

# Bicentrički parovi točkaka trokuta

---

**Topalović, Bernarda**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:881079>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-06**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Bernarda Topalović

**BICENTRIČKI PAROVI TOČAKA**  
**TROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof.dr.sc.Sanja Varošaneć

Zagreb, srpanj, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Bicentrički parovi točkaka</b>	<b>3</b>
1.1 Trilinearne i baricentričke koordinate . . . . .	3
1.2 Centar trokuta . . . . .	7
1.3 Bicentrički parovi . . . . .	13
<b>2 Brocardove točke</b>	<b>23</b>
2.1 Prva Brocardova točka i Brocardov kut . . . . .	23
2.2 Druga Brocardova točka . . . . .	30
2.3 Brocardova kružnica (Kružnica sedam točkaka) . . . . .	34
<b>3 Yffove točke</b>	<b>45</b>
3.1 Yffove točke . . . . .	45
3.2 Analogija s Brocardovim točkama . . . . .	49
<b>Bibliografija</b>	<b>53</b>

# Uvod

U naslovu ovog diplomskog rada stoji pojam *trokut* s kojim je upoznata većina ljudi. No, pojam *bicentrički parovi* u hrvatskoj se literaturi gotovo i ne spominje. Uz pojam bicentričkih parova usko se veže i pojam *centar* trokuta. Ti pojmovi i njihova svojstva proučavaju se u ovom diplomskom radu.

Proučavanjem karakterističnih točaka trokuta bave se mnogi geometri. Clark Kimberling sustavno skuplja podatke o takvim točkama trokuta i do sada je opisao 7707 centara trokuta i 119 bicentričkih parova točaka. Kimberlingova lista centara trokuta, kao i bicentričkih parova točaka trokuta stalno se povećava. Iz tog razloga neki bicentrički parovi točaka trokuta nose imena cvijeća, kao npr. *Acaccia*, *Hyacinth* ...

U analitičkoj je geometriji uobičajeno koristiti Kartezijeve koordinate točke za smještaj u pogodni koordinatni sustav. Međutim, osim Kartezijevih postoje još i trilinearne i bari-centričke koordinate koje opisuju smještaj točke u odnosu na dane elemente nekog trokuta (stranice, kutove). Trilinearne i baricentričke koordinate proučavaju se u početnom dijelu rada jer su izrazito važne u daljnjem proučavanju centara i bicentričkih parova točaka trokuta. Proučavaju se najpoznatiji centri trokuta: središte trokutu upisane kružnice, težište, središte trokutu opisane kružnice i ortocentar, a dani su i izvodi njihovih trilinearnih koordinata.

Najpoznatiji bicentrički par točaka trokuta su Brocardove točke o kojima se piše u središnjem dijelu rada. Proučavaju se najvažnija svojstva ovih točaka.

Posljednje poglavlje posvećeno je nešto manje poznatom, bicentričkom paru točaka, Yffovim točkama koje su jedna vrsta analogona Brocardovim točkama.

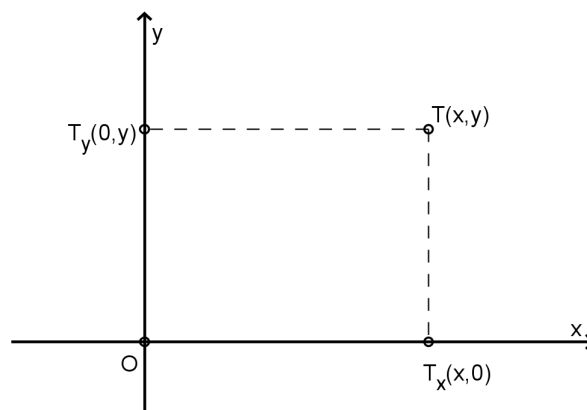


# Poglavlje 1

## Bicentrički parovi točaka

### 1.1 Trilinearne i baricentričke koordinate

U analitičkoj geometriji uobičajeno je točki ravnine pridružiti uređeni par brojeva koji opisuju poziciju te točke u odnosu na neki dani koordinatni sustav  $(O, x, y)$  gdje su  $x$  i  $y$  brojevnici pravci sa zajedničkom ishodišnom točkom  $O$ . U proučavanju trokuta uobičajeno je



Slika 1.1: Koordinatni sustav u ravnini

upotrebljavati koordinate koje opisuju smještaj točke u odnosu na neke elemente danog trokuta. Rabe se dvije vrste takvih koordinata: trilinearne i baricentričke [4].

**Definicija 1.1.1.** Neka je  $P$  točka koja se nalazi u ravnini trokuta  $ABC$ . Bilo koja tri broja  $x, y, z$  proporcionalna udaljenostima točke  $P$  do stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  (tim redom) nazivamo trilinearnim koordinatama točke  $P$  i označavamo

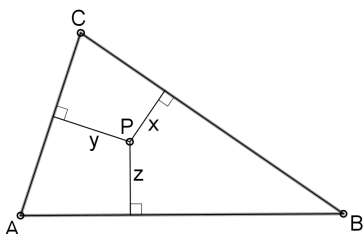
$$P = x : y : z = d(P, \overline{BC}) : d(P, \overline{CA}) : d(P, \overline{AB}).$$

Trilinearne koordinate vrhova trokuta  $ABC$  su:

$$A = 1 : 0 : 0, B = 0 : 1 : 0, C = 0 : 0 : 1.$$

Naime,  $d(A, \overline{BC}) = v_a$ ,  $d(A, \overline{CA}) = 0$  i  $d(A, \overline{AB}) = 0$ , pa su  $v_a : 0 : 0$  tražene koordinate vrha  $A$ . No, brojevi  $v_a, 0, 0$  su proporcionalni brojevima  $1, 0, 0$  pa je uobičajeno pisati

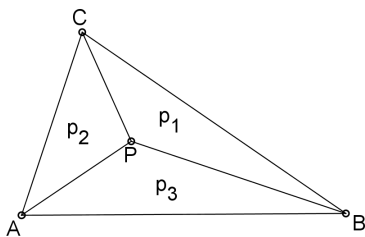
$$A = 1 : 0 : 0.$$



Slika 1.2: Trilinearne koordinate točke  $P$ .

**Definicija 1.1.2.** Neka je točka  $P$  takva da pripada ravnini trokuta  $ABC$ . Baricentričke koordinate točke  $P$  su bilo koja tri broja  $p_1, p_2, p_3$  proporcionalna površinama trokuta  $PBC, PAC$  i  $PAB$ . Pišemo  $P(p_1, p_2, p_3)$  ili  $P = p_1 : p_2 : p_3$ . Baricentričke koordinate vrhova trokuta  $ABC$  su:

$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).$$



Slika 1.3: Baricentričke koordinate točke  $P$ .

Baricentričke koordinate je 1827. godine uveo August Ferdinand Möbius.



**Teorem 1.1.3.** *Ako su  $x : y : z$  trilinearne koordinate točke  $P$ , tada su  $x \sin \alpha : y \sin \beta : z \sin \gamma$  baricentričke koordinate točke  $P$ .*

*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$  i točka  $P$  čije su trilinearne koordinate  $P = x : y : z$ . Za površinu trokuta vrijedi

$$p = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta.$$

Tada imamo

$$x : y : z = p_x : p_y : p_z$$

$$x : y : z = \left( x \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot bc \right) : \left( y \frac{1}{2} \sin \beta \cdot ac \right) : \left( z \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot ab \right),$$

tj.

$$x : y : z = (x \sin \alpha \cdot bc) : (y \sin \beta \cdot ac) : (z \sin \gamma \cdot ab).$$

Dakle,

$$x : y = (x \sin \alpha \cdot bc) : (y \sin \beta \cdot ac).$$

S druge strane, za baricentričke koordinate točke  $P$  vrijedi

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{ax}{2} : \frac{by}{2} = \frac{cz}{2} = xa : yb : cz.$$

Želimo pokazati jednakost

$$xa : yb = x \sin \alpha : y \sin \beta.$$

Vrijedi

$$xa : yb = x \sin \alpha : y \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow xay \sin \beta = xby \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

što je slijedi iz sinusova poučka u trokutu  $ABC$ . Na isti način, vrijedi

$$yb : cz = y \sin \beta : z \sin \gamma$$

$$\Leftrightarrow ybz \sin \gamma = ycz \sin \beta$$

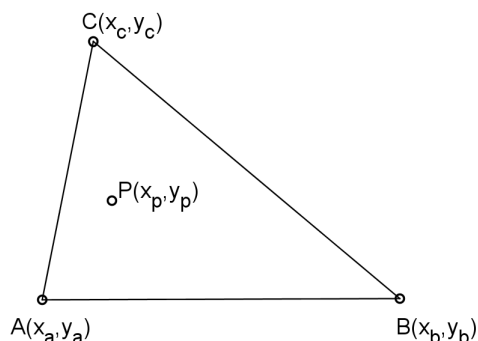
$$\Leftrightarrow b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow b : c = \sin \beta : \sin \gamma.$$

Dakle,

$$p_1 : p_2 : p_3 = x \sin \alpha : y \sin \beta : z \sin \gamma.$$

□

Slika 1.4: Kartezijeve koordinate točke  $P$ .

Izrazimo trilinearne koordinate točke  $P$  pomoću Kartezijevih koordinata. Neka u Kartezijevom koordinatnom sustavu vrhovi trokuta  $ABC$  imaju koordinate

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C).$$

Izračunajmo implicitnu jednadžbu pravca  $BC$ .

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B)$$

$$(y - y_B)(x_C - x_B) = (y_C - y_B)(x - x_B)$$

$$x(y_C - y_B) - y(x_C - x_B) - x_B(y_C - y_B) + y_B(x_C - x_B)$$

$$x(y_C - y_B) - y(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C = 0.$$

Prema formuli za udaljenost točke  $T(x_0, y_0)$  od pravca  $p \dots Ax + By + C = 0$

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

imamo

$$t_1 = d(P, \overline{BC}) = \frac{|x_P(y_C - y_B) - y_P(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}.$$

To je prva trilinearna koordinata točke  $P$ .

Analognim postupkom dobivamo

$$t_2 = d(P, \overline{CA}) = \frac{|x_P(y_A - y_C) - y_P(x_A - x_C) - x_C y_A + x_A y_C|}{\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}}$$

$$t_3 = d(P, \overline{AB}) = \frac{|x_P(y_B - y_A) - y_P(x_B - x_A) - x_A y_B + y_A x_B|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Time su trilinearne koordinate točke  $P = t_1 : t_2 : t_3$  izražene pomoću Kartezijevih koordinata.

## 1.2 Centar trokuta

Prisjetimo se definicija homogenosti i simetričnosti:

Funkcija  $f(a, b, c)$  je pozitivno homogena reda  $n$  u  $a$ ,  $b$  i  $c$  ako za svaku uređenu trojku  $(a, b, c)$  i  $t > 0$  vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c).$$

Funkcija  $f(a, b, c)$  je simetrična u  $b$  i  $c$  ako za svaku uređenu trojku  $(a, b, c)$  vrijedi

$$f(a, b, c) = f(a, c, b).$$

**Definicija 1.2.1.** Centar trokuta  $ABC$  je točka s trilinearnim koordinatama  $x : y : z$  za koje je

$$x = f(a, b, c),$$

$$y = f(b, c, a),$$

$$z = f(c, a, b)$$

za neku pozitivno homogenu funkciju  $f$  sa svojstvom

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|.$$

### Regularan centar

Neka je  $p$  površina trokuta  $ABC$ .

**Definicija 1.2.2.** Centar  $X$  je regularan centar ako postoji funkcija  $f(a, b, c)$  koja ima oblik polinoma u varijablama  $a, b, c, p$  takva da vrijedi

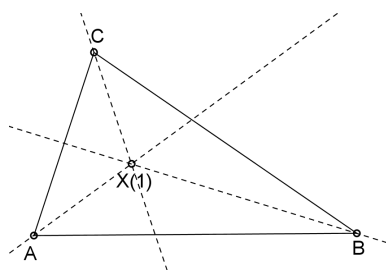
$$X = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b).$$

Centar trokuta se obično navodi oznakom  $X_i$  ili  $X(i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  i imenom ukoliko postoji. Jednadžba centra trokuta, iz koje možemo dobiti trilinearne koordinate cikličkom permutacijom  $a, b$  i  $c$  ili  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , je  $x = f(a, b, c)$  ili  $x = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$ . Svaka se jednadžba oblika  $x = f_1(\alpha, \beta, \gamma)$  primjenom sinusovog ili kosinusovog poučka može transformirati u jednadžbu oblika  $x = f(a, b, c)$ .

Svojstva centara trokuta opsežno je proučavao i opisao Clark Kimberling. Kimberlingova lista [1] trenutno broji 7707 centara trokuta. Četiri nama najpoznatija centra trokuta su središte upisane kružnice, težište, središte opisane kružnice i ortocentar, čije ću trilinearne i baricentričke koordinate navesti u sljedećem odlomku.

### $X(1)$ Središte upisane kružnice

**Definicija 1.2.3.** *Središte upisane kružnice je točka u kojoj se sijeku sve tri simetrale unutarnjih kutova trokuta.*



Slika 1.5: Centar  $X(1)$  - središte trokutu upisane kružnice.

Definicija je dobra, tj. središte upisane kružnice je dobro definirano jer se pokazuje da se sve tri simetrale kutova trokuta sijeku u jednoj točki.

