj i sada se nalazi na mjestu P_{k+v}, gdje je v vektor koji pokazuje smjer i duljinu promjene položaja.



Slika 2.5: Mijenjanje položaja kontrolne točke

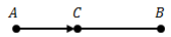
Znamo da je jednadžba Bézierove krivulje dana s $C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i$. Nova krivulja definirana je točkama $P_0, P_1, \ldots, P_k + v, \ldots, P_n$, pa je jednadžba nove krivulje dana s

$$\begin{aligned} D(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,n}(t)\, P_i + B_{k,n}(t)\,(P_k + v) + \sum_{i=k+1}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i + B_{k,n}(t)\, v \\ &= C(t) + B_{k,n}(t) v. \end{aligned}$$

Dakle, novu točku nakon pomicanja kontrolne točke dobijemo tako da odgovarajuću točku na polaznoj krivulji translatiramo u smjeru vektora v za duljinu $|B_{k,n}(t)\, v|$.
Za $t \in [0, 1]$, vektor $B_{k,n}(t)\, v$ je različit od nul-vektora, što znači da su sve točke polazne krivulje, osim početne $C(0)$ i krajnje $C(1)$, promijenile svoj položaj nakon pomicanja kontrolne točke. Mijenjanjem položaja kontrolnih točaka, izgled Bézierove krivulje mijenja se globalno.

Traženje točke na Bézierovoj krivulji

Kako bismo konstruirali krivulju, moramo odrediti točku $C(t)$ na krivulji za određene vrijednosti t. Jedan od načina je direktan način: uvrstiti t u jednadžbu za krivulju $C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i$. Ovaj način je točan, ali nije numerički stabilan jer se mogu javiti pogreške prilikom računanja polinoma.
Bolji način za određivanje točaka jest primjena Casteljauova algoritma. Bazira se na tome da odaberemo točku C na dužini $\overline{AB}$ takvu da odabrana točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $t : (1 - t)$, odnosno da je omjer duljina $|AC|$ i $|AB|$ jednak t.



Slika 2.6: Dijeljenje dužine

Ideja je sljedeća: želimo odrediti $C(t)$, za $t \in [0, 1]$. Pretpostavimo da imamo zadane četiri početne kontrolne točke: P_0, P_1, P_2, P_3. Početna kontrolna linija spaja redom dvije uzastopne kontrolne točke. Na svakoj toj liniji određujemo novu točku na prethodno opisani način: određujemo točku tako da dijeli dužinu $\overline{P_i P_{i+1}}$, $i = 0, 1, 2$ u omjeru $t : (1 - t)$.
Time smo dobili tri nove točke P_{10}, P_{11}, P_{12} . Dobivene točke redom spojimo i time smo odredili novu poligonalnu liniju koja se sastoji od dviju dužina, $\overline{P_{10}P_{11}}$ i $\overline{P_{11}P_{12}}$.

$$P_{10}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$
$$P_{11}(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$
$$P_{12}(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

Sljedeći korak je da ponovimo ovaj postupak na novodobivenoj poligonalnoj liniji. Sada su nam početne tri točke P_{10}, P_{11}, P_{12} i na dužinama $\overline{P_{10}P_{11}}$ i $\overline{P_{11}P_{12}}$ određujemo točke takve da dijele te dužine u omjeru $t : (1-t)$. Ovim postupkom dobivamo dvije nove točke P_{20}, P_{21}. Budemo li spojili te dvije točke, dobit ćemo drugu poligonalnu liniju koja se sastoji od samo jedne dužine, $\overline{P_{20}P_{21}}$.

$$P_{20}(t) = (1-t)P_{10} + tP_{11}$$

$$P_{21}(t) = (1-t)P_{11} + tP_{12}$$

Posljednji korak je da na toj dužini opet provedemo isti postupak: određujemo točku koja dijeli tu dužinu u omjeru $t : (1-t)$. Time dobivamo jednu točku i to je upravo točka koju tražimo - točka koja pripada Bézierovoj krivulji.

$$P(t) = (1-t)P_{20} + tP_{21}.$$

Kako bismo odredili cijelu Bézierovu krivulju, ponovimo ovaj postupak za sve $t \in [0, 1]$. Budući da je $P(0) = P_0$, a $P(1) = P_3$, Bézierova krivulja prolazi prvom i zadnjom kontrolnom točkom. Jednadžbu u posljednjem koraku raspišemo tako da sadrži samo polazne kontrolne točke P_0, P_1, P_2, P_3. Time smo dobili:

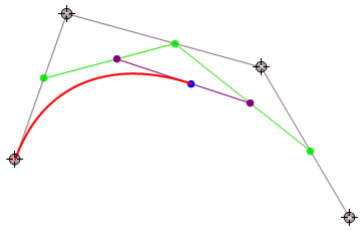
$$P(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Najveća potencija kod parametra t je 3, pa kažemo da je ovo jednadžba kubne Bézierove krivulje, odnosno jednadžba Bézierove krivulje 3. stupnja (Slika 2.7)

Sada možemo generalizirati Casteljauov algoritam; za određivanje točke na Bézierovoj krivulji s danih n kontrolnih točaka, moramo izvesti $n-1$ korak Casteljauova algoritma.

Shema algoritma prikazana je na Slici 2.8.

Ono što još radi algoritam Casteljaua jest da dijeli Bézierovu krivulju na dva dijela, segmenta, koji zajedno čine cijelu krivulju. Primijenimo li algoritam na nastali kontrolni poligon i ako nastavimo iterirati postupak, dobivamo profinjen poligon koji je dobra aproksimacija Bézierove krivulje. Ovaj proces je poznat i kao ”rezanje kutova”.



Slika 2.7: Nastajanje Bézierove krivulje 3. stupnja

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & & & & & \\
 & P_{10}(t) & & & & & \\
P_1 & & P_{20}(t) & & & & \\
 & P_{11}(t) & & \cdots & & & \\
P_2 & & P_{21}(t) & & & & \\
 & P_{12}(t) & & & & & \\
P_3 & & & & P_{n-1,0}(t) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & P(t) \\
P_{n-2} & & & & P_{n-1,1}(t) & & \\
 & P_{1,n-2}(t) & & & & & \\
P_{n-1} & & P_{2,n-2}(t) & \cdots & & & \\
 & P_{1,n-1}(t) & & & & & \\
P_n & & & & & &
\end{array}
$$

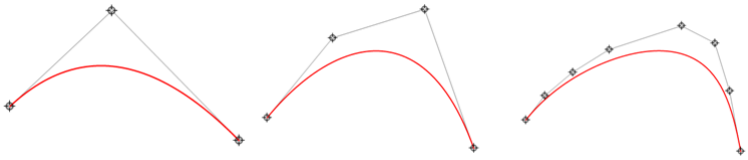
Slika 2.8: Shematski prikaz Casteljauova algoritma

Bézierova krivulja definirana je za parametar $t \in [0, 1]$. Tu krivulju možemo podijeliti na dva dijela, na dvije nove Bézierove krivulje: jedna je definirana za $t \in [0, \tau]$, a druga za $t \in [\tau, 1]$. Ove dvije krivulje zajedno ekvivalentne su polaznoj Bézierovoj krivulji od koje su nastale.
Računamo na sljedeći način:

$$P_{i,j} = (1 - \tau)P_{i,j-i} + \tau P_{i+1,j-1}, \quad j = 1, \ldots, n, \; i = 0, \ldots, n - j.$$

Krivulja za $t \in [0, \tau]$ određena je kontrolnim točkama $P_{00}, P_{01}, \ldots, P_{0,n}$, a krivulja za $t \in [\tau, 1]$ određena je kontrolnim točkama $P_{0,n}, P_{1,n-1}, P_{2,n-2}, \ldots, P_{n,0}$. Dijeleći krivulju

iterativno na ovaj način, kontrolne linije u svakom se koraku profinjuju i poprimaju oblik krivulje, odnosno konvergiraju krivulji. Prema tomu, jedan od načina crtanja Bézierove krivulje je taj da ju dijelimo odgovarajući broj puta i time crtamo kontrolne linije (poligone) koje će, s većim brojem koraka, biti sve sličnije obliku krivulje, Slika 2.9.

