Neke primjene običnih diferencijalnih jednadžbi

Vučić, Krešimir

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Krešimir Vučić

NEKE PRIMJENE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Na početku želim zahvaliti svojoj mentorici prof. dr. sc. Dijani Ilišević na uloženom trudu i strpljenju pri pisanju ovoga rada. Uz Vas sam naučio da je neuspjeh u rješenju bilo kojeg zadatka samo rezultat nedovoljnog broja pokušaja te da su hrabrost, odvažnost i odlučnost utemeljitelji puta k napretku. Nesvjesno ste utjecali na mene kroz kolegije koje ste mi predavali i zato sam Vas izabrao za mentora pri pisanju ovog rada. Hvala Vam!

Od početka si bila tu kao prijateljica, sestra, kolegica i uvijek mi stajala uz rame i bila spremna pružiti ruku kad je bilo najteže. Proteklih pet godina bez tebe ni bi bile iste i sad kad se okrenem iza sebe ne mogu zamisliti kako bi sve izgledalo da nisi bila tu. Petra, hvala ti na ovih pet zlatnih godina koje si obilježila svojim prisustvom.

Mojoj braći Daliboru, Dariu i Kristijanu koji su uvijek vjerovali u svoga malog i velikog brata i bili mi podrška unatoč tome što su bili daleko od mene. Snahi Katarini i Tei koje su donijele radost u moj život. Hvala vam na svemu i obećavam vam da ću vas i dalje činiti najponosnijom braćom, snahom i nećakinjom na svijetu.

Njima bez kojih ovih pet godina ne bi bile moguće. Njima, mojoj najvećoj potpori i borcima. Vama koji ste se nekada brinuli više nego ja i koji ste na svojoj koži najviše osjetili ovih mojih pet godina studiranja. Mama i tata, vaš sin je uspio jer ste uvijek vjerovali u mene i onda kada ni sam ja nisam. Ovaj diplomski rad koji predstavlja krunu moga obrazovanja posvećujem vama i šaljem vam najveću zahvalu koja se ne može opisati riječima. Mama i tata, hvala vam!

Sadržaj

Uvod

Diferencijalna jednadžba je jednostavno rečeno jednadžba koja povezuje neku funkciju y (tj. $x \mapsto y(x)$) i neke njene derivacije. Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj je nepoznanica funkcija jedne varijable, a koja opisuje vezu između te funkcije i njenih derivacija za proizvoljnu vrijednost varijable funkcije. Dakle, to je jednadžba

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje F predstavlja neki izraz koji povezuje varijablu x s o njoj ovisnom nepoznatom funkcijom y i njenim derivacijama $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi je vrlo teško i zauzima pažnju znanstvenika od početka razvoja diferencijalnog računa do danas. Na prijelazu s 19. u 20. stoljeće to je bio pravi izazov za mnoge matematičare. Diferencijalne jednadžbe se pojavljuju kao matematički modeli u rješavanju važnih prirodnih i tehničkih problema. U raznim situacijama se susrećemo s nekom veličinom čija je brzina promjene proporcionalna s njenom trenutnom vrijednošću. Na pr. rast (pad) populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, brzina raspada radioaktivne tvari proporcionalna je trenutnoj količini te tvari, dobit je proporcionalna količini uloženog novca i slično.

Cilj ovog rada je pokazati neke primjene običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda u geometriji, nekim prirodnim znanostima i ekonomiji. Rad je podijeljen u pet poglavlja. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera i služi kao mali podsjetnik o diferencijalnim jednadžbama te nekim tipovima diferencijalnih jednadžbi i načinima njihova rješavanja. U drugom poglavlju bavimo se primjenama običnih diferencijalnih jednadžbi u modeliranju i rješavanju nekih klasičnih geometrijskih problema te pokazujemo primjenu na određivanje ortogonalnih i izogonalnih trajektorija, pojmova koji imaju veliku primjenu u inženjerstvu. U trećem i četvrtom poglavlju rada obične diferencijalne jednadžbe primjenjujemo u rješavanju nekih tipičnih problema iz fizike te biologije i kemije. Peto poglavlje pokazuje kako se mnogi problemi u ekonomiji i financijama također mogu modelirati običnim diferencijalnim jednadžbama.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i neki tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi

Diferencijalnom jednadžbom zovemo jednadžbu koja sadrži derivacije ili diferencijale nepoznate funkcije.

Ako nepoznata funkcija ovisi o jednom argumentu, diferencijalna jednadžba zove se *obična*, a ako ovisi o nekoliko argumenata pa sadrži parcijalne derivacije te nepoznate funkcije, tada se jednadžba zove *parcijalna* diferencijalna jednadžba. Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koju diferencijalna jednadžba sadrži.

Primjeri u ovom radu sadržavat će samo obične diferencijalne jednadžbe prvog reda, koje općenito imaju oblik

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdje je x argument, a y tražena funkcija.

Često je diferencijalnu jednadžbu prvog reda moguće riješiti po y' :

$$y' = f(x, y),$$

a često se svode i na oblik

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

U tom slučaju možemo za nepoznatu funkciju uzeti y (kao funkciju od x), ali i x (kao funkciju od y).

Funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu zove se *rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe*.

Rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe zove se *općim* ako sadrži toliko neovisnih konstanti po volji koliki je red diferencijalne jednadžbe, dok funkcije koje se dobivaju iz općeg integrala uz različite brojčane vrijednosti konstanti po volji jesu *partikularna* rješenja te diferencijalne jednadžbe. Iz navedenog slijedi da opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog reda uvijek sadrži n neovisnih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Geometrijski svakom partikularnom integralu diferencijalne jednadžbe odgovara njegova grafička predodžba, tj. graf u obliku ravninske krivulje koja se zove integralna krivulja te jednadžbe, a općem integralu odgovara familija svih integralnih krivulja. Za određivanje jedne posebne krivulje familije (koja odgovara uvjetima konkretnog zadatka) potrebno je u opće rješenje uvesti *početne uvjete*, a ti uvjeti su na pr. za diferencijalnu jednadžbu prvog reda koordinate jedne točke $x = x_0$, $y = y_0$ kojom ta krivulja prolazi.

Rješenje diferencijalne jednadžbe koje se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za kakvu vrijednost konstante C zove se *singularno* rješenje.

Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama su one kod kojih su varijable x i y separirane tj. daju se separirati (odvojiti). U tom slučaju zadana diferencijalna jednadžba se svodi na oblik

$$f(x)dx = F(y)dy.$$

Rješenje te jednadžbe dobivamo tako da integriramo njene obje strane:

$$\int f(x)dx = \int F(y)dy + C.$$

Mogućnost integriranja obiju strana jednadžbe možemo obrazložiti time što varijable x i y nisu neovisne jedna o drugoj, već je y funkcija od x pa je $F(y)$ također funkcija od x. Pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi tog tipa postupak se obično svodi na pet koraka.

1. Ako u diferencijalnu jednadžbu ulazi derivacija y', pišemo je u obliku $\dfrac{dy}{dx}$.
2. Diferencijalna jednadžba se riješi nazivnika.
3. Spoje se članovi koji sadrže isti diferencijal.
4. Diferencijalna jednadžba se podijeli takvim izrazom da se varijable separiraju.
5. Diferencijalna jednadžba se integrira.

Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe imaju opći oblik

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Kažemo da je funkcija od x i y homogena obzirom na varijable ako uvrštavanjem λx i λy (gdje je λ neka konstanta po volji) umjesto x i y daje istu funkciju pomnoženu sa λ^n; takav n se naziva stupanj homogene funkcije. Na primjer, funkcija $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ je homogena funkcija drugog stupnja jer je:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 - xy + y^2) = \lambda^2 f(x, y),$$

dok je $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ homogena funkcija nultog stupnja, jer je

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} = f(x, y).$$

Homogene diferencijalne jednadžbe nultog stupnja svode se na diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama uvođenjem susptitucije:

$$\frac{y}{x} = u,$$

odakle slijedi

$$y = x \cdot u.$$

Deriviranje po x daje

$$y' = xu' + u.$$

To uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ te dobivamo

$$xu' + u = f(u).$$

Tu diferencijalnu jednadžbu rješavamo kao diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama pa u dobiveni rezultat umjesto u vratimo $\dfrac{y}{x}$.

Linearne diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba oblika

$$y' + f(x)y = g(x)$$

naziva se linearna, jer se tražena funkcija $y = y(x)$ i njena derivacija y' pojavljuju u prvom stupnju, dok su $f(x)$ i $g(x)$ zadane neprekidne funkcije od x.

Ako je $g(x) = 0$, ta jednadžba glasi $y' + f(x)y = 0$, a taj se prikraćeni oblik jednadžbe zove linearna homogena diferencijalna jednadžba prvog reda.

Linearnu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti na više načina. Pokazat ćemo jedan od njih: pomoću supstitucije $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Uvrštavanjem $y = u \cdot v$ i $y' = uv' + vu'$ u $y' + f(x)y = g(x)$ daje

$$uv' + v(u' + f(x) \cdot u) = g(x). \tag{1.1}$$

Kako je $y = u \cdot v$, jednu od tih funkcija možemo uzeti proizvoljno, dok je druga određena jednadžbom (1.1). Funkciju $u(x)$ odabrat ćemo tako da izraz u zagradama jednadžbe (1.1) postane nula tj. stavit ćemo $u' + f(x)u = 0$. U jednadžbi (1.1) ostaje

$$uv' = g(x).$$

U tom slučaju dovoljno je da za $u(x)$ dobijemo bilo koji partikularni integral (uzmemo $C = 0$). Riješimo jednadžbu $u' + f(x)u = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= -f(x)u, \\
\int \frac{du}{u} &= -f(x)dx, \\
\ln u &= -f(x)dx, \\
u &= e^{-\int f(x)dx}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog rezultata u $uv' = g(x)$ dobivamo

$$e^{-\int f(x)dx}\frac{dv}{dx} = g(x).$$

Slijedi

$$v = \int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)dx + C,$$

a kako je $y = u \cdot v$, imamo:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x) + C\right).$$

To je opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe.

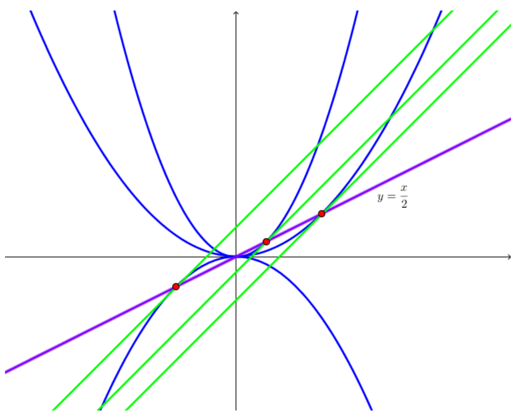
Postoje još neki tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi, ali mi smo ovdje naveli one koji će biti potrebni za čitanje i razumijevanje ovoga rada.

Poglavlje 2

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u geometriji

Diferencijalne jednadžbe imaju široku primjenu u određivanju analitičkog izraza funkcijske ovisnosti između varijabla u nekom geometrijskom problemu. Sama diferencijalna jednadžba prvog reda ima svoje geometrijsko značenje. Iz diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = f(x, y)$ neposredno slijedi da svakoj točki ravnine diferencijalna jednadžba dodjeljuje tangens smjera $y' = \operatorname{tg} \alpha$ u toj točki, tj. određuje polje smjerova u ravnini. U ovom poglavlju pokazat ćemo primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u nekim klasičnim geometrijskim problemima.

Primjer 2.1. *Odredimo diferencijalnu jednadžbu familije parabola $y = Cx^2$ te skup točaka u kojima sve parabole iz te familije imaju koeficijent smjera tangente jednak* 1.



Slika uz primjer 2.1.

Eliminacijom parametra C iz

$$y = Cx^2 \quad \text{i} \quad y' = 2Cx$$

dobiva se diferencijalna jednadžba zadane familije parabola:

$$2y - xy' = 0.$$

Preostaje odrediti skup točaka u kojima sve parabole iz te familije imaju koeficijent smjera tangente jednak 1. Iz sustava

$$y = Cx^2 \quad \text{i} \quad 1 = 2Cx$$

zaključujemo da je to pravac $y = \dfrac{x}{2}$. Dakle, za svaki C parabola $y = Cx^2$ u točki presjeka s pravcem $y = \dfrac{x}{2}$ ima koeficijent smjera tangente jednak 1.

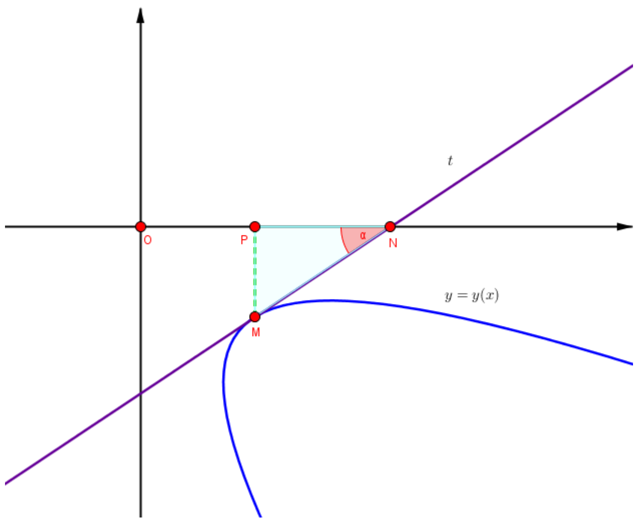
Primjer 2.2. *Odredimo krivulje sa svojstvom da je površina trokuta kojeg odsijecaju tangenta na tu krivulju, ordinata točke dirališta i os apscisa, jednaka konstanti* $\dfrac{a^2}{2}$, $a \neq 0$.