Središte upisane kružnice jednako je udaljeno od svake stranice trokuta pa trilinearne koordinate centra  $X(1)$  glase

$$X(1) = 1 : 1 : 1.$$

Prema teoremu 1.1.3 baricentričke koordinate središta upisane kružnice su

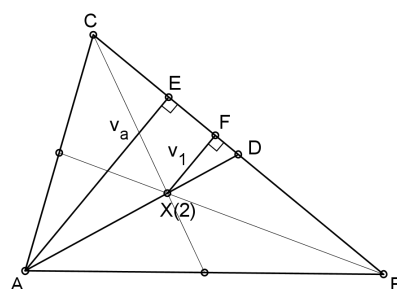
$$X(1) = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

### $X(2)$ Težište

**Definicija 1.2.4.** *Težište trokuta je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta.*

Neka je  $v_1$  duljina visine iz  $X(2)$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Budući da težište trokuta dijeli težišnicu  $\overline{AD}$  u omjeru 2 : 1 računajući od vrha A, slijedi da su trokuti  $DX(2)F$  i  $DAE$  slični (teorem K-K) s koeficijentom sličnosti

$$v_1 : v_a = 1 : 3.$$

Slika 1.6: Centar  $X(2)$  - težište trokuta.

Dakle,

$$v_1 = \frac{1}{3}v_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{2p}{a} = \frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{a}.$$

Analogno se dobiju i druge udaljenosti točke  $X(2)$  do stranica:

$$d(X(2), \overline{CA}) = \frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{b}$$

$$d(X(2), \overline{AB}) = \frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{c},$$

pa trilinearne koordinate težišta glase

$$X(2) = \left(\frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ca : ab.$$

Vidimo da je težište regularni centar trokuta  $ABC$ .

Određivanje baricentričnih koordinata svodi se na izračunavanje površina trokuta. Vrijedi

$$p(BCX(2)) = \frac{1}{2}a \cdot v_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2p}{3} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{3}p,$$

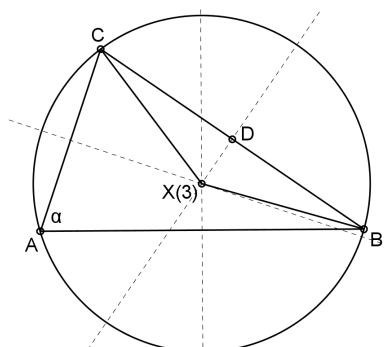
$$p(ABX(2)) = \frac{1}{3}p, p(CAX(2)) = \frac{1}{3}p,$$

pa su baricentričke koordinate težišta

$$X(2) = 1 : 1 : 1.$$

### $X(3)$ Središte opisane kružnice

**Definicija 1.2.5.** Središte trokutu opisane kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.

Slika 1.7: Centar  $X(3)$  - središte trokutu opisane kružnice.

Trilinearne koordinate središta opisane kružnice su

$$X(3) = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2),$$

a baricentričke

$$X(3) = \sin \alpha \cos \alpha : \sin \beta \cos \beta : \sin \gamma \cos \gamma = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Dokažimo te tvrdnje.

Opišemo li oko trokuta  $ABC$  kružnicu, tada je  $\angle BAC = \alpha$  obodni kut nad tetivom  $\overline{BC}$ . Prema teoremu o obodnom i središnjem kutu vrijedi da je  $\angle BX(3)C = 2\alpha$ , a zbog jednako-kračnosti trokuta  $BX(3)C$  i činjenice da je simetrala stranice  $\overline{BC}$  ujedno os simetrije trokuta  $BX(3)C$ , slijedi da je  $\angle BX(3)D = \alpha$ , gdje je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . U pravokutnom trokutu  $BX(3)D$  vrijedi

$$\cos \alpha = \frac{|X(3)D|}{R},$$

tj.

$$d(X(3), \overline{BC}) = R \cos \alpha.$$

Analogno,

$$d(X(3), \overline{AC}) = R \cos \beta$$

$$d(X(3), \overline{AB}) = R \cos \gamma.$$

Dakle, točka  $X(3)$  ima trilinearne koordinate

$$X(3) = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma.$$

Izrazimo kosinuse kutova kao funkcije stranica pomoću kosinusovog teorema:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Sad trilinearne koordinate točke  $X(3)$  glase

$$X(3) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = a(b^2 + c^2 - a^2) : b(a^2 + c^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2)$$

pri čemu smo posljednje koordinate dobili množenjem s  $2abc$ .

Funkcija centra za središte opisane kružnice glasi

$$f(a, b, c) = a(b^2 + c^2 - a^2).$$

Ova je funkcija homogena reda 3 jer vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = ta(t^2b^2 + t^2c^2 - t^2a^2) = t^3a(b^2 + c^2 - a^2) = t^3f(a, b, c).$$

Očito vrijedi i simetričnost u drugoj i trećoj varijabli, tj.

$$f(a, b, c) = f(a, c, b).$$

I  $f$  je polinom. Dakle, i  $X(3)$  je regularni centar trokuta. Izračunajmo još i njegove bari-centričke koordinate.

Prema teoremu 1.1.3 baricentričke koordinate od  $X(3)$  su

$$X(3) = \cos \alpha \sin \alpha : \cos \beta \sin \beta : \cos \gamma \sin \gamma = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

## $X(4)$ Ortocentar

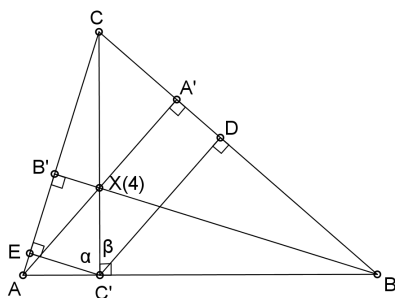
**Definicija 1.2.6.** *Ortocentar je točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta.*

U trokutu  $ABC$  povucimo visine iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  čija nožišta označimo s  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  redom. Iz točke  $C'$  povucimo okomice na stranice  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$ , te nožišta tih okomica označimo s  $D$  i  $E$ . Prema teoremu K-K o sličnosti trokuta trokutu  $CA'X(4)$  i  $CDC'$  su slični, a isto tako i trokutu  $B'CX(4)$  i  $ECC'$ . Iz prve sličnosti imamo:

$$\frac{t_1}{|C'D|} = \frac{|CX(4)|}{|CC'|},$$

a iz druge sličnosti imamo:

$$\frac{t_2}{|EC'|} = \frac{|CX(4)|}{|CC'|}.$$

Slika 1.8: Centar  $X(4)$  - ortocentar trokuta.

Izjednačavanjem ta dva razmjera dobivamo:

$$\frac{t_1}{|C'D|} = \frac{t_2}{|EC'|}.$$

U trokutu  $C'BD$  kut  $\angle C'BD = \beta$ , pa je  $\angle DC'B = 90^\circ - \beta$ . Budući da je  $\angle CC'B = 90^\circ$ , slijedi da je

$$\angle CC'D = \angle CC'B - \angle DC'B = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta.$$

Analogno dobivamo da je  $\angle EC'C = \alpha$ . U trokutu  $CC'D$  vrijedi  $|C'D| = v_c \cos \beta$ , a u trokutu  $EC'C$  vrijedi  $|EC'| = v_c \cos \alpha$ . Sad je

$$\frac{t_1}{v_c \cos \alpha} = \frac{t_2}{v_c \cos \beta},$$

tj.

$$t_1 : t_2 = \cos \beta : \cos \alpha.$$

Cikličkim pomicanjem indeksa dobivamo i ovu relaciju

$$t_2 : t_3 = \cos \gamma : \cos \beta.$$

Da bi brojeve  $t_1$ ,  $t_2$  i  $t_3$  mogli staviti u produljeni omjer treba četvrti član prvog razmjera biti jednak trećem članu drugog razmjera, a to dobivamo zapisujući ovako:

$$t_1 : t_2 = \cos \beta : \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta}$$

$$t_2 : t_3 = \cos \gamma : \cos \beta = \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Sada je

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma}.$$



Kad u taj razmjer uvrstimo formule kosinusovog poučka dobivamo

$$\begin{aligned}
 t_1 : t_2 : t_3 &= \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma} \\
 &= \frac{1}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} : \frac{1}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} : \frac{1}{\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}} \\
 &= \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} : \frac{2ac}{a^2+c^2-b^2} : \frac{2ba}{b^2+a^2-c^2} \\
 &= \frac{2abc}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{2abc}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{2abc}{c(b^2+a^2-c^2)} \\
 &= \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{1}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{1}{c(b^2+a^2-c^2)},
 \end{aligned}$$

i time smo dobili trilinearne koordinate ortocentra  $X(4)$  u uobičajenom zapisu. Radi se o funkciji  $f(a, b, c) = \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)}$  za koju se lako pokaže da je pozitivno homogena reda -3 i simetrična u varijablama  $b$  i  $c$ , te je  $X(4)$  centar trokuta.

Dakle, trilinearne koordinate ortocentra su

$$X(4) = \frac{1}{a(b^2+c^2-a^2)} : \frac{1}{b(a^2+c^2-b^2)} : \frac{1}{c(a^2+b^2-c^2)},$$

dok su baricentričke jednake

$$X(4) = \frac{a}{2Ra(b^2+c^2-a^2)} : \frac{b}{2Rb(a^2+c^2-b^2)} : \frac{c}{2Rc(a^2+b^2-c^2)},$$

tj.

$$X(4) = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{a^2+c^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}.$$

### 1.3 Bicentrički parovi

**Definicija 1.3.1.** Neka je  $P$  točka sa trilinearnim koordinatama

$$\alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

i  $U$  točka sa trilinearnim koordinatama

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = f(a, c, b) : f(b, a, c) : f(c, b, a)$$

gdje je  $f$  neka pozitivno homogena funkcija takva da vrijedi  $|f(a, b, c)| \neq |f(a, c, b)|$ , pri čemu su  $a, b, c$  duljine stranica čvrstog trokuta. Točke  $P$  i  $U$  nazivamo bicentričkim točkama ili bicentričkim parom točaka.

Bicentričke točke ne mogu biti centri trokuta jer ne zadovoljavaju svojstvo simetričnosti, tj.

$$|f(a, b, c)| \neq |f(a, c, b)|$$

za bilo koju uređenu trojku  $(a, b, c)$ .

Najpoznatiji primjer bicentričkih parova točaka trokuta su prva i druga Brocardova točka  $\Omega$  i  $\Omega'$  čije su trilinearne koordinate

$$\Omega = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$$

i

$$\Omega' = \frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}.$$

Više o Brocardovim točkama slijedi u središnjem dijelu rada.

Slijede računске operacije koje možemo provesti među bicentričkim parovima s trilinearnim koordinatama

$$P = p : q : r = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

i

$$U = u : v : w = f(a, c, b) : f(b, a, c) : f(c, b, a),$$

a koje generiraju nove centre trokuta. Navedena je jednadžba prvog bicentričkog para  $p = f(a, b, c)$ . Jednadžba drugog bicentričkog para dobije se kao  $u = f(a, c, b)$ , a ostale cikličkim permutacijama.

Trilinearni produkt:

$$pu : qv : rw;$$

baricentrični produkt:

$$apu : bqv : crw;$$

bicentrička suma:

$$(p + u) : (q + v) : (r + w);$$

bicentrička razlika:

$$(p - u) : (q - v) : (r - w);$$

unakrsna suma:

$$(qw + rv) : (ru + pw) : (pv + qu);$$

unakrsna razlika:

$$(qw - rv) : (ru - pw) : (pv - qu);$$

trilinearni pol pravca  $PU$ :

$$\frac{1}{qw - rv} : \frac{1}{ru - pw} : \frac{1}{pv - qu};$$

idealna točka pravca  $PU$ :

$$[p(bv + cw) - u(bq + cr)] : [q(cw + au) - v(cr + ap)] : [r(au + bv) - w(ap + bq)];$$

polovište:

$$(kp + hu) : (kq + hv) : (kr + hw),$$

gdje je  $h = ap + bq + cr$  i  $k = au + bv + cw$ ;

Cevina točka:

$$(pv + qu)(pw + ru) : (qw + rv)(qu + pv) : (ru + pw)(rv + qw);$$

križna točka:

$$pu(rv + qw) : qv(pw + ru) : rw(qu + pv)$$

i konjugirani vrh:

$$\frac{a}{a^2qrvw - pu(br + cq)(bw + cv)} : \frac{b}{b^2rpwu - qv(cp + ar)(cu + aw)} : \frac{c}{c^2pquv - rw(aq + bp)(av + bu)}.$$

Provjerimo da prva operacija, nazvana trilinearni produkt stvarno od dvije bicentričke točke  $P$  i  $U$  stvara centar. Ako je  $f(a, b, c)$  jednadžba prve trilinearne koordinate za točku  $P$ , a  $f(a, c, b)$  jednadžba prve trilinearne koordinate za točku  $U$ , tada trilinearni produkt za prvu trilinearnu koordinatu glasi ovako

$$g(a, b, c) := f(a, b, c) \cdot f(a, c, b).$$

Treba provjeriti homogenost i simetričnost funkcije  $g$ . Prema pretpostavkama  $f$  je pozitivno homogena reda  $n$ . Tada je

$$\begin{aligned} g(ta, tb, tc) &= f(ta, tb, tc) \cdot f(ta, tc, tb) = t^n f(a, b, c) \cdot t^n f(a, c, b) \\ &= t^{2n} f(a, b, c) \cdot f(a, c, b) = t^{2n} g(a, b, c), \end{aligned}$$

tj.  $g$  je pozitivno homogena reda  $2n$ . Osim toga vrijedi

$$g(a, c, b) = f(a, c, b) \cdot f(a, b, c) = g(a, b, c),$$

tj.  $g$  je simetrična u drugoj i trećoj varijabli. Dakle,  $g$  generira centar trokuta.