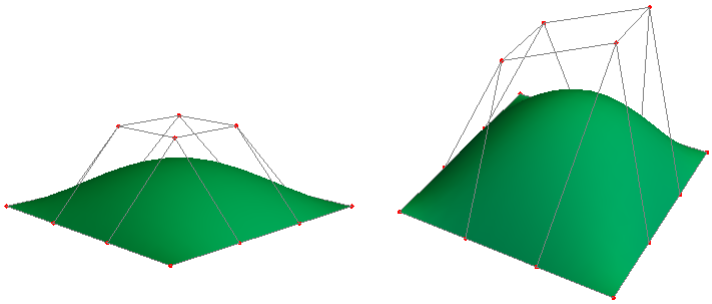


Slika 2.9: Kontrolni poligon koji konvergira krivulji

Krivulju koja je luk parabole možemo konstruirati i ako su nam poznati vrh luka parabole i njegova os. Odaberimo tri kontrolne točke P_0, P_1 i P_2 tako da tvore jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{P_0P_2}$. Os ove parabole je pravac koji sadrži točku P_1 i polovište osnovice $\overline{P_0P_2}$. Vrh luka je jedinstvena točka koja se nalazi na ovoj osi. Vrh nalazimo uz pomoć Casteljauova algoritma: tražimo točku na krivulji za parametar $t = \frac{1}{2}$ (zbog simetrije; pomoću algoritma dijelimo jedan luk na dva manja čija je zajednička točka upravo vrh luka parabole).
Na temelju ovih svojstava, sada možemo konstruirati luka parabole ako su nam dani njegov vrh i os.
Odaberemo vrh luka kao prvu kontrolnu točku P_0. Nacrtamo pravac p koji je okomit na danu os i koji prolazi vrhom parabole. Odaberemo proizvoljnu točku P_1 na tom pravcu. Time smo dobili segment koji pripada tangenti u vrhu ove parabole. Točku P_0 zrcalimo s obzirom na točku P_1. Time smo dobili pomoćnu točku C na našem pravcu p. Treću kontrolnu točku određujemo tako da odaberemo proizvoljnu točku P_2 na pravcu koji prolazi točkom C i paralelan je danoj osi parabole. Time smo dobili dio luka parabole s danim vrhom, osi i kontrolnim poligonom P_0, P_1 i P_2. Kako bismo dobili cjelovitu krivulju, preostaje nam zrcaliti ovaj dio luka s obzirom na vrh, odnosno točku P_0 duž zadane osi.

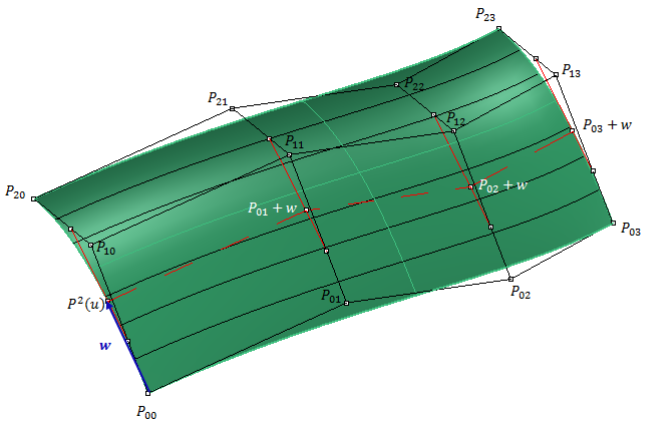
2.2 Bézierove plohe

S klasičnim plohama poput cilindra, sfere, rotacijskih i pravčastih ploha teško je postići određenu fleksibilnost u dizajnu 3D oblika. Plohe slobodnih oblika, poput Bézierovih ploha, nude puno više fleksibilnosti i zbog toga su vrlo važne u modernoj konstruktivnoj geometriji, Slika 2.10.



Slika 2.10: Transformacije na Bézierovoj plohi

Bézierove plohe možemo konstruirati od Bézierovih krivulja na sljedeći način: neka imamo dvije krivulje, jednu stupnja 2 zadanu trima kontrolnim točkama P_{00}, P_{10}, P_{20} i jednu stupnja 3 koja je zadana četirima kontrolnim točkama $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}$. Zadane Bézierove krivulje imaju zajedničku krajnju točku P_{00}, pa će iz njih nastati translacijska ploha. Razlikujemo parametre na zadanim krivuljama, krivulja 2. stupnja ima parametar u, a krivulja 3. stupnja ima parametar v. Translacijsku Bézierovu plohu dobivamo translacijom Bézierove krivulje 3. stupnja duž Bézierove krivulje 2. stupnja. Prvo što radimo je da pomoću algoritma Casteljau odredimo točku $P^2(u)$ na krivulji duž koje translatiramo točke. Nakon toga translatiramo kontrolne točke P_{00}, P_{10}, P_{20} Bézierove krivulje 2. stupnja za vektor $\overline{P_{00}P_{01}}$ i time dobivamo poligon P_{01}, P_{11}, P_{21} koji nazivamo stupčasti poligon (drugog) indeksa 1. Na analogan način konstruiramo i ostale stupčaste poligone. Dakle, točke P_{01}, P_{11}, P_{21} translatiramo za vektor $\overline{P_{01}P_{02}}$ i dobivamo poligon P_{02}, P_{12}, P_{22} indeksa 2, i na kraju te točke P_{02}, P_{12}, P_{22} translatiramo za vektor $\overline{P_{02}P_{03}}$ i dobivamo poligon P_{03}, P_{13}, P_{23} indeksa 3. Dobili smo četiri poligona od kojih svaki ima tri kontrolne točke. Svaki poligon promatramo kao kontrolni poligon Bézierove krivulje 2. stupnja i određujemo njezine točke s jednakim parametrom u pomoću algoritma Casteljau. Time dobivamo kontrolne točke Bézierove krivulje 3. stupnja $P_{00} + w$, $P_{01} + w$, $P_{02} + w$, $P_{03} + w$ koje leže na plohi, gdje je $w = b^2(u) - b_{00}$ translacijski vektor. Krivulje koje nastaju su tzv. v-krivulje. Samo početni i krajnji poligon, poligoni indeksa 0 i 3, definiraju krivulje koje leže na plohi. (Slika 2.11)