Neka tražene krivulje imaju jednadžbu $y = y(x)$. Mora biti

$$|NP| \cdot |MP| = a^2, \tag{2.1}$$

gdje je M točka dirališta tražene krivulje i tangente, N točka sjecišta x-osi i tangente, a P ortogonalna projekcija točke dirališta na x-os. Koeficijent smjera tangente na krivulju je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha.$$



Slika uz primjer 2.2.

Primjenom trigonometrije na pravokutni trokut $\triangle MPN$ dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|MP|}{|NP|}.$$

Kako je $|MP| = |y|$, to je

$$|NP| = \left|\frac{y}{y'}\right|,$$

pa iz (2.1) slijedi

$$|y'|a^2 = y^2,$$

odnosno

$$a^2 y' = \pm y^2.$$

Ovo je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama:

$$\frac{dy}{y^2} = \pm\frac{dx}{a^2}.$$

Integriranjem dobivamo

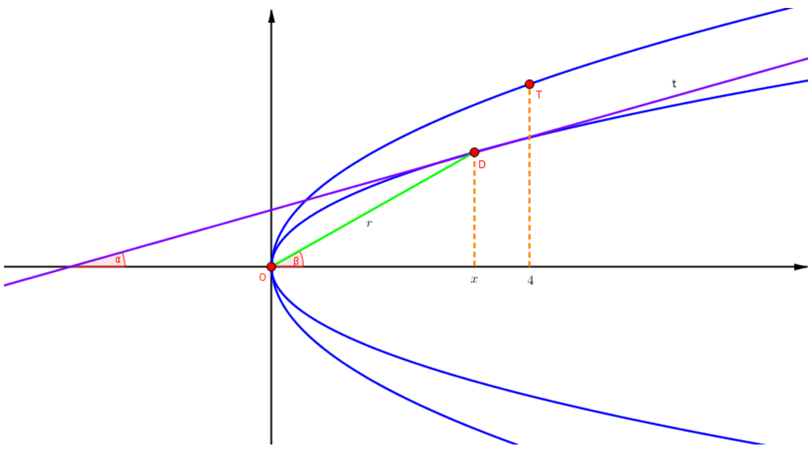
$$-\frac{1}{y} = \pm\frac{x + C}{a^2},$$

što se zbog proizvoljnosti konstante C može napisati u obliku

$$(C \pm x)y = a^2.$$

Dakle, tražene krivulje su hiperbole $(C \pm x)y = a^2$ za proizvoljnu konstantu C.

Primjer 2.3. *Odredimo sve krivulje kojima je koeficijent smjera tangente u bilo kojoj točki dva puta manji od koeficijenta smjera radijus vektora dirališta. Napišimo također jednadžbu one tangente krivulje familije koja prolazi točkom $T(4, 3)$.*



Slika uz primjer 2.3.

Koeficijent smjera tangente t je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

a koeficijent smjera radijus vektora r je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}.$$

Prema uvjetu zadatka,

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

odnosno

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Odatle integriranjem slijedi

$$\begin{aligned} 2\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x}, \\ 2\ln|y| &= \ln|x| + \ln|C|, \\ \ln y^2 &= \ln(Cx), \\ y^2 &= Cx. \end{aligned}$$

Dobili smo familiju parabola $y^2 = Cx$ kojima je os simetrije os x.

Sada odredimo jednadžbu one tangente krivulje dobivene familije koja prolazi točkom $T(4,3)$. Uvrštavanjem koordinata točke $T(4,3)$ u $y^2 = Cx$ dobivamo $9 = 4C$, tj. $C = \frac{9}{4}$. Stoga je tražena krivulja parabola

$$y^2 = \frac{9}{4}x.$$

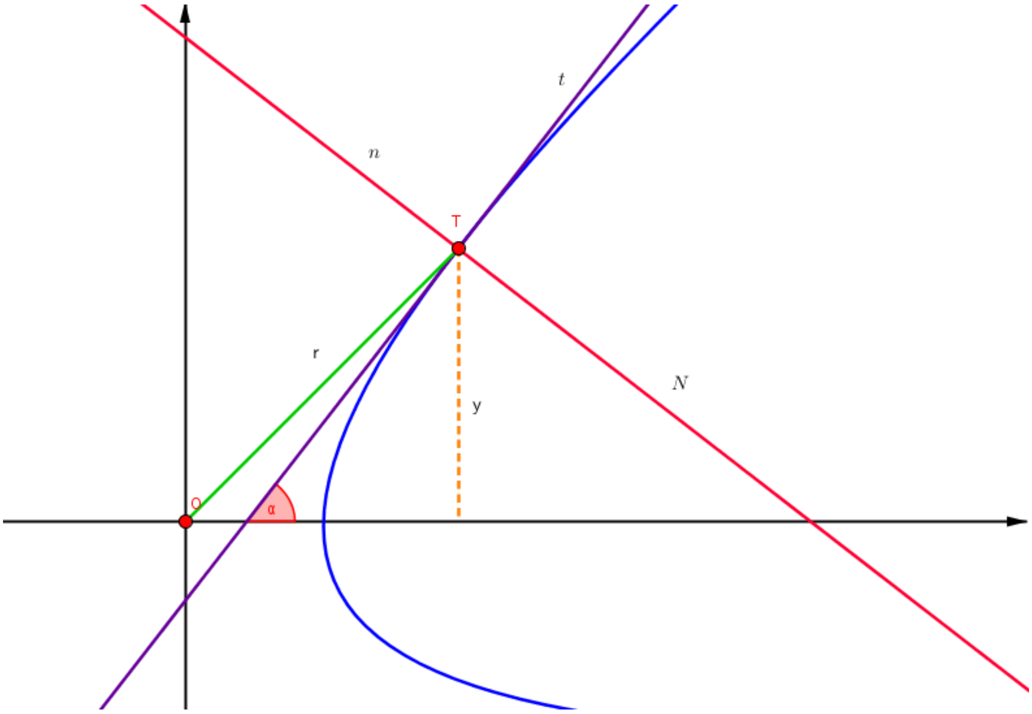
Primjer 2.4. *Odredimo sve krivulje sa svojstvom da je u bilo kojoj točki tih krivulja radijus vektor r jednak duljini odsječka normale između krivulje i osi x.*

Radijus vektor krivulje u nekoj točki $T(x,y)$ je

$$r = |OT| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dok je duljina odsječka normale od točke T do sjecišta s x-osi

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}.$$



Slika uz primjer 2.4.

Kako je prema uvjetu zadatka $r = N$, slijedi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Kvadriranjem obiju strana i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= y^2(1 + y'^2), \\ x^2 + y^2 &= y^2 + y^2 y'^2, \\ y^2 y'^2 &= x^2, \\ y'^2 &= \frac{x^2}{y^2}, \\ y' &= \pm\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama.

Promatramo dva slučaja: $y' = \frac{x}{y}$ i $y' = -\frac{x}{y}$.

Prvi slučaj. Ako je $y' = \frac{x}{y}$, tada imamo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}, \\ xdx &= ydy, \\ \int xdx &= \int ydy, \\ \frac{x^2}{2} &= \frac{y^2}{2} + C, \\ x^2 - y^2 &= C. \end{aligned}$$

Kao rješenje smo dobili familiju istostranih hiperbola.

Drugi slučaj. Ako je $y' = -\frac{x}{y}$, tada imamo:

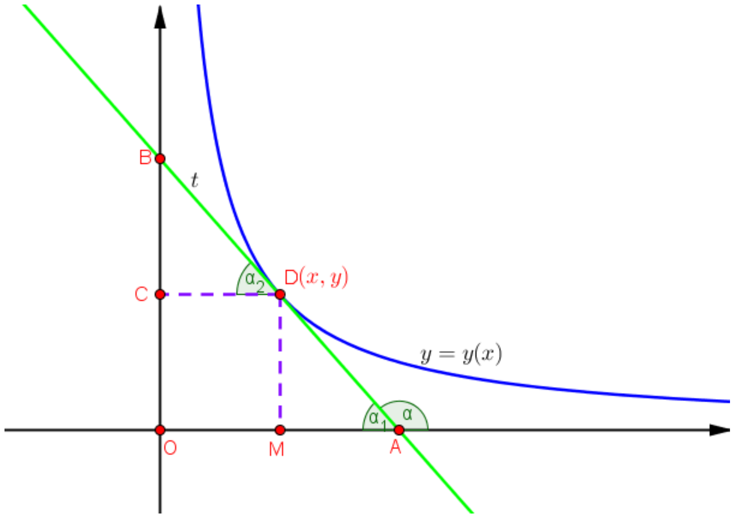
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}, \\ ydy &= -xdx, \\ \int xdx &= -\int ydy, \\ \frac{x^2}{2} &= -\frac{y^2}{2} + C, \\ x^2 + y^2 &= C^2. \end{aligned}$$

Kao rješenje smo dobili familiju kružnica sa središtem u ishodištu.

Primjer 2.5. *Odredimo jednadžbu familije krivulja kojima dirališta raspolavljaju odsječke tangenata između koordinatnih osi. Napišimo također jednadžbu one krivulje koja pripada toj familiji i prolazi točkom $T(2,1)$.*

Neka je $D(x, y)$ točka dirališta tangente i krivulje, a točke A i B redom sjecišta tangente s x-osi odnosno y-osi. Neka su točke M i C redom ortogonalne projekcije točke dirališta na osi x i y. Prema slici, vrijedi:

$$\begin{aligned} |MA| &= |MD| \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 = |MD| \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \\ &= -|MD| \cdot \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{|MD|}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$



Slika uz primjer 2.5.

Tangenta t je presječnica dvaju paralelnih pravaca (pravca CD i pravca kojem pripada x-os). Dakle, kutovi $\sphericalangle MAD$ i $\sphericalangle CDB$ su sukladni. Uz to je $|AD| = |DB|$ prema pretpostavci, pa slijedi da su pravokutni trokuti $\triangle MAD$ i $\triangle CDB$ sukladni po teoremu K-S-K o sukladnosti dvaju trokuta. Sada imamo

$$|CD| = |MA| = |OM| = x, \quad |DM| = y \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = y',$$

odakle dobivamo:

$$x = -\frac{y}{y'} \quad \text{tj.} \quad x = -\frac{ydx}{dy}, \quad \text{pa je} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Odatle integriranjem slijedi

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \quad \text{odnosno} \quad |y| = \left|\frac{C}{x}\right|. \tag{2.2}$$

Kako je C proizvoljna konstanta, rješenje možemo pisati u obliku

$$y = \frac{C}{x}, \tag{2.3}$$

a to je familija istostranih hiperbola. Preostaje odrediti jednadžbu one krivulje koja prolazi točkom $T(2, 1)$. Uvrštavanjem koordinata točke $T(2, 1)$ u (2.3) dobivamo da je $C = 2$, odakle slijedi da je

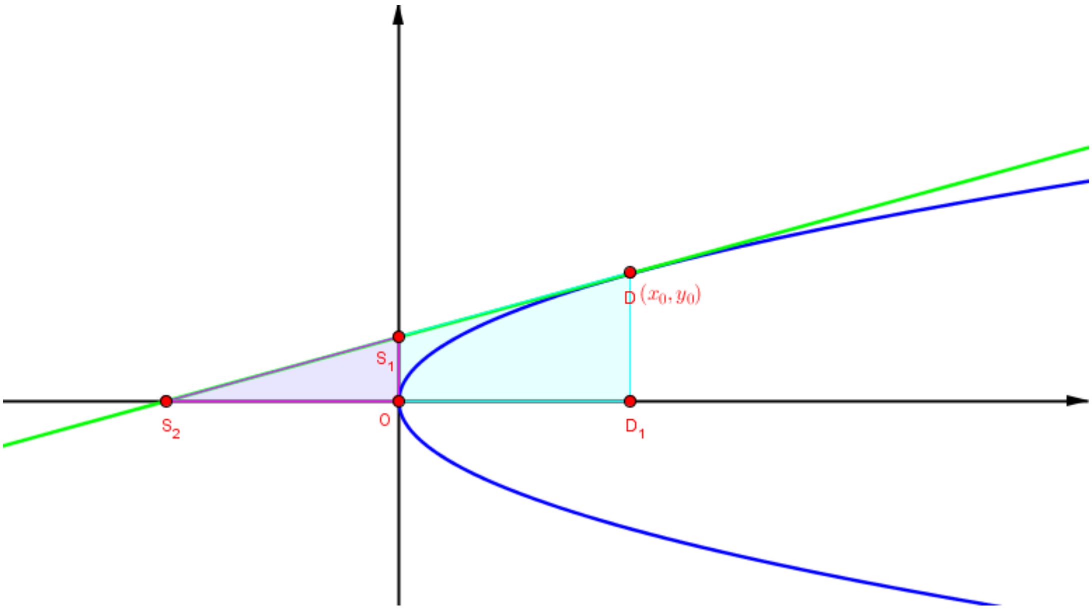
$$y = \frac{2}{x}$$

jednadžba krivulje koja prolazi točkom T.

Primjer 2.6. *Odredimo jednadžbu familije krivulja sa svojstvom da u svakoj točki krivulje sjecište tangente s y-osi raspolavlja spojnice dirališta tangente i sjecišta tangente s x-osi.*

Neka je D točka dirališta tangente i krivulje, točke S_1 i S_2 redom sjecišta tangente s y-osi odnosno x-osi, a točka D_1 ortogonalna projekcija točke dirališta na x-os. Za traženu krivulju mora vrijediti $|S_1D| = |S_1S_2|$. Trokuti $\triangle S_2OS_1$ i $\triangle S_2D_1D$ su slični prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuta, odakle slijedi

$$\frac{|DD_1|}{|OS_1|} = \frac{|S_2D|}{|S_1S_2|} = 2.$$



Slika uz primjer 2.6.