Provjerimo još da operacija trilinearni pol pravca  $PU$  od dvije bicentričke točke  $P$  i  $U$  stvara centar. Analognim postupkom provjerimo homogenost i simetričnost funkcije  $g$  definirane na sljedeći način:

$$g(a, b, c) := \frac{1}{f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c)}.$$

Vrijedi,

$$\begin{aligned} g(ta, tb, tc) &= \frac{1}{f(tb, tc, ta) \cdot f(tc, tb, ta) - f(tc, ta, tb) \cdot f(tb, ta, tc)} \\ &= \frac{1}{t^n f(b, c, a) \cdot t^n f(c, b, a) - t^n f(c, a, b) \cdot t^n f(b, a, c)} \\ &= \frac{1}{t^{2n} [f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c)]} \\ &= \frac{1}{t^{2n}} g(a, b, c), \end{aligned}$$

tj.  $g$  je pozitivno homogena reda  $-2n$ . Nadalje provjerimo simetričnost funkcije  $|g|$ :

$$\begin{aligned} |g(a, c, b)| &= \left| \frac{1}{f(b, a, c) \cdot f(c, a, b) - f(c, b, a) \cdot f(b, c, a)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{-[f(b, c, a) \cdot f(c, b, a) - f(c, a, b) \cdot f(b, a, c)]} \right| \\ &= |-g(a, b, c)| \\ &= |g(a, b, c)|. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija  $g$  je homogena reda i  $|g|$  je simetrična u drugoj i trećoj varijabli, tj.  $g$  stvara centar trokuta. Na isti se način i za ostale operacije dokazuje da generiraju centar funkciju.

Očito je da bicentrički par točaka  $P$  i  $U$  leži na jednom pravcu. Na tom pravcu  $PU$  leže i bicentrička suma i bicentrička razlika ovih dviju točaka. Dokazat ćemo još općenitiju tvrdnju:

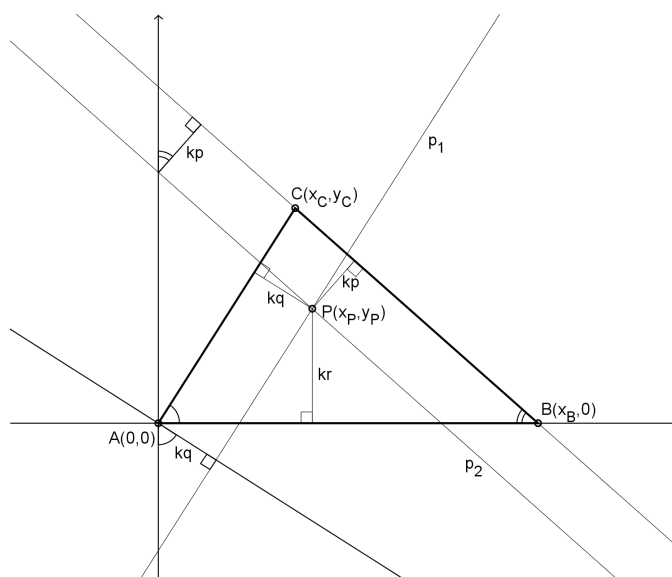
Neka su  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Definiramo točku  $Q$  kao kombinaciju točaka  $P$  i  $U$  ovako:

$$Q = \lambda P + \mu U$$

s trilinearnim koordinatama

$$Q = (\lambda p + \mu u) : (\lambda q + \mu v) : (\lambda r + \mu w).$$

Tvrdimo da točka  $Q$  pripada pravcu  $PU$ .



Slika 1.9: Prelazak iz trilinearnih koordinata u Kartezijeve koordinate.

Za jednadžbu pravca  $PU$  trebaju nam Kartezijeve koordinate točkaka  $P$  i  $U$ . Odredimo formulu za prelazak iz trilinearnih koordinata točke  $P = p : q : r$  u Kartezijeve koordinate  $P(x_P, y_P)$ .

Neka je dani trokut  $ABC$  smješten u koordinatni sustav tako da su koordinate vrhova  $A, B$  i  $C$  su

$$A(0, 0), B(x_B, 0), C(x_C, y_C).$$

Udaljenosti točke  $P$  do stranica trokuta jednake su

$$d(P, \overline{BC}) = kp, d(P, \overline{AC}) = kq, d(P, \overline{AB}) = kr.$$

Neka pravci  $p_1$  i  $p_2$  prolaze točkom  $P$  tako da je  $p_1 \parallel AC$  i  $p_2 \parallel BC$ .

Jednadžbe tih pravaca su

$$p_1 \dots y = \frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos \alpha}$$

$$p_2 \dots y = \frac{y_C}{x_C - x_B} x - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B} - \frac{kp}{\cos \beta}.$$

Točka  $P$  je presjek pravaca  $p_1$  i  $p_2$ . Slijedi,

$$\frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos \alpha} = \frac{y_C}{x_C - x_B} x - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B} - \frac{kp}{\cos \beta},$$

tj.

$$x \left[ \frac{y_C}{x_C} - \frac{y_C}{x_C - y_C} \right] = k \left[ \frac{q}{\cos \alpha} - \frac{p}{\cos \beta} \right] - \frac{x_B y_C}{x_C - x_B}.$$

U trokutu  $ABC$  stranica  $c$  je duljine  $c = d(A, B) = x_B$ ,  $\cos \alpha = \frac{x_C}{b}$  i  $\cos \beta = \frac{x_B - x_C}{a} = \frac{c - x_C}{a}$ .  
Duljine stranica  $a$  i  $b$  možemo dobiti kao udaljenost točkaka  $B$  i  $C$ , odnosno  $A$  i  $C$ :

$$a = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + y_C^2}$$

$$b = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}.$$

Uvrštavajući navedeno u prethodnu jednakost dobivamo

$$x = k \left[ \frac{bq}{x_C} - \frac{ap}{c - x_C} \right] \cdot \frac{x_C(c - x_C)}{cy_C} + x_C,$$

tj.  $x$  koordinata točke jednaka je

$$x_P = k \cdot \frac{bq(c - x_C) - apx_C}{cy_C} + x_C.$$

Uvrstimo  $x_P$  u jednadžbu pravca  $p_1$  kako bi izračunali koordinatu  $y_P$  točke  $P$ .

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_C}{x_C} x - \frac{kq}{\cos \alpha} \\ y &= \frac{y_C}{x_C} \left( k \cdot \frac{bq(c - x_C) - apx_C}{cy_C} + x_C \right) - \frac{kqb}{x_C} \\ y_P &= k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C \end{aligned}$$

Dakle, Kartezijeve koordinate točke  $P$  su

$$P \left( k \cdot \frac{bq(c - x_C) - apx_C}{cy_C} + x_C, k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C \right).$$

Izrazimo još koeficijent  $k$  pomoću poznatih podataka. Koordinata  $y_P$  točke  $P$  je jednaka udaljenosti točke  $P$  do stranice  $\overline{AB}$ , tj.

$$y_P = kr.$$

Slijedi,

$$kr = k \cdot \frac{-ap - bq}{c} + y_C$$

$$k \cdot \frac{ap + bq + cr}{c} = y_C$$

$$k = \frac{cy_C}{ap + bq + cr}.$$

Uvrstimo  $k$  u Kartezijeve koordinate točke  $P$  iz čega dobivamo

$$P\left(\frac{c(bq + rx_C)}{ap + bq + cr}, \frac{cry_C}{ap + bq + cr}\right).$$

Pokažimo vrijedi li dobivena formula za centar  $X(2)$  (težište) trokuta  $ABC$ . Kartezijeve koordinate težišta dobivamo kao

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Kako su koordinate vrhova trokuta  $ABC$  jednake  $A(0, 0)$ ,  $B(x_B, 0)$  i  $C(x_C, y_C)$ , koordinate težišta su  $T\left(\frac{x_B + x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right)$ . Provjerimo!

Trilinearne koordinate težišta su  $X(2) = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ . Prema izvedenoj formuli Kartezijeve koordinate težišta su

$$T\left(\frac{c + x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right),$$

tj. jer je  $c = x_B$  pišemo

$$T\left(\frac{x_B + x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right).$$

Dakle, izvedene formule se slažu s Kartezijevim koordinatama težišta.

Dakle, točke  $P$  i  $U$  s trilinearnim koordinatama  $P = p : q : r$  i  $U = u : v : w$  zapisujemo u obliku Kartezijevih koordinata na sljedeći način:

$$P\left(\frac{c(bq + rx_C)}{ap + bq + cr}, \frac{cry_C}{ap + bq + cr}\right)$$

$$U\left(\frac{c(bv + wx_C)}{au + bv + cw}, \frac{cwy_C}{au + bv + cw}\right).$$

Kartezijeve koordinate točke  $Q$  tada su

$$Q = \left(\frac{b(\lambda q + \mu v) + x_C(\lambda r + \mu w)}{a(\lambda p + \mu u) + b(\lambda q + \mu v) + c(\lambda r + \mu w)}, \frac{c(\lambda r + \mu w)y_C}{a(\lambda p + \mu u) + b(\lambda q + \mu v) + c(\lambda r + \mu w)}\right).$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkama  $P$  i  $U$  je

$$y - y_P = \frac{y_U - y_P}{x_U - x_P}(x - x_P).$$

Ako točka  $Q$  leži na pravcu  $PU$  tada vrijedi

$$y_Q - y_P = \frac{y_U - y_P}{x_U - x_P}(x_Q - x_P).$$

Kad uvrstimo sve izraze za koordinate točaka  $P$ ,  $U$  i  $Q$  u tu jednakost, nakon kraćeg računanja dobivamo da je istinita, tj. točka  $Q$  pripada pravcu  $PU$ .

Prethodno navedene operacije stvaraju centar trokuta od dvije bicentričke točke. Nasuprot tome, ako imamo centar trokuta  $X = x : y : z$ , tada se bicentričke točke  $X_y$  i  $X_z$  tog centra definiraju ovako:

$$X_y = y : z : x$$

i

$$X_z = z : x : y.$$

Slijedi lista prvih deset bicentričkih parova točaka trokuta sa pripadnom funkcijom  $f$  za točku  $P$ :

$P(1)$  i  $U(1)$  = prva i druga Brocardova točka,

$$f(a, b, c) = \frac{c}{b};$$

$P(2)$  i  $U(2)$  = prva i druga Beltramijeva točka,

$$f = a(b^2 - a^2);$$

$P(3)$  i  $U(3)$  = prva i druga Yffova točka,

$$f(a, b, c) = bc \sqrt[3]{\frac{c-u}{b-u}},$$

gdje je  $u$  realno rješenje jednadžbe  $x^3 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0$ ;

$P(4)$  i  $U(4)$  = prvo i drugo Grinbergovo sjecište,

$$f = [\text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma - 2 \text{ctg } \alpha + (\text{tg } \beta - \text{tg } \gamma)L^{\frac{1}{2}}] \sec \alpha,$$

gdje je  $L = -\text{ctg } \alpha \text{ctg } \beta \text{ctg } \gamma (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma)$ ;

$P(5)$  i  $U(5)$  = prvi i drugi Ehrmannov pivot,

$$f = \sin(\beta - \gamma - \frac{\pi}{3});$$

$P(6)$  i  $U(6)$  = bicentrički par centra  $X(6)$  tj. Lemoineove točke,

$$f = b : c : a;$$



$P(7)$  i  $U(7)$  = prva i druga Evan-Yffova točka,

$$f = bc(b^4 - b^2c^2 + 2c^2a^2 - 3a^2b^2);$$

$P(8)$  i  $U(8)$  = bicentrički par centra  $X(2)$ ,

$$f(a, b, c) = \frac{1}{b};$$

$P(9)$  i  $U(9)$  = trilinearni produkt  $X(6) \cdot P(8)$ ,

$$f(a, b, c) = \frac{a}{b};$$

$P(10)$  i  $U(10)$  = trilinearni produkt  $X(2) \cdot P(8)$ ,

$$f(a, b, c) = \frac{b}{a}.$$

Lista bicentričkih parova točaka stalno se povećava, pa su imena bicentričkih parova posuđena iz drugih područja. Preciznije, izabrana su imena cvijeća za imena određenih bicentričkih parova, kao npr. točke *Acacia*,  $P(43)$  i  $U(43)$  (hrvatski: akacija, mimoza). Centar  $X(6)$  naziva se simedijalna točka ili u čast Emile Michel Hyacinthe Lemoine-a, Lemoineova točka. Jer je jedan dio Lemoineova imena i Hyacinthe (hrvatski: zumbul), bicentrički par točaka  $P(6)$  i  $U(6)$  centra  $X(6)$  (tj. Lemoineove točke) naziva se još i Hyacinthovim točkama.



