SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tena Zbiljski

ZARAZA U FINANCIJSKIM MREŽAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc.
Boris Podobnik

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

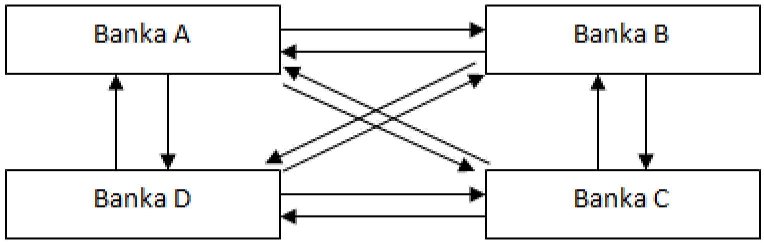
Sadržaj

Uvod

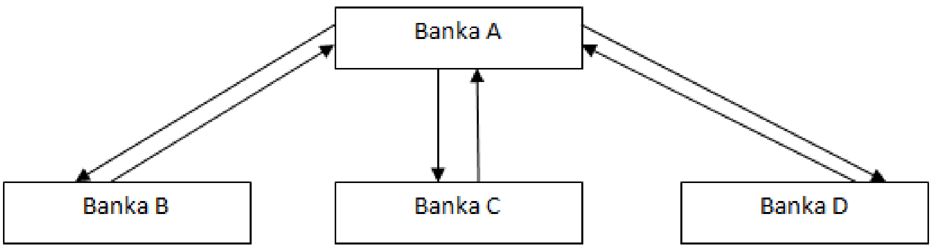
Ovaj diplomski rad temelji se na članku Prasanna Gai i Sujit Kapadia iz 2010. godine ([3]). Kroz povijest smo svjedoci nekoliko većih slomova financijskih sustava od kojih je zadnji bio financijska kriza 2007.-2008. godine. Nastanku takve krize pridonosi mnogo različitih faktora, ali onaj na koji ćemo se osvrnuti ovim radom je povezanost globalnog financijskog sustava.

Globalni financijski sustav je povezana mreža različitih financijskih institucija koje imaju mogućnost bilo ulaganja svojih sredstava, zaduživanja ili posuđivanja, te provode barem jednu od navedenih akcija i na taj način su uključene u zamršenu mrežu potraživanja i obveza koja povezuje njihove bilance. Pojava sofisticiranih financijskih proizvoda, poput npr. ”kreditnih swap-ova”, povećale su kompleksnost povezanosti bilanci. Na taj se način stvara okolina u kojoj je moguće prenijeti posljedice šoka financijske mreže s jednog posrednika na drugog što ćemo kasnije nazivati širenjem zaraze. Pod pojmom zaraza smatrat ćemo bankrot određene institucije. Cilj ovog rada je modelirati zarazu u financijskom sustavu te način njezinog širenja. Glavni dio se odnosi na to kako se gubitci potencijalno mogu širiti kroz složenu mrežu direktne izloženosti jedne ugovorne strane drugoj nakon inicijalnog bankrota. Uz navedeno, također ćemo se osvrnuti i na posljedice prvotnog kruga bankrota koje mogu uzrokovati novi zbog revaluacije imovine.

Članak na kojem je temeljen ovaj rad jedan je u nizu radova koji se bave ovom temom; najveći doprinos analizi zaraze kroz direktne povezanosti u financijskom sustavu dolazi od F. Allen-a i D. Gale-a iz 2000. godine ([1]), objavom rada ”Financial contagion”. U svom su radu, koristeći mrežu koja se sastoji od četiri banke, demonstrirali da širenje zaraze najviše ovisi o uzorku povezanosti između banaka. Ako je mreža potpuna (slika 0.1a), na način da su sve banke međusobno izložene jedna drugoj tako da je iznos međubankovnih depozita koji svaka banka drži jednako rapodijeljen između njih, posljedice šoka su oslabljene. Svaka od tih banaka primi mali udar pa nema zaraze. U suprotnom kada je mreža nepotpuna, banke su izložene samo nekim od ostalih banaka, sistem je lomljiv jer je inicijalni udar šoka koncentriran između susjednih banaka. Nakon što one podlijegnu bankrotu, uranjena likvidacija dugotrajne imovine i gubitak na vrijednosti dovode (inicijalno) nezaražene banke u prvi red zaraze. Slično zaključcima Allen-a i Gale-a, X. Freixas i J.-C. Rochet u svojem radu iz 2000. godine ([2]) pokazuju da sustavi sa centralnom bankom u središtu, a ostalim bankama na periferiji mreže (slika 0.1b) koje su povezane sa središnjom bankom (ali ne i međusobno), su također osjetljivi na zarazu. U oba rada se pretpostavlja da su šokovi neočekivani.



(a) Potpun sustav banaka



(b) Sustav s centralnom bankom u središtu

Slika 0.1: Strukture mreže sa 4 banke. ([9])

Iako je većina radova o zarazama u financijskoj mreži nastala nakon financijske krize, o vjerojatnosti i razmjeru šokova na financijski sustav govorilo se i ranije unutar pojedinih političkih institucija. Neke od njih su pokušale ukomponirati vjerojatnost i jakost udara glavnih rizika financijskog sustava u svojim Izvješćima o financijskoj stabilnosti. Štoviše, kompleksnost financijskog sustava povlači činjenicu da odgovorni donositelji odluka u nekoj instituciji imaju samo polovičnu informaciju o svim vezama između financijskih posrednika. Obzirom na brzinu kojom šok napreduje, postoji potreba da se razviju alati za analizu prijenosa tih šokova kroz proizvoljno danu strukturu mreže. Nedavni događaji u financijskom sustavu samo su naglasili ovakvu potrebu.

Ovim se radom pokušava odgovoriti na nastale potrebe uvodeći tehnike iz literature o kompleksnim mrežama u okolinu financijskog sustava. Iako se taj pristup većinom koristi u studijama epidemiologije i ekologije, u ovom slučaju će pomoći u analizi i modelu zaraze koja proizlazi iz neočekivanih šokova u kompleksnoj financijskoj mreži. Struktura mreže će biti proizvoljna. Nakon postavljanja modela,za isti se radi simulacija kako bi se objasnila intuicija na kojoj se temelji teorijski dio rada. Složenost mrežne strukture i interakcije između financijskih posrednika stvaraju nelinearnu dinamiku zbog koje rizik zaraze može biti jako osjetljiv na male promjene parametara. Navedeno svojstvo se analizira izolirajući vjerojatnost i širenje zaraze kada su imovina i obveze međusobno povezani. Na taj se način pruža alternativno gledište na pitanje da li financijski sustav apsorbira ili pojačava šokove.

Dolazi se do spoznaje da sustav pokazuje robusnu-ali-krhku (engl. *robust-yet-fragile*) tendenciju - iako je vjerojatnost zaraze mala, posljedice mogu biti ekstremno rasprostranjene kada se problem stvarno dogodi. Također, iz modela se vidi da prvotno neprimjetni šokovi mogu imati različite posljedice na financijski sustav, ovisno o pojedinoj točki u mrežnoj strukturi koju se šokira. Ta je tvrdnja suprotnost pretpostavki da će se prijašnja elastičnost na pojedine šokove nastaviti primjenjivati na buduće šokove podjednake magnitude. To objašnjava zašto elastičnost financijskog sustava na velike šokove prije 2007. godine nije bila pouzdan vodič za buduću robusnost.

Intuicija na kojoj se temelje ovi rezultati je jasna. U visoko povezanom sustavu, gubitci institucije koja je u 'padu' mogu biti šire raspršeni i apsorbirani od strane drugih entiteta. Dakle, povećana razina povezanosti i podjele rizika može smanjiti vjerojatnost "zaraznog bankrota". Ali, uz uvjet da neuspjeh jedne institucije izazove zarazu bankrota, veliki broj financijskih veza također povećava mogućnost da zaraza bude raširenija. Posebno, velika povezanost povećava šanse da institucije koje su preživjele posljedice inicijalnog bankrota, nakon prvog kruga zaraze budu izložene prema više bankrotiranih strana, što ih čini ranjivima u drugom krugu. Slijedi da posljedice bilo koje krize koja se dogodi mogu biti vrlo rasprostranjene.

Model u ovom radu baziramo na teoriji kompleksnih mreža pozivajući se na literaturu Strogatz-a ([8]) i Newman-a ([5]). U njihovim radovima su opisana ponašanja skupine čvorova povezanih u mrežu te predviđanja veličine klastera (engl. *cluster*) ili grozda koji može biti podložan, u ovom slučaju, zarazi. Drugim riječima, broju ranjivih čvorova do kojih smo došli prijenosom šokova prateći veze u mreži. Taj se pristup oslanja na navođenje svih mogućih uzoraka budućih prijenosa. Callaway, Newman i Watts pokazuju da tehnika koja koristi funkcije izvodnice vjerojatnosti može identificirati broj prvih susjeda nasumično odabranog čvora, drugih susjeda itd. Konstruiraju se rekurzivne jednadžbe kako bi se uzeli u obzir svi ishodi te kako bi se zadržao ukupan broj čvorova koji su povezani sa originalnim čvorom (kojeg smo odabrali) - direktno i indirektno. Nakon toga možemo odrediti tranzicijske faze koje označavaju prag za veliko izbijanje zaraze.

U onome što slijedi, konstruiramo jednostavan financijski sustav koji uključuje entitete sa bilancama koje su međusobno povezane te koristimo gore navedene tehnike za analitičko i numeričko modeliranje vjerojatnosti i širenja zaraznog bankrota koji slijedi nakon neočekivanog šoka. Za razliku od običnog, neusmjerenog grafa kojeg u svom modelu koristi Watts, u ovom modelu se pruža eksplicitna karakterizacija bilance te je jasan smjer potraživanja i obveza povezanih financijskih institucija. Prikazuje se robusna-ali-krhka tendencija financijskog sustava i analizira se promjena rizika zaraze u odnosu na promjene kapitalnih zahtjeva, stupnja povezanosti i likvidnosti tržišta imovine propalih banaka.

U okviru rada, pretpostavlja se da se mreža međubankovnih veza formira nasumično i egzogeno: probleme povezane s endogenom formacijom mreže, optimalnom mrežnom strukturom i efikasnošću mreže stavljamo na stranu. Iako neke stvarne bankarske mreže mogu sličiti strukturama konstruiranim od jezge prema periferiji, ne čini se razumno ograničiti analizu zaraze na određenu mrežnu strukturu. Posebno, pretpostavka da je mrežna struktura potpuno proizvoljna daje prednost ovom modelu jer može obuhvatiti bilo koju strukturu koja se pojavljuje u stvarnom svijetu ili kao optimalan ishod neke igre.

Također, proces zaraze se modelira relativno mehanički, držeći bilance, veličinu i strukturu međubankovnih povezanosti konstantnim dok se bankrot širi sustavom. To možemo zanemariti jer su u sadašnjim vremenima, u razvijenim financijskim sustavima, banke dovoljno robusne da vrlo male varijacije u vjerojatnostima bankrota ne utječu na odluku hoće li im se posuđivati ili ne na međubankovnom tržištu. U međuvremenu, u krizi, zaraza se vrlo brzo širi sustavom što znači da banke uglavnom ne stignu promijeniti svoje ponašanje prije nego su zahvaćene - zbog toga je prigodno pretpostaviti da mreža ostaje statična. Također, banke nemaju izbora hoće li bankrotirati ili ne.

Ovaj pristup ima nekih sličnosti epidemiološkoj literaturi o zarazi bolesti u mreži, ali postoje dvije glavne razlike. Prvo, u epidemiološkom modelu, osjetljivost individue na zarazu od strane određenog susjeda ne ovisi o zdravlju njegovih ostalih susjeda. Suprotno, u ovom uređenju, vjerojatnije je da se zarazi neka institucija čiji je susjed već bankrotirao. Drugo, u većini epidemioloških modela, veća povezanost stvara više kanala kojima se zaraza može širiti, čime se povećava mogućnost zaraze. U ovim okolnostima, veća povezanost također pruža korist dijeljenja rizika jer su izloženosti diversificirane na većem skupu institucija.

Bitna stavka ovog modela je i jasno definirana bilanca banke koja će biti definirana u sljedećem poglavlju.

Struktura rada je kako slijedi: u prvom poglavlju ćemo opisati strukturu financijske mreže, postupak prijenosa zaraze i analitički rezultat koji karakterizira širenje bankrota. Nakon teoretskog prikaza modela, u Poglavlju 2, prikazat ćemo rezultate numeričke simulacije u svrhu proučavanja efekata sloma individualnih institucija i oblikovanja vjerojatnosti zaraze i njezinog širenja pod utjecajem različitih pretpostavki. Na kraju slijedi osvrt na stanje u Hrvatskoj, te zaključak.

Poglavlje 1

Model

1.1 Priprema za strukturu mreže

U skladu s objašnjenjem u uvodu, strukturu mreže ćemo prikazati pomoću usmjerenog težinskog grafa. U svrhu korištenja određenih pojmovima, u ovom potpoglavlju ćemo napraviti kratak uvod u grafove kojima ćemo se služiti te o njihovim svojstvima.

Slučajan graf

Slučajan graf je skup točaka (ili vrhova) i linija (ili bridova) koje povezuju parove tih točaka na slučajan način. Pretpostavlja se da je postojanje veze između dva vrha neovisno o postojanju bilo koje druge veze između bilo koja druga dva vrha, stoga je prisutnost svake veze/ruba predstavljena nezavisnom vjerojatnošću p. Ako u grafu imamo N vrhova i svaki je u prosjeku povezan sa z bridova, onda trivijalno slijedi da je $p = \frac{z}{N-1}$, što za velike N teži u $\frac{z}{N}$. Broj rubova koji su povezani sa nekim vrhom naziva se *stupanj vrha* i označava se slovom k. Vjerojatnosna distribucija stupnjeva vrhova se označava s p_k i određena je formulom

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \frac{z^k e^{-z}}{k!} \tag{1.1}$$

gdje druga jednakost vrijedi za velike N. Gornja distribucija se naziva Poissonova distribucija. Dakle, jednostavan slučajni graf ima Poissonovu distribuciju stupnjeva vrhova što je bitna stavka za daljnji razvoj rada (za numeričke simulacije modela). Iako se u numeričkim simulacijama pretpostavlja Poissonova distribucija, u teorijskom djelu se bavimo grafovima sa proizvoljnom distribucijom stupnjeva vrhova. Također, jednostavne grafove ćemo nadograditi do usmjerenih grafova s težinama. Osnovna razlika između usmjerenih i neusmjerenih grafova je u tome što je brid u usmjerenom grafu (engl. *directed graph* → Di-

Graph) uređeni par vrhova. Usmjereni grafovi se često nazivaju i digrafovi zbog skraćenog engleskog naziva.

Za brid $X = (A, B)$ kažemo da povezuje vrh A sa vrhom B, ali ne nužno i obrnuto. Kažemo da brid X počinje u vrhu A, a završava u vrhu B. U jednostavnom grafu postoji jedan stupanj vrha jer nije bilo potrebe paziti na ulazne i izlazne bridove, dok u usmjerenom grafu svaki vrh ima dva stupnja; *ulazni stupanj vrha* ili *in-stupanj* (engl. *in-degree*) i *izlazni stupanj vrha* ili *out-stupanj* (engl. *out-degree*). Ulazni stupanj vrha predstavlja broj bridova koji završavaju u tom vrhu (ulaze u vrh), a izlazni stupanj je broj bridova koji počinju u tom vrhu (tj. izlaze iz njega). Na dosad opisani graf svakom bridu dodajemo i određenu težinu kako bismo dobili usmjereni graf s težinama.

U usmjerenom grafu možemo promatrati i *čvrsto povezane komponente*, tj. najveće čvrsto povezane podgrafe tog grafa - ako se iz svakog čvora podrafa može doći u svaki drugi. Postoje dvije vrste komponenti koje razlikujemo; skup vrhova do kojih možemo doći iz određenog vrha (engl.*out-components*) i skup vrhova iz kojeg možemo doći do određenog vrha (egl. *in-components*). To će nam biti od značaja jer će nam pomoći u određivanju rasprostranjenosti zaraze.

Uz gornje pojmove, sada možemo definirati i funkcije izvodnice.

Funkcije izvodnice

Sljedeći alat koji koristimo pri analizi su funkcije izvdnice. Naziv funkcija izvodnica proizlazi iz činjenice da se iz poznavanja funkcije izvodnice nenegativne cjelobrojne slučajne varijable može deriviranjem izvesti vjerojatnosna distribucija te slučajne varijable.

Definicija 1.1.1. *Neka je X slučajna varijabla sa zakonom razdiobe*

$$P\{X = k\} = p_k,\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \tag{1.2}$$

(za takvu slučajnu varijablu često kažemo da je cjelobrojna).
Funkciju g definiranu sa

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,\ z \in \mathbb{R},\ |z| \leqslant 1; \tag{1.3}$$

zovemo funkcija izvodnica od X i često je označavamo sa g_X.

Drugim riječima, funkcija izvodnica je alternativna reprezentacija vjerojatnosne distribucije. (Definicija 1.1.1 je preuzeta iz [7].

Primjer 1.1.2. *Uzmimo u obzir vjerojatnosnu distribuciju iz definicije,* p_k*, i njezinu funkciju izvodnicu* $G_0(x)$*. Deriviranjem funkcije* G_0 *dobit ćemo prvotnu distribuciju* p_k*:*

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k G_0}{dx^k}\bigg|_{x=0} \tag{1.4}$$

Kažemo da funkcija G_0 "generira" vjerojatnosnu distribuciju p_k. ([5])

U usmjerenom grafu svaki vrh ima dva stupnja - ulazni i izlazni stupanj vrha. Iz tog razloga vjerojatnosna distribucija stupnjeva vrhova više nije p_k, nego definiram zajedničku vjerojatnosnu distribuciju stupnjeva vrhova p_{jk} da slučajno odabran vrh ima ulazni stupanj j i izlazni stupanj k. Bitno je naglasiti da općenito ne vrijedi slučaj da je zajednička distribucija p_{jk} jednaka produktu $p_j \cdot p_k$ zasebnih distribucija in- i out-stupnjeva.

Sada definiramo funkciju izvodnicu za zajedničku vjerojatnosnu distribuciju p_{jk}, koja je nužno funkcija dvije nezavisne varijable x i y:

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{jk} p_{jk} x^j y^k. \tag{1.5}$$

Svaki brid u usmjerenom grafu mora izaći iz jednog vrha i ući u drugi, stoga je prosječan broj bridova koji ulaze u vrh jednak nuli i p_{jk} mora zadovoljavati uvjet:

$$\sum_{jk} (j - k) p_{jk} = 0. \tag{1.6}$$

Iz toga dalje slijedi da $\mathcal{G}(x, y)$ mora zadovoljavati:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\bigg|_{x,y=1} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\bigg|_{x,y=1} = z, \tag{1.7}$$

gdje je z prosječan stupanj (i ulazni i izlazni) vrhova u grafu.

Koristeći funkciju $\mathcal{G}(x, y)$, možemo definirati funkcije izvodnice G_0 i G_1 za broj bridova koji izlaze iz nasumično odabranog vrha, i broj bridova koji izlaze iz vrha do kojeg smo stigli prateći nasumično odabran brid. Također, možemo definirati funkcije izvodnice F_0 i F_1 za broj bridova koji ulaze u iznad navedene vrhove. Funkcije su dane s

$$F_0(x) = \mathcal{G}(x, 1), \quad F_1(x) = \frac{1}{z} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\bigg|_{y=1}, \tag{1.8}$$

$$G_0(y) = \mathcal{G}(1, y), \quad G_1(y) = \frac{1}{z} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\bigg|_{x=1}. \tag{1.9}$$

U analizi će nam biti potreban još jedan rezultat, a to su potencije funkicija izvodnica s jednim argumentom.

Ako je distribucija svojstva k nekog objekta generirana funkcijom izvodnicom $G(x)$, tada je distribucija sume k-ova kroz m nezavisnih realizacija objekta generirana s m-tom potencijom dane funkcije izvodnice. Na primjer, ako gledamo m slučajnih vrhova unutar velikog grafa, onda je distribucija sume stupnjeva tih vrhova generirana sa $[G_0(x)]^m$. Pokazat ćemo na primjeru jednostavnog slučaja sa dva vrha:

Primjer 1.1.3. *Raspisujemo izraz za kvadrat funkcije izvodnice za jedan vrh:*

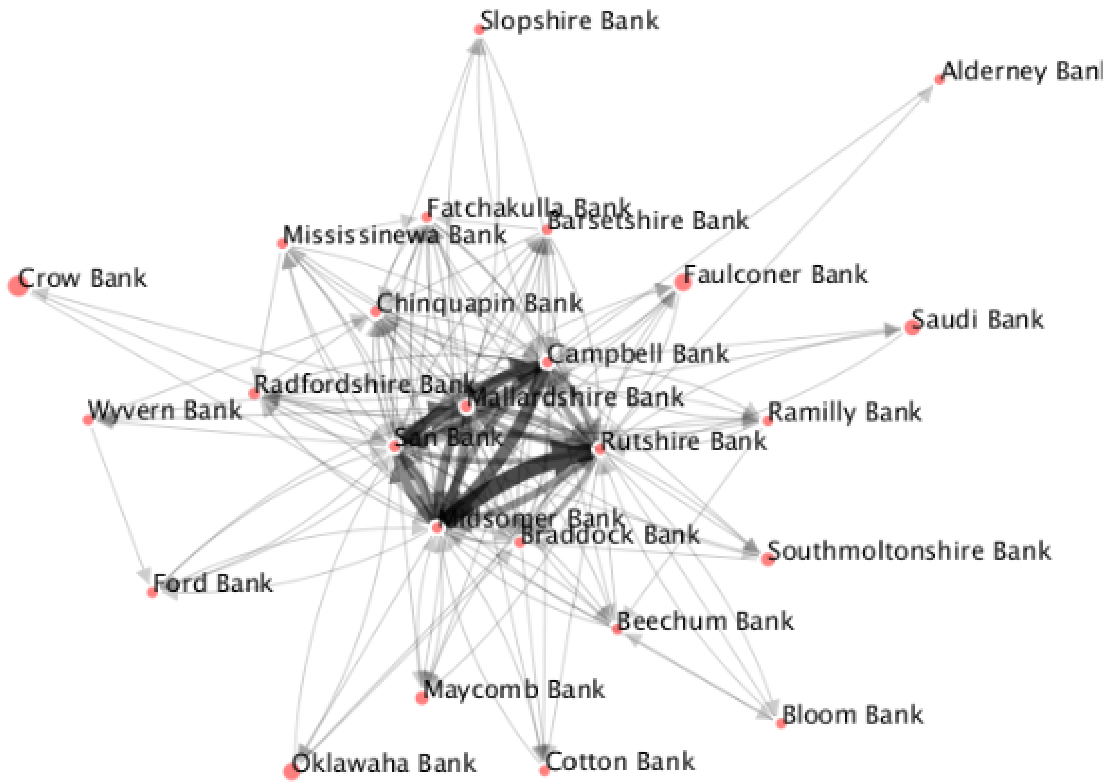
$$\begin{aligned}
[G_0(x)]^2 &= \Big[\sum_k p_k x^k \Big]^2 \\
&= \sum_{jk} p_j p_k x^{j+k} \\
&= p_0 p_0 x^0 + (p_0 p_1 + p_1 p_0) x^1 + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0) x^2 \\
&\quad + (p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0) x^3 + \ldots.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Sada je koeficijent uz potenciju x^n u gornjem izrazu točno suma svih produkata $p_j p_k$ takvih da je $j + k = n$, pa točno daje vjerojatnost da je suma stupnjeva dva vrha jednaka n.

Ovo svojstvo vrijedi i za više stupnjeve potencija.

1.2 Struktura mreže

Sada pretpostavljamo financijsku mrežu sa n financijskih posrednika - skraćeno ih nazivamo bankama, koji su nasumično povezani međusobnim potraživanjima. Ako to prevedem na jezik teorije grafova, svaka banka predstavlja čvor/vrh u grafu, a međusobne izloženosti su prikazane vezama između tih vrhova. Veze su usmjerene i svaka nosi neku težinu, reflektirajući činjenicu da su te izloženosti bitne za analizu zaraze. Na slici 1.1 je prikazan primjer usmjerene financijske mreže s težinama gdje su različite težine prikazane širinom veza.



Slika 1.1: Primjer mrežne strukture međubankovnog sustava. ([6])

Glavno svojstvo takvoga grafa je (vjerojatnosna) distribucija stupnjeva. Kao što je u prijašnjem pod-poglavlju objašnjeno, u usmjerenom grafu svaki čvor ima dva stupnja - ulazni i izlazni stupanj. U mreži koju prikazujemo će ti stupnjevi predstavljati obveze i potraživanja banaka. Pretpostavimo dva čvora i i j, te promatramo veze među njima.

Brid koji izlazi iz čvora i i ulazi u čvor j predstavlja međubankovnu imovinu čvora j, tj. izloženost čvora j ili potraživanja banke j prema banci i. U isto vrijeme, taj brid za banku i predstavlja njezine obeveze prema čvoru j. Dakle, izlazni bridovi iz nekog vrha (banke) predstavljaju obveze tog vrha (banke), dok ulazni bridovi u neki vrh predstavljaju međubankovnu imovinu tog vrha (banke).

U onome što slijedi, zajednička distribucija ulaznog i izlaznog stupnja upravlja potencijalom za zarazu šokova kroz mrežu. Zbog gore navedenih razloga, kao pretpostavku analize postavljamo da je zajednička distribucija, također i struktura veza u mreži, potpuno proizvoljna iako u numeričkoj simulaciji modela pretpostavljamo određenu distribuciju. Proizvoljnost distribucije sugerira da je mreža potpuno slučajna u svim pogledima osim u distribuciji stupnjeva. Posebno, nema statističke korelacije između čvorova i miješanje između čvorova je proporcionalno, tj. nema statističke tendencije da se čvorovi s visokim stupnjem povezanosti više povezuju sa ostalim čvorovima s takvim svojstvom i slično.

Pretpostavimo sada da se ukupna imovina svake banke sastoji od međubankovne imovine, A_i^{IB}, i vanjskih nelikvidnih sredstava poput hipotekarnih kredita A_i^M. Nadalje, pretpostavljamo da se ukupna pozicija međubankovne imovine svake banke jednako distribuira na sve ulazne veze te banke te da je nezavisna od broja veza koje ima (ako banka nema ulaznih veza vrijedi da je $A_i^{IB} = 0$). Iako su pretpostavke stilizirane, pružaju uvid u moguće koristi diversifikacije i dopuštaju da se naglasi razlika između podjele rizika i širenja rizika kroz financijsku mrežu. Posebno, dopuštaju da se pokaže da je veliko širenje zaraze moguće i kada je podjela rizika u sustavu maksimalna.

Kako je svaka međubankovna imovina obveza druge banke, međubankovne obveze L_i^{IB} su endogeno zadane. Suprotno od međubankovnih obveza, pretpostavljamo da su jedina komponenta bankovnih obveza koja je egzogeno zadana, depoziti klijenata D_i. Na slici 1.2 je prikazan sastav bilance banka koji koristimo u modelu.

Aktiva (Imovina)	Pasiva (Obveze)
A_i^{IB} - međubankovna imovina	L_i^{IB} - međubankovne obveze
A_i^{M} - vanjska, nelikvidna imovina	D_i - depoziti klijenata

Slika 1.2: Bilanca banke u našem modelu.

Pomoću navedenih oznaka za obveze i imovinu banke, možemo napisati uvjet koji je nužan za solventnost banke:

$$(1-\phi)A_i^{IB} + qA_i^M - L_i^{IB} - D_i > 0, \tag{1.11}$$

gdje je ϕ dio banaka koje imaju obvezu prema banci i ali su bankrotirale, a q je prodajna (tržišna) cijena nelikvidne imovine. Vrijednost q može biti manja od 1 u slučaju prodaje imovine od strane banke u bankrotu, ali je jednaka 1 ako nema žurne prodaje. Također, pretpostavljamo da ako neka banka bankrotira, da nema oporavka, tj. kada bankrotira banka koja ima obveze prema nekoj drugoj banci j, ta banka j gubi međubankovnu imovinu koju je imala u bankrotiranoj banci. Imajući to u vidu, uvjet solventnosti možemo zapisati i na ovaj način:

$$\phi < \frac{K_i - (1-q)A_i^M}{A_i^{IB}}, \quad za \quad A_i^{IB} \neq 0, \tag{1.12}$$

gdje je $K_i = A_i^{IB} + A_i^M - L_i^{IB} - D_i$ kapitlana rezerva banke, tj. razlika između knjigovodstvene vrijednosti imovine i obveza.

Za modeliranje dinamike zaraze, pretpostavljamo da su sve banke u mreži inicijalno solventne i da je mreža uznemirena u trenutku $t = 1$ početnim bankrotom neke (jedne) banke. Iako su idiosinkratski šokovi rijetki, primjeri iz prošlosti govore da je uslijed njih moguć pad financijskih institucija. Alterntivno, pad neke banke može biti rezultat grupnog šoka koji ima izrazito štetne posljedice za neku instituciju: u modelu to može biti prikazano općom erozijom zaliha nelikvidne imovine ili, ekvivalentno, kapitalnim zalihama svih banaka, kombinirano s velikim gubitkom određene institucije.

Neka je j_i broj veza koje ulaze u banku i, tj. ulazni stupanj. Kada jedna banka bankrotira u smislu koje gsmo gore naveli, bez oporavka, svaka banka povezana s njom gubi $\frac{1}{j_i}$ međubankovne imovine. Iz jednadžbe (1.12) slijedi da je jedini način da se bankrot, tj. zaraza, dalje širi ako susjedna banka zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\frac{K_i - (1-q)A_i^M}{A_i^{IB}} < \frac{1}{j_i}. \tag{1.13}$$

Banke koje su izložene bankrotu jednog susjeda u smislu gornje nejednakosti nazivamo *ranjivim*, a ostale označavamo *sigurnim*. Ranjivost banke očito ovisi o njezinom ulaznom stupnju, tj. broju ulaznih veza. Posebno, uzimajući u obzir da je kapitalna rezerva slučajna varijabla, banka j je ranjiva sa vjerojatnošću

$$v_j = P\left[\frac{K_i - (1-q)A_i^M}{A_i^{IB}} < \frac{1}{j_i}\right], \forall j \geq 1. \tag{1.14}$$

Nadalje, vjerojatnost da banka ima ulazni stupanj j, izlazni stupanj k i da je ranjiva je $v_j p_{jk}$, gdje je p_{jk} zajednička distribucija ulaznih i izlaznih stupnjeva.

Struktura modela definirana na ovaj način može proučavati nekoliko interesnih točaka analize sistemskog rizika. Prvo, prirodu i veličinu štetnog agregatnog ili makroekonomskog događaja možemo interpretirati kao negativan šok na zalihe nelikvidne imovine A_i^M, ili ekvivalentno, na kapitalne rezerve K_i. Drugo, idiosinkratski šokovi mogu biti modelirani uz pretpostavku egzogenog bankrota banke. Treće, strukturne karakteristike financijskog sustava su opisane distribucijom međubankovnih veza p_{jk}. I zadnje, efekti likvidnosti povezani sa cijenom imovine te uz to i potencijalnim efektima bankrota, prikazani su pomoću varirajuće vrijednosti q. Na početku fiksiramo $q = 1$, a kasnije se vraćamo na to kako bi ga endogenizirali.

1.3 Funkcije izvodnice i prijenos šokova

U dovoljno velikim mrežama, da bi se zaraza proširila dalje od prvih susjeda inicijalno zaraženog čvora, ti susjedi sami moraju imati izlazne veze, tj. obveze prema drugim ranjivim bankama. Zbog toga se definira vjerojatnosna funkcija izvodnica za zajedničku distribuciju stupnjeva ranjivih banaka:

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{j,k} v_j p_{jk} x^j y^k. \tag{1.15}$$

Funkcija izvodnica sadrži sve informacije kao i vjerojatnosna distribucija stupnjeva p_{jk} i distribucija ranjivosti v_j, ali u obliku koji omogućava rad sa sumama nezavisnih slučajeva iz različitih vjerojatnosnih distribucija. Posebno, za potrebe analize, generira sve momente distribucije stupnjeva samo onih banaka koje su ranjive.

Kako je svaka imovina neke banke ujedno i obveza druge banke, tako je svaka izlazna veza jednog čvora ujedno i ulazna veza u drugi čvor. To znači da je prosječan ulazni stupanj mreže jednak prosječnom izlaznom stupnju. Tj. vrijedi slijedeće

$$\frac{1}{n}\sum_i j_i = \sum_{j,k} j p_{jk} = \frac{1}{n}\sum_i k_i = \sum_{j,k} k p_{jk}. \tag{1.16}$$

Iz toga slijedi da je *prosječan stupanj* z jednak

$$z = \sum_{j,k} j p_{jk} = \sum_{j,k} k p_{jk}. \tag{1.17}$$

Iz $\mathcal{G}(x, y)$ se može definirati funkcija izvodnica s jednim argumentom koja će generirati broj veza koje izlaze iz nasumično odabrane ranjive banke. Tu funkciju izvodnicu ćemo označiti sa $G_0(y)$ i jednaka je

$$G_0(y) = \mathcal{G}(1, y) = \sum_{j,k} v_j p_{jk} y^k. \tag{1.18}$$

Iz ovoga slijedi da $G_0(1)$ generira udio ranjivih banaka u sustavu formulom

$$\mathcal{G}(1, 1) = G_0(1) = \sum_{j,k} v_j p_{jk}. \tag{1.19}$$

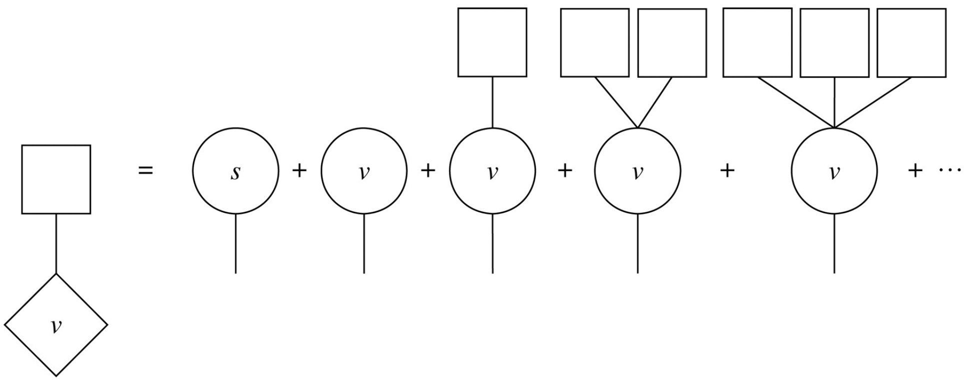
Možemo definirati i drugu funkciju izvodnicu jednog argumenta, $G_1(y)$ koja će generirati broj veza koje izlaze iz banke do koje smo došli slijedeći nasumično odabranu ulaznu vezu. Kako nas zanima širenje šoka sa jedne banke na drugu, zahtijevamo distribuciju stupnjeva $v_j r_{jk}$ ranjive banke koja je slučajan susjed inicijalno odabrane banke.

Važno je naglasiti da distribucija r_{jk} nije isto što i distribucija p_{jk}, tj. nije isto što i distribucija stupnjeva ranjive banke cijele mreže. Razlog tome je što banka sa većim ulaznim stupnjem ima veći broj veza koje su usmjerene prema njoj, što znači da postoji veća šansa da će bilo koja odabrana izlazna veza završiti u toj banci, u jednakom omjeru svome ulaznom stupnju. Dakle, što je veći ulazni stupanj banke, više je vjerojatno da je ona susjed inicijalno odabrane banke, sa vjerojatnošću da ju odaberemo proporcionalno jednakom jp_{jk}.

Funkcija izvodnica za broj veza koje izlaze iz ranjivog susjeda nasumično odabrane ranjive banke je dana sa

$$G_1(y) = \sum_{j,k} v_j r_{jk} y^k = \frac{\sum_{j,k} v_j j p_{jk} y^k}{\sum_{j,k} j p_{jk}}. \tag{1.20}$$

Sada pretpostavljam da slijedimo nasumično odabranu izlaznu vezu iz ranjive banke do njezinog kraja i onda do svake druge ranjive banke dostižne sa tog mjesta. Tu skupinu banaka nazivamo (izlaznim) ranjivim klasterom na kraju nasumično odabrane izlazne veze iz ranjive banke. Taj klaster zahvaća veze između ranjivih banaka pa veličina i distribucija tog ranjivog klastera karakterizira način širenja bankrota, unutar financijske mreže, nakon inicijalnog bankrota.



Slika 1.3: Prijenos zaraze opisan formulom (1.21).

Kao što se vidi na slici 1.3, svaki ranjivi klaster (prikazan kvadratom) može poprimiti različite oblike. Slijedeći nasumično odabranu izlaznu vezu možemo doći do jedne banke koja nema izlaznih veza te ona može biti sigurna ili ranjiva. Ili možemo doći do ranjive banke koja ima jednu ili više izlaznih veza kojima dolazimo da daljnjih klastera. U ovom trenutku pretpostavljamo da veze koje proizlaze iz bankrotiranog čvora imaju oblik stabla i ne sadrže cikluse i petlje. Ovu pretpostavku postavljamo samo iz razloga da možemo doći do egzaktnog rješenja u teorijskom djelu, dok u simulaciji tu pretpostavku zanemarujemo.

Do sada smo definirali funkcije izvodnice koje su generirale vjerojatnosne distribucije s obzirom na nasumično odabrani čvor, tj. banku, a sada ćemo napraviti analogno za vjerojatnosne distribucije s obzirom na nasumično odabranu izlaznu vezu iz ranjive banke. Neka je $H_1(y)$ funkcija izvodnica za vjerojatnost da smo, prateći nasumično odabranu izlaznu vezu iz ranjive banke, došli do ranjivog klastera određene veličine (u smislu broja ranjivih banaka). Iz slike 1.3 se može vidjeti da je ukupna vjerojatnost svih mogućih oblika jednaka zbroju vjerojatnosti svakog od njih, tj. zbroj vjerojatnosti da smo došli do sigurne banke, do ranjive banke, do ranjive banke povezane s jednim klasterom, dva klastera itd. Klasteri do kojih se može doći su međusobno nezavisni pa slijedi da funkcija izvodnica $H_1(y)$ zadovoljava jednadžbu

$$H_1(y) = P[dolazak\ do\ sigurne\ banke] + y \sum_{j,k} v_j r_{jk} [H_1(y)]^k. \tag{1.21}$$

U ovom uvjetu se koristi činjenica da ako funkcija izvodnica generira vjerojatnosnu distribuciju nekog svojstva objekta, onda je suma svojstava m nezavisnih takvih objekata distribuirana u skladu s m-tom potencijom te funkcije izvodnice. Ovo svojstvo je objašnjeno na strani 7. Nadalje, gornja se jednadžba može zapisati na drugi način koristeći jednadžbu (1.20) jer $G_1(1)$ predstavlja vjerojatnost da je slučajan susjed ranjive banke također ranjiv. Sada se dobiva:

$$H_1(y) = 1 - G_1(1) + yG_1(H_1(y)). \tag{1.22}$$

Preostaje odrediti distribuciju veličine izlaznog ranjivog klastera kojem pripada slučajno odabrana banka. Mogu se dogoditi dva slučaja. Prvo, da je slučajno odabrana banka sigurna ili drugo, da ima ulazni stupanj j, izlazni stupanj k i da je ranjiva s vjerojatnošću $v_j p_{jk}$. U drugom slučaju svaka izlazna veza vodi do ranjivog klastera čija se veličina može odrediti iz distribucije generirane s $H_1(y)$. Dakle, veličina ranjivog klastera kojem pripada slučajno odabrana banka je generirana s

$$H_0(y) = P[banka\ je\ sigurna] + y \sum_{j,k} v_j p_{jk} [H_1(y)]^k = 1 - G_0(1) + yG_0(H_1(y)). \tag{1.23}$$

Druga jednakost slijedi uvrštavanjem jednakosti (1.22). Sada se može izračunati potpuna distribucija veličine ranjivih klastera rješavajući jednadžbu (1.16) po $H_1(y)$ i uvrštavajući rezultat u jednadžbu (1.23).

1.4 Faza prijelaza

Zbog nemogućnosti dobivanja jasnog izraza za distribuciju veličine klastera u mreži, ponovo koristimo funkcije izvodnice te uvjete do kojih smo došli u prethodnoj sekciji. Iz formule (1.22) slijedi da je prosječna veličina klastera, $\mathcal{S}$, dana sa

$$\mathcal{S} = H_0'(1). \tag{1.24}$$

$H_1(y)$ je standardna funckija izvodnica stoga vrijedi da je $H_1(1) = 1$. Deriviranjem jednadžbe (1.23) i uvrštavanjem ove činjenice slijedi

$$H_0'(1) = G_0[H_1(1)] + G_0'[H_1(1)]H_1'(1) = G_0(1) + G_0'(1)H_1'(1). \tag{1.25}$$

Dalje, iz jednadžbe (1.22) je

$$H_1'(y) = \frac{G_1(1)}{1 - G_1'(1)}. \tag{1.26}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (1.26) u (1.25) slijedi da je $\mathcal{S}$ jednak

$$\mathcal{S} = G_0(1) + \frac{G_0'(1)G_1(1)}{1 - G_1'(1)}. \tag{1.27}$$

Iz jednadžbe (1.27) je očito da su točke, koje označavaju prijelaznu fazu u kojoj prosječna veličina ranjivog klastera počinje odstupati, dane uvjetom

$$G_1'(1) = 1. \tag{1.28}$$

Deriviranjem jednadžbe (1.20) i korištenjem formule (1.17), dobiva se uvjet ekvivalentan gornjem, tj.

$$\sum_{j,k} jkv_j p_{jk} = z. \tag{1.29}$$

Izraz $G_1'(1)$ označava prosječan izlazni stupanj ranjivog prvog susjeda, uzimajući u obzir samo one veze koje završavaju u drugoj ranjivoj banci. Ako je taj izraz manji od 1, svi ranjivi klasteri su mali i zaraza brzo nestaje jer se smanjuje broj ranjivih banaka do kojih smo došli. Ali, ako je izraz $G_1'(1)$ veći od jedan, postoji veliki ranjivi klaster čija je veličina linearna s veličinom cijele mreže i zauzima konačan dio mreže. U tom slučaju je moguća zaraza cijelog sustava. Slučajan inicijalni bankrot jedne banke može dovesti do širenja bankrota kroz cijeli ranjivi dio financijske mreže.

Porastom prosječnog stupnja z, rastu ulazni i izlazni stupnjevi vrhova, pa p_{jk} ima veće vrijednosti za j i k. To dalje povećava lijevu stranu jednadžbe (1.29) kroz izraz $j \cdot k$, ali u isto vrijeme i smanjuje kroz izraz v_j jer se v_j smanjuje za veće j (prema jednadžbi (1.14)).

Dakle, jednadžbe (1.28) i (1.29) će ili imati dva rješenja ili niti jedno. U prvom slučaju će postojati dvije faze prijelaza i neprekidan ”prozor” srednjih vrijednosti z (gdje ”prozor” označava interval) za koje je zaraza moguća. Za vrijednosti z koje su izvan intervala i ispod donje prijelazne faze, izraz $\sum_{j,k} jkp_{jk}$ je premali i mreža je nedovoljno povezana da bi se zaraza proširila. Najjednostavniji primjer je mreža u kojoj nema veza između banaka. Za vrijdnosti z koje su izvan intervala i iznad gornje prijelazne faze, izraz v_j je premali i zaraza se ne može raširiti jer ima previše sigurnih banaka.

1.5 Vjerojatnost i širenje zaraze

Iz perspektive stabilnosti sustava, primarno nas zanima zaraza unutar velikog ranjivog klastera. To proizlazi iz srednjih vrijednosti z kada je inicijalno bankrotirana banka ili unutar velikog ranjivog klastera ili je direktno vezana za njega. Vjerojatnost zaraze je onda direktno povezana sa veličinom ranjivog klastera unutar "prozora" (jer smo ranije zaključili da se zaraza širi samo za srednje vrijednosti z koje su unutar određenog intervala, tj. "prozora"). Intuitivno, u blizini donje i gornje prijelazne faze vjerojatnost zaraze mora biti približno nula jer je veličina ranjivog klastera ili ograničena nedovoljnom povezanošću ili prisutnošću velikog udjela sigurnih banaka. Slijedi da je vjerojatnost zaraze nemonotona u z: inicijalno, posljedice širenja rizika koje proizlaze iz više povezanog sustava će povećati veličinu ranjivog klastera i vjerojatnost zaraze, dok će nakon nekog vremena dominirati efekti dijeljenja rizika koji smanjuju broj ranjivih banaka pa će vjerojatnost zaraze pasti.

Na početku, uvjetno širenje zaraze mora odgovarati veličini velikog ranjivog klastera. Kada se zaraza proširi kroz cijeli ranjivi klaster, ruši se pretpostavka da su banke povezane sa najviše jednom propalom bankom. Dakle, sigurne banke mogu također biti podložne bankrotu i zaraza se može raširiti i preko ranjivog klastera te utjecati na cijelu povezanu komponentu mreže. Blizu donje prijelazne faze, z je dovoljno mali da skoro sve banke mogu biti ranjive. Zbog toga, u tom dijelu veličina velikog ranjivog klastera odgovara veličini povezane mrežne komponente što znači da je dio mreže na koji utječe zaraza sličan, tj. približno jednak, vjerojatnosti da izbije zaraza. Ali te vrijednosti divergiraju kako se z povećava. Tako će, blizu gornje prijelazne faze, sustav pokazati robusnu-ali-krhku tendenciju, sa naletima zaraze koji se rijetko događaju, ali se jako prošire kada se dogode.

Iz jednadžbe (1.29) slijedi da je veličina prozora u kojem je zaraza moguća veća ako je, za dani j, vjerojatnost da je banka zarazna, v_j, veća. Veći nivoi ranjivosti također povećavaju veličinu ranjivog klastera i vjerojatnost zaraze unutar intervala srednjih vrijednosti z. Dakle, iz jednadžbe (1.14) je jasno da će štetan šok koji troši kapitalne rezerve ujedno povećati vjerojatnost zaraze i povećati interval vrijednosti z za koje je moguće da izbije zaraza.

Na početku modela smo pretpostavili da je ukupna međubankovna imovina svake banke jednako distribuirana na sve ulazne veze i nezavisna od broja tih veza. Ako pretpostavimo nejednaku distribuciju međubankovne imovine na ulazne veze, ne bi bilo promjene rezultata koje smo dobili. Posebno, v_j bi i dalje padao u z, održavajući vjerojatnost dva rješenja jednadžbe (1.29). Ali, zbog nejednake distribucije izloženosti, za veće vrijednosti z bi banke postale ranjive na bankrot određenih susjeda s kojima imaju povezane bilance što ne bi bio slučaj kod ravnomjerne distribucije. Rezultat bi bio širi prozor zaraze.

Poglavlje 2

Simulacija modela

2.1 Metodologija

Nakon teorijske razrade modela slijedi numerička simulacija kako bi se prikazali rezultati. Pretpostavke numeričkog modela se razlikuju od teorije u pogledu distribucije stupnjeva - u simulaciji se pretpostavlja Poissonova distribucija stupnjeva, tj. Poissonov slučajan graf u kojem je svaka usmjerena veza prisutna u grafu s vjerojatnošću p. Na taj način se generira mreža koja ne isključuje mogućnosti pojave ciklusa. Iako bi bilo korisno napraviti simulaciju u kojoj je moguće imati drugačiju distribuciju stupnjeva, Poissonov graf se koristi zbog glavne namjere da se potvrde teorijski rezultati.

U modelu je dopušteno da banke međusobno mogu biti povezane u oba smjera, tj. u isto vrijeme imati obveze i potraživanja jedna od druge. Prosječan stupanj z varira u svakoj simulaciji, dok su kapitalna rezerva i imovina u bilanci jednake. Da to nije slučaj, tj. da se u model uvrsti heterogenost financijskih posrednika, prozor u kojem dolazi do zaraze bi bio širiji. Referentnom se smatra mreža sa 1000 banaka. Jasno je da broj financijskih posrednika u sustavu ovisi o samoj definiciji sustava. Iz razloga što nekoliko zemalja ima mrežu banaka te veličine, te ako uzimamo u obzir globalni financijski sustav investicijskih banaka ili hedge fondova, 1000 se čini kao razuman broj.

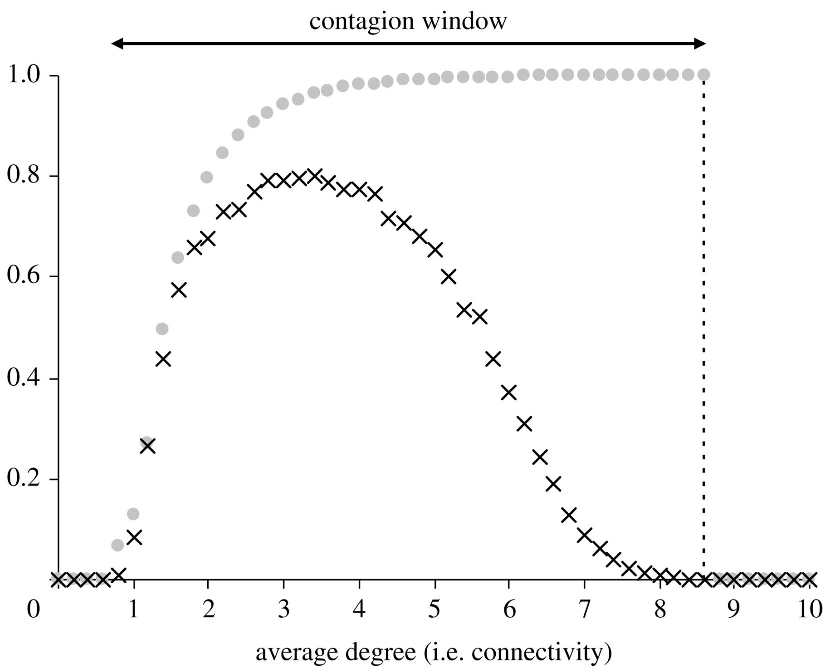
Početna imovina svake banke se sastoji od 80% ne-bankovne imovine i 20% međubankovne imovine (što je konzistentno sa udjelom međubankovne imovine kod banaka u razvijenim zemljama u 2007. godini). Kapitalne rezerve iznose 4% ukupne imovine. Zbog ravnomjerne distribucije međubankovne imovine na ulazne veze svake banke, međubankovne obveze su endogeno zadane unutar mrežne strukture. Razlika koju treba nadomjestiti kako bi se imovina i obveze izjednačile, čine depoziti klijenata.

Kako bi se dobili rezultati, za svaku vrijednost z se izvodi 1000 realizacija mreže. U svakoj realizaciji se šokira jedna banka slučajnim odabirom, na način da joj se izbriše ne-bankovna imovina. Taj tip idiosinkratskog šoka se može interpretirati kao šok koji je uslijedio zbog prevare u realnom svijetu. Banka koju se šokiralo bankrotira za sve međubankovne obveze. Kao rezultat, susjedne banke mogu također bankrotirati ako im kapitalne rezerve nisu dovoljno visoke da pokriju gubitke na strani međubankovne imovine. Pretpostavlja se da će svaka takva banka također bankrotirati za sve međubankovne obveze pa se taj proces nastavlja dok nema novih banaka koje se može dogurati do bankrota.

Kako je cilj odretiti vjerojatnost i raširenost zaraze ako do nje dođe, iz analize se isključuju mala izbijanja bankrota izvan velikog ranjivog klastera. Dakle, u izračun se uzimaju u obzir samo epizode zaraze u kojima je bankrotiralo više od 5% sustava.

2.2 Rezultati

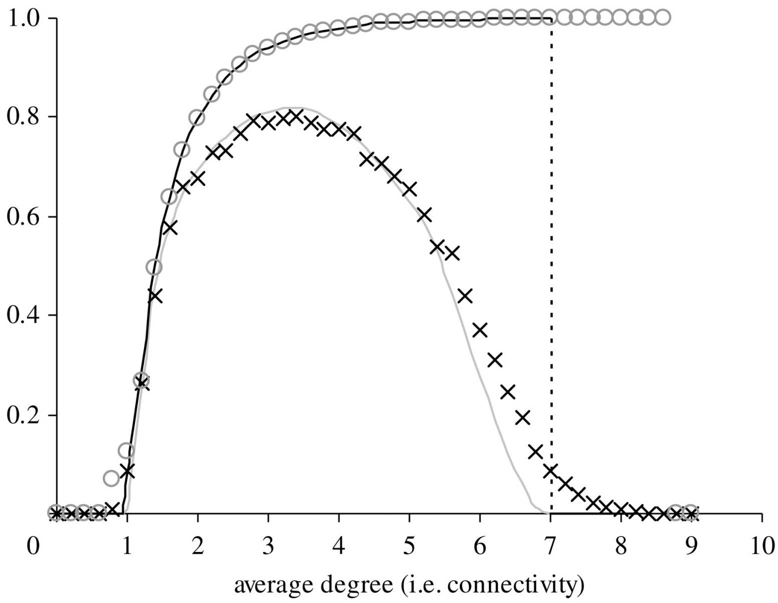
Rezultate simulacije prikazujemo grafovima preuzetima iz [3]. Na apscisi sadrže prosječan stupanj z, tj. prosječan broj veza koje neka banka ima, a na ordinati se nalaze učestalost i opseg zaraze, tj. koliko je vjerojatno da će izbiti zaraza te, ukoliko se dogodi, koliki će dio sustava bankrotirati.



Slika 2.1: Referentni slučaj. Sivi kružići predstavljaju opseg zaraze, križići predstavljaju učestalost zaraze.

Na slici 2.1 je prikazan referentni slučaj s kojim ćemo uspoređivati ostale rezultate. Potvrđuje se intuicija iz Poglavlja 1, zaraza se događa samo unutar određenog prozora za vrijednosti z. Unutar tog intervala, vjerojatnost zaraze je nemonotona u povezanosti, te dostiže vrhunac kada je z između 3 i 4 sa vjerojatnošću približno 0.8. Kao što je prije navedeno, u blizini donje prijelazne faze je rasprostranjenost zaraze, tj. udio bankrotiranih banaka, približno jednak vjerojatnosti izbijanja zaraze. U tom djelu zaraza izbije kada se šokira bilo koja banka unutar velikog ranjivog klastera ili povezana s njime, što ugrubo odgovara cijeloj povezanoj komponenti mreže.

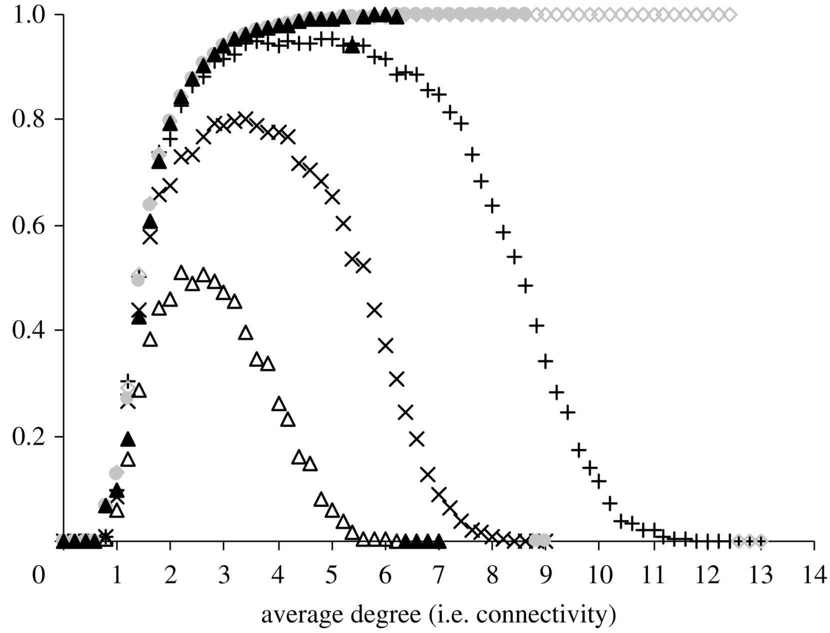
Za veće vrijednosti z, veliki dio banaka u mreži bankrotira kada izbije zaraza. Od posebnog interesa su nam točke blizu gornje prijelazne faze. Kada je $z > 8$ zaraza se ne događa često, rijeđe od 0.5%, ali u svakom slučaju u kojem zaraza izbije, svaka banka u mreži bankrotira. Ovo ističe činjenicu da *a priori* neprimjetni šokovi mogu imati vrlo različite posljedice.



Slika 2.2: Usporedba simulacije sa 1000 banaka (referentni slučaj) i 10000 banaka (granični slučaj jer se teži u ∞). Prazni kružići predstavljaju opseg zaraze za 1000 banaka, križići predstavljaju učestalost zaraze za 1000 banaka. Siva linija predstavlja učestalost zaraze za 10000 banaka, crna linija prikazuje raširenost zaraze za 10000 banaka.

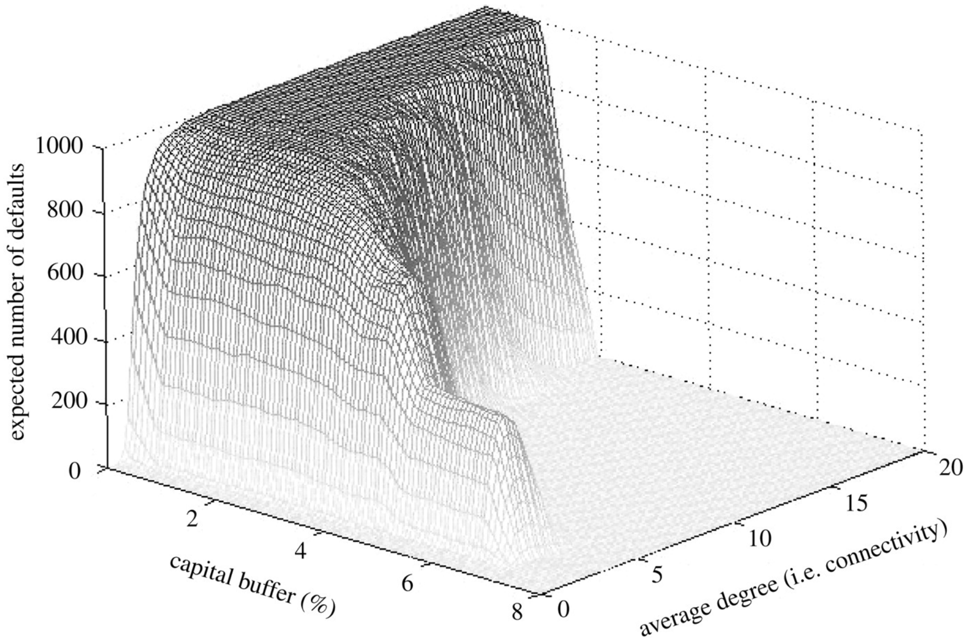
Slijedeći graf, slika 2.2, prikazuje usporedbu referentnog slučaja i graničnog slučaja. Granični slučaj je realizacija simulacije sa 10000 banaka jer težimo ka tome da broj banaka $n \to \infty$. Zaključujemo da manji broj banaka u referentnom slučaju ne odstupa od graničnog slučaja. Rezultati ostaju jednaki, osim što se prozor u kojem dolazi do zaraze blago proširio.

Sada uzimamo u obzir promjenu kapitalnih rezervi banke, slika 2.3.



Slika 2.3: Usporedba različitih kapitalnih zahtjeva, tj. rezervi. Plus - učestalost zaraze za 3%-tnu kapitalnu rezervu, romb - raširenost zaraze u tom slučaju. Križići - učestalost zaraze za 4%-tnu kapitalnu rezervu, puni krug - rasprostranjenost zaraze u tom slučaju. Prazni trokut - učestalost zaraze za 5%-tnu kapitalnu rezervu, puni trokut - raširenost zaraze pod tim uvjetom.

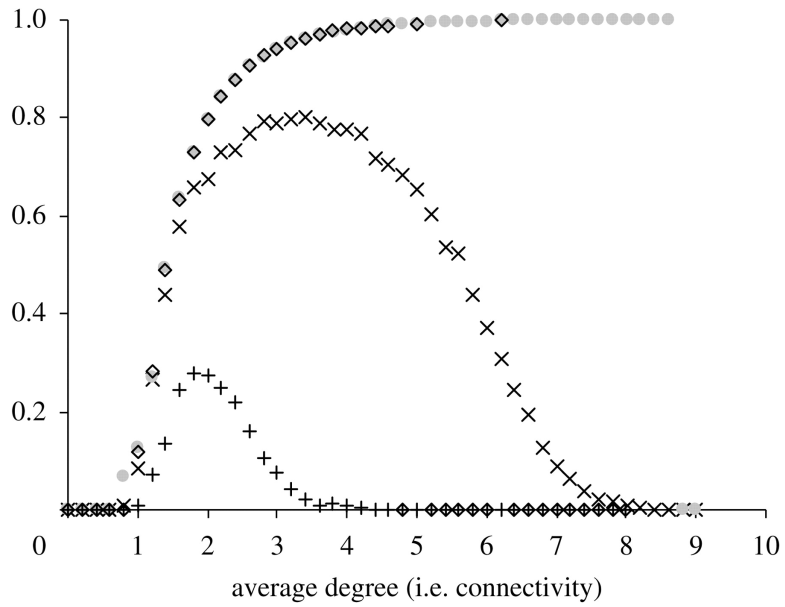
Kao što je i očekivano, trošenje kapitalne rezerve proširuje prozor zaraze i povećava vjerojatnost zaraze za fiksne vrijednosti z. Za male vrijednosti z, raširenost zaraze je malo veća kada su kapitalne rezerve manje, ali će sigurno doći do nje za dovoljno velike z. Kada se kapitalni zahtjev poveća na 5%, vjerojatnost širenja zaraze na cijeli sustav je puno manja jer je vrhunac vjerojatnosti izbijanja zaraze za z između 3 i 4, dok će cijeli sustav biti zaražen tek za veće vrijednosti z. Ovo je dobra ilustracija kako povećana povezanost istodobno smanjuje vjerojatnost zaraze, ali povećava njezinu raširenost ako se dogodi.



Slika 2.4: Povezanost mreže, kapitalne rezerve i očekivani broj bankrota.

Trodimenzionalni graf, slika 2.4, prikazuje kako promjene u prosječnom stupnju i kapitalnim rezervama zajedno utječu na očekivani broj bankrotiranih banaka u sustavu. Ovaj dijagram ne razdvaja vjerojatnost zaraze i potencijalnu rasprostranjenost, no svejedno možemo zaključiti da rijetki ali jaki šokovi nastaju u ravnom području grafa jer je očekivani broj bankrota u tom području nizak. Iz ovog prikaza se također vidi važnost kapitalne rezerve - kada je smanjena na kritičnu razinu, rizik zaraze se povećava ekstremnom brzinom.

Sljedeća promjena se odnosi na pretpostavku o nemogućnosti "ozdravljenja" bankrotirane banke, prikazana slikom 2.5. Ukoliko pretpostavimo da, kada banka primi udar, da je njezin bankrot na međubankovnom tržištu jednak nedostatku imovine plus pola preostale međubankovne obveze, smanjuje se vjerojatnost zaraze jer je manje ranjivih banaka kada stopa "ozdravljenja" može biti pozitivna, tj. nije striktno jednaka nula. Ali, također se vidi da uvođenje ove pretpostavke fundamentalno ne utječe na rezultat.



Slika 2.5: Uvođenje mogućnosti ozdravljenja u model. Križić - učestalost zaraze u referentnom slučaju, puni krug - raširenost zaraze u tom slučaju. Plus - učestalost zaraze kada je stopa ozdravljenja pozitivna, romb - raširenost zaraze u tom slučaju.

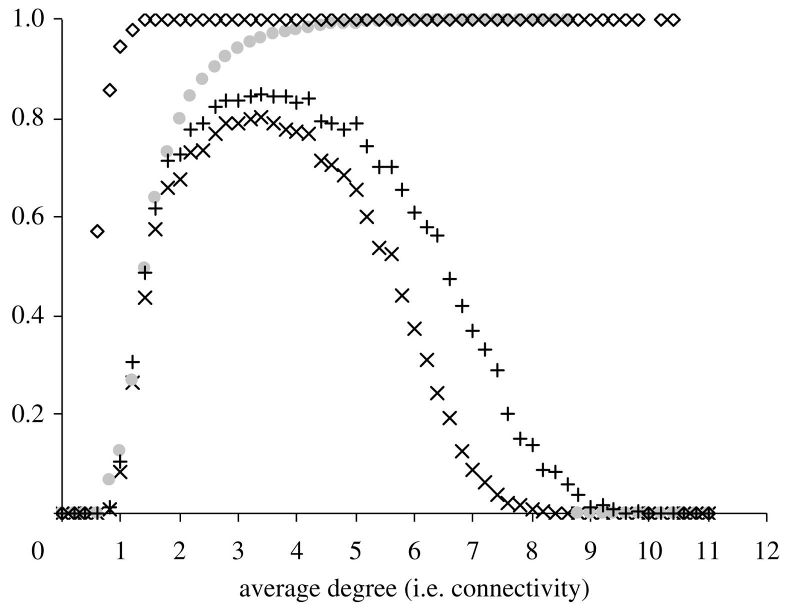
Zadnja pretpostavka koju mijenjamo je rizik likvidnosti. Kada je banka zahvaćena zarazom, financijska tržišta imaju ograničen kapacitet za apsorpciju prodane nelikvidne vanjske imovine. Kao rezultat, cijena imovine može biti znatno snižena. Pretpostavimo da je cijena nelikvidne imovine q dana s

$$q = e^{-\alpha x}, \tag{2.1}$$

gje je $x > 0$ dio nelikvidne imovine sustava koji je prodan na tržištu (ako se imovina ne prodaje na tržištu $q = 1$). Koeficijent α je namješten tako da cijena imovine pada za 10% kada je desetina imovine sustava prodana.

Gornja jednadžba se integrira u numeričku simulaciju. Kada banka bankrotira, sva se njezina ne-bankovna imovina prodaje na tržištu, smanjujući cijenu imovine sukladno s jednadžbom (2.1). Kada cijena imovine padne, ne-bankovna imovina ostalih banaka također odražava cijenu tržišta pa ima manju vrijednost. Iz jednadžbe (1.14) je jasno da će to smanjiti kapitalne rezerve banke i postoji mogućnost da neke od njih postanu ranjive, dok će neke gurnuti u bankrot.

Uzimanje u obzir rizika likvidnosti dovodi u model novi izvor zaraze sa strane imovine u bilanci. Ali, ovaj rizik se materijalizira tek nakon bankrota. U realnosti je moguće da



Slika 2.6: Efekt rizika likvidnosti. Križić - učestalost zaraze u referentnom slučaju, puni krug - raširenost zaraze u tom slučaju. Plus - učestalost zaraze uz efekt likvidnosti, romb - raširenost zaraze u tom slučaju.

cijene imovine padnu i prije bankrota neke banke, što znači da ovim modelom nećemo vidjeti pravi utjecaj rizika likvidnosti, nego samo onaj koji se javlja nakon bankrota banke.

Na zadnjem grafu, slika 2.6, je prikazan efekt rizika likvidnosti u modelu. Efekti likvidnosti povećavaju rasprostranjenost zaraze kada nastane, te proširuje prozor u kojem dolazi do zaraze.

Dakle, efekt likvidnosti nema veliki utjecaj na rezultate modela, ali ne smijemo zaključiti da su ti efekti nevažni. Kao što smo iznad spomenuli, u obzir nije uzet potpun utjecaj likvidnosti, a već jedan dio ima utjecaj na veliku raširenost zaraze u referentnom slučaju. Ako se uključi i mogućnost da se rizik likvidnosti materijalizira i prije bankrota, posljedica može biti trošenje kapitalne rezerve što povećava vjerojatnost za inicijalni bankrot.

Poglavlje 3

Bankovna zaraza u Hrvatskoj

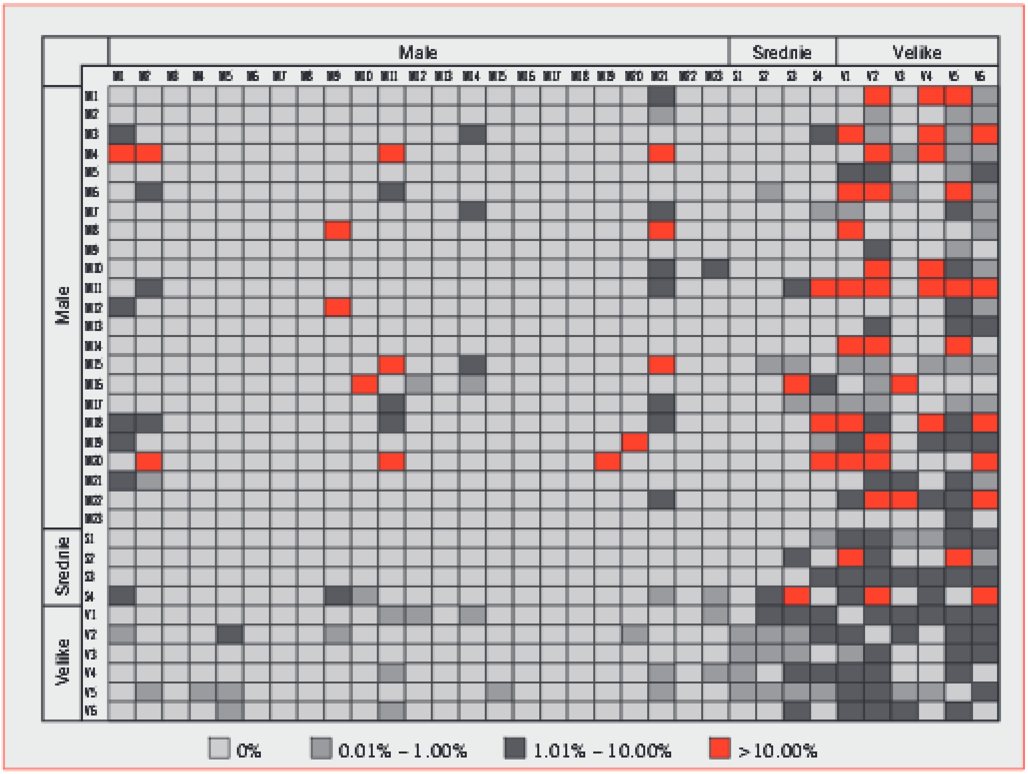
Primjenimo sada opisani model i analizirajmo stanje u Hrvatskoj. U prvom odjeljku ćemo se osvrnuti na podatke, a u drugom ćemo prikazati rezultate.

3.1 Podaci

Hrvatska narodna banka (HNB) središnja je banka Republike Hrvatske i sastavni je dio Europskog sustava središnjih banaka. Kao takvoj, cilj joj je održavanje stabilnosti cijena pri čemu vodi računa i o stabilnosti financijskog sustava u cjelini. Uz vođenje monetarne i devizne politike, upravljanja međunarodnim pričuvama te izdavanja novca, izdaje odobrenja za rad kreditnim institucijama, kreditnim unijama i institucijama za platni promet i elektronički novac te nadzire njihovo poslovanje. Iz navedenog slijedi da se podaci koji su nam potrebni za analizu nalaze u izvješćima HNB-a. Uz redovna izvješća, središnja banka objavljuje i istraživanja i preglede, pa je tako 2009. godine provedeno istraživanje o riziku bankovne zaraze u Hrvatskoj ([4]). Analiza se provela na podacima HNB-a iz izvještaja o izloženostima banaka po djelatnostima, pomoću kojih je moguće utvrditi međubankovne izloženosti prema domaćim i stranim bankama i na taj način imati uvid u strukturu tržišta. Ti podaci uključuju sve podatke o plasmanima koji proizlaze iz odobrenih kredita, oročenih depozita i/ili izvanbilančnih izloženosti. Korišteni podaci se odnose na razdoblje od 2005. do 2007. godine kada je broj banaka u bankarskom sektoru bio stabilan, uz minimalne promjene (tri banke su u međuvremenu promijenile ime, ali se to uzelo u obzir na način da su se od početka vodile pod novim nazivom).

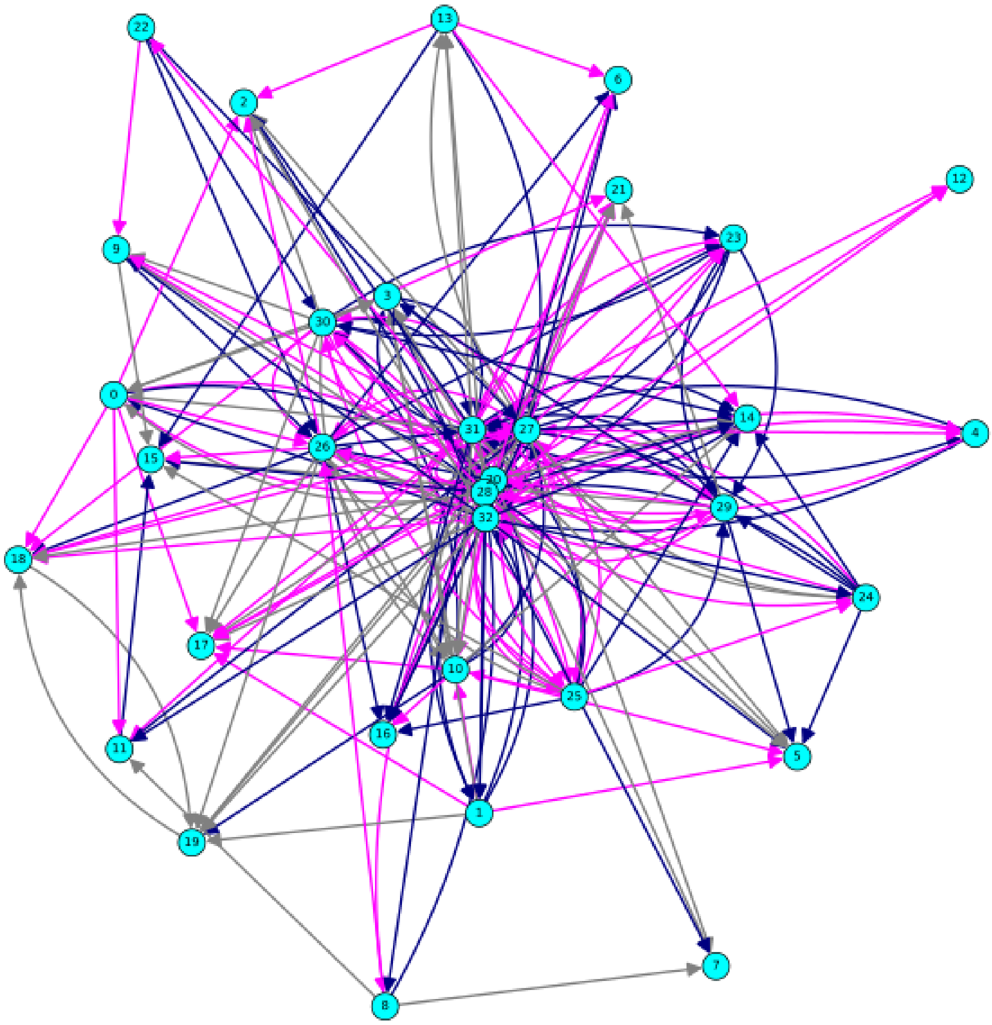
Međubankovno je tržište na kraju 2007. godine iznosilo 7.151 mil. kuna, što je 2% imovine bankarskog sektora i osam puta manje nego što je u nekim državama zapadne Europe. Također bitna stavka je da su Hrvatske banke u promatranom razdoblju bile pet puta više izložene stranim bankama nego prema domaćim bankama, što upućuje na to da bi prijetnja idiosinkratkog šoka, pa kasnije i zaraze, prije mogla poteći iz inozemstva nego među domaćim bankama. U Hrvatskoj je veća izloženost prema stranim bankama posljedica HNB-ove Odluke o minimalno potrebnim deviznim potraživanjima koja trebaju iznositi 28,5% deviznih obveza.

Sektor banaka je za potrebe istraživanja podijeljen na male - one koje imaju manje od 1% imovine bankarskog sektora, srednje - imaju između 1% i 5% imovine bankarskog sektora, te velike banke - imaju više od 5% imovine bankarskog sektora. Prema toj podjeli bilo je 23 male, 4 srednje i 6 velikih banaka. Nadalje, 15 ih je bilo u domaćem privatnom, dvije u domaćem državnom i 16 u stranom vlasništvu. Sve su grupe izložene više prema stranim nego prema domaćim bankama.



Slika 3.1: Matrica odnosa izloženosti i jamstvenog kapitala na domaćem međubankovnom tržištu na 31.12.2007. Elementi matrice predstavljaju potraživanja banke u retku prema banci u stupcu kao postotak jamstvenog kapitala banke u retku. (Preuzeto iz [4]).

Bilateralne izloženosti rijetko prelaze 100 mil. kuna, a međubankovna potraživanja i obveze koncentrirana su na šest velikih banaka koje se ponašaju kao novčani centri. Na velike banke su usmjerene male banke i srednje banke koje su rijeđe međusobno izložene i češće se pojavljuju kao kreditori nego kao dužnici. Ovakvom strukturom je Hrvatsko tržište najbliže teoretskoj definiciji strukture međubankovnog tržišta koje opisuju Freixas et al., ali sa više novčanih centara uz koje se povezuju periferne banke. Slijedi da bi veće posljedice imala propast banaka u središtu od perifernih banaka.



Slika 3.2: Međusobna izloženost Hrvatskih banaka kao postotak jamstvenog kapitala. Oznake vrhova: 0-23 male banke, 24-27 srednje banke, 28-32 velike banke. Boje bridova - postotak jamstvenog kapitala: plava - 0.01% - 1.00%, roza - 1.01% - 10.00%, siva - >10.00%.

Kako bismo mogli komentirati zarazu koja proizlazi iz idiosinkratskog šoka, pogledat ćemo izloženosti u odnosu na jamstveni kapital banaka. Na slikama 3.1 i 3.2 je prikazana matrica izloženosti i mreža međusobnih potraživanja na domaćem međubankovnom tržištu. Vidi se da je većina bilatelarnih izloženosti manja od 10% jamstvenog kapitala. Također, crvena boja u matrici i siva boja na grafu se češće pojavljuje kod izloženosti malih banaka što je jedan od razloga za rezultate simualacije idiosinkratske zaraze prema kojima se stope adekvatnosti kapitala ispod 10% smanjuju uglavnom kod te grupe banaka.

3.2 Rezultati

Iz podataka korištenih u istraživanju, primjetilo se da nije ispunjen nužan uvjet za moguće izbijanje zaraze koja proizlazi iz idiosinkratskog šoka, jer su sve izloženosti bile manje od jamstvenog kapitala. To vrijedi i za izloženost kod domaćih i kod stranih banaka. Zbog toga se promatrao utjecaj propasti svake banke zasebno na gubitke bankarskog sektora u cjelini te izloženih banaka kroz njihove stope adekvatnosti kapitala. Minimalni kapitalni zahtjev se definira na 10% kao što je propisano od strane regulatora. Rezultati su pokazali da bi gubitci banaka bili dobro amortizirani jamstvenim kapitalom tako da bi rijetkost bila da padne ispod 10%. Također, pad ispod 10% je češći kod šokova stranih banaka nego kod domaćih, iako nije jako velika razlika, te kod manjih i srednjih banaka, dok su velike banke stabilnije. Iz toga se može zaključiti da bi idiosinkratski šokovi stranih banaka imali jače posljedice na gubitke bankarskog sektora, ali bi te gubitke većim dijelom snosile velike banke pa bi bili dobro amortizirani jamstvenim kapitalom te utjecaj na stopu adekvatnosti kapitala ne bi bio velik.

Iako su rezultati simulacija pokazali da bi hrvatski bankarski sektor dobro podnio idiosinkratske šokove, to ne znači da bi u stvarnosti bilo tako. Za razliku od predstavljenog modela u radu, u ovom istraživanju su pretpostavke bile ublažene jer nisu uzimale u obzir moguće makroekonomske šokove, utjecaj prisilne prodaje na pad cijena i promjene uvjeta likvidnosti na međubankovnom tržištu. Uz idiosinkratske šokove, u istraživanju HNB-a se pokušala ocijeniti i opasnost ostalih kanala bankovne zaraze poput navale depozitara za povlačenjem depozita iz banaka u nekoliko različitih slučajeva. Iako su oni malo vjerojatni, postoje primjeri iz razvijenih zemalja da se to ipak može dogoditi. Uz to, postoji veća opasnost za bankarski sustav u Hrvatskoj, a to je mogućnost prekogranične bankovne zaraze, tj. opasnost da se domaće banke u stranom vlasništvu suoče sa smanjivanjem ili povlačenjem kreditnih linija od svojih banaka majki ako se ona nađe u problemima. Tome se može pristupiti na dva načina; deskriptivnom analizom podataka čime se ocjenjuje gdje se nalazi rizik prelijevanja negativnih efekata iz jedne ekonomije u drugu, te ocjenjivanjem osjetljivosti kreditnog rasta u banci kćeri na specifične pokazatelje i makroekonomske varijable. Uključivanje takvih kanala zaraze predstavlja novi izazov te stvara potrebu za novim modelima.

Poglavlje 4

Zaključak

Ovim radom je predstavljen model zaraze u proizvoljnoj financijskoj mreži kojim se modelira raširenost bankrota u financijskom sustavu. Model je primjenjiv na proizvoljan sustav financijskih posrednika koji su međusobno povezani svojim potraživanjima. Krize koje šire zarazu rijetko (i neperiodično) se događaju u razvijenim zemljama, što sugerira da se financijski sustav nalazi u blizini gornje prijelazne faze u našem modelu. Drugim riječima, dok veća povezanost sustava može smanjiti vjerojatnost izbijanja zaraze, u isto vrijeme može povećati njezinu raširenost kada stvarno izbije. Time dolazimo do implikacije da financijski sustav pokazuje robusnu-ali-krhku tendenciju - iako je vjerojatnost zaraze mala, njezine posljedice mogu biti ekstremno proširene. Također, čak da se zaraza pokrenuta idiosinkratskim šokovima nikad ne dogodi kada banke imaju velike kapitalne zalihe, zaključujemo da i negativni agregatni šokovi poput loših makroekonomskih prilika mogu trošiti kapitalne rezerve te tako dovesti sustav u stanje podložno riziku zaraze.

Rezultati naglašavaju da *a priori* neprimjetni šokovi mogu imati vrlo različite posljedice. Ta činjenica pomaže u objašnjenju zašto elastičnost sustava na prilično velike šokove prije 2007. godine nije bila sigurnost da će se jednako ponašati i u budućnosti. Iako sustav može biti otporan na većinu šokova određene veličine, ako je pogođen podjednakom jačinom na specifičnom mjestu, koje je možda strukturna slabost sustava, posljedična nestabilnost sustava može biti značajna.

Ukoliko pogledamo hrvatski bankarski sektor, simulacije rađene na podacima iz 2007. godine pokazuju da unatoč tomu što je bankarski sektor znatno izloženiji prema stranim bankama nego prema domaćim, što povlači veće medijalne gubitke u slučaju propasti stranih banaka, zbog usporedivosti odnosa međubankovnih izloženosti i jamstvenog kapitala, u prosjeku bi šokovi imali tek malo veći utjecaj na stope adekvatnosti kapitala. Analiza utjecaja raznih, malo vjerojatnih, makroekonomskih šokova ostavlja prostor novim istraživanjima.

Bibliografija

[1] Franklin Allen i Douglas Gale, *Financial contagion*, Journal of political economy **108** (2000), br. 1, 1–33.

[2] Xavier Freixas, Bruno M Parigi i Jean Charles Rochet, *Systemic risk, interbank relations, and liquidity provision by the central bank*, Journal of money, credit and banking (2000), 611–638.

[3] Prasanna Gai i Sujit Kapadia, *Contagion in financial networks*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society, 2010, str. rspa20090410.

[4] Marko Krznar, *Rizik bankovne zaraze u Hrvatskoj*, HNB, Istraživanja **1** (2009), 23.

[5] Mark EJ Newman, *Random graphs as models of networks*, arXiv preprint cond-mat/0202208 (2002).

[6] Amirhossein Sadoghi, *Measuring Systemic Risk: Robust Ranking Techniques Approach*, arXiv preprint arXiv:1503.06317 (2015).

[7] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.

[8] Steven H Strogatz, *Exploring complex networks*, Nature **410** (2001), br. 6825, 268–276.

[9] Christian Upper, *Simulation methods to assess the danger of contagion in interbank markets*, Journal of Financial Stability **7** (2011), br. 3, 111–125.

Sažetak

Kroz povijest smo svjedoci nekoliko većih slomova financijskog sustava pa se postavlja pitanje njihovog uzroka. Iako pojmu ”financijski sustav” pripada niz različitih posrednika, kako bi se olakšala terminologija, u ovom radu se govori o međubankovnom sustavu koji je sačinjen od n banaka i njihovih međusobnih potraživanja. Rad obrađuje temu zaraze u financijskim mrežama - vjerojatnosti nastanka i opseg širenja ukoliko do nje dođe. Pojam zaraza je izjednačen sa bankrotom banke koji se prenosi s jedne na drugu. Teorijski dio modela zasniva se na usmjerenom grafu i funkcijama izvodnicama koje generiraju vjerojatnosnu distribuciju stupnjeva vrhova, dok se u drugom djelu rada prikazuju rezultati koji potvrđuju teorijske pretpostavke. Zaključuje se da postoji ”prozor” u kojem do zaraze dolazi za određene vrijednosti stupnjeva vrhova u grafu. Iako sustav može biti otporan na većinu šokova neke jakosti, ako je pogođen takvim šokom na specifičnom mjestu, koje je možda strukturna slabost sustava, posljedična nestabilnost sustava može biti značajna. Pokazuje se da je financijski sustav robusan, ali krhak - iako je vjerojatnost zaraze mala, njezine posljedice mogu biti ekstremno proširene.

Summary

Throughout history we have witnessed several major breakdowns of the financial system which leads to the question of their causes. Although to the term ”financial system” belongs a variety of intermediaries, to facilitate terminology, this paper discusses the interbank system, which is made up of n banks and their mutual claims to each other. The paper discusses the contagion in financial networks - the probability of occurrence and the extent of its spread, if it occurs. The term contagion is equated with bankruptcy of banks which is transferred from one bank to another. The theoretical part of the model is based on a directed graph and generating functions that generate a probability degree distribution, while the second part of the paper presents results that confirm the theoretical assumptions. The conclusion is that there is a ”window” in which infection breaks out for a certain value of average degree in the graph. Although the system can be resistant to most shocks of particular magnitude, if it is hit by such a shock to a specific place, which may have been structural weakness of the system, the instability of the system can be significant. It turns out that the financial system is robust, but fragile - although the probability of contagion is low, the consequences can be extremely widespread.

Životopis

Tena Zbiljski rođena je 27. svibnja 1992. godine u Zagrebu. Završila je OŠ Pavleka Miškine te II. gimnaziju u Zagrebu. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, Matematičkom odsjeku je stekla titulu Prvostupnice matematike. 2014. godine upisuje diplomski studij Financijska i poslovna matematika.

Uz navedeno obrazovanje, završila je i Osnovnu školu za balet i ritmiku, te osnovnu glazbenu školu gdje je svirala klavir. Tijekom diplomskog studija članica je Financijskog kluba gdje stječe dodatno znanje o ekonomiji i financijama, te sudjeluje na projektima.

U slobodno vrijeme bavi se sportskim penjanjem i planinari.