Jednadžba tangente na krivulju $y = y(x)$ u točki $D(x_0, y_0)$ je

$$\begin{aligned} y - y_0 &= y'(x - x_0), \\ y &= y'x + y_0 - y'x_0. \end{aligned}$$

Točka $S_1(0, y)$ pripada tangenti pa slijedi $y = -y'x_0 + y_0$. Nadalje, vrijedi $|DD_1| = 2|OS_1|$, $|DD_1| = |y_0|$ i $|OS_1| = |y|$. Konačno slijedi

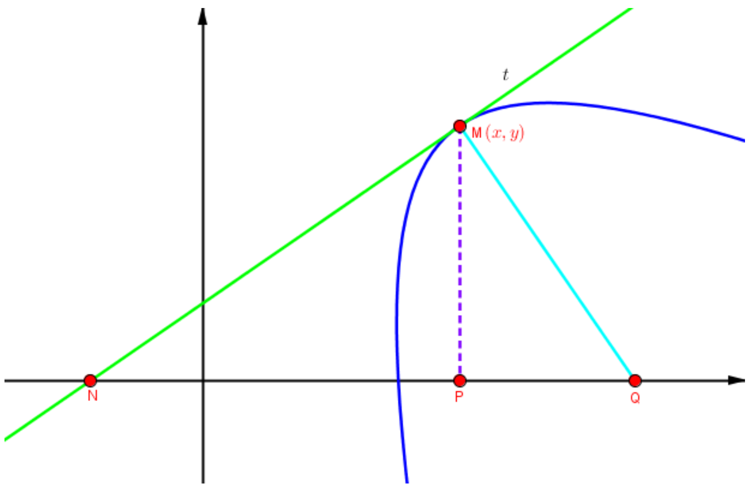
$$2| - y'x_0 + y_0| = |y_0|.$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Ne trebamo promatrati dva slučaja jer će se rezultati razlikovati samo u vrijednosti konstante C koja je ionako proizvoljna. Imamo:

$$
\begin{aligned}
2(y - y'x) &= y, \\
y'x &= \frac{y}{2}, \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2x}, \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{2x}, \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{2x}, \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|, \\
2\ln|y| &= \ln|x| + \ln|C|, \\
\ln|y|^2 &= \ln|Cx|, \\
y^2 &= Cx.
\end{aligned}
$$

Kao rješenje smo dobili familiju parabola kojima je x-os os simetrije.

Primjer 2.7. *Odredimo jednadžbu familije krivulja kod kojih je duljina odsječka normale od točke krivulje do x-osi jednaka konstanti a.*



Slika uz primjer 2.7.

Neka je $M(x, y)$ točka dirališta tangente i krivulje, N sjecište tangente s x-osi, Q sjecište normale s x-osi te P ortogonalna projekcija točke dirališta na x-os. Uočimo na slici pravokutne trokute $\triangle MPQ$ i $\triangle NMP$. Na trokut $\triangle MPQ$ primijenimo Pitagorin poučak:

$$|PQ|^2 + |PM|^2 = |QM|^2 = a^2. \tag{2.4}$$

Kako je

$$\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNM \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \sphericalangle PNM = y',$$

to je

$$|PQ| = |PM| \cdot y' = |yy'|.$$

Sada dobivene izraze uvrstimo u (2.4) i dobijemo diferencijalnu jednadžbu traženih krivulja:

$$(yy')^2 + y^2 = a^2. \tag{2.5}$$

Jednadžbu (2.5) možemo zapisati u obliku

$$\pm \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx.$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Integriranje daje

$$\pm \sqrt{a^2 - y^2} \quad = \quad x + C,$$

odnosno

$$(x + C)^2 + y^2 = a^2.$$

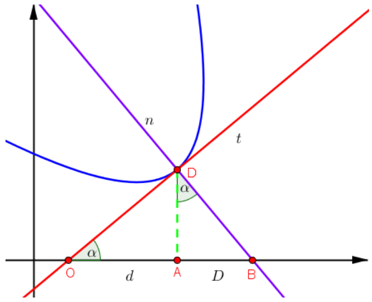
Dakle, tražene krivulje su kružnice sa središtem na x-osi i polumjerom a.

Prisjetimo se, subnormala je projekcija na apscisu onog dijela normale na zadanu krivulju koji je smješten između krivulje i apscise (njena duljina je na slici označena sa D), a subtangenta je projekcija na apscisu onog dijela tangente na zadanu krivulju koji je smješten između krivulje i apscise (njezina duljina je na slici označena sa d). Analitički je duljina subnormale apsolutna vrijednost umnoška koordinate y i derivacije y' u zadanoj točki dodira, a duljina subtangente apsolutna vrijednost omjera koordinate y i njezine derivacije y' u zadanoj točki dodira. Dokažimo te dvije tvrdnje. Trokut $\triangle OAD$ je pravokutan trokut. Na njega primijenimo trigonometriju pravokutnog trokuta te dobivamo

$$d = \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right|.$$

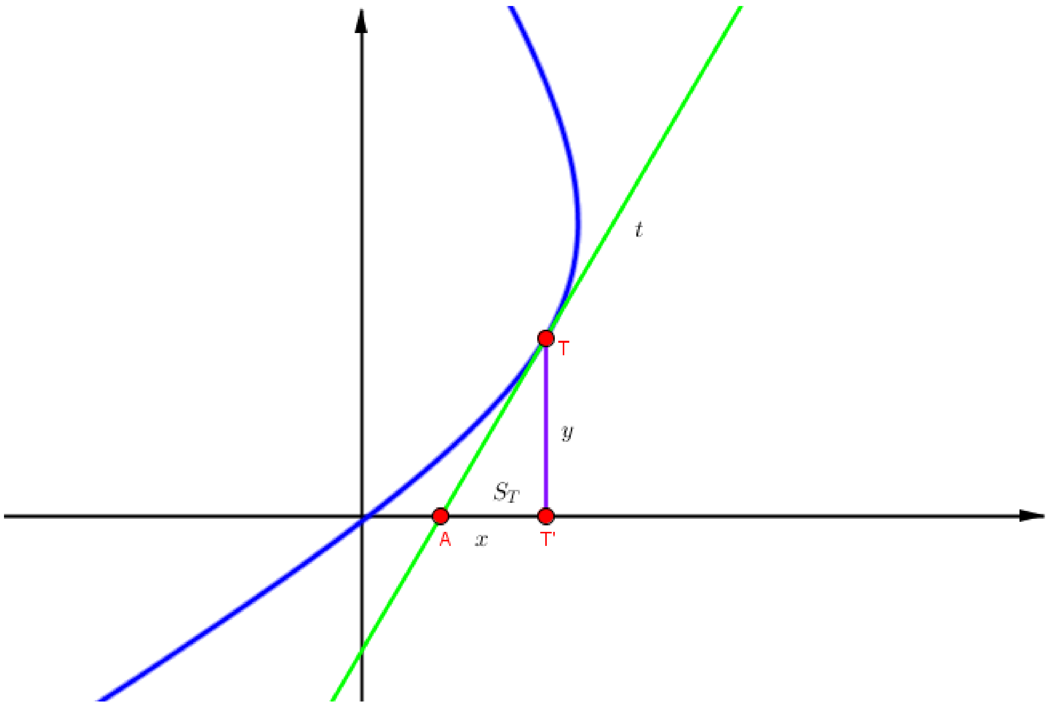
Analogno tome, trokut $\triangle ABD$ je pravokutan trokut, pa vrijedi

$$D = |y \cdot \operatorname{tg} \alpha| = |yy'|.$$



Slika: Subtangenta i subnormala

Primjer 2.8. *Odredimo jednadžbu familije krivulja kojima je subtangenta u bilo kojoj točki jednaka aritmetičkoj sredini koordinata dirališta te posebno odredimo onu krivulju familije koja prolazi točkom* $M(4,3)$.



Slika uz primjer 2.8.

Neka je T diralište tangente i krivulje, A sjecište tangente s x-osi, a T' ortogonalna projekcija točke dirališta na x-os. Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokut

$\triangle ATT'$ slijedi

$$|AT'| = \frac{y}{y'},$$

što je upravo duljina suptangente S_T. Prema uvjetu zadatka, suptangenta S_T mora biti jednaka aritmetičkoj sredini koordinata dirališta, tj.

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2},$$

što je diferencijalna jednadžba familije traženih krivulja. To je homogena diferencijalna jednadžba. Uvođenjem supstitucije $\frac{y}{x} = u$ (odakle je $y = ux$ i $y' = u'x + u$), jednadžba prelazi u oblik

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u}{u-u^2}du.$$

Sada rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{1+u}{u-u^2}du, \\
\ln|x| + \ln|C| &= \int \frac{1}{u}du + \int \frac{2}{1-u}du, \\
\ln|x| + \ln|C| &= \ln|u| - 2\ln|1-u|, \\
Cx &= \frac{u}{(1-u)^2}.
\end{aligned}$$

Sada vraćanjem supstitucije $u = \frac{y}{x}$ dobivamo jednadžbu familije krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo. To su sve one krivulje čija je jednadžba oblika

$$Cy = (x-y)^2. \tag{2.6}$$

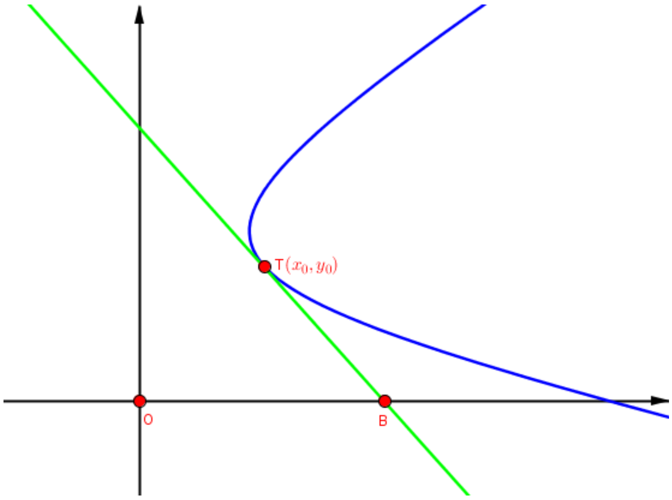
Odredimo još onu krivulju familije koja prolazi točkom $M(4,3)$. Uvrštavanjem $x = 4$ i $y = 3$ u (2.6) dobivamo $C = \frac{1}{3}$, pa je jednadžba tražene krivulje

$$y = 3(x-y)^2.$$

Primjer 2.9. *Odredimo jednadžbu familije krivulja kod kojih je duljina tangente od točke dodira do x-osi jednaka duljini odječka kojeg ta tangenta odsijeca na x-osi.*

Jednadžba tangente na krivulju $y = y(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$ je

$$y - y_0 = y'(x - x_0).$$



Slika uz primjer 2.9.

Neka je točka $B(b, 0)$ točka u kojoj tangenta siječe x-os. Želimo odrediti sve krivulje za koje vrijedi $|OB| = |BT|$. Da bismo odredili duljinu dužine $\overline{BT}$, koristit ćemo formulu za udaljenost dviju točaka u koordinatnom sustavu u ravnini:

$$|BT| = \sqrt{(x_0 - b)^2 + (y_0 - 0)^2}.$$

Prije toga, iz jednadžbe tangente na krivulju u točki T izrazimo b :

$$b = \frac{y' x_0 - y_0}{y'}.$$

Sada imamo da je

$$|BT| = \sqrt{\left(x_0 - \frac{y' x_0 - y_0}{y'}\right)^2 + y_0^2}.$$

Tražimo sve krivulje za koje vrijedi $|OB| = |BT|$. Stoga imamo

$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{y' x_0 - y_0}{y'}\right)^2 + y_0^2} = \left|\frac{y' x_0 - y_0}{y'}\right|.$$

Odatle nakon kvadriranja i sređivanja dobijemo diferencijalnu jednadžbu tražene familije krivulja koja glasi

$$y' y^2 = x^2 y' - 2xy.$$

Prilikom sređivanja izraza dijelili smo sa y' jer u slučaju $y' = 0$ dobivamo pravce te zadatak nema smisla. Sada imamo

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy,$$

odnosno

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \tag{2.7}$$

Uočavamo da je dobivena jednadžba (2.7) homogena diferencijalna jednadžba. Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa x^2 dobivamo

$$y' = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Uvođenjem supstitucije $\frac{y}{x} = u$ (tada je $y = ux$ i $y' = u'x + u$), ova jednadžba postaje

$$u'x + u = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Time smo homogenu diferencijalnu jednadžbu sveli na diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$u'x = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Sada rješavamo dobivenu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du &= \frac{dx}{x}, \\
\int \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du &= \int \frac{dx}{x}, \\
\int \frac{(1 + u^2) - 2u^2}{u(1 + u^2)} du &= \int \frac{dx}{x}, \\
\int \frac{du}{u} - \int \frac{2udu}{1 + u^2} &= \int \frac{dx}{x}, \\
\ln|u| - \ln(1 + u^2) &= \ln|x| + \ln|C|, \\
u &= Cx(1 + u^2).
\end{aligned}$$

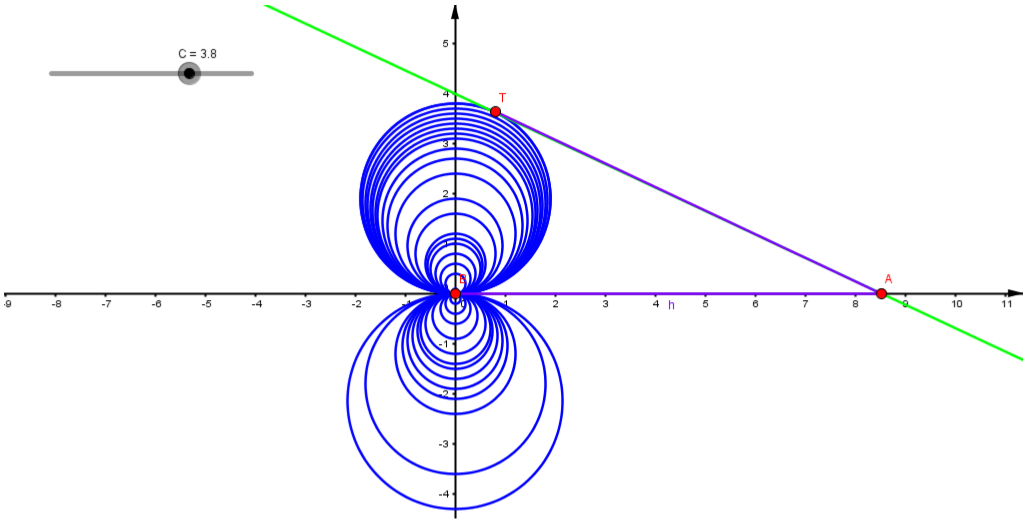
Vraćanjem supstitucije $u = \frac{y}{x}$ dobivamo jednadžbu familije krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo, a to su sve krivulje čija je jednadžba oblika

$$\frac{y}{x} = Cx\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right),$$

odnosno

$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}.$$

Dakle, tražene krivulje su kružnice sa središtem u točki $\left(0, \frac{C}{2}\right)$ i polumjerom $\frac{|C|}{2}$. Na slici su prikazana neka rješenja za različite vrijednosti C.