## Poglavlje 2

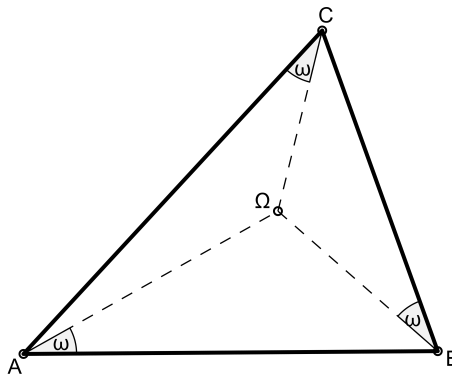
# Brocardove točke

### 2.1 Prva Brocardova točka i Brocardov kut

**Definicija 2.1.1.** Točku  $\Omega$  trokuta  $ABC$ , takvu da vrijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \omega$$

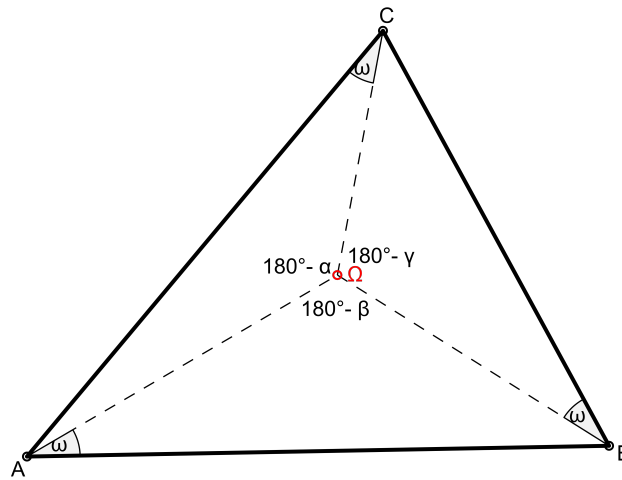
zovemo prvom Brocardovom točkom. Kut  $\omega$  zovemo Brocardov kut.



Slika 2.1: Prva Brocardova točka

Brocardova točka je dobila ime po Henriju Brocardu koji je postavio zadatak kako odrediti takvu točku i riješio ga. Međutim, on nije bio prvi koji je riješio taj problem. Prije njega to je učinio August Leopold Crelle 1816. godine. Konstruirajući točku  $\Omega$  dokazat ćemo postojanje i jedinstvenost prve Brocardove točke. Neka je dana Brocardova točka  $\Omega$  trokuta  $ABC$ . U trokutu  $AB\Omega$  tada vrijedi

$$\angle A\Omega B = 180^\circ - \omega - (\beta - \omega) = 180^\circ - \beta.$$



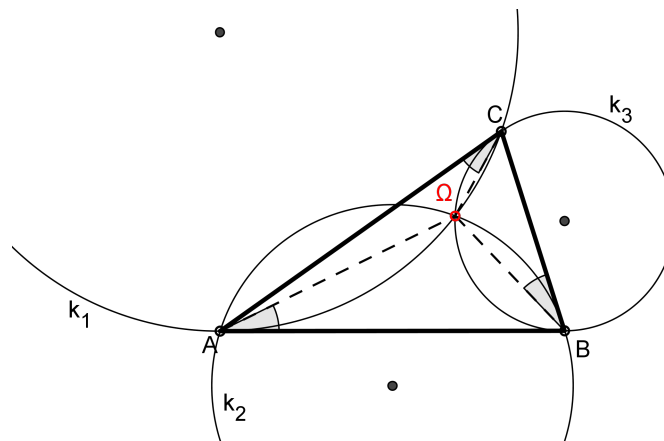
Slika 2.2: Konstrukcija prve Brocardove točke

Analogno, u trokutu  $BC\Omega$  vrijedi

$$\angle B\Omega C = 180^\circ - \omega - (\gamma - \omega) = 180^\circ - \gamma$$

i u trokutu  $CA\Omega$  vrijedi

$$\angle C\Omega A = 180^\circ - \omega - (\alpha - \omega) = 180^\circ - \alpha.$$



Slika 2.3: Konstrukcija prve Brocardove točke

Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu, konstruiramo kružnicu  $k_1$  sa središnjim kutom veličine  $2\alpha$  nad tetivom  $\overline{AC}$ , kružnicu  $k_2$  sa središnjim kutom veličine  $2\beta$  nad tetivom  $\overline{AB}$  i kružnicu  $k_3$  sa središnjim kutom veličine  $2\gamma$  nad tetivom  $\overline{BC}$ . Obodni kut kružnice  $k_1$  nad tetivom  $\overline{AC}$  je veličine  $180^\circ - \alpha$ , obodni kut kružnice  $k_2$  nad tetivom  $\overline{BA}$  je veličine  $180^\circ - \beta$  i obodni kut kružnice  $k_3$  nad tetivom  $\overline{BC}$  je veličine  $180^\circ - \gamma$ . Sjecište kružnica  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  je točka  $\Omega$ . Tako konstruirajući prvu Brocardovu točku dokazali smo njeno postojanje i jedinstvenost. U nastavku slijedi još jedna definicija prve Brocardove točke [2].

**Definicija 2.1.2.** *Neka je dan trokut  $ABC$ . Kružnica  $k_1$  koja prolazi vrhom  $A$  i dira stranicu  $\overline{BC}$  u vrhu  $C$ , kružnica  $k_2$  koja prolazi vrhom  $B$  i dira stranicu  $\overline{AC}$  u vrhu  $A$  i kružnica  $k_3$  koja prolazi vrhom  $C$  i dira stranicu  $\overline{AB}$  u vrhu  $B$  sijeku se u jednoj točki  $\Omega$  koju nazivamo prvom Brocardovom točkom.*

Postojanje i jedinstvenost prve Brocardove točke možemo dokazati na još jedan način. Konstruiramo kružnicu  $k$  koja prolazi vrhom  $B$  i dira stranicu  $\overline{AC}$  u vrhu  $C$ . Pravac koji prolazi vrhom  $C$  i paralelan je sa stranicom  $\overline{AB}$  siječe kružnicu  $k$  u točki  $D$ . Sjecište dužine  $\overline{AD}$  i kružnica  $k$  je točka  $\Omega$ . Neka je  $\angle\Omega AB = \omega$ . Tada vrijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega DC = \omega$$

jer su  $\angle\Omega AB$  i  $\angle\Omega DC$  kutovi uz transversalu paralelnih pravaca  $AB$  i  $CD$ . Kutovi  $\angle\Omega DC$  i  $\angle\Omega BC$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{C\Omega}$  pa vrijedi

$$\angle\Omega BC = \angle\Omega DC = \omega.$$

Također je i  $\angle\Omega AB = \omega$  jer je kut tetive i tangente jednak obodnom kutu nad tetivom.

**Teorem 2.1.3.** *Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  unutarnji kutovi trokuta  $ABC$  i  $\omega$  Brocardov kut. Vrijedi*

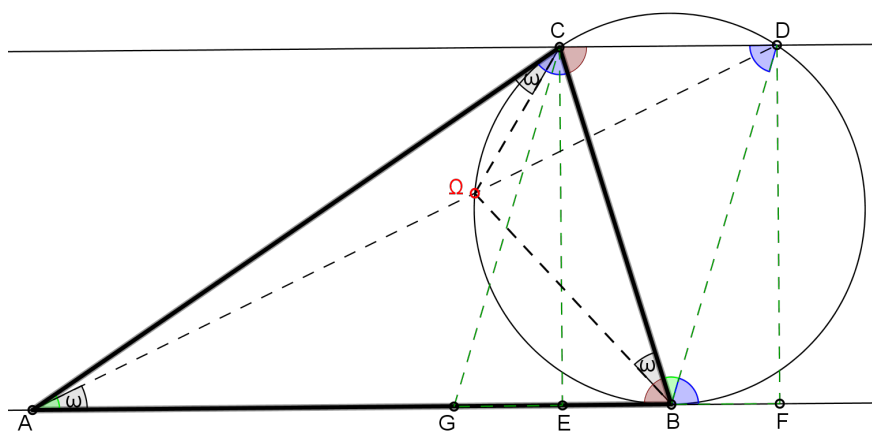
$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

*Dokaz.* Neka je dan trokut  $ABC$  i prva Brocardova točka  $\Omega$ . Kružnica  $k$  prolazi točkama  $B$  i  $C$ , a pravac na kojem leži stranica  $\overline{AB}$  joj je tangenta. Točka  $D$  je presjek kružnice  $k$  i pravca paralelnog sa stranicom  $\overline{AB}$  koji prolazi točkom  $C$ . Neka je točka  $E$  nožište visine spuštene iz vrha  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$ , a točka  $F$  nožište okomice spuštene iz točke  $D$  na pravac na kojem leži stranica  $\overline{AB}$ . Nadalje, odredimo točku  $G$  takvu da vrijedi  $|BF| = |EG|$ . Prema teoremu o kutovima uz transversalu vrijedi

$$\angle ABC = \angle BCD = \beta.$$

Kutovi  $\angle B\Omega C$  i  $\angle BDC$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{BC}$  i  $\angle B\Omega C = 180^\circ - \gamma$ , iz čega slijedi

$$\angle BDC = \gamma.$$

Slika 2.4: Brocardov kut  $\omega$ .

Tada je

$$\angle CBD = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha.$$

Prema teoremu K-K o sličnosti trokuta, slijedi trokuti  $ABC$  i  $BCD$  su slični. Tada je

$$\angle DBF = \angle CGE = \gamma.$$

U trokutu  $AFD$  vrijedi:

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{|AF|}{|DF|},$$

u trokutu  $AEC$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DF|},$$

u trokutu  $BEC$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DF|}$$

i u trokutu  $DFB$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{|BF|}{|DF|}.$$

Točke  $A, E, B$  i  $F$  leže na istom pravcu zbog čega vrijedi

$$|AE| + |EB| + |BF| = |AF|.$$

Podijelimo li gornju jednakost s  $|DF|$  dobivamo

$$\frac{|AE|}{|DF|} + \frac{|EB|}{|DF|} + \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{|AF|}{|DF|},$$

tj.

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \omega$$

čime je teorem dokazan.  $\square$

**Propozicija 2.1.4.** Za Brocardov kut  $\omega$  vrijedi

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

*Dokaz.* Prvo dokažimo da je funkcija  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  konveksna za  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Deriviramo li ju prvi put dobivamo

$$f'(x) = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Druga derivacija glasi

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) (-\sin^{-2} x)' = -(-2) \sin^{-3} x \cos x \\ &= 2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

Za  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  vrijedi da je  $f''(x) > 0$ , pa je  $f$  konveksna. Za konveksnu funkciju vrijedi Jensenova nejednakost

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}$$

pri čemu su  $x, y, z > 0$ . Primijenimo li ovu nejednakost na  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  i na brojeve  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $z = \gamma$  uz primjenu teorema 2.1.3 dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) &\leq \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}{3} \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} &\leq \frac{\operatorname{ctg} \omega}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{3 \operatorname{tg} \omega} \\ 3 \operatorname{tg} \omega &\leq \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} \omega &\leq \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje te nejednadžbe u intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  je

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}$$

što je upravo trebalo dokazati.  $\square$

U nastavku slijedi račun za trilinearne koordinate prve Brocardove točke. Iz prve Brocardove točke  $\Omega$  povučemo okomice na stranice trokuta  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  i nožišta označimo s  $D$ ,  $E$  i  $F$ .

Prema definiciji trilinearnih koordinata

$$t_1 = d(\Omega, \overline{BC}) = |\Omega D|,$$

$$t_2 = d(\Omega, \overline{CA}) = |\Omega E|,$$

$$t_3 = d(\Omega, \overline{AB}) = |\Omega F|.$$

U trima pravokutnim trokutima  $AF\Omega$ ,  $BD\Omega$  i  $CE\Omega$  vrijedi

$$\cos \omega = \frac{t_3}{|A\Omega|}, \cos \omega = \frac{t_1}{|B\Omega|}, \cos \omega = \frac{t_2}{|C\Omega|},$$

tj.

$$\frac{|B\Omega|}{|C\Omega|} = \frac{t_1}{t_2},$$

$$\frac{|C\Omega|}{|A\Omega|} = \frac{t_2}{t_3}.$$

U trokutu  $BC\Omega$ , kut  $\angle B\Omega C$  jednak je  $180^\circ - \gamma$ . Izrazimo površinu trokuta  $BC\Omega$  na dva načina:

$$P(\triangle BC\Omega) = \frac{1}{2}|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}at_1.$$

Odatle dobivamo

$$|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin \gamma = at_1. \quad (1)$$

U trokutu  $AB\Omega$  imamo

$$P(\triangle AB\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}ct_3,$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin \beta = ct_3. \quad (2)$$

U trokutu  $AC\Omega$  imamo

$$P(\triangle AC\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}bt_2,$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin \alpha = bt_2. \quad (3)$$



Dijeljenjem objiju strana u 2 i 3 dobivamo

$$\frac{|B\Omega| \sin \beta}{|C\Omega| \sin \alpha} = \frac{ct_3}{bt_2}.$$

Prema sinusovom teoremu vrijedi  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$  što zajedno s  $\frac{|B\Omega|}{|C\Omega|} = \frac{t_1}{t_2}$  daje:

$$\frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ct_3}{bt_2},$$

tj.

$$t_3 = \frac{b^2}{ac} t_1.$$

Dijeljenjem objiju strana u 1 i 2, te primjenom sinusovog teorema dobivamo:

$$\frac{|C\Omega|}{|A\Omega|} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{at_1}{ct_3}$$

$$\frac{t_2}{t_3} \cdot \frac{c}{b} = \frac{at_1}{ct_3}$$

$$t_2 = \frac{ab}{c^2} t_1.$$

Sad je

$$\begin{aligned} t_1 : t_2 : t_3 &= t_1 : \frac{ab}{c^2} t_1 : \frac{b^2}{ac} t_1 \\ &= 1 : \frac{ab}{c^2} : \frac{b^2}{ac} = c : \frac{ab}{c} : \frac{b^2}{a} \\ &= \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a} \end{aligned}$$

čime smo dobili trilinearne koordinate prve Brocardove točke.