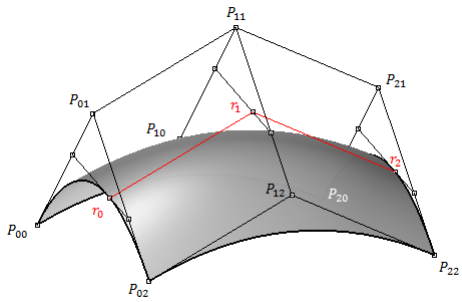
Slika 2.11: Bézierova ploha nastala translacijom Bézierove krivulje 3. stupnja duž Bézierove krivulje 2. stupnja

Na analogan način možemo dobiti translacijsku plohu translacijom Bézierove krivulje 2. stupnja duž Bézierove krivulje 3. stupnja, samo što algoritam Casteljau primjenjujemo na dobivene poligone u redu, a ne stupcu s jednakim parametrom v.

Sada ćemo poopćiti slučaj Bézierovih translacijskih ploha. Umjesto kontrolnih poligona imamo kontrolnu mrežu koja se sastoji od točaka koje su vrhovi poligona po stupcima i redcima. Te točke čine četverokute, što znači da se kontrolna mreža Bézierovih ploha sastoji od četverokuta. Za svaku kontrolnu točku imamo dva indeksa. Prvi indeks poprima vrijednosti od 0 do m i govori nam broj retka, a drugi indeks poprima vrijednosti od 0 do n i govori nam o broju stupca u kojemu se nalazi. Dakle, imamo ukupno $(m+1)(n+1)$ kontrolnih točaka.

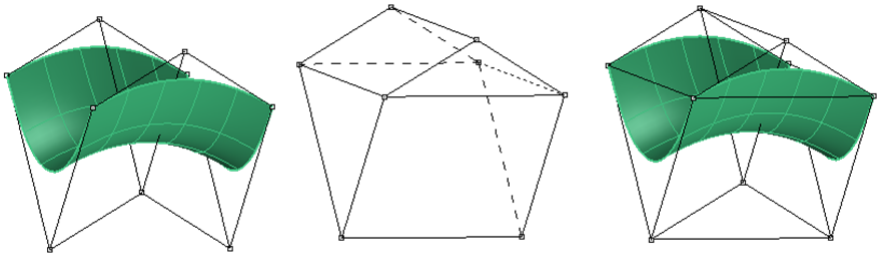
Ploha se sastoji od dviju familija Bézierovih krivulja: u-krivulje stupnja m i v-krivulje stupnja n, stoga imamo Bézierove plohe stupnja (m, n). Konstruiramo ih na sljedeći način: primijenimo algoritam Casteljau na svaki poligon po redcima koristeći istu vrijednost parametra v. Time dobivamo $m+1$ točaka: $r_0, \ldots, r_m$. Bézierova krivulja s kontrolnim točkama $r_0, \ldots, r_m$ je tražena u-krivulja (slika 2.12). Analogno se dobije i v-krivulja, samo sada primjenjujemo algoritam na poligone po stupcima.

Svaki rubni poligon kontrolne mreže definira Bézierovu krivulju koja je rubna krivulja nastale Bézierove plohe. Rubni poligoni su jedini poligoni koji definiraju krivulje na plohi.