Slika uz primjer 2.9.

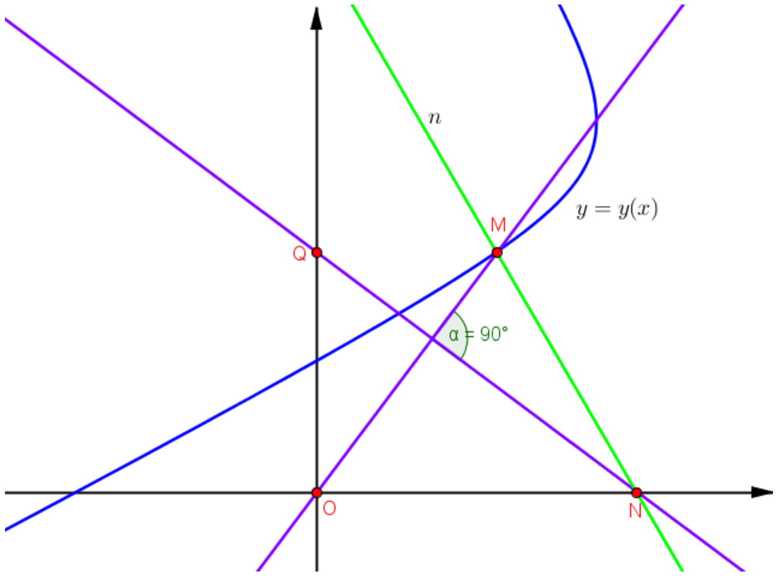
Primjer 2.10. *Točka M krivulje $y = y(x)$ ortogonalno se projicira na y-os u točku Q, a normala krivulje u točki M siječe x-os u točki N. Odredimo sve krivulje $y = y(x)$ sa svojstvom da pravac koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava u ravnini i točkom M siječe pravac QN pod pravim kutom, a potom odredite onu krivulju familije koja prolazi točkom* $(3, 0)$.

Da bismo postavili jednadžbu familije krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo, dovoljno je odrediti koeficijente smjera zadanih pravaca te iskoristiti da su dva pravca okomita ako i samo ako je umnožak njihovih koeficijenata smjera jednak -1, tj.

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Apscisu točke N određujemo iz jednadžbe normale na krivulju. Neka je točka M zadana koordinatama $M(x_0, y_0)$. Jednadžba normale na krivulju dana je jednadžbom

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'}(x - x_0).$$



Slika uz primjer 2.10.

Stoga točka N ima koordinate $N(x_0 + y_0 y', 0)$. Točka Q nalazi se na y-osi i ima koordinate $Q(0, y_0)$. Budući da su nam poznate dvije točke pravca QN, lako odredimo njegov koeficijent smjera:

$$k_1 = \frac{-y_0}{x_0 + y_0 y'}.$$

Analogno, koeficijent smjera pravca koji prolazi ishodištem i točkom M je

$$k_2 = \frac{y_0}{x_0}.$$

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti $k_1 \cdot k_2 = -1$, pa diferencijalna jednadžba familije traženih krivulja glasi

$$y' + \frac{x}{y} = \frac{y}{x}.$$

Dobili smo homogenu diferencijalnu jednadžbu. Uvođenjem supstitucije $\frac{y}{x} = u$ (tada je $y = ux$ i $y' = u'x + u$), jednadžba prelazi u oblik

$$u'u = -\frac{1}{x},$$

a to je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Sada rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu:

$$udu = -\frac{dx}{x},$$

$$\begin{aligned} \int u du &= -\int \frac{dx}{x}, \\ \frac{u^2}{2} &= \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \\ u^2 &= \ln\frac{C^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Dobili smo jednadžbu $u^2 = \ln\frac{C^2}{x^2}$ i vraćanjem supstitucije $u = \frac{y}{x}$ dobivamo jednadžbu familije krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo. To su sve krivulje čija je jednadžba oblika

$$y^2 = x^2 \ln\frac{C^2}{x^2}. \tag{2.8}$$

Potrebno je još odrediti jednadžbu one među tim krivuljama koja prolazi točkom $(3, 0)$. Uvrštavanjem $x = 3$ i $y = 0$ u

$$y^2 = x^2 \ln\frac{C^2}{x^2}$$

dobivamo $C^2 = 9$. Dakle, jednadžba krivulje koja zadovoljava tražena svojstva i prolazi točkom $(3, 0)$ je

$$y^2 = x^2 \ln\frac{9}{x^2}.$$

Primjer 2.11. *Odredimo krivulju koja prolazi točkom* $(1, 0)$ *i ima svojstvo da je odsječak tangente na* y*-osi jednak udaljenosti točke dodira od ishodišta koordinatnog sustava u ravnini.*

Kako jednadžba tangente na krivulju $y = y(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = y'(x - x_0),$$

to je odsječak tangente na y-osi jednak

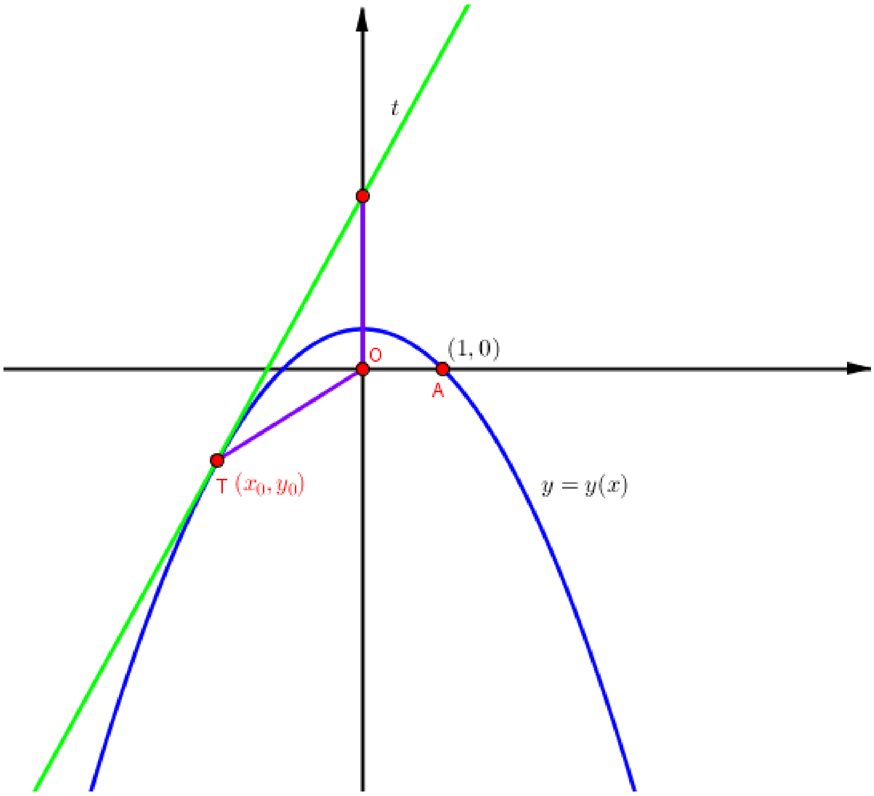
$$y = y_0 - y' x_0.$$

Udaljenost ishodišta do točke dodira je jednaka

$$|OT| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Dakle, problem se svodi na diferencijalnu jednadžbu

$$y - y' x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Slika uz primjer 2.11.

Ovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Dobivena diferencijalna jednadžba je homogena diferencijalna jednadžba. Uvođenjem supstitucije $\frac{y}{x} = u$ (tada je $y = ux$ i $y' = u'x + u$), jednadžba prelazi u oblik

$$u'x = -\sqrt{1 + u^2},$$

a to je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Sada rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= -\int \frac{dx}{x}, \\ \ln|u+\sqrt{1+u^2}| &= \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \\ u+\sqrt{1+u^2} &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Vraćanjem supstitucije $u = \frac{y}{x}$ dobivamo jednadžbu familije krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo. To su sve krivulje čija je jednadžba oblika

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{C}{x}.$$

Stavljajući $x = 1$ i $y = 0$ u gornju jednadžbu, dobivamo $C = 1$. Dakle, tražena krivulja je

$$x^2 = -2y + 1, \tag{2.9}$$

a to je parabola čija je os simetrije y-os.

Napomena: Da je u formulaciji zadatka umjesto ”odsječak tangente” pisalo ”apsolutna vrijednost odsječka tangente” promatrali bismo dva slučaja te bi pored krivulje (2.9) rješenje također bila krivulja

$$x^2 = 2y + 1.$$

Primjer 2.12. *Odredimo sve krivulje sa svojstvom da je duljina odsječka koji tangenta odsijeca na y-osi jednak apscisi točke dirališta.*

Neka je $y = y(x)$ krivulja s traženim svojstvima, točka $T(x_0, y_0)$ točka dirališta tangente i krivulje te neka je točka A točka sjecišta krivulje s y-osi. Prema pretpostavci su $(0, x_0)$ koordinate točke A. Jednadžba tangente glasi

$$y - y_0 = y'(x - x_0).$$

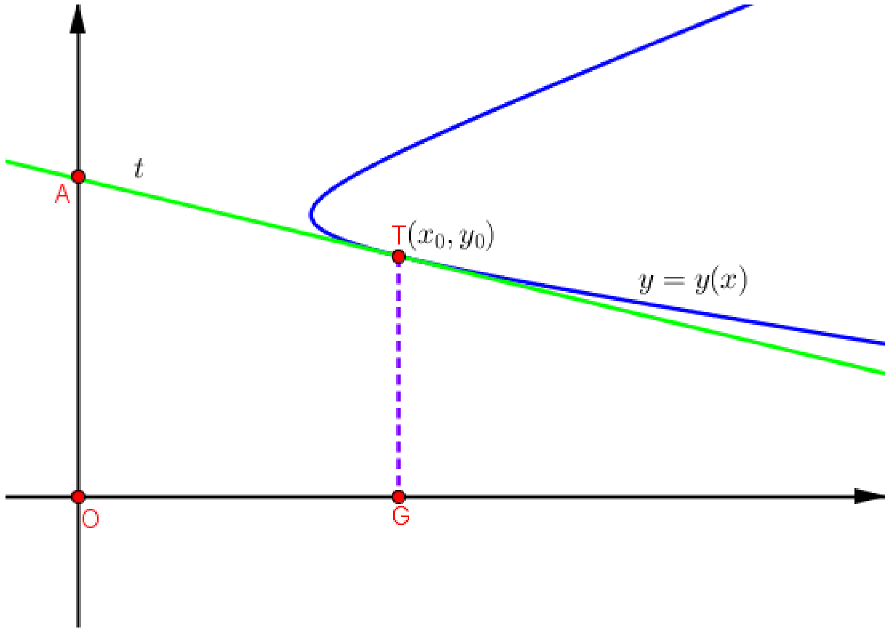
Kako točka A pripada tangenti, imamo

$$x_0 - y_0 = -y' x_0.$$

Dakle, tražena diferencijalna jednadžba je

$$x - y = -xy',$$

odnosno



Slika uz primjer 2.12.

$$y' - \frac{1}{x}y = -1. \tag{2.10}$$

Dobivena diferencijalna jednadžba (2.10) je linearna diferencijalna jednadžba koju rješavamo. Stavimo

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{i} \quad g(x) = -1.$$

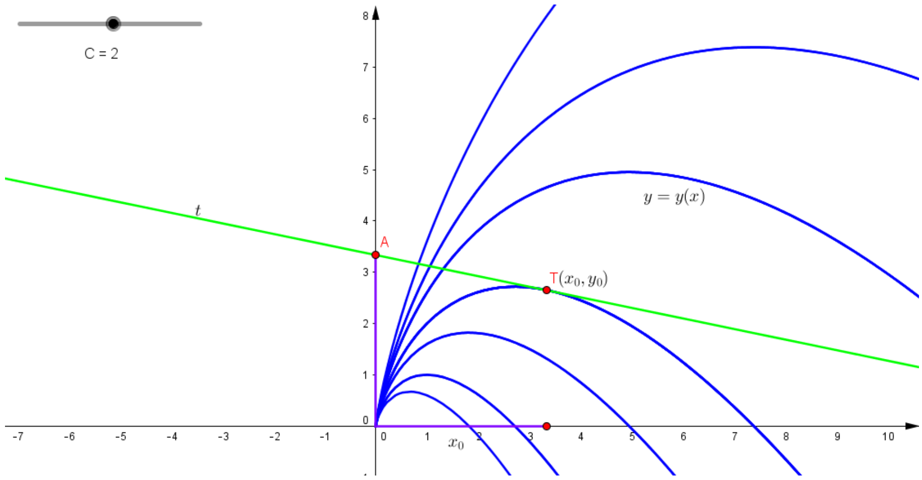
Njezino opće rješenje je

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx}(Ce^{-\int \frac{1}{x} dx}), \\ y &= e^{\ln x}(C - \int e^{-\ln x} dx), \\ y &= x\left(C - \int e^{-\ln x} dx\right), \\ y &= Cx - x \ln |x|. \end{aligned}$$

Dakle, familija krivulja koje zadovoljavaju traženo svojstvo su sve krivulje čija je jednadžba oblika

$$y = Cx - x \ln |x|.$$

Na slici su prikazana rješenja za neke vrijednosti konstante C.