**Propozicija 2.1.5.** *Ako u trokutu ABC vrijedi  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ , tada je*

$$\alpha \leq 2\omega.$$

*Dokaz.* Vrijedi:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right).$$

Budući da je  $\frac{\beta+\gamma}{2} \leq \gamma$  i da je kotangens padajuća funkcija na  $\langle 0, \pi \rangle$  slijedi da je

$$\operatorname{ctg} \frac{\beta + \gamma}{2} \geq \operatorname{ctg} \gamma,$$

tj.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq \operatorname{ctg} \gamma. \quad (4)$$

Nadalje iz relacije  $\alpha \leq \beta$  slijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha \geq \operatorname{ctg} \beta. \quad (5)$$

Zbrojimo nejednakosti 4 i 5:

$$\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Iskoristimo li teorem 2.1.3 imamo

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \leq \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$\operatorname{ctg} \omega \leq \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Budući da je kotangens padajuća na  $\langle 0, \pi \rangle$ , slijedi da vrijedi

$$\omega \geq \frac{\alpha}{2},$$

tj.

$$2\omega \geq \alpha$$

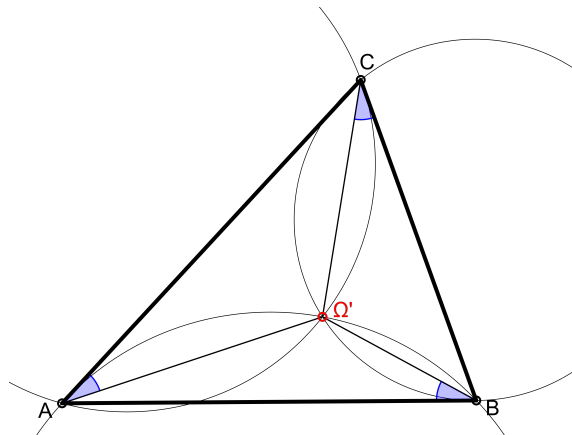
što je i trebalo dokazati. □

Drugi naziv za prvu Brocardovu točku je pozitivna Brocardova točka.

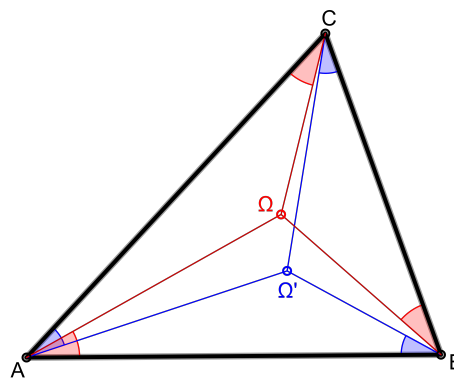
## 2.2 Druga Brocardova točka

**Definicija 2.2.1.** *Druga Brocardova točka trokuta ABC je točka  $\Omega'$  takva da vrijedi*

$$\angle \Omega'BA = \angle \Omega'CB = \angle \Omega'AC = \omega'.$$



Slika 2.5: Druga Brocardova točka



Slika 2.6: Prva i druga Brocardova točka

Drugu Brocardovu točku nazivamo još i negativnom Brocardovom točkom, a konstruira se na jednak način kao i prva Brocardova točka. Zbog toga za nju vrijede ista svojstva kao i za prvu Brocardovu točku. Veličinu drugog Brocardovog kuta  $\omega'$  tada također možemo izračunati prema teoremu 2.1.3. Zaključujemo da su prvi i drugi Brocardov kut jednakih veličina, tj.  $\omega' = \omega$ .

Opišimo trokutu  $ABC$  s prvom Brocardovom točkom  $\Omega$  kružnicu  $k_o$ . Vrhove trokuta  $ABC$  spojimo s točkom  $\Omega$  i te spojnice produžimo tako da sijeku kružnicu  $k_o$  redom u točkama  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ . Tada vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.2.** *Trokut  $A'B'C'$  je sukladan trokutu  $ABC$ , a prva Brocardova točka trokuta  $ABC$  je druga Brocardova točka trokuta  $A'B'C'$ .*

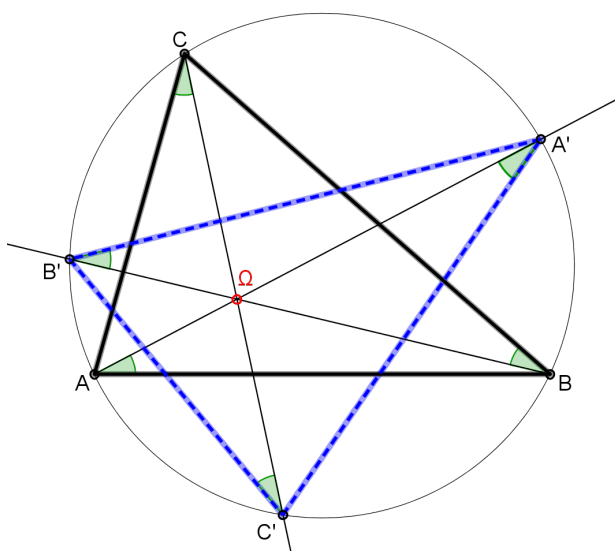
*Dokaz.* Točka  $\Omega$  je prva Brocardova točka trokuta  $ABC$  pa vrijedi

$$\angle \Omega CA = \angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \omega.$$

Kutovi  $\Omega CA$  i  $C'A'A$  su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom  $\overline{AC'}$ . Na isti način zaključujemo,  $\angle \Omega AB = \angle A'B'B$  (obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A'C'}$ ) i  $\angle \Omega BC = \angle B'C'C$  (obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B'C}$ ). Dakle,

$$\angle \Omega B'C' = \angle \Omega A'C' = \angle \Omega C'B' = \omega,$$

tj.  $\Omega$  je druga Brocardova točka trokuta  $A'B'C'$ .



Slika 2.7: Točka  $\Omega$  kao točka trokuta  $ABC$  i točka trokuta  $A'B'C'$

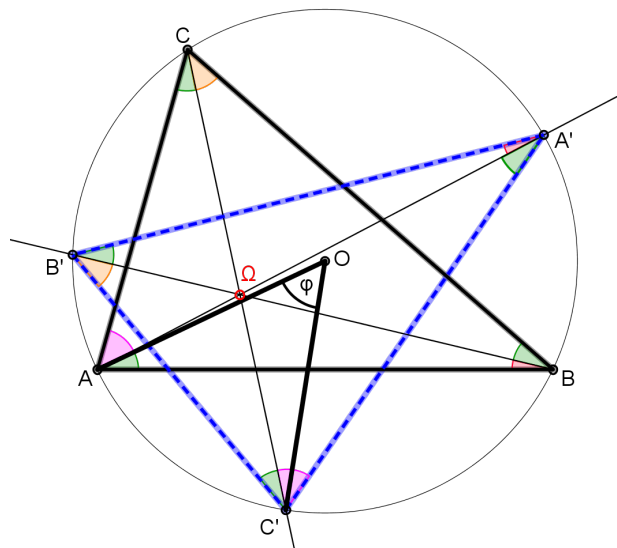
Kutovi  $\angle B'BA$  i  $\angle B'A'A$  su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom  $\overline{AB'}$ . Slijedi,  $\beta = \alpha'$ . Na isti način zaključujemo,  $\angle A'C'C = \angle A'AC$  (obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A'C}$ ) i  $\angle C'B'B = \angle C'CB$  (obodni kutovi nad tetivom  $\overline{BC'}$ ) iz čega slijedi  $\alpha = \gamma'$  i  $\gamma = \beta'$ .

Neka je točka  $O$  središte kružnice  $k_o$ . Tada je  $\angle AOC' = \varphi$  središnji kut nad tetivom  $\overline{AC'}$ . Kut  $\angle AA'C' = \omega$  je obodni kut nad tetivom  $\overline{AC'}$ . Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu slijedi

$$\varphi = 2\omega.$$

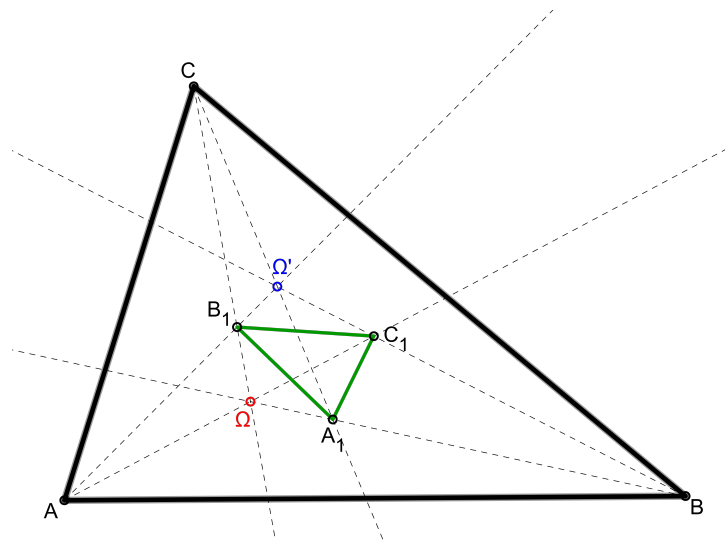
Slijedi, trokut  $A'B'C'$  možemo dobiti rotacijom trokuta  $ABC$  oko točke  $O$  za kut veličine  $2\omega$ .

Dakle, trokuti  $ABC$  i  $A'B'C'$  su sukladni, čime je teorem dokazan.  $\square$



Slika 2.8: Trokut  $A'B'C'$  je rotirani trokut  $ABC$  oko točke  $O$  za kut  $2\omega$ .

Neka je dan trokut  $ABC$  i Brocardove točke  $\Omega$  i  $\Omega'$  trokuta  $ABC$ . Povučemo polupravce  $A\Omega$ ,  $B\Omega$ ,  $C\Omega$ ,  $A\Omega'$ ,  $B\Omega'$  i  $C\Omega'$ . Polupravci  $A\Omega$  i  $B\Omega'$  sijeku se u točki  $C_1$ ,  $B\Omega$  i  $C\Omega'$  sijeku se u točki  $A_1$ , a polupravci  $C\Omega$  i  $A\Omega'$  u točki  $B_1$ . Dobiveni trokut  $A_1B_1C_1$  nazivamo prvim Brocardovim trokutom.



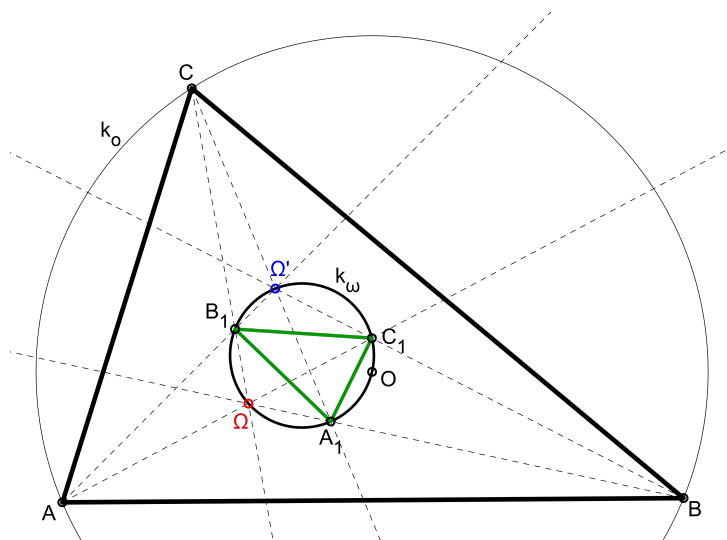
Slika 2.9: Prvi Brocardov trokut  $A_1B_1C_1$ .

**Definicija 2.2.3.** Neka su točke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  točke unutrašnjosti trokuta  $ABC$  takve da čine vrhove jednakokračnih trokuta s osnovicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom i Brocardovim kutom  $\omega$  uz osnovice. Takav trokut  $A_1B_1C_1$  nazivamo prvim Brocardovim trokutom.

Uočimo da se prema definiciji 2.2.3 točke  $A_1, B_1$  i  $C_1$  nalaze na simetralama stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ .

## 2.3 Brocardova kružnica (Kružnica sedam točaka)

**Definicija 2.3.1.** Brocardova kružnica je kružnica  $k_\omega$  opisana prvim Brocardovom trokutu  $A_1B_1C_1$ .

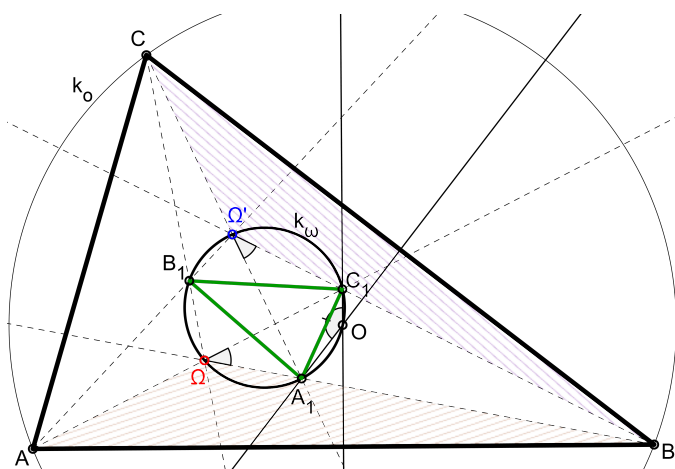


Slika 2.10: Brocardova kružnica

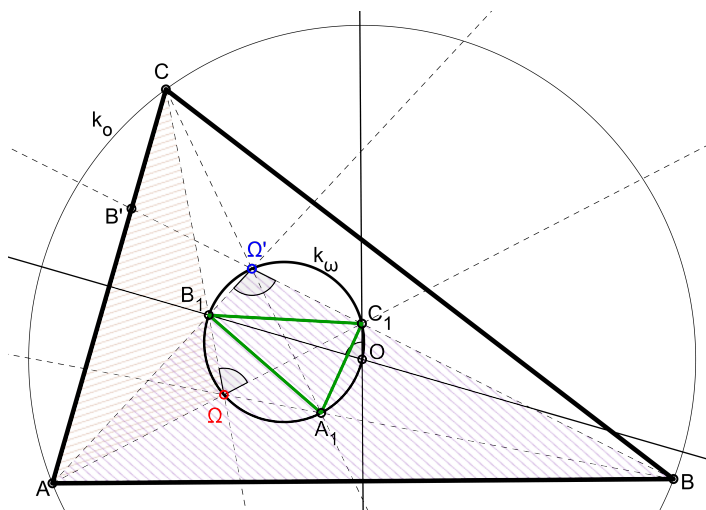
**Teorem 2.3.2.** Brocardova kružnica prolazi vrhovima trokuta  $A_1B_1C_1$ , prvom i drugom Brocardovom točkom ( $\Omega$  i  $\Omega'$ ) i središtem  $O$  opisane kružnice  $k_\omega$  trokuta  $ABC$ .

