Matematika prije Pitagore

Zebić, Jadranka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

JADRANKA ZEBIĆ

MATEMATIKA PRIJE PITAGORE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Tema ovog rada je pregled matematičkih dostignuća u razdoblju do oko 500. g. pr. Kr., tj. dok se nije pojavila apstraktna ideja dokaza.

U prvom poglavlju bit će opisani neki primitivni načini bilježenja brojeva i količina kao što su rovaši, žetoni i *quipue* koji potječu iz prapovijesnog doba.

U drugom poglavlju upoznat ćemo se s egipatskom civilizacijom te njenim razvojem. Egipćani su imali razvijen decimalni sustav te oznake za brojeve. O egipatskoj matematici saznat ćemo iz dva povijesna izvora, Rhindovog papirusa i Moskovskog papirusa.

U trećem dijelu upoznat ćemo babilonsku matematiku. Babilonci su od Sumerana naslijedili ideje za seksagenzimalni sustav i klinasto pismo. Sustav je bio prvi pozicijski u povijesti.

U dijelu koji se odnosi na grčku matematiku upoznat ćemo prvog poznatog grčkog matematičara, Talesa iz Mileta.

Matematika drevne Kine vrlo je koncizna. Najstariji sačuvani matematički tekstovi potječu iz doba iza 200. g. pr. Kr.. Opisat ćemo legendu o kornjači i magičnom kvadratu, te još neka dostignuća starokineske matematike.

U posljednjem dijelu opisujemo staroindijsku matematiku te najstarije poznate indijske matematičke tekstove *Sulvasutre*.

Poglavlje 1

Prapovijesna matematika

1.1 Rovaš

U prapovijesti ljudi nisu razmišljali o broju kao apstraktnoj veličini. Instinktivno su povezivali broj dva s dvije životinje ili neka druga dva objekta. Veliki problem kod brojanja je što kod prebrojavanja nekih objekata nije ostajao nikakav trag. Ljudi u prapovijesti su tome znali doskočiti. Jedno od rješenja za bilježenje količine su bili tzv. rovaši.

Rovaš je obično drveni štap različite duljine ili oblika, životinjska kost ili pak neki drugi medij na kojem su se urezivali znaci vlasništva ili pripadnosti te, ono što je zanimljivo, količine i brojevi.

Slika 1.1: Kost iz Ishanga (izvornik:`http://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone`)

Na slici 1. 1. se nalazi jedan od najstarijih rovaša tzv. kost iz Ishanga - nađena 1960. na području današnje D. R. Kongo, a znanstvenici je smještaju na kraj starijeg kamenog doba.[5]

1.2 Žeton

Još jedan od načina prebrojavanja bilo je i korištenje raznih predmeta poput oblutaka i školjaka. Korištenje oblutaka je sigurno dovelo i do prve konkretne aritmetike, još prije poznavanja apstraktnog pojma broja. To možemo vidjeti na primjeru primitivnih ratničkih etiopskih plemena: prije odlaska u bitku svaki ratnik stavljao je svoj oblutak na hrpu, a po povratku ga uzimao natrag. Po oblutcima koji su ostali odredio bi se gubitak. Ovaj način brojanja nije bio pogodan za velike količine. Bilo je to i nepraktično zbog nemogućnosti nalaženja jednakih oblutaka. Da bi se ovom doskočilo počela se rabiti glina, tj. izrađivani su glineni žetoni. U sjevernom Iraku na lokalitetu Nuzi otkrivene su neobične šuplje jajolike pločice iz 2. tisućljeća pr. Kr.. Na pločici je bio popis 48 životinja. Kada su arheolozi otvorili šuplju pločicu, otkrili su 48 glinenih žetona koji odgovaraju broju popisanih životinja. Slične artefakte arheolozi su našli ne samo na Bliskom istoku već i drugdje i pretpostavljaju da su služili kao brojači. Korištenje takovih brojača arheolozi tumače prelaskom s nomadsko-lovačkog načina života na ratarsko-stočarski, povećanjem pučanstva te sve većom potrebom bilježenja zaliha namirnica.

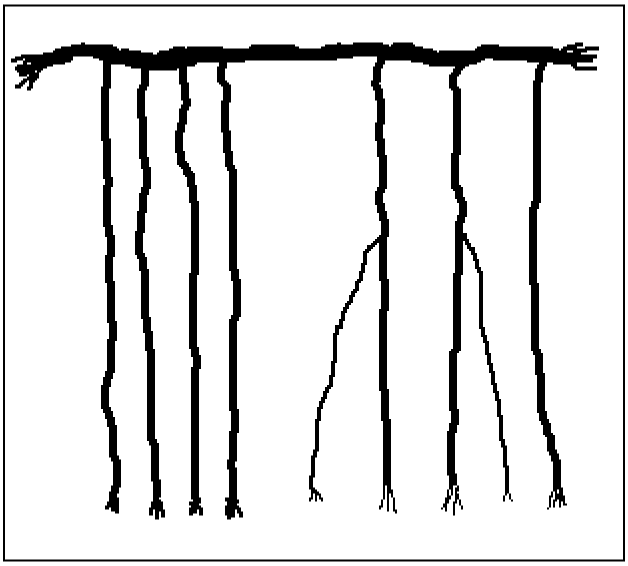
Žetoni su korišteni i kasnije kroz povijest i to najčešće za računanje, npr. kod jednostavnijih abaka u Grka i Rimljana. [5]

1.3 Užad i čvorovi

Jedan od načina bilježenja količine bilo je vezanje čvorova na užetu. Njima se služio primjerice narod Inka.[1] Ovaj način je sličan jednostavnim rovašima, tj. jedan čvor ima isto značenje kao jedan zarez na rovašu. Prednost ovakvog bilježenja pred žetonima je veća mobilnost i manja mogućnost gubitka žetona, a pred rovašima ponovna upotrebljivost. Kao i rovaši, i ovaj način je u nekim civilizacijama evoluirao u nešto složenije sredstvo bilježenja brojeva. Ovo se može vidjeti na primjeru *quipua*[2] kojim su Inke bilježile ne samo brojeve već i financijske transakcije i kalendare. Neki autori razvoj *quipua* smještaju između 600. i 1000. g. pr. Kr.. Na slici 1.2. prikazan je primjer *quipua* .

[1] Inke su nastanjivali područja današnje Bolivije, Perua i Ekvadora.

[2] *Quipu*, katkad pisano i *kipu* ili *khipu*, na jeziku Quichua[3] znači čvor.



Slika 1.2: Primjeri quipua (izvornik:http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Inca_mathematics.html)

Quipu se sastojao od glavnog užeta dugog od nekoliko centimetara do jednog metra, na koje su pričvršćena tanja, različito obojena, užeta rijetko dulja od pola metra (tzv. privjesna užeta). Na njima su u pravilnim razmacima zavezani različiti čvorovi. Brojevi su se prikazivali pozicijskim decimalnim sustavom: višestruki čvorovi predstavljaju znamenke, najznačajniji čvorovi najbliži su glavnom užetu, a čvorovi koji predstavljaju jedinice nalaze se na kraju privjesnih užeta.

Očito su Inke imale bar neko rudimentarno shvaćanje nule. Izostanak višekratnika neke potencije od 10 u zapisu broja prikazivao se kao prazno mjesto na kraju privjesnih užeta. Na nekim *quipuima* su zabilježeni i aritmetički rezultati, no on ipak nije bio računalo. Čini se da su Inke znali zbrajati, množiti cijele brojeve s cijelima i cijele s razlomcima te dijeliti.[5]

Poglavlje 2

Egipatska matematika

2.1 Egipatska civilizacija

Jedna od najstarijih i najnaprednijih civilizacija bila je staroegipatska. Grčki povjesničar Herodot, kojeg nazivamo „ocem povijesti“, opisivao je Egipat te se čini da je bio više oduševljen Egipćanima nego bilo kojim drugim narodom. Kao većina egipatskih posjetitelja, bio je svjestan iznimno povoljne klime i topografije duž rijeke Nil. Rekao je: „Svatko tko vidi Egipat, bez da je čuo išta o njemu, treba uočiti da je Egipat darovana zemlja, dar rijeke“.

Pri takvoj sunčanoj klimi, bez imalo kiše, rijeka Nil je pri poplavljivanju svojih obala svake godine izbacivala velike količine mulja. U tom području su postojala plodna polja za usjeve i pašu životinja, a izvan toga neplodne pustinje koje se protežu u svim smjerovima. Predvidljive poplave i kontrolirano navodnjavanje tla proizvelo je višak usjeva, koji su pokretali društveni razvoj i kulturu. U tom području se razvila bogata egipatska civilizacija.

Nigdje nisu pronađene tako zadivljujuće i veličanstvene građevine starog doba kao njihovi hramovi, grobnice i piramide, za čiju je gradnju bilo potrebno znanje i umijeće koje je i uz svu današnju razvijenu tehnologiju nama nepoznato. Najimpresivnije građevine Egipta svakako su piramide, koje su jedan od najmoćnijih i najdugovječnijih simbola staroegipatske civilizacije. Jedan od razloga što su piramide toliko fascinantne je taj što su bile prve građevine ikada sagrađene samo slaganjem isječenih ogromnih kamenih blokova jednog na drugog. Najpoznatija je Keopsova piramida u Gizi, jedno od Sedam svjetskih čuda.

Slika 2.1: Keopsova piramida u Gizi (izvornik:http://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza)

Smatra se da je građena punih 20 godina, budući da su se blokovi od kojih je sagrađena piramida prevozili čamcem niz rijeku sa suprotne obale rijeke Nil, a to je bilo moguće jedino u proljeće za vrijeme izlijevanja. Zidana je prije 4500 godina kao grobnica faraona Keopsa. Kad je sagrađena bila je visoka 147 metara, a duljina stranica osnovice je 229 metara, dok je horizontalni presjek na svakoj visini kvadrat. Kut pobočki u odnosu na osnovicu iznosi 51°51', a svaka je pobočka orijentirana prema jednoj od četiri strane svijeta. Do nastanka Eiffelovog tornja u Parizu 1887. godine, Keopsova piramida bila je najviša građevina na svijetu.[7]

2.2 Početak matematike u ranoj egipatskoj civilizaciji

„U većini znanosti jedna generacija ruši ono što je druga izgradila i poništava što je uspostavila. U matematici svaka generacija gradi novu priču na starim temeljima."
Hermann Henkel