Slika uz primjer 2.12.

Ortogonalnim trajektorijama zadane familije krivulja, koja ovisi o jednom parametru, zovemo takvu familiju krivulja koje pod pravim kutom sijeku krivulje zadane familije.

Evo postupka za određivanje ortogonalnih trajektorija za zadanu familiju krivulja

$$F(x, y, a) = 0 :$$

1. Deriviramo po x zadanu familiju krivulja. Zatim parametar a, izražen iz jednadžbe zadane familije, uvrstimo u jednadžbu dobivenu deriviranjem. Tako dolazimo do diferencijalne jednadžbe zadane familije krivulja.

2. U toj jednadžbi zamijenimo y' sa $-\dfrac{1}{y'}$ i tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu traženih ortogonalnih trajektorija.

3. Integrirajući tu jednadžbu dolazimo do jednadžbe koja predočuje familiju ortogonalnih trajektorija.

Izogonalne trajektorije su trajektorije koje sijeku krivulje zadane familije pod kutom koji je različit od pravog kuta.

Postupak računanja izogonalnih trajektorija proizlazi iz sljedećeg zapažanja: ako je $dy/dx = \operatorname{tg}\varphi$ koeficijent smjera tangente na zadanu krivulju, te ako je $dy_T/dx = \operatorname{tg}\psi$ koeficijent smjera tangente izogonalne trajektorije koja zadanu krivulju siječe pod kutom α, tada vrijedi

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\alpha},$$

odnosno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - \operatorname{tg}\alpha}{\frac{dy_T}{dx}\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

Uvrštavanje ovog izraza umjesto dy/dx u jednadžbu $F(x, y, a) = 0$ i ispuštanje indeksa T daje diferencijalnu jednadžbu izogonalne trajektorije.

U sljedećim primjerima ćemo vidjeti kako se dobivaju ortogonalne i izogonalne trajektorije nekih klasa krivulja.

Primjer 2.13. *Odredimo ortogonalne trajektorije familije parabola* $x = ay^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Deriviranjem jednadžbe zadanih parabola po x dobivamo:

$$1 = 2ayy'.$$

Iz jednadžbe parabola izrazimo parametar a :

$$a = \frac{x}{y^2}$$

pa uvrštavanjem u $1 = 2ayy'$ dobivamo

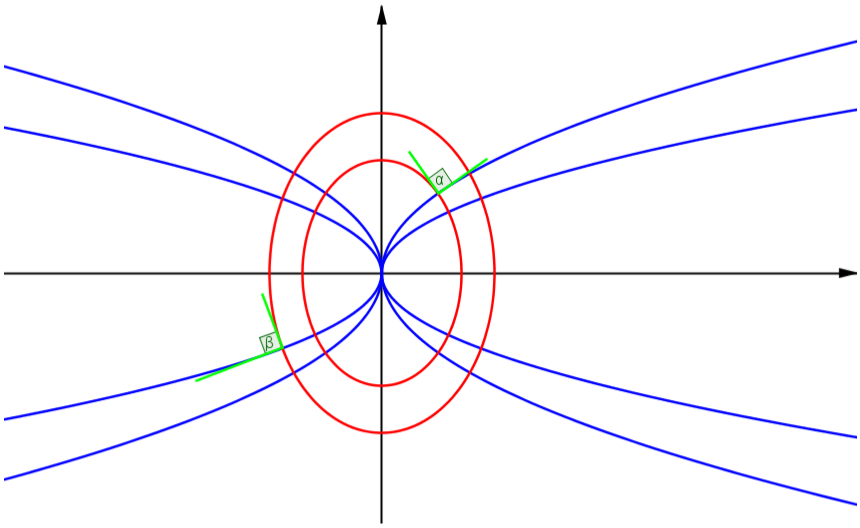
$$2xy' = y,$$

a to je diferencijalna jednadžba zadane familije parabola. Uvrštavanjem $-\frac{1}{y'}$ umjesto y' dobivamo diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija:

$$-2x \cdot \frac{1}{y'} = y.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} ydy &= -2xdx, \\ \int ydy &= -2\int xdx, \\ \frac{y^2}{2} &= -x^2 + C, \\ \frac{y^2}{2} + x^2 &= C, \\ \frac{y^2}{2C} + \frac{x^2}{C} &= 1. \end{aligned}$$



Slika uz primjer 2.13.

Dakle, jednadžba

$$\frac{y^2}{2C} + \frac{x^2}{C} = 1$$

je tražena jednadžba ortogonalnih trajektorija, a ona predstavlja familiju koncentričnih elipsi kojima je sporedna poluos $\sqrt{2}$ puta veća od glavne poluosi.

Primjer 2.14. *Odredimo ortogonalne trajektorije familije istostranih hiperbola* $y = \frac{a}{x}$, *gdje je* $a \in \mathbb{R}$.

Deriviranjem jednadžbe zadanih hiperbola po x dobivamo:

$$y' = -\frac{a}{x^2}.$$

Iz jednadžbe familije parabola izrazimo parametar a :

$$a = xy,$$

pa uvrštavanjem u $y' = -\frac{a}{x^2}$ dobivamo

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Uvrštavanjem $-\frac{1}{y'}$ umjesto y' dobivamo diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

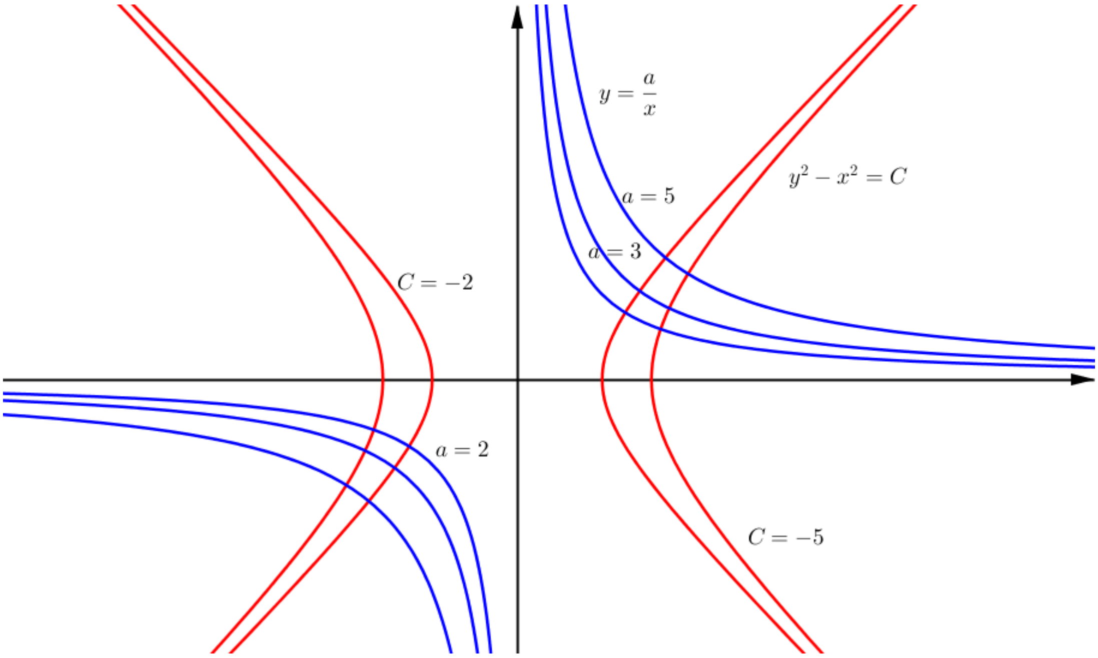
To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned}\int ydy &= \int xdx,\\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, jednadžba

$$y^2 - x^2 = C$$

je tražena jednadžba ortogonalnih trajektorija, a ona predstavlja familiju istostranih hiperbola.



Slika uz primjer 2.14.

Primjer 2.15. *Odredimo ortogonalne trajektorije familije elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

konstantne velike osi $2a$*, ovisnih o parametru* b*, gdje su* $a, b \in \mathbb{R}$.

Deriviranjem jednadžbe zadanih elipsi po x dobivamo:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Iz jednadžbe familije elipsa izrazimo parametar b :

$$b^2 = \frac{a^2 y^2}{a^2 - x^2},$$

pa uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu dobivamo:

$$xy + y'(a^2 - x^2) = 0.$$

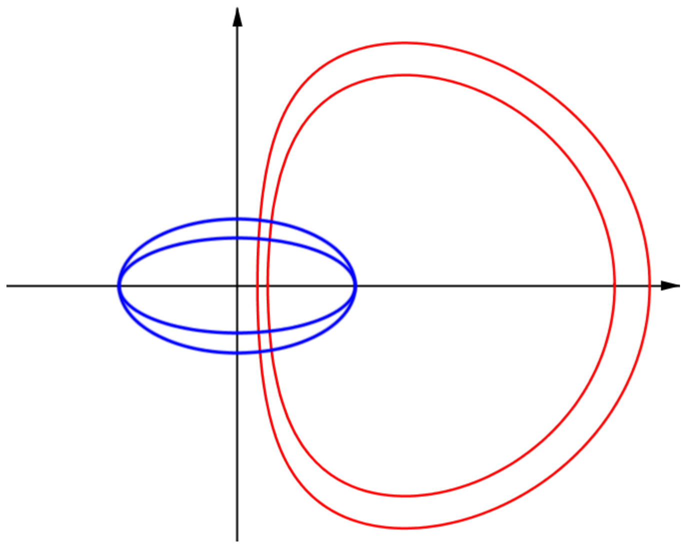
Uvrštavanjem $-\frac{1}{y'}$ umjesto y' dobivamo diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija:

$$xy - \frac{1}{y'}(a^2 - x^2) = 0.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} ydy &= a^2 \frac{dx}{x} - xdx, \\ \int ydy &= a^2 \int \frac{dx}{x} - \int xdx, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} &= a^2 \ln|x| + a^2 \ln|C|, \\ x^2 + y^2 &= 2a^2 \ln|Cx|. \end{aligned}$$

Dakle, jednadžba $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln|Cx|$ je tražena jednadžba ortogonalnih trajektorija familije elipsi konstantne velike osi $2a$.



Slika uz primjer 2.15.

Primjer 2.16. *Odredimo familiju izogonalnih trajektorija koje pod kutom* $\alpha = 120^\circ$ *sijeku familiju krivulja*

$$x^2 = 2a(y - x\sqrt{3}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Deriviranjem zadane jednadžbe po x dobivamo:

$$2x = 2a(y' - \sqrt{3}),$$

odakle slijedi

$$2a = \frac{2x}{y' - \sqrt{3}}.$$

Uvrštavanjem a u zadanu familiju krivulja dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = 2\frac{y}{x} - \sqrt{3}.$$

Koeficijenti smjera zadanih krivulja su iznosili $\operatorname{tg}\beta = y'$, pa će koeficijenti smjera izogonalnih trajektorija biti:

$$y_1' = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \operatorname{tg}(\beta - 120^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}120^\circ}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}120^\circ} = \frac{y' + \sqrt{3}}{1 - y'\sqrt{3}}.$$

Uvrštavanjem y_1' umjesto y' u $y' = 2\frac{y}{x} - \sqrt{3}$ i sređivanjem dobivamo:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\frac{y}{x} - 1}.$$

To je homogena diferencijalna jednadžba. Uvođenjem supstitucije $\frac{y}{x} = u$ (odakle je $y = ux$ i $y' = u'x + u$), jednadžba prelazi u oblik

$$u + xu' = \frac{u - \sqrt{3}}{u\sqrt{3} - 1}.$$

Sada rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2\sqrt{3} + 2u - \sqrt{3}}{u\sqrt{3} - 1}.$$

Uz supstituciju $u^2\sqrt{3} - 2u + \sqrt{3} = t$ i $(u\sqrt{3} - 1)du = \frac{dt}{2}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} &= -\frac{1}{2}\frac{dt}{t}, \\
\int \frac{dx}{x} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}, \\
\ln|x| &= \ln\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln|C_1|, \\
x\sqrt{t} &= C_1.
\end{aligned}$$

Sada vraćanjem supstitucija u $x\sqrt{t} = C_1$ i sređivanjem dobivamo jednadžbu traženih izogonalnih trajektorija koja glasi:

$$xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2) = C.$$

Poglavlje 3

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u fizici

Diferencijalne jednadžbe omogućuju matematički zapis zakona koji određuju fizikalne fenomene u prirodi (na pr. za drugi Newtonov zakon za opis gibanja u polju sile). Kroz primjere u ovom poglavlju vidjet ćemo široku primjenu diferencijalnih jednadžbi u fizikalnim zakonima.