*Dokaz.* U trokutu  $AB\Omega$  znamo da je kut  $\angle A\Omega B = 180^\circ - \beta$ . Tada je njegov suplementarni kut  $\angle C_1\Omega A_1 = \beta$ . Isto tako, u trokutu  $BC\Omega$ , kut  $\angle B\Omega' C = 180^\circ - \beta$ . Njegov suplementarni kut je  $\angle A_1\Omega' C_1 = \beta$ . Kut  $\angle A_1OC_1 = 180^\circ - \beta$  jer su krakovi kuta  $\angle A_1OC_1$  okomiti na krakove kuta  $\angle ABC$ .

Kutovi  $\angle C_1\Omega A_1$ ,  $\angle A_1\Omega' C_1$  i  $\angle A_1OC_1$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A_1C_1}$  jedne kružnice. Označimo ju s  $k_\omega$ . Prema tome, točke  $A_1, \Omega, \Omega', C_1$  i  $O$  leže na kružnici  $k_\omega$ .

Slika 2.11: Obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A_1C_1}$ .

Analogno, promatrajući trokut  $A\Omega C$  zaključujemo da je  $\angle A\Omega C = 180^\circ - \alpha$ , pa je njegov suplementarni kut  $\angle C_1\Omega B_1 = \alpha$ . U trokutu  $A\Omega'B$ , kut  $\angle A\Omega'B = 180^\circ - \alpha$  možemo zapisati kao  $\angle B_1\Omega'C_1 = 180^\circ - \alpha$  jer točka  $B_1$  pripada polupravcu  $A\Omega'$ , a točka  $C_1$  polupravcu  $B\Omega'$ . Kut  $\angle B_1OC_1 = \alpha$  jer su krakovi tog kuta okomiti na krakove kuta  $\angle BAC$ .

Slika 2.12: Obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B_1C_1}$ .

Zaključujemo, kutovi  $\angle C_1\Omega B_1$ ,  $\angle B_1\Omega'C_1$  i  $\angle B_1OC_1$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B_1C_1}$  jedne kružnice. Označimo tu kružnicu s  $k'_\omega$ . Tada točke  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  i  $O$  leže na toj kružnici  $k'_\omega$ .

Točke  $C_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  i  $O$  pripadaju i kružnici  $k_\omega$  i  $k'_\omega$ , iz čega slijedi kružnice  $k_\omega$  i  $k'_\omega$  se podudaraju.  $\square$

**Teorem 2.3.3.** *Trokut  $ABC$  i prvi Brocardov trokut  $A_1B_1C_1$  su slični trokuti.*

*Dokaz.* Prema dokazu prethodnog teorema  $\angle B_1\Omega C_1$  i  $\angle B_1A_1C_1$  su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B_1C_1}$ , pa slijedi

$$\angle B_1\Omega C_1 = \alpha = \angle B_1A_1C_1.$$

Na isti način,

$$\angle A_1\Omega C_1 = \beta = \angle A_1B_1C_1$$

jer su  $\angle A_1\Omega C_1$  i  $\angle A_1B_1C_1$  obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A_1C_1}$ . Tada je i

$$\angle A_1C_1B_1 = \gamma$$

čime je teorem dokazan.  $\square$

Slijede definicije i teoremi koji su nam potrebni u sljedećim razmatranjima.

**Definicija 2.3.4.** *Neka je dan trokut  $ABC$  i točke  $\bar{A} \in \overline{BC}$  i  $\bar{B} \in \overline{AC}$  takve da vrijedi*

$$\angle C\bar{A}\bar{B} = \angle CAB = \alpha.$$

Dužinu  $\overline{\bar{A}\bar{B}}$  zovemo antiparalela stranice  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ .

Jer je kut

$$\angle ACB = \angle \bar{B}C\bar{A} = \gamma$$

tada je i

$$\angle \bar{A}\bar{B}C = \angle CBA = \beta.$$

Na isti način definiramo antiparalele za druge dvije stranice danog trokuta.

**Definicija 2.3.5.** *Polovišta svih antiparalela jedne stranice danog trokuta pripadaju pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta i naziva se simedijana danog trokuta.*

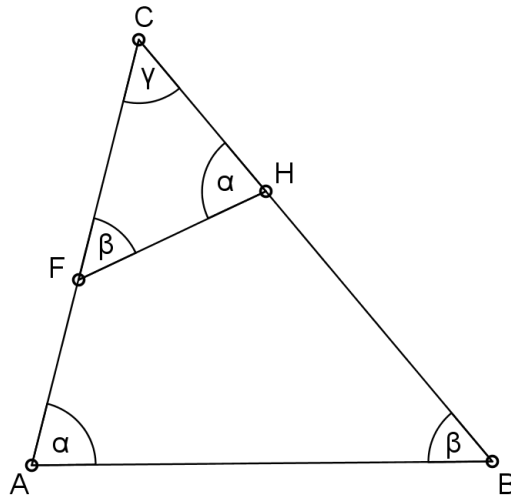
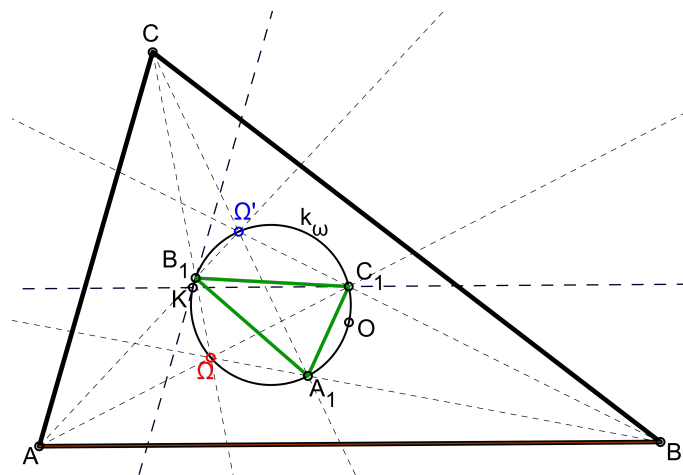
**Teorem 2.3.6.** *Simedijane danog trokuta  $ABC$  sijeku se u tzv. Lemoineovoj točki koju označavamo s  $K$ .*

Trilinearne koordinate Lemoineove točke  $K$  su

$$K = a : b : c.$$

Lemoineova točka je drugi naziv centra trokuta  $X(6)$ .



Slika 2.13: Antiparalela stranice  $\overline{AB}$ .Slika 2.14: Lemoineova točka  $K$  trokuta  $ABC$ .

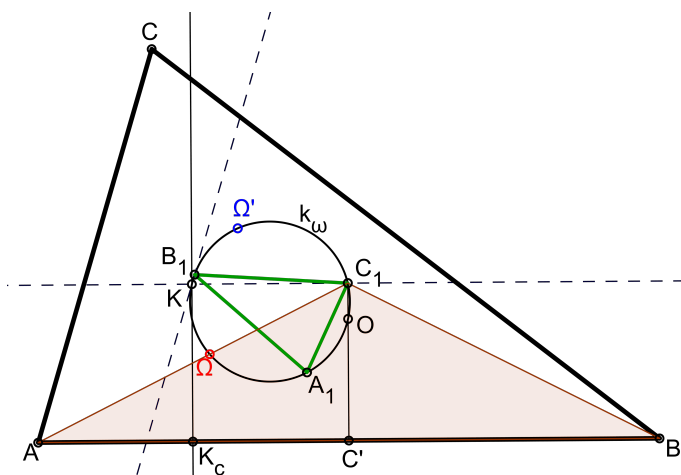
**Teorem 2.3.7.** Paralele sa stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  povučene redom točkama  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  sijeku se u točki  $K$  trokuta  $ABC$  koju nazivamo Lemoineova točka. Lemoineova točka  $K$  leži na Brocardovoj kružnici  $k_\omega$ .

*Dokaz.* Neka je  $p$  pravac paralelan sa stranicom  $\overline{AB}$  i prolazi točkom  $C_1$ , a  $q$  pravac paralelan sa stranicom  $\overline{AC}$  i prolazi točkom  $B_1$ . Neka je točka  $K$  sjecište tih dvaju pravaca.

Krakovi kuta  $\angle C_1KB_1$  su paralelni s krakovima kuta  $\angle B_1A_1C_1 = \alpha$ , pa je i  $\angle C_1KB_1 = \alpha$ . Iz dokaza teorema 2.3.3 gdje smo uočili da su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B_1C_1}$  veličine  $\alpha$  slijedi da točka  $K$  pripada kružnici  $k_\omega$ .

Neka je  $s$  pravac takav da prolazi točkom  $C_1$  i paralelan sa stranicom  $\overline{AB}$ . Sjecište pravaca  $p$  i  $s$  je točka  $K_1$ . Zbog paralelnosti krakova kutova  $\angle A_1K_1C_1$  i  $\angle ABC$  vrijedi  $\angle A_1K_1C_1 = \beta$ . Također iz dokaza teorema 2.3.3 slijedi da točka  $K_1$  pripada kružnici  $k_\omega$  jer su obodni kutovi nad tetivom  $\overline{A_1C_1}$  veličine  $\beta$ . Isto tako, točka  $K_1$  mora ležati na sjecištu kružnice  $k_\omega$  s dužinom  $\overline{C_1K_1}$  koja je sukladna dužini  $\overline{C_1K}$ . Slijedi,  $K_1 = K$ .

Još moramo pokazati da je  $K$  Lemoineova točka. Znamo da je  $C_1K \parallel AB$ . Neka je  $C'$  nožište okomice spuštene iz točke  $C_1$  na stranicu  $\overline{AB}$ , a  $K_c$  nožište okomice spuštene iz  $K$  na stranicu  $\overline{AB}$ . Slijedi  $|C_1C'| = |KK_c|$ . Prema definiciji prvog Brocardovog trokuta, trokut  $ABC_1$  je jednakokračan, s kutovima uz osnovicu  $\angle ABC_1 = \angle BAC_1 = \omega$ .



Slika 2.15: Jednakokračan trokut  $ABC_1$ .

Tada vrijedi

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2|C_1C'|}{|AB|} = \frac{2|KK_c|}{c}.$$

Prema definiciji prvog Brocardovog trokuta, jednakokračni su i trokuti  $A_1BC$  i  $AB_1C$  pa analognim promatranjem slijedi

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2|A_1A'|}{|BC|} = \frac{2|KK_a|}{a}$$

i

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2|B_1B'|}{|AC|} = \frac{2|KK_b|}{b}.$$

Slijedi

$$|KK_a| : |KK_b| : |KK_c| = \frac{\operatorname{tg} \omega \cdot a}{2} : \frac{\operatorname{tg} \omega \cdot b}{2} : \frac{\operatorname{tg} \omega \cdot c}{2} = a : b : c,$$

čime je dokazano da je točka  $K$  upravo Lemoineova točka trokuta  $ABC$ .  $\square$

Uočimo da Brocardova kružnica  $k_\omega$  prolazi kroz sedam točaka zbog čega se još naziva i kružnica sedam točaka. Te točke su vrhovi prvog Brocardovog trokuta  $A_1, B_1$  i  $C_1$ , prva i druga Brocardova točka  $\Omega$  i  $\Omega'$ , središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$  i Lemoineova točka  $K$  trokuta  $ABC$ .

Jedno od svojstava Brocardove kružnice je da je  $\overline{OK}$  promjer Brocardove kružnice. Dokaz slijedi iz činjenice da su dužine  $\overline{OA_1}$  i  $\overline{A_1K}$  okomite jer  $\overline{OA_1}$  leži na simetrali stranice  $\overline{BC}$ , a  $\overline{A_1K}$  na pravcu  $r$  paralelnom sa stranicom  $\overline{BC}$ .

Drugo svojstvo Brocardove kružnice je da su prva i druga Brocardova točka međusobno simetrične s obzirom na promjer  $\overline{OK}$ .

*Dokaz.* Prema teoremu o kutovima uz transversalu,

$$\angle \Omega C_1 K = \angle B A \Omega' = \omega.$$

Također

$$\angle K C_1 \Omega = \angle A B \Omega' = \omega$$

jer su to kutovi s paralelnim kracima. Slijedi

$$\angle \Omega C_1 K = \angle K C_1 \Omega.$$

Tada su jednaki i lukovi  $\widehat{\Omega K}$  i  $\widehat{K \Omega'}$ .  $\square$

Zbog simetričnosti točaka  $\Omega$  i  $\Omega'$  obzirom na promjer  $\overline{OK}$  Brocardove kružnice slijedi da su trokuti  $O\Omega\Omega'$  i  $K\Omega\Omega'$  jednakokrani.