Slika 2.12: Bézierova ploha stupnja (2,2) i konstrukcija u-krivulje iz njezinih kontrolnih točaka

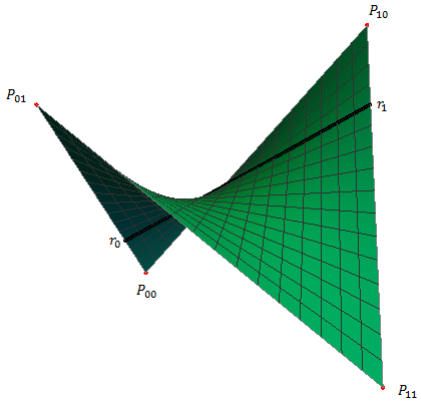
Dakle, cijela ploha leži unutar konveksnog tijela kojeg čini kontrolna mreža, što vidimo na slici 2.13 (kontrolne točke su vrhovi poligona).



Slika 2.13: Bézierova ploha leži unutar konveksnog tijela kojeg čine vrhovi kontrolne mreže

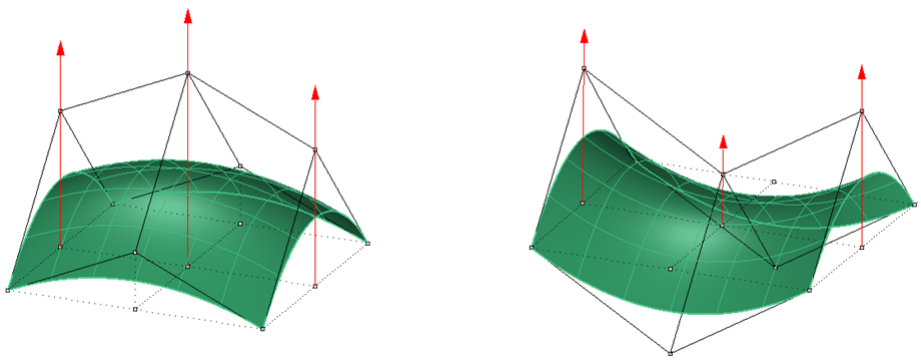
Bézierova krivulja stupnja (1,1) ima samo jedan četverokut u kontrolnoj mreži. Ploha sadrži dvije familije Bézierovih krivulja 1. stupnja što su dijelovi pravaca. Da bismo konstruirali npr. u-krivulje, prvo moramo odrediti točke r_0, r_1 na poligonu po retku s istom vrijednošću parametra v. Te točke dijele nasuprotne rubne segmente $P_{00}P_{01}$ i $P_{10}P_{11}$ u istom omjeru $(1-v) : v$. Segment r_0r_1 je u-krivulja . Zapravo vidimo da je ova Bézierova ploha dio hiperboličkog paraboloida, Slika 2.14.

U Bézierovim plohama stupnja (1,n), u-krivulje su Bézierove krivulje 1. stupnja što znači da su to dijelovi pravca, odnosno segmenti. Zbog toga su te plohe pravčaste plohe.



Slika 2.14: Bézierova ploha stupnja (1,1)

Bézierove plohe mogu se dobiti i iz luka parabole. Definiramo u-krivulje kao parabole s vertikalnom osi, i biramo koordinatni sustav s vertikalnom z-osi. Tri kontrolne točke Bézierove krivulje trebamo postaviti tako da os te krivulje bude vertikalna. To se radi na način da u xy-ravnini (tlocrtnoj ravnini) središnja kontrolna točka bude jednako udaljena od preostalih dviju kontrolnih točaka. Koristimo kontrolnu mrežu Bézierove plohe stupnja (2,n) koja je u tlocrtu pravokutna mreža. Dakle, plohe s familijom parabola koje imaju vertikalne osi mogu se konstruirati nad pravokutnom mrežom u xy-ravnini.
Za $n = 2$ imamo plohu čije su v-krivulje parabole s vertikalnom osi. Ako su četverokuti kontrolne mreže paralelogrami, imat ćemo Bézierovu plohu koja je eliptički ili hiperbolički paraboloid, Slika 2.15.



Slika 2.15: Bézierova ploha stupnja (2,2) kao eliptički i hiperbolički paraboloid

Primjena ploha slobodnih oblika

Kompleksnija geometrija i plohe slobodnih oblika javljaju se dosta rano u arhitekturi. Antoni Gaudi (1852-1926) i njegove Sagrada Familia i Casa Milá, Slika 2.16, istaknuti su primjeri velikog razumijevanja statike i slobodnih oblika kroz razvoj tehnika oblikovanja i raznih modela iz fizike.

Slika 2.16: Casa Milá i Sagrada Familia

Armirani beton se počinje sve više upotrebljavati u graditeljstvu, a njegova je uporaba bila na vrhuncu 1960-ih godina. Poznati primjeri su LeCorbusierova Notre Dame du Haut u Francuskoj, Slika 2.17, i TWA Terminal aerodroma JFK Eera Saarinena u New Yorku.

Slika 2.17: Notre Dame du Haut,Ronchamp, Francuska

Uskoro su uočena ograničenja betona kao što su težina, cijena i njegova obrada, te se krenulo u istraživanje novih materijala. Kompleksniji slobodni oblici zahtijevali su nove sofisticiranije geometrijske tehnike i integracije strukturnih i konstrukcijskih principa kako bi se mogli uspješno izgraditi što je potvrdio projekt za krov operne kuće u Sydneyu. Jedan od prvih arhitekta koji je upotrijebio kompjuterski CAD dizajn bio je Frank Ghery, autor djela na slikama 2.18 i 2.19.

Slika 2.18: Guggenheimov muzej, Bilbao, Španjolska

Slika 2.19: Koncertna dvorana Walt Disney, Los Angeles, SAD

Iznimna postignuća u današnjoj arhitekturi postigla je, i još uvijek postiže, britanska arhitektica i dizajnerica iračkog podrijetla Zaha Hadid, koja je za sada prva i jedina dobitnica Pritzkerove nagrade, najprestižnije nagrade za arhitekturu u svijetu. Među njezinim brojnim projektima nalazi se i Messnerov planinski muzej na Dolomitima, Slika 2.20.

Slika 2.20: Messnerov planinski muzej, Kronplatz, Italija

Ovaj muzej pruža jedinstveni pogled na Dolomite i posljednji je ”dio” (šesti) u seriji planinskih muzeja. Ovaj rad predstavlja kombinaciju kulture, sporta i rekreacije. Smješten na 2 275 m nadmorske visine, duž planine, pruža panoramski pogled od 240°. Reinhold Messner je alpinist koji se prvi popeo na Mount Everest bez kisika i prvi je ”osvojio” svih 14 vrhova koji su iznad 8 000 metara. Inače, završio je arhitekturu i predavao je matematku u školi.

Još jedno djelo Zahe Hadid je i Inovacijski toranj, koji je dio sveučilišta za dizajn u Hong Kongu, Slika 2.21.

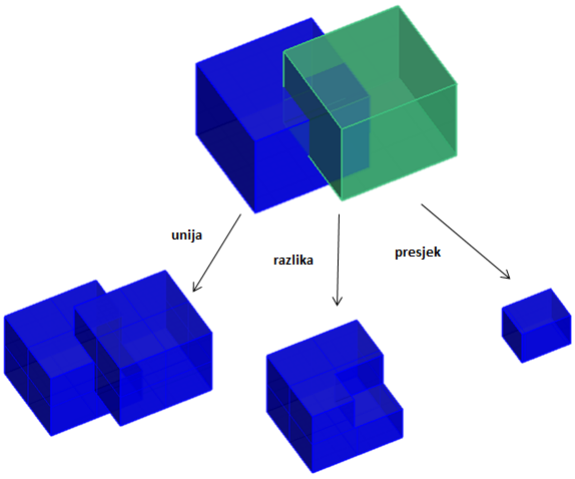
Slika 2.21: Inovacijski toranj, Hong Kong

Zgrada je podignuta nad prostorom od oko 12 000 kvadratnih metara, ima 15 katova i može zaprimiti više od 1 800 ljudi. U njoj se nalaze prostori za dizajniranje, laboratoriji, radionice, prostori za izložbe, multifunkcionalne učionice, velike predavaonice...

Poglavlje 3

Booleove operacije

Booleove operacije unije, presjeka i razlike, Slika 3.1, primjenjuju se kako bi iz osnovnih geometrijskih tijela „manipulacijama“ proizišli kompliciraniji oblici, odnosno dva (ili više) osnovna tijela primjenom operacija unije, presjeka i razlike postaju jedan novi objekt.



Slika 3.1: Booleove operacije

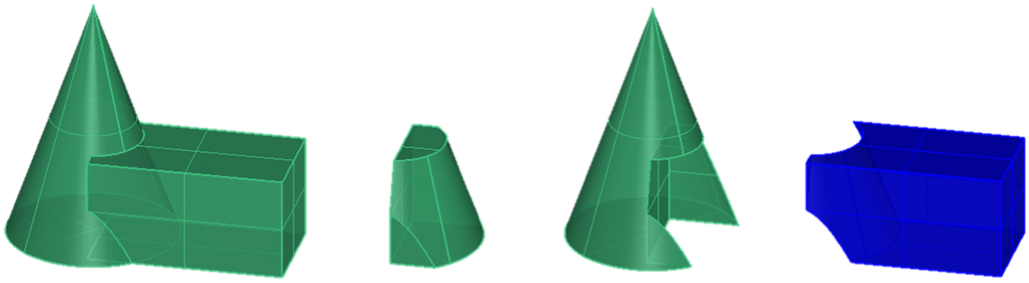
Prisjetimo se operacija na skupovima. Zamislimo jedan skup ravnine i njegove podskupove A i B.

- Skup koji sadržava sve točke skupa A i sve točke skupa B, i ništa drugo, zove se *unija* skupova A i B.
- *Presjek* skupova A i B je skup svih točaka koje pripadaju i skupu A i skupu B.

- *Razlika* skupova A i B je skup koji sadržava samo one točke skupa A koje ne pripadaju skupu B. Analogno, razlika skupova B i A je skup koji sadrži samo one točke skupa B koje ne pripadaju skupu A.

Ovaj koncept sada primijenimo na tijela u trodimenzionalnom prostoru, Slika 3.2.

Operacija *unije* spaja dva tijela u jedno tijelo (objekt); kao da smo dva tijela zalijepili jedno na drugo.
Operacija *presjeka* pridružuje oba objekta, ali zadržava samo one dijelove koji pripadaju obama objektima.
Operacija *razlike* uklanja dio drugog objekta koji se „prilijepio“ na prvi objekt. Na slici vidimo primjer razlike stošca i kvadra (kvadar smo ”oduzeli” od stošca) te kvadra i stošca (stožac smo ”oduzeli” od kvadra).

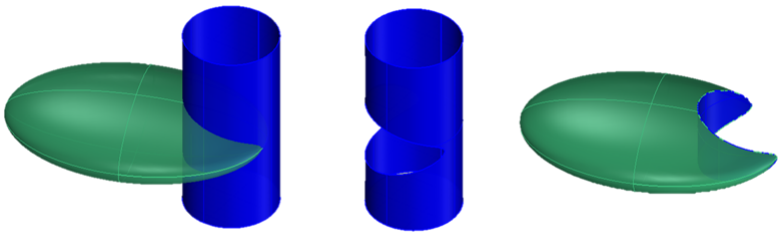


Slika 3.2: Booleove operacije unije, presjeka i razlike stošca i kvadra

Ove operacije nazivaju se Booleovim operacijama. Osim na dvama objektima, mogu primijeniti i na više objekata. Primjenom ovih jednostavnih operacija možemo modelirati sva poznata tijela i time stvarati mnoge nove i zanimljive objekte.

Primjenjujući Booleove operacije na geometrijska tijela, lako je vidjeti koji dio tijela ulazi u novi objekt, a koji dio treba ”izbaciti”, dok kod ploha to nije slučaj. Ako želimo odrediti presjek dviju ploha, ne možemo odrediti koji dio zadanih ploha ulazi, a koji ne ulazi u novi oblik. Kod modeliranja s plohama, primjenjuju se tehnike podjele (splitting) jedne plohe drugom, Slika 3.3, i tehnike izdvajanja (trimming) jedne plohe iz druge, Slika 3.4. Primjenjujući ove tehnike Booleovih operacija na plohe, najprije se određuje krivulja presjeka dviju ploha, a nakon toga se plohe dijele duž te krivulje. Dijelovima koji se dobiju kao rezultat tih operacija može se dalje manipulirati kao samostalnim objektima (splitting) ili se odmah ”brišu”, odnosno izdvajaju (trimming).
Ove se operacije, dakle, koriste ako želimo jednu plohu ”izrezati” drugom ili ako želimo razdvojiti jednu plohu duž krivulje presjeka s drugom plohom.

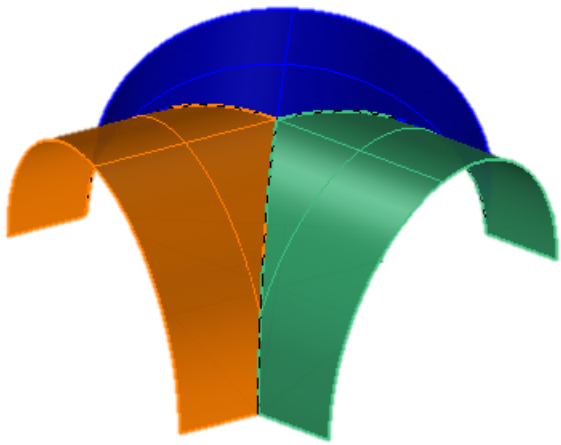
Slika 3.3: Podjela (splitting) na primjeru torusa i cilindra: podjela torusa cilindrom i podjela cilindra torusom.



Slika 3.4: Izdvajanje (trimming) na primjeru elipsoida i cilindra: izdvajanje elipsoida i izdvajanje cilindra

Pretpostavlja se da će krivulja presjeka dviju zakrivljenih ploha biti komplicirana oblika, iako su plohe jednostavne, kao npr. cilindar ili stožac. No budemo li pogledali presjek dvaju šupljih cilindara jednakih radijusa i okomitih osi, vidjet ćemo da se radi o obliku koji je svoju primjenu našao u mnogim sakralnim građevinama – dobili smo svodove, Slika 3.5.

Booleovim operacijama na ravninskim poligonima bave se, između ostalih, i računalna geometrija, računalna grafika, geometrijsko modeliranje i CAD. Provedena su mnoga znanstvena istraživanja koja su rezultirala i pronalaskom algoritma za Booleove operacije na poligonima. Rivero i Feito predstavili su jednostavan i učinkovit algoritam za Booleove operacije na ravninskim poligonima.



Slika 3.5: Svodovi nastali iz cilindara

Slika 3.6: Primjena svodova u arhitekturi, The Abbey of Fontevrault

Bibliografija

[1] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, Exton, Pennsylvania USA, 2007.

[2] G. Glaeser, *Geometry and its Applications in Arts, Nature and Technology*, Springer Wien New York, 2012.

[3] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition*, Chapman and Hall/CRC, 2006.

[4] B. Kučinić, O. Kristoforović, I. Saler, *Oble forme u graditeljstvu*, Zagreb, 1992.

[5] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover publ., New York, 1991.

[6] V. Rovenski, *Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE*, Birkhäuser Boston, New York, USA

[7] S. Filipan, S. Gorjanc, H. Kvasnička, *Natkrivanje paraboličkim konoidom*, KoG, 5 (2002.), 57-64

[8] S. Gračan, *Kleinova boca*, MiŠ, 25. broj, (2004.), 221-227

[9] M. Davidović, I. Buhin, *Natkrivanje građevina hiperboličkim paraboloidima*, Studentski rad, Građevinski fakultet, Zagreb, 2006.

[10] Ž. Milin Šipuš, *Geometrija ploha*, Skripta, PMF, Zagreb

[11] Ž. Milin Šipuš, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Skripta, PMF, Zagreb

[12] Bezier_ curves, dostupno na http://caqd.cs.byu.edu/ 557 /text (listopad 2014.).

[13] http://www.grad.hr/geomteh3d/ radne.html, (studeni 2014.)

Sažetak

Plohe i krivulje, te građevina i arhitektura ključni su pojmovi u ovom radu. U svrhu pisanja ovog rada, proučene su klase ploha i krivulja koje su obrađene sa stajališta diferencijalne geometrije, a proučena je i njihova primjena u arhitekturi. Može se uočiti da se u arhitekturi najviše koriste pravčaste plohe. One su vrlo pogodne i jednostavne za izgradnju jer ih generiraju pravci. Osim pravčastih ploha, široku primjenu imaju i Bézierove plohe, pogotovo u novije vrijeme, jer se pomoću njih stvaraju plohe slobodnih oblika, koje su temelj suvremene arhitekture.

Summary

Surfaces and curves, buildings and architecture are the keywords often used in this thesis. In order to write it, we have studied classes of surfaces and curves from the perspective of differential geometry. Furthermore, we have analysed their applications in architectural design. We can notice that the most commonly used surfaces in architecture are ruled surfaces. Ruled surfaces are especially suitable for constructing and widely applied in surface design since they are generated by straight lines. Besides ruled surfaces, Bézier surfaces have also been widely used nowadays. They are used for designing so-called freeform surfaces, which are the basis of modern and contemporary architecture.

Životopis

Rođena sam 6. kolovoza 1990. godine u Kutini. Cijelo djetinjstvo provela sam u Slatini, gdje sam 1997. godine upisala Osnovnu školu Josipa Kozarca. Matematika mi je od početka bila najzanimljiviji predmet. Od 4. razreda osnovne škole sudjelujem na matematičkim natjecanjima, koja nastavljam pohađati i u srednjoj školi. Opću gimnaziju u okviru Srednje škole Marka Marulića Slatina upisala sam 2005. godine. Nakon maturiranja 2009. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkome fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, smjer: nastavnički. Isti smjer odabirem i za diplomski studij, koji završavam 2015. godine.