Primjer 3.1. *Tijelo se kreće pravocrtno brzinom v koja je proporcionalna kvadratu vremena t. Odredimo ovisnost između prijeđenog puta s i vremena t ako je poznato da je u početnom trenutku $t = 0$ prijeđeni put iznosio $s = s_0$.*

Kinematičko značenje prve derivacije s po t je

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

U našem slučaju je

$$\frac{ds}{dt} = kt^2,$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti. Odatle dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$ds = kt^2 dt,$$

a to je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama. Sada rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
\int ds &= \int kt^2 dt, \\
s &= k \int t^2 dt, \\
s &= \frac{k}{3} t^3 + C.
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje postavljenog problema dano je sa

$$s = \frac{k}{3}t^3 + C.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta ($s = s_0$ za $t = 0$) dobivamo $C = s_0$, pa je tražena ovisnost puta s o vremenu t :

$$s(t) = \frac{k}{3}t^3 + s_0.$$

Primjer 3.2. *Točka mase m giba se pravocrtno pod djelovanjem sile F koja je proporcionalna vremenu t i obrnuto proporcionalna brzini gibanja v. Odredimo ovisnost između brzine v i vremena t ako je točka započela gibanje iz stanja mirovanja.*

Prema drugom Newtonovom zakonu je

$$F = m\frac{dv}{dt},$$

gdje je $\frac{dv}{dt}$ akceleracija gibanja. Prema uvjetu zadatka imamo

$$\frac{mdv}{dt} = \frac{kt}{v},$$

pa ćemo traženu ovisnost dobiti rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama:

$$\begin{aligned} mvdv &= ktdt, \\ m\int vdv &= k\int tdt, \\ m\frac{v^2}{2} &= k\frac{t^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje postavljenog problema je

$$m\frac{v^2}{2} = k\frac{t^2}{2} + C. \tag{3.1}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta $v = 0$ i $t = 0$ u (3.1) dobivamo $C = 0$, pa je

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Primjer 3.3. *Okrugla pločica rotira u tekućini. Djelovanje trenja na pločicu usporava rotaciju i to proporcionalno kutnoj brzini ω okretaja. Izrazimo kutnu brzinu kao funkciju vremena ovisnu o t ako je poznato da se za 25 sekundi od početka gibanja kutna brzina smanjila od 100 na 50 okretaja u sekundi.*

Označimo li sa $\omega(t)$ broj okretaja pločice u sekundi u trenutku t, tada će $\frac{d\omega}{dt}$ biti broj okretaja pločice u jednoj sekundi u trenutku t, tj. kutna brzina u tom trenutku t. Prema uvjetu zadatka dobivamo

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega,$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti, dok je predznak minus pokazatelj da je funkcija $\omega(t)$ padajuća, pa je $\frac{d\omega}{dt} < 0$. Dobili smo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{\omega} &= -k \int dt, \\ \ln|\omega| &= = -kt + \ln|C|, \\ \ln\left|\frac{\omega}{C}\right| &= -kt, \\ \omega &= Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\omega = 100$ i $t = 0$ dobivamo $C = 100$, pa je

$$\omega = 100e^{-kt}. \tag{3.2}$$

Koeficijent proporcionalnosti k ćemo odrediti iz drugog uvjeta ($\omega = 50$ i $t = 25$):

$$50 = 100e^{-25k},$$

odnosno

$$1 = 2e^{-25k},$$

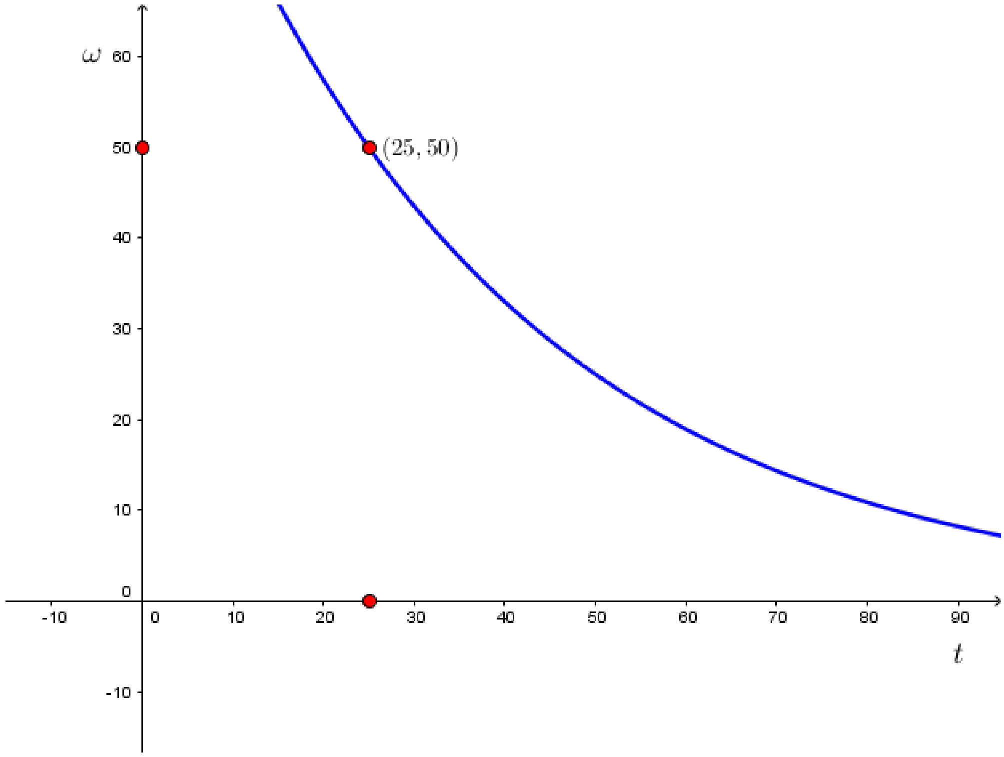
pa je

$$k = \frac{\ln 2}{25} = 0.04 \ln 2.$$

Konačno uvrštavanjem u (3.2) dobivamo

$$\omega(t) = 100e^{(-0.04 \ln 2)t}$$

i to je tražena kutna brzina kao funkcija ovisna o t.



Slika uz primjer 3.3.

Primjer 3.4. *U sobi pri stalnoj temperaturi* 20° *nalazi se tijelo ugrijano do* 100°*. Odredimo za koliko će se vremena to tijelo ohladiti do* 25° *ako se do* 60° *ohladilo za 10 minuta i odredimo ovisnost temperature tijela o vremenu.*

Označimo temperaturu sa T, a vrijeme sa t. Tada će brzina hlađenja tijela biti $\frac{dT}{dt}$. Newtonov zakon hlađenja kaže da je promjena temperature objekta proporcionalna razlici temperature objekta T i temperature okoline (ambijenta) T_{amb}. Ovaj zakon je dobra aproksimacija procesa hlađenja u standardnim uvjetima. Dobivamo

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20^\circ), \tag{3.3}$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti, a predznak minus kazuje da je $T(t)$ padajuća funkcija. Diferencijalna jednadžba (3.3) je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\frac{dT}{T - 20^\circ} = -kdt,$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dT}{T - 20^\circ} &= -k \int dt, \\
\ln |T - 20^\circ| &= -kt + \ln |C|, \\
\ln \left| \frac{T - 20^\circ}{C} \right| &= -kt, \\
T &= 20^\circ + Ce^{-kt}.
\end{aligned}
$$

Uvrstimo li tu $T = 100$ i $t = 0$, dobivamo $C = 80^\circ$, pa je

$$T = 20^\circ + 80^\circ e^{-kt}.$$

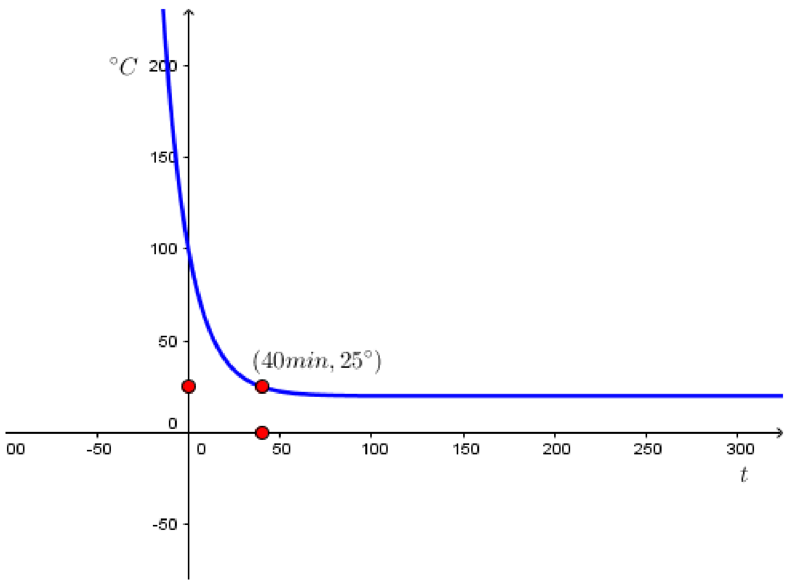
Kako je prema uvjetu zadatka $T = 60^\circ$ za $t = 10$ minuta, dobivamo $k = \dfrac{\ln 2}{10}$. Konačno,

$$T(t) = 20^\circ + 80^\circ e^{-\frac{\ln 2}{10} t}$$

je tražena ovisnost temperature T tijela o vremenu t. Da bismo odredili za koliko će se minuta tijelo ohladiti do 25°, uvrstimo $T(t) = 25^\circ$ i dobivamo

$$e^{-\frac{\ln 2}{10} t} = 2^{-4}$$

odakle je $t = 40$ minuta.

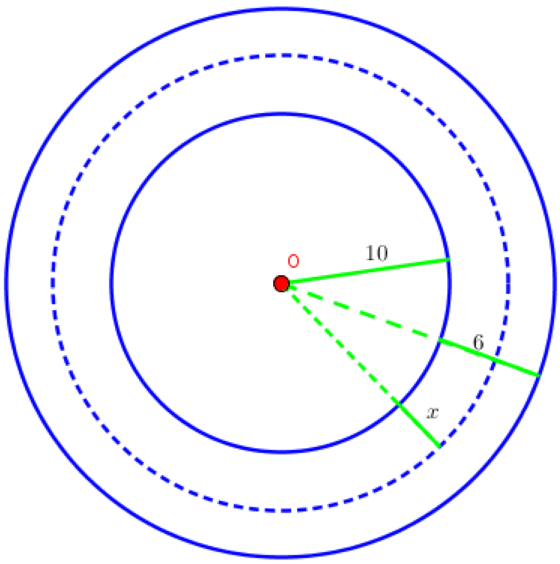


Slika uz primjer 3.4.

Primjer 3.5. *Pod određenim uvjetima je količina topline* $Q\,(cal)$*, koja protječe kroz površinu* $P\,(cm^2)$ *okomito na pravac strujanja topline u jednoj sekundi, konstanta i jednaka*

$$Q = -kP\frac{dT}{dx}, \tag{3.4}$$

gdje je $T = T(t)$ *temperatura* $(°C)$*, a* $x\,(cm)$ *udaljenost te površine mjerena u smjeru prostiranja topline (s početkom u nekoj proizvoljnoj fiksnoj točki), dok je k toplinska vodljivost sredine. Cijev za paru polumjera 20 cm obložena je omotačem debljine 6 cm i vodljivosti k=0.0003. Odredimo gubitak topline u sekundi kroz metar dužine cijevi, ako je temperatura vanjske površine cijevi* $200°C$*, a temperatura vanjske površine omotača* $30°C$*, te ovisnost temperature T na udaljenosti x cm od vanjske površine cijevi.*



Slika uz primjer 3.5.

Površina jednog metra dužine cijevi na udaljenosti x cm od vanjskog zida cijevi jednaka je

$$P = 2\pi \cdot (x + 10) \cdot 100 = 200\pi(x + 10),$$

pa uvrštavanjem u (3.4) dobivamo

$$200\pi k dT = -Q\frac{dx}{x + 10}.$$

Dobivena diferencijalna jednadžba je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama pa integriranjem slijedi

$$200\pi kT = -Q\ln(x+10) + C. \tag{3.5}$$

Prema uvjetima zadatka, za $x = 0$ imamo $T = 200$, a za $x = 6$ imamo $T = 30$. Stoga iz (3.5) slijedi

$$40000\pi k = -Q\ln 10 + C, \quad 6000\pi k = -Q\ln 16 + C.$$

Rješavanjem dobivenog sustava i uvrštavanjem $k = 0.0003$ zaključujemo

$$Q = \frac{34000\pi \cdot 0.0003}{\ln 1.6} = \frac{10.2\pi}{\ln 1.6}$$

i

$$C = 40000\pi \cdot 0.0003 + 34000\pi \cdot 0.0003\frac{\ln 10}{\ln 1.6} = \pi\left(12 + 10.2\frac{\ln 10}{\ln 1.6}\right),$$

pri čemu je Q gubitak topline za 1 sekundu. Za 1 sat gubi se

$$60^2 \cdot \frac{10.2\pi}{\ln 1.6} = 245000\, cal.$$

Ovisnost temperature T na udaljenosti x cm od vanjske površine cijevi odredimo iz (3.4) i (3.5) i ona glasi

$$T = 200 - \frac{170}{\ln 1.6}\ln\frac{x+10}{10}.$$

Primjer 3.6. *U rezervoaru ima* 100 *litara vodene otopine od* 10 *kilograma soli. Voda utječe u rezervoar brzinom od* 3 *litre u minuti, a smjesa iz njega istječe brzinom od* 2 *litre u minuti, pri čemu se miješanjem podržava jednolika koncentracija. Odredimo koliko će soli biti u rezervoaru po isteku jednog sata.*