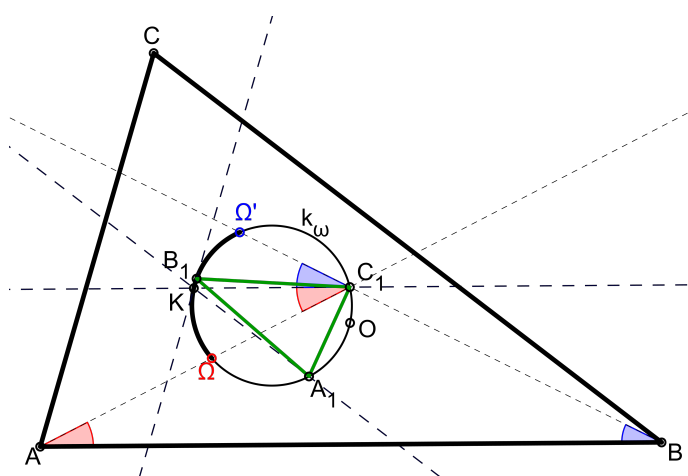
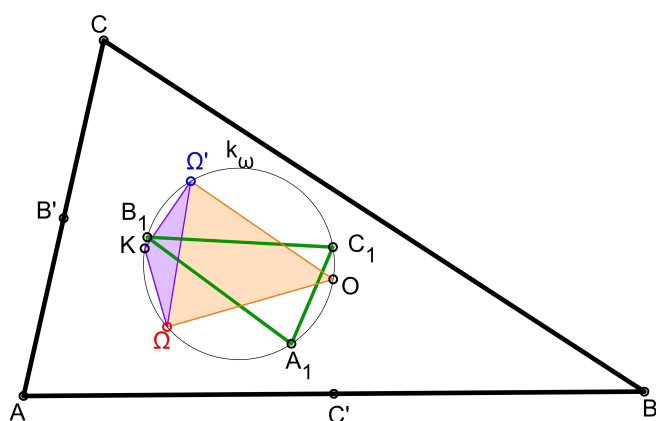
**Teorem 2.3.8.** *Težište trokuta  $ABC$  ujedno je i težište prvog Brocardovog trokuta  $A_1B_1C_1$ .*

*Dokaz.* Neka je točka  $C'_2$  na simetrali stranice  $\overline{AB}$  takva da vrijedi  $|C_1C'| = |C'C'_2|$ . Točka  $C'$  je tada polovište dužine  $\overline{C_1C'_2}$ . Trokuti  $AC'C_1$  i  $AB'B_1$  su slični prema teoremu K-K o sličnosti trokuta. Oba trokuta su pravokutna, a s druge strane vrijedi

$$\angle C'AC_1 = \angle B'AB_1 = \omega.$$

Zbog odabira točke  $C'_2$  trokuti  $AC'C'_2$  i  $AC'C_1$  su sukladni prema S-K-S teoremu o sukkladnosti trokuta. Ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu  $\overline{AC'}$ ,  $|C_1C'| = |C'C'_2|$  i kutovi između odgovarajućih stranica su veličine  $90^\circ$ . Prema tome, vrijedi

$$\frac{|AC'_2|}{|AB_1|} = \frac{\frac{|AB|}{2}}{\frac{|AC|}{2}} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

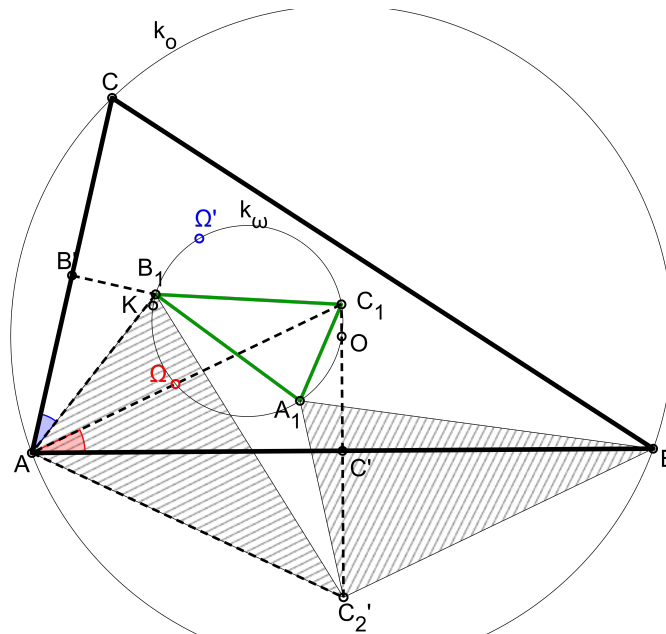
Slika 2.16: Kružni lukovi  $\widehat{\Omega K}$  i  $\widehat{K\Omega'}$  su jednaki.Slika 2.17: Trokuti  $O\Omega\Omega'$  i  $K\Omega\Omega'$  su jednakokračni.

Također  $\angle B_1AC' = \alpha - \omega$  i  $\angle C'AC'_2 = \angle C_1AC' = \omega$ , iz čega slijedi

$$\angle B_1AC'_2 = \alpha - \omega + \omega = \alpha.$$

Prema S-K-S teoremu o sličnosti trokuta, trokuti  $ABC$  i  $B_1AC'_2$  su slični. Na isti se način pokazuje da su trokuti  $A_1BC'_2$  i  $ABC$  slični. Točka  $C'_2$  pripada simetrali stranice  $\overline{AB}$ , pa vrijedi  $|AC'_2| = |C'_2B|$  što povlači da su trokuti  $B_1AC'_2$  i  $A_1BC'_2$  sukladni. Tada vrijedi  $|AB_1| = |B_1C|$  i  $|AB_1| = |C'_2A_1|$ , tj.

$$|B_1C| = |C'_2A_1|. \quad (*)$$

Slika 2.18: Trokuti  $B_1AC'_2$  i  $A_1BC'_2$  su sukladni.

Također  $|A_1B| = |A_1C|$  i  $|B_1C'_2| = |A_1B|$ , tj.

$$|A_1C| = |B_1C'_2|. \quad (**)$$

Jer vrijede \* i \*\* četverokut  $A_1CB_1C'_2$  je paralelogram. Sjecište dijagonala  $\overline{CC'_2}$  i  $\overline{A_1C_1}$  tog paralelograma je točka  $C'_1$  koja je polovište dijagonale  $\overline{CC'_2}$ . Odatle slijedi da je  $\overline{C_1C'_1}$  težišnica prvog Brocardovog trokuta  $A_1B_1C_1$ .

Dužina  $\overline{C_1C'_1}$  je također i težišnica trokuta  $CC_1C'_2$  ( $C'_1$  je polovište dijagonale  $\overline{CC'_2}$ ). Dužina  $\overline{CC'}$  je druga težišnica trokuta  $CC_1C'_2$  jer je točka  $C'_2$  odabrana tako da vrijedi  $|C_1C'| = |C'C'_2|$ . Težište  $T$  trokuta  $CC_1C'_2$  je sjecište težišnica  $\overline{CC'}$  i  $\overline{C_1C'_1}$ , iz čega slijedi  $|CT| = 2|C'T|$  i  $|C_1T| = 2|C'_1T|$ , tj. točka  $T$  je i težište danog trokuta  $ABC$  i prvog Brocardovog trokuta  $A_1B_1C_1$ .  $\square$

Konstruirajmo u danom trokutu  $ABC$  dvije kružnice; kružnicu  $k$  takvu da prolazi točkom  $C$  i dira stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $B$  i kružnicu  $k'$  takvu da prolazi točkom  $A$  i dira stranicu  $\overline{BC}$  u  $B$ . Te se kružnice sijeku u vrhu  $B$  i točki  $B_2$ . U sljedećim su lemmama navedena neka svojstva koja vrijede za takvu točku  $B_2$ .

**Lema 2.3.9.** *Točka  $B_2$  pripada semidijani vrha  $B$  trokuta  $ABC$ .*

**Lema 2.3.10.** Točka  $B_2$  je nožište okomice spuštene iz središta trokuta  $ABC$  opisane kružnice  $O$  na simedijanu tog trokuta koja prolazi vrhom  $B$ . Odnosno,

$$\angle OB_2B = \angle OB_2K = 90^\circ.$$

**Lema 2.3.11.** Točka  $B_2$  leži na Brocardovoj kružnici  $k_\omega$ .

*Dokaz.* Jedno od svojstava Brocardove kružnice  $k_\omega$  je da je dužina  $OK$  promjer Brocardove kružnice. Prema lemi 2.3.10 vrijedi  $\angle OB_2K = 90^\circ$  što znači da točka  $B_2$  leži na kružnici  $k_\omega$ .  $\square$

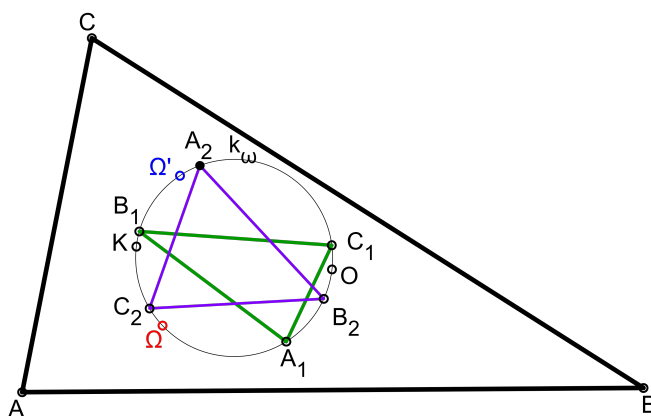
**Lema 2.3.12.** Točka  $B_2$  leži na kružnici koja je određena vrhovima  $A$  i  $B$  i središtem opisane kružnice  $O$ .

Na isti način možemo odrediti i točke  $A_2$  i  $C_2$  za koja vrijede analogna svojstva dana u prethodne četiri leme. Promatrajući te tri točke  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  s njihovim svojstvima možemo definirati sljedeći pojam.

**Definicija 2.3.13.** Drugi Brocardov trokut je trokut  $A_2B_2C_2$  pri čemu točke  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  zadovoljavaju svojstva prethodnih lema.

**Teorem 2.3.14.** Vrhovi drugog Brocardovog trokuta  $A_2B_2C_2$  leže na Brocardovoj kružnici.

*Dokaz.* Slijedi iz 2.3.12.  $\square$



Slika 2.19: Prvi i drugi Brocardov trokut.

Kako svaka simedijana trokuta  $ABC$  siječe Brocardovu kružnicu  $k_\omega$  u Lemoineovoj točki  $K$  i u još jednom vrhu trokuta, vrhove drugog Brocardovog trokuta  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  možemo definirati na sljedeća dva načina:

**Definicija 2.3.15.** *Vrhovi drugog Brocardovog trokuta  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  su nožišta okomica spuštenih iz središta opisane kružnice  $O$  danog trokuta  $ABC$  na simedijane tog trokuta.*

ili

**Definicija 2.3.16.** *Vrhovi drugog Brocardovog trokuta  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  su sjecišta Brocardove kružnice  $k_\omega$  i simedijana danog trokuta.*





# Poglavlje 3

## Yffove točke

### 3.1 Yffove točke

Neka su točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  udaljene od vrhova  $B$ ,  $C$  i  $A$  za čvrstu udaljenost  $u$ . Prema Cevainom teoremu dužine  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  i  $\overline{CC'}$  sijeku se u jednoj točki ako i samo ako je

$$\frac{d(A, C')}{d(C', B)} \cdot \frac{d(B, A')}{d(A', C)} \cdot \frac{d(C, B')}{d(B', A)} = 1,$$

tj. ako i samo ako je

$$\frac{u}{c-u} \cdot \frac{u}{a-u} \cdot \frac{u}{b-u} = 1,$$

tj.

$$u^3 = (a-u)(b-u)(c-u).$$

Tu točku nazivamo prvom Yffovom točkom i označavamo  $P(3)$ .

Ako su  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  jednako udaljene od  $C$ ,  $A$  i  $B$ , tada točku u kojoj se sijeku  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  i  $\overline{CC'}$  nazivamo druga Yffova točka. Ove točke je prvi opisao Peter Yff u članku [3]

Broj  $u$  je rješenje jednačbe  $x^3 = (a-x)(b-x)(c-x)$  koju zapisujemo i ovako

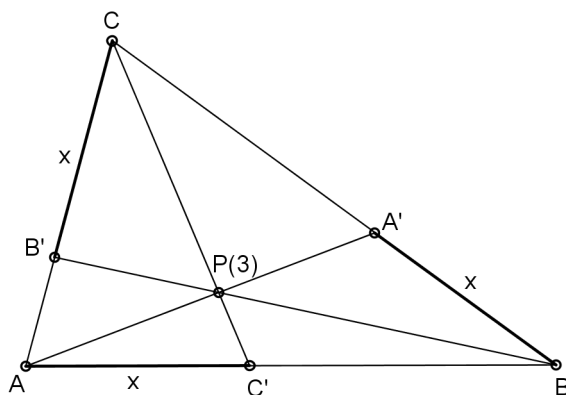
$$f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

gdje je

$$\begin{aligned} p &= a + b + c, \\ q &= ab + ac + bc, \\ r &= abc. \end{aligned}$$

Pokažimo da ova jednačba ima samo jedno realno rješenje. Očito  $f(x) = 0$  nema negativnih rješenja, što znači da se točka nalazi u unutrašnjosti trokuta. Vrijedi

$$a < b + c$$

Slika 3.1: Prva Yffova točka  $P_3$ .

$$b < c + a$$

$$c < a + b.$$

Jer su  $a, b > 0$  vrijedi

$$a^2 < a(b + c)$$

$$b^2 < b(c + a)$$

$$c^2 < c(a + b).$$

Zbrojimo li te nejednakosti dobivamo

$$a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) = 2(ab + bc + ac) = 2q.$$

Pribojimo li s obje strane  $2q$  dobivamo

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2q < 4q,$$

tj.

$$(a + b + c)^2 < 4q$$

$$p^2 < 4q$$

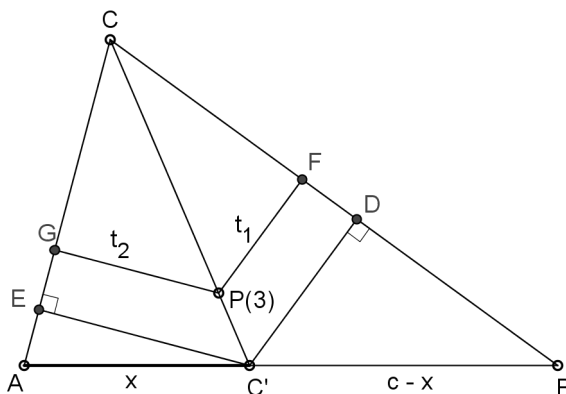
$$p^2 - 4q < 0$$

a tada je i

$$p^2 - 6q < 0.$$

Funkcija  $f$  je oblika  $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$ . Prva derivacija od  $f$  je  $f'(x) = 6x^2 - 2px + q$ . Diskriminanta je jednaka  $D = 4p^2 - 24q = 4(p^2 - 6q) < 0$ . Dakle,  $f'(x)$  ima negativnu

diskriminantu  $\Delta > 0$  iz čega slijedi  $f'(x) > 0$  za svaki realni broj  $x$ . Funkcija  $f$  raste za svaki realni broj  $x$ , pa samo na jednom mjestu siječe  $x$ -os, tj. ima jednu realnu nultočku. Ta realna nultočka naziva se Yffov broj i u ovom radu označavat ćemo je s  $u$ .

Slika 3.2: Prva Yffova točka  $P_3$ .

### Trilinearne koordinate

Izračunajmo trilinearne koordinate  $t_1 : t_2 : t_3$  Yffove točke.

Iz trokuta  $C'BD$  vrijedi

$$d(C', BC) = (c - x) \sin \beta.$$

Iz trokuta  $AC'E$  vrijedi

$$d(C', AC) = x \sin \alpha.$$

Trokuti  $C'DC$  i  $P(3)FC$  su slični prema K-K teoremu, pa vrijedi

$$\frac{|C'D|}{|P(3)F|} = \frac{|DC|}{|FC|} = \frac{|C'C|}{|P(3)C|}.$$

Na isti način su slični i trokuti  $C'EC$  i  $P(3)GC$ . Vrijedi

$$\frac{|C'E|}{|P(3)G|} = \frac{|EC|}{|GC|} = \frac{|C'C|}{|P(3)C|}.$$

Slijedi

$$t_1 : t_2 = d(C', BC) : d(C', AC) = (c - x) \sin \beta : x \sin \alpha.$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut  $ABC$  imamo  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$ , pa je

$$t_1 : t_2 = (c - x)b : xa = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b}.$$

Analogno

$$t_2 : t_3 = (a - x)c : xb = \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$

Slijedi

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$

Za daljnji izračun trilinearnih koordinata Yffove točke potrebna nam je sljedeća lema.

**Lema 3.1.1.** *Ako vrijedi*

$$t_1 : t_2 : t_3 = A : B : C$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = D : E : F$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = G : H : I$$

tada

$$t_1 : t_2 : t_3 = \sqrt[3]{ADG} : \sqrt[3]{BEH} : \sqrt[3]{CFI}.$$

*Dokaz.* Vrijedi  $t_1 = kA = lD = mG$  iz čega ako pomnožimo sve jednakosti i izvadimo treći korijen dobivamo

$$t_1 = \sqrt[3]{klm} \sqrt[3]{ADG}.$$

Analogno

$$t_2 = \sqrt[3]{klm} \sqrt[3]{BEH}$$

$$t_3 = \sqrt[3]{klm} \sqrt[3]{CFI}.$$

Dakle,

$$t_1 : t_2 : t_3 = \sqrt[3]{ADG} : \sqrt[3]{BEH} : \sqrt[3]{CFI}.$$

□

Imamo

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c - x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a - x)c}.$$

Ciklički permutiramo jednom

$$t_2 : t_3 : t_1 = \frac{a - x}{bx} : \frac{1}{c} : \frac{x}{(b - x)a}$$

i drugi put

$$t_3 : t_1 : t_2 = \frac{b - x}{cx} : \frac{1}{a} : \frac{x}{(c - x)b}.$$

Primjenom leme 3.1.1 na

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c-x}{ax} : \frac{1}{b} : \frac{x}{(a-x)c}$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{x}{(b-x)a} : \frac{a-x}{bx} : \frac{1}{c}$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{a} : \frac{x}{(c-x)b} : \frac{b-x}{cx}$$

dobivamo

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{c-x}{b-x}} : \frac{1}{b} \sqrt[3]{\frac{a-x}{c-x}} : \frac{1}{c} \sqrt[3]{\frac{b-x}{a-x}}$$

što su trilinearne koordinate prve Yffove točke.

## 3.2 Analogija s Brocardovim točkama

Yffove točke su slične Brocardovim točkama po mnogim svojstvima.

Za Brocardov kut  $\omega$  vrijedi  $\alpha \leq 2\omega$  gdje je  $\alpha$  najmanji kut trokuta  $ABC$ . Ako postavimo analogiju s Yffovom točkom (kutovi su analogni stranicama) tada postavljamo hipotezu da je  $a \leq 2u$ , gdje je  $a = \min\{a, b, c\}$ . Dokažimo tu hipotezu.

*Dokaz.* Opet promatramo funkciju  $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$  gdje su  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + ac + bc$  i  $r = abc$ . Broj  $u$  je jedino rješenje jednadžbe  $f(x) = 0$  i za brojeve  $x$  manje od  $u$  je  $f(x) < 0$  i to vrijedi samo za takve  $x$ . Dakle, dovoljno će biti dokazati da je  $f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0$  jer će to značiti da je  $x = \frac{a}{2}$  manji od  $u$  što trebamo dokazati.

Uzmimo da je  $a \leq b \leq c$ . Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{a^3}{8} - p \cdot \frac{a^2}{4} + q \cdot \frac{a}{2} - r = \frac{a^3}{4} - \frac{pa^2}{4} + q \frac{a}{2} - r \\ &= \frac{a^3}{4} - \frac{pa^2}{4} + \frac{qa}{2} - abc = \frac{a}{4} [a^2 - pa + 2q - 4bc] \\ &= \frac{a}{4} [a^2 - (a+b+c)a + 2(ab+ac+bc) - 4bc] \\ &= \frac{a}{4} [a^2 - a^2 - ab - ac + 2ab + 2ac + 2bc - 4bc] \\ &= \frac{a}{4} [ab + ac - 2bc] \\ &= \frac{a}{4} [b(a-c) + c(a-b)]. \end{aligned}$$

Budući da je  $a \leq b$  i  $a \leq c$  slijedi da je  $a - b \leq 0$  i  $a - c \leq 0$ , pa je  $f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0$  što smo i trebali dokazati jer sad iz toga slijedi da je  $\frac{a}{2} \leq u$ .  $\square$

Za Brocardov kut  $\omega$  vrijedi  $\omega \leq \frac{\pi}{6}$ , što možemo zapisati ovako:

$$\omega \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6}.$$

Ako postavimo analogiju sa Yffovom točkom (kutovi su analogoni stranicama) tada imamo ovu hipotezu:

$$u \leq \frac{a + b + c}{6}.$$

Dokažimo ju.

Opet promatramo funkciju  $f(x) = 2x^3 - px^2 + qx - r$ , gdje su  $p$ ,  $q$  i  $r$  definirani ovako:  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + ac + bc$  i  $r = abc$ . Broj  $u$  je jedino realno rješenje jednadžbe  $f(x) = 0$  i za svaki (i samo za takve)  $x$  veći od  $u$  je  $f(x) > 0$ . Ako dokažemo da je  $f\left(\frac{p}{6}\right)$  pozitivan broj to će značiti da je broj  $\frac{p}{6}$  veći od  $u$ , tj.  $u \leq \frac{p}{6}$ , a to upravo trebamo dokazati.

Dakle, dokazujemo da je  $f\left(\frac{p}{6}\right) \geq 0$ . Uvrstimo  $x = \frac{p}{6}$  u izraz za  $f$ :

$$f\left(\frac{p}{6}\right) = 2 \cdot \frac{p^3}{6^3} - p \cdot \frac{p^2}{36} + q \cdot \frac{p}{6} - r = \frac{-1}{54}p^3 + \frac{qp}{6} - r,$$

tj.

$$f\left(\frac{a + b + c}{6}\right) = \frac{-1}{54}(a + b + c)^3 + \frac{(ab + bc + ac)(a + b + c)}{6} - abc,$$

tj.

$$f\left(\frac{a + b + c}{6}\right) = \frac{1}{54} \left( -(a + b + c)^3 + 9(ab + bc + ac)(a + b + c) - 54abc \right).$$

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je  $a \leq b \leq c$  i uvedimo oznake:

$$x = b - a \geq 0$$

$$y = c - a \geq 0$$

$$y - x = m \geq 0.$$

Izrazimo funkciju  $f$  pomoću  $x$ ,  $y$  i  $m$ . Elementarni račun nam daje ovo:  $b = a + x$ ,  $c = a + y$  i

$$\begin{aligned} f(x, y, a) &= \frac{1}{54} \left( -(x + y + 3a)^3 + 9(xy + 2ax + 2ay + 3a^2)(x + y + 3a) - 54a(a + y)(a + x) \right) \\ &= \frac{1}{54} (-x^3 + 3x^2(2y + 3a) + 3xy(2y - 3a) - y^2(y - 9a)). \end{aligned}$$

Ako još uvrstimo  $y = x + m$  dobivamo

$$f(x, m, a) = \frac{1}{54} (10x^3 + 3(3a + 5m)x^2 + 3(3a + m)mx + (9a - m)m^2).$$

Iz nejednakosti trokuta  $c < a + b$  imamo

$$y + a < a + (x + a),$$

$$y < x + a,$$

$$y - x < a.$$

Dakle,  $m < a$ , pa je i  $9a - m < 0$ . Svi ostali pribrojnici u  $f$  su nenegativni pa je  $f\left(\frac{p}{6}\right)$  nenegativan broj odakle slijedi da je  $u \leq \frac{p}{6}$  što smo i trebali dokazati.





# Bibliografija

- [1] C. Kimberling, Encyclopedia of triangle centers - ETC,  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> (lipanj, 2015.)
- [2] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [3] P. Yff, *An Analog of the Brocard Points*, American Mathematical Monthly 70 (1963)  
495-501.
- [4] Wolfram MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/> (lipanj, 2015.)



# Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavani su bicentrički parovi točkaka trokuta. Listu, koja trenutno sadrži 119 bicentričkih parova, navodi Clark Kimberling.

U prvom dijelu rada definirane su trilinearne i baricentričke koordinate, centar trokuta i bicentrički parovi točkaka trokuta. Dana je poveznica između trilinearnih i baricentričkih, kao i trilinearnih i Kartezijevih koordinata. Navedeni su najpoznatiji centri trokuta i njihove trilinearne koordinate te nekoliko bicentričkih parova točkaka trokuta.

Središnji dio rada čine definicije, teoremi i dokazi vezani uz najpoznatiji bicentrički par točkaka trokuta, prvu i drugu Brocardovu točku. Izvedene su trilinearne koordinate Brocardovih točkaka i dana neka svojstva Brocardovog kuta. Navedene su definicije i teoremi vezani uz Brocardovu kružnicu te prvi i drugi Brocardov trokut.

U završnom dijelu rada obrađen je još jedan poznatiji bicentrički par točkaka, Yffove točke i neka njihova svojstva.



# Summary

In this master's thesis bicentric pairs of triangle points have been analysed. A table which currently contains 119 bicentric pairs is guided by Clark Kimberling.

In the first part of the thesis, trilinear and barycentric coordinates, center of triangle, bicentric pairs of points have been defined. Connections between trilinear and barycentric as well as trilinear and Cartesian coordinates have been given. Best known centers of triangle and their trilinear coordinates and some bicentric pairs of triangle points are given.

Central part of the thesis contains definitions, theorems, and proofs linked to the best known bicentric pair of triangle points as well as the first and the second Brocard points. Trilinear coordinates of the Brocard points are derived and some characteristics are given to the Brocard angle. Definitions and theorems connected to the Brocard circle as well as the first and the second Brocard triangle are given.

In the closing part of this thesis we describe another bicentric pair of points, the so-called Yff's points and prove some of its properties.



# Životopis

Rođena sam 13. lipnja 1990. godine u Varaždinu. Godine 1997. započinem osnovnoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Svibovec u Svibovcu nedaleko Varaždinskih Toplica. Godine 2005. upisujem Prvu gimnaziju Varaždin, opći smjer, u Varaždinu gdje sam 2009. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek u Zagrebu. Godine 2013. završavam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički i upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.