Koncentracijom c zadane tvari nazivamo količinu tvari u jedinici volumena. Ako je koncentracija jednolika, onda količina tvari u volumenu V iznosi cV. Neka je količina soli koja se nalazi u rezervoaru x kilograma, po isteku vremena t minuta. Količina smjese u rezervoaru u tom trenutku bit će $(100 + t)$ litara i prema tome će koncentracija biti

$$c = \frac{x}{100+t}\, kg/l.$$

U toku vremena dt iz rezervoara istječe $2dt$ litara smjese sa $2cdt$ kilograma soli. Prema tome, promjenu dx količine soli u rezervoaru opisuje odnos

$$-dx = 2cdt \quad \text{ili} \quad -dx = \frac{2x}{100+t}dt.$$

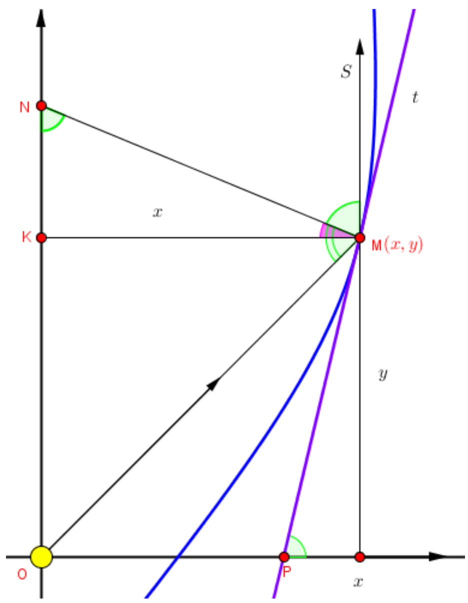
To je tražena diferencijalna jednadžba postavljenog problema. Radi se o diferencijalnoj jednadžbi sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{x} &= \frac{2dt}{100+t}, \\ -\int \frac{dx}{x} &= 2\int \frac{dt}{100+t}, \\ \ln|x| &= -2\ln(100+t) + \ln|C|, \\ x &= \frac{C}{(100+t)^2}. \end{aligned}$$

Konstantu C određujemo iz početnih uvjeta: za $t = 0$ i $x = 10$ dobivamo $C = 100000$. Prema tome, po isteku jednog sata u rezervoaru će biti

$$x = \frac{100000}{160^2} \approx 3.9 \,\text{kilograma soli.}$$

Primjer 3.7. *Zrcalo reflektira sve zrake koje izlaze iz jedne točke O (izvora svjetlosti) paralelno sa zadanim smjerom ON. Promatramo ravni presjek zrcala prikazan na slici. Neka je M jedna točka tog zrcala. Ishodište koordinatnog sustava u ravnini smjestimo u zadanu točku O, a y-os uzmimo u smjeru ON. Tada je OM upadna, a MS (koja je paralelna sa ON) reflektirana zraka. Pravac MN je normala, a PM tangenta na presjek zrcala. Odredimo oblik tog zrcala.*



Slika uz primjer 3.7.

Kako je kut upadne zrake jednak kutu reflektirane zrake, vrijedi

$$\sphericalangle OMN = \sphericalangle NMS.$$

Pravac MN je presječnica paralelnih pravaca ON i MS pa je kut $\sphericalangle MNK = \sphericalangle NMS$. Slijedi $\sphericalangle OMN = \sphericalangle MNK$ i stoga je trokut $\triangle OMN$ jednakokračan, pa je $|OM| = |ON|$. Nadalje,

$$|ON| = |OK| + |KN|. \tag{3.6}$$

Prema slici vrijedi

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad |OK| = y, \tag{3.7}$$

kao i

$$|KN| = x \cdot \operatorname{tg}\beta = x \cdot \operatorname{tg}(90 - \alpha) = x \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x}{y'}. \tag{3.8}$$

Uvrštavanjem (3.7) i (3.8) u (3.6) slijedi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + \frac{x}{y'},$$

odakle sređivanjem izraza i dijeljenjem sa y dobivamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} - 1}{\frac{x}{y}}. \tag{3.9}$$

Dobivena jednadžba je homogena diferencijalna jednadžba, pa uvođenjem supstitucije $\frac{x}{y} = u$ (tada je $x = uy$ i $x' = u'y + u$), jednadžba prelazi u oblik

$$\frac{udu}{\sqrt{1 + u^2} - (1 + u^2)} = \frac{dy}{y}.$$

Uz supstituciju $1 + u^2 = t^2$ i $udu = tdt$ dobivamo

$$\frac{dt}{1 - t} = \frac{dy}{y}.$$

Integriranjem dobivene diferencijalne jednadžbe te vraćanjem uvedenih supstitucija dobivamo rješenje postavljenog problema tj.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + C,$$

odnosno

$$y = \frac{x^2 - C^2}{2C}.$$

Rješenje predočuje familiju parabola kojima je y-os os simetrije, a točka O zajednički fokus. Dakle, zrcalo mora imati oblik paraboloida.

Poglavlje 4

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u biologiji i kemiji

U biologiji i kemiji možemo pronaći mnogo primjera prirodnih modela rasta i pada koji se mogu modelirati običnim diferencijalnim jednadžbama. Posebno je zanimljiva dinamika populacije nekih živih vrsta koja uz određene uvjete doživljava promjene. Veličina populacije je funkcija ovisna o vremenu te se svi matematički modeli rasta populacije mogu podijeliti na kontinuirane i diskretne. U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se mnogi takvi modeli mogu modelirati i riješiti običnim diferencijalnim jednadžbama uz određene početne uvjete.

Primjer 4.1. *Trenutna masa stabla je približno* $1.6\,t$. *Ako je njegov godišnji koeficijent prirasta* $k = 0.02$, *odredimo opći zakon tog prirasta te masu stabla nakon* 9 *mjeseci.*

Stopa promjene veličine M obzirom na vrijeme t proporcionalna je trenutnoj masi M pa će opći zakon tog prirasta biti rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dM}{M} = 0.02dt.$$

Rješavamo dobivenu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$\begin{aligned} \int \frac{dM}{M} &= 0.02 \int dt \\ \ln M &= 0.02t + C \\ M(t) &= Ce^{0.02t}. \end{aligned}$$

Prema tome, opći zakon tog prirasta uz početni uvjet $M(0) = 1.6$ glasi

$$M(t) = 1.6e^{0.02t}. \tag{4.1}$$

Odredimo sada masu stabla nakon 9 mjeseci. Vrijeme t računamo u godinama pa zbog toga masu stabla nakon 9 mjeseci možemo odrediti iz (4.1) uvrštavanjem $t = 0.75$:

$$M(0.75) = 1.6e^{0.02\cdot 0.75} = 1.6e^{0.015} \approx 1.624.$$

Dakle, masa stabla nakon 9 mjeseci će biti približno 1.624 t.

Primjer 4.2. *Kultura bakterija razmnožava se tako da nakon sat vremena broji* 1000 *bakterija, a nakon* 4 *sata* 3000 *bakterija. Odredimo zakonitost promjene broja bakterija u ovisnosti o vremenu t te odredimo početni broj bakterija u trenutku $t = 0$.*

Označimo sa $N(t)$ broj bakterija u vremenu t te neka je k konstanta ovisna o vremenu. Prirast možemo opisati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo na uobičajeni način:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{N} &= kdt, \\
\int \frac{dN}{N} &= k \int dt, \\
\ln|N| &= kt + \ln|C|, \\
N(t) &= Ce^{kt}.
\end{aligned}$$

Da bismo odredili zakonitost promjene broja bakterija ovisno o vremenu t, iskoristit ćemo da je $N(1) = 1000$ i $N(4) = 3000$. Uvrštavanjem zadanih uvjeta u

$$N(t) = Ce^{kt}$$

dobivamo

$$Ce^{k} = 1000, \quad Ce^{4k} = 3000,$$

odakle je

$$k = \frac{1}{3}\ln 3 \approx 0.366, \quad C = \frac{1000}{\sqrt[3]{3}} \approx 693.361.$$

Stoga je tražena ovisnost broja bakterija o vremenu t :

$$N(t) = 1000 \cdot 3^{\frac{t-1}{3}}. \tag{4.2}$$

Preostaje još odrediti početni broj bakterija, a to određujemo uvrštavanjem $t = 0$ u (4.2):

$$N(0) = 1000 \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \approx 693.$$

Dakle, početni broj bakterija bio je 693.

Primjer 4.3. *U populaciji s 500 miševa njih 5 namjerno je zaraženo zaraznom bolešću kako bi se testirao model širenja zaraze koji pretpostavlja da je brzina promjene broja zaraženih miševa proporcionalna produktu broja zaraženih i broja zdravih miševa. Ako je poznato da je* 24 *sata nakon početka eksperimenta pregledom ustanovljeno da se bolešću zarazilo još* 5 *miševa, odredimo koliko je vremena prema modelu potrebno da se zarazi polovina populacije.*

Označimo li sa $M(t)$ broj zaraženih miševa u vremenu t, a početni broj zdravih miševa sa $M_0 = 5$, onda je broj zdravih miševa $500 - M(t)$. Pretpostavlja se da je brzina promjene broja zaraženih miševa proporcionalna produktu broja zaraženih i broja zdravih miševa, pa slijedi da je

$$\frac{dM}{dt} = kM(500 - M), \tag{4.3}$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti. Jednadžba (4.3) je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{M(500-M)} &= kdt, \\
\int \frac{dM}{M(500-M)} &= k\int dt, \\
\frac{1}{500}\left(\int \frac{dM}{M} + \int \frac{dM}{500-M}\right) &= k\int dt, \\
\frac{1}{500}\left(\ln M - \ln(500-M)\right) &= kt + \frac{1}{500}\ln|C|, \\
\ln\frac{M}{500-M} &= 500kt + \ln|C|, \\
\frac{M}{500-M} &= |C|e^{500kt}, \\
M(t) &= \frac{500|C|e^{500kt}}{1+|C|e^{500kt}}.
\end{aligned}$$

Dobivamo da je tražena ovisnost broja zaraženih miševa o vremenu t jednaka

$$M(t) = \frac{500Ce^{500kt}}{1+Ce^{500kt}}, \text{ gdje je } C > 0. \tag{4.4}$$

Da bismo odredili koliko je (prema zadanom modelu) potrebno vremena da se zarazi polovina populacije, koristimo početne uvjete: za $t = 0$ je $M = 5$, a za $t = 24$ je $M = 10$. Uvrštavanjem početnih uvjeta u (4.4) dobivamo

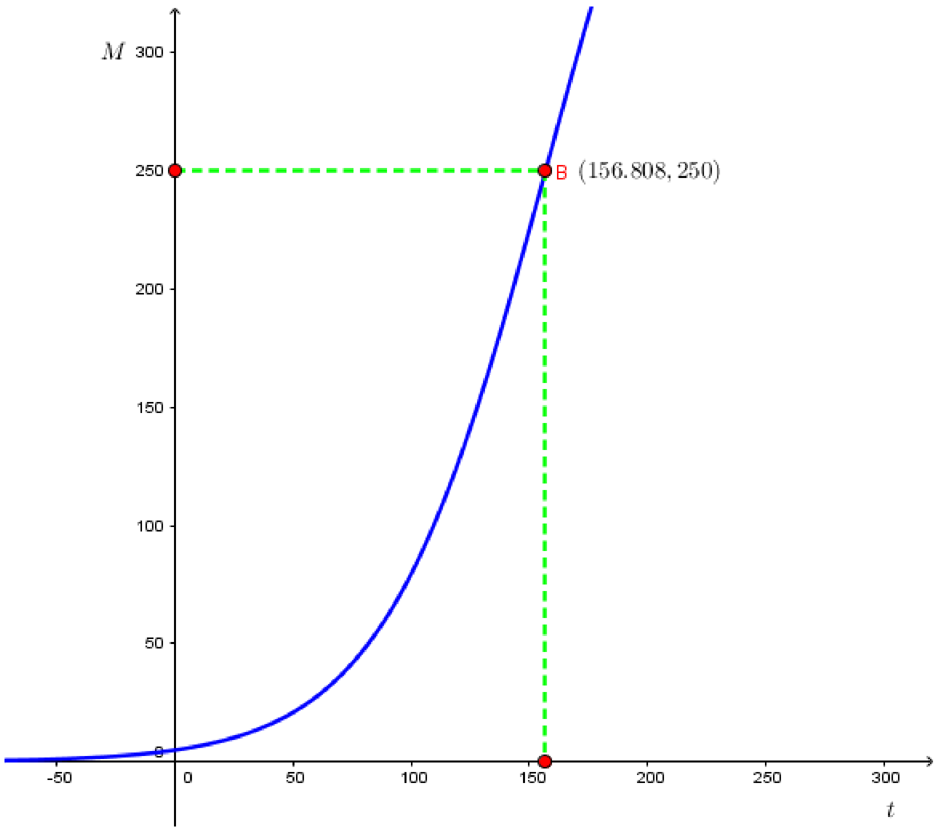
$$C = \frac{1}{99} \quad \text{i} \quad k = \frac{1}{12000}\ln\frac{99}{49}.$$

Uvrštavanjem izračunatih C i k u (4.4) dobivamo traženu ovisnost:

$$M(t) = \frac{\frac{500}{99} \cdot \left(\frac{99}{49}\right)^{\frac{1}{24}}}{1 + \frac{1}{99} \cdot \left(\frac{99}{49}\right)^{\frac{1}{24}}} t. \tag{4.5}$$

Ukupan broj miševa je 500, pa uvrštavanjem $M = 250$ u (4.5) dobivamo vrijeme nakon kojega će biti zaražena polovina miševa:

$$t \approx 156.808 \quad \text{sati.}$$



Slika uz primjer 4.3.

Primjer 4.4. *Neka laboratorij ima* $R = 10\text{g}$ *radija-226 čije je vrijeme poluraspada 1602 godine. Količina raspadnutog radija je proporcionalna količini neraspadnutog radija u* *trenutku t. Odredimo koliko će radija biti na raspolaganju nakon* 150 *godina i kada će laboratorij imati* 6g *radija-226.*

Označimo sa $R(t)$ količinu raspadnutog radija u trenutku t. Neka je konstanta k ovisna o vremenu. U ovom slučaju konstanta k ima negativan predznak jer se količina radija smanjuje. Dakle, zadani odnos možemo modelirati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dR}{dt} = -kR.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= -kdt, \\ \int \frac{dR}{R} &= -k \int dt, \\ \ln R &= -kt + \ln |C|, \\ R(t) &= Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

Jednadžbom

$$R(t) = 10e^{-kt}$$

modelirali smo količinu raspadnutog radija u trenutku t za neku konstantu k. Uvrštavanjem početnih uvjeta $R = 5$ za $t = 1602$ određujemo konstantu k. Dakle, za zadane početne uvjete dobivamo

$$k = \frac{\ln 2}{1602}.$$

Dakle, jednadžba koja modelira traženu situaciju je

$$R(t) = 10e^{-\frac{\ln 2}{1602} \cdot t}. \tag{4.6}$$

Da bismo odredili koliko će radija biti na raspolaganju nakon 150 godina i kada će laboratorij imati 6 g radija-226, uvrštavanjem u (4.6) dobivamo da će laboratorij nakon 150 godina na raspolaganju imati

$$R \approx 9.3716\,\mathrm{g}$$

radija-226, te da će imati 6 g radija-226 nakon

$$t \approx 1180\,\text{godina}.$$

Poglavlje 5

Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji i financijama

U ekonomiji i financijama se mogu pojaviti mnogi problemi u kojima je iz zadanih funkcija graničnih veličina potrebno odrediti funkcije ukupnih veličina uz određene početne uvjete. U sljedećim primjerima pokazat ćemo kako se takvi problemi mogu modelirati običnim diferencijalnim jednadžbama te interpretaciju njihova rješenja.

Primjer 5.1. *Ako je Q količina proizvodnje, a $T(Q)$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje, tada je $\frac{dT}{dQ}$ funkcija graničnih troškova proizvodnje. Ako je zadana funkcija graničnih troškova proizvodnje*

$$Q \mapsto 5Q + 300,$$

odredimo funkciju ukupnih troškova proizvodnje ako je poznato da fiksni troškovi iznose 800, tj. $T(0) = 800$.

Zadanu funkciju graničnih troškova možemo pisati u obliku

$$\frac{dT}{dQ} = 5Q + 300.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} dT &= (5Q + 300)dQ, \\ \int dT &= \int (5Q + 300)dQ, \\ T(Q) &= \frac{5}{2}Q^2 + 300Q + C. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje diferencijalne jednadžbe je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = \frac{5}{2}Q^2 + 300Q + C. \tag{5.1}$$

Da bismo odredili traženo partikularno rješenje, izračunat ćemo vrijednost konstante C iz zadanog početnog uvjeta $T(0) = 800$. Uvrštavanjem u (5.1) dobivamo $C = 800$ pa je tražena funkcija ukupnih troškova:

$$T(Q) = \frac{5}{2}Q^2 + 300Q + 800.$$

Primjer 5.2. *Pojam elastičnosti se često koristi u suvremenoj tržišnoj ekonomiji kako bi se opisalo ponašanje potrošača i proizvođača, odnosno kupaca i prodavača na tržištu. Koeficijent elastičnosti opisuje koliko su ponuda i potražnja osjetljive na promjenu cijena tj.* $E_{y,x} = \dfrac{xdy}{ydx}$. *Odredimo funkciju* $y(x)$ *za koju je zadan koeficijent elastičnosti*

$$E_{y,x} = 3x–2.$$

Traženu promjenu možemo zapisati u obliku:

$$\frac{xdy}{ydx} = 3x - 2.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \left(3 - \frac{2}{x}\right)dx, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \left(3 - \frac{2}{x}\right)dx, \\ \ln|y| &= 3x - 2\ln|x| + \ln|C|, \\ y(x) &= \frac{C}{x^2}e^{3x}. \end{aligned}$$

Primjer 5.3. *U ekonomiji se cijena proizvoda obično prati u određenom vremenskom intervalu. Zato je cijenu prirodno promatrati kao funkciju vremena. Ako cijena* $p(t)$ *nekog proizvoda dostiže graničnu vrijednost* $\overline{p}$ *kao* $\lim_{t\to\infty} p(t)$, *tada se kaže da je cijena proizvoda dinamički stabilna i* $\overline{p}$ *se naziva ravnotežna cijena. Da bi se proizvod prodao po što povoljnijoj cijeni, onda ona mora biti obrnuto proporcionalna svojoj promjeni u nekom (kraćem) vremenskom periodu. Tako je omogućeno formiranje određene diferencijalne jednadžbe koju ta cijena zadovoljava. Neka cijena* $p(t)$ *proizvoda zadovoljava diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{dp}{dt} = 10 - 0.5p, \;\; t \geq 0.$$

Odredimo $p(t)$, *ravnotežnu cijenu proizvoda te za početne uvjete* $p(0) = 40$, $p(0) = 10$ *i* $p(0) = 20$ *opišimo ponašanje cijene proizvoda.*

Zadana diferencijalna jednadžba je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{10 - 0.5p} &= dt, \\
\int \frac{dp}{10 - 0.5p} &= \int dt, \\
-2\ln|10 - 0.5p| &= t - 2\ln\left|\frac{1}{2}C\right|, \\
10 - 0.5p &= \frac{1}{2}Ce^{-0.5t}, \\
p(t) &= 20 - Ce^{-0.5t}.
\end{aligned}$$

Izračunajmo ravnotežnu cijenu proizvoda $\overline{p}$:

$$\overline{p} = \lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}(20 - Ce^{-0.5t}) = 20.$$

Dakle, ravnotežna cijena proizvoda je $\overline{p} = 20$. Sada računamo $p(t)$ za sve zadane početne uvjete.
Prvi slučaj $p(0) = 40$:

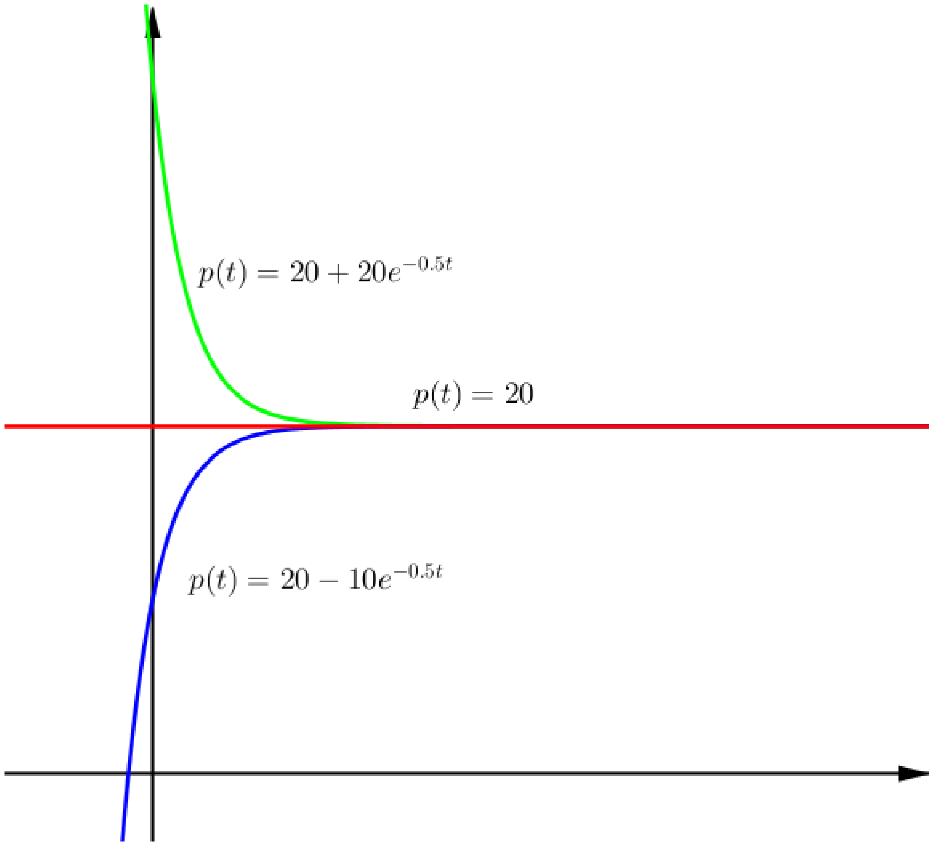
$$\begin{aligned}
p(0) &= 20 - C, \\
40 &= 20 - C, \\
C &= -20, \\
p(t) &= 20 + 20e^{0.5t}.
\end{aligned}$$

Drugi slučaj $p(0) = 10$:

$$\begin{aligned}
p(0) &= 20 - C, \\
10 &= 20 - C, \\
C &= 10, \\
p(t) &= 20 + 10e^{0.5t}.
\end{aligned}$$

Treći slučaj $p(0) = 20$:

$$\begin{aligned}
p(0) &= 20 - C, \\
20 &= 20 - C, \\
C &= 0, \\
p(t) &= 20.
\end{aligned}$$



Slika uz primjer 5.2.

Uočimo: ako je $p(0) > \overline{p}$, onda cijena pada i ima graničnu vrijednost $\overline{p}$; ako je $p(0) < \overline{p}$, onda cijena raste i također ima graničnu vrijednost $\overline{p}$; ako je $p(0) = \overline{p}$, tada cijena ostaje stalna i ne ovisi o t.

Primjer 5.4. *Novac se kontinuirano ulaže na račun po stopi od 2000 kuna godišnje uz kamatnu stopu od* 8% *koja se pripisuje neprekidno. Odredimo iznos A na računu nakon t godina. Nadalje, ako znamo da je početni iznos na računu bio* 0 *kn, odredimo količinu novca na računu nakon* 5 *godina.*

Traženu ovisnost možemo modelirati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A + 2000.$$

To je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo:

$$\frac{dA}{0.08A + 2000} = dt,$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dA}{0.08A + 2000} &= \int dt, \\
A(t) &= Ce^{0.08t} - 25000.
\end{aligned}
$$

Iz uvjeta zadatka znamo da je početni iznos na računu 0 kuna. Stoga, uvrštavajući $t = 0$ i $A(0) = 0$ u $A(t) = Ce^{0.08t} - 25000$, dobivamo $C = 25000$. Dakle, tražena ovisnost se može modelirati jednadžbom

$$A(t) = 25000e^{0.08t} - 25000. \tag{5.2}$$

Da bismo odredili koliko će novaca biti na računu nakon 5 godina, uvrstimo $t = 5$ u (5.2) te dobivamo

$$A(5) \approx 12296.$$

Dakle, nakon 5 godina na računu će biti približno 12296 kuna.

Sažetak

U ovom radu su opisane neke primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u geometriji, nekim prirodnim znanostima i ekonomiji. Navedeni su različiti primjeri problema koji se modeliraju diferencijalnim jednadžbama. Pokazano je kako su u njihovom rješavanju ključna dva koraka. Prvi korak je postaviti odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu koja opisuje vezu među veličinama koje se pojavljuju u tom problemu. Zatim se dobivena diferencijalna jednadžba rješava metodama matematičke analize, preciznije, teorije diferencijalnih jednadžbi.

Summary

Some applications of ordinary differential equations in geometry, science and economics are described in this thesis. Various examples of problems which can be modeled by differential equations are given. The solving of these problems includes two key steps. The first step is to set the differential equation which describes the corresponding relationship among variables. The obtained differential equation is then solved using the methods of mathematical analysis, or more precisely, using the theory of differential equations.

Životopis

Rođen sam 29.6.1992. godine u Imotskom. Odrastao sam u malom selu Gornja Blatnica pokraj Čitluka u Bosni i Hercegovini. Pohađao sam osnovnu školu fra. Didaka Buntića u Čitluku. Po završetku osnovne škole 2007. godine upisao sam se u opću gimnaziju u srednjoškolskom centru dr. fra. Slavka Barbarića također u Čitluku. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja upisujem se u akademskoj 2011./2012. godini na Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu na preddiplomski studij matematike; smjer nastavnički. Preddiplomski studij završavam 2014. godine te iste godine upisujem diplomski studij matematike; smjer nastavnički. Trenutno živim u Zagrebu i zaposlen sam u osnovnoj školi Gornje Vrapče kao nastavnik matematike.

Bibliografija

[1] I. Aganović, K. Veselić, *Linearne diferencijalne jednadžbe*, Element, Zagreb, 1997.

[2] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Zagreb, 2001.

[3] B. Apsen, *Repetitorij više matematike II. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.

[4] B. Apsen, *Riješeni zadaci više matematike uz drugi dio repetitorija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.

[5] S. Benić, I. Smolić, *Matematičke metode u fizici*, `http://www.phy.pmf.unizg.hr/~sanjinb/mmfz_tree.pdf`, 25.7.2016.

[6] S. Krunić, *Neke obične diferencijalne jednačine s primenama - metodička obrada*, `http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/SlavkoKrunic.pdf`, 25.7.2016.

[7] M. Nuraković, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene*, `http://www.pmf.untz.ba/studijski_odsjeci/mat/zaposleni/Mehmed%20Nurkanovic/DJKNJIGA%20printcom%20sraceno.pdf`, 25.7.2016.

[8] T. Perić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, `http://web.efzg.hr/dok/MAT/tperic//Predavanje_14_MAT.pdf`, 25.7.2016.

[9] V. Perić, M. Tomić, *Zbirka riješenih zadataka iz matematike II. 1. Diferencijalne jednačine*, Svjetlost, Sarajevo, 1989.

[10] M. Vijuga, *Rješeni zadaci iz više matematike*, `http://www.moje-instrukcije.com/lekcije/Visa_matematika_zadatci/Diferencijalne_Jednadzbe_Primjena.pdf`, 25.7.2016.

[11] *Diferencijalne jednadžbe*, `http://www.sfsb.unios.hr/~zpavic/M2/IIIDiferencijalneJednadzbe.pdf`, 25.7.2016.

[12] *Ortogonalne i izogonalne trajektorije*, `http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node92.html`, 25.7.2016.

[13] *Populacijska i logistička jednadžba*, `http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/node88.html`, 25.7.2016.

[14] *Primijenjena matematička analiza - Zadaci*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/pma/files/PMA-zadaci-2015.pdf`, 25.7.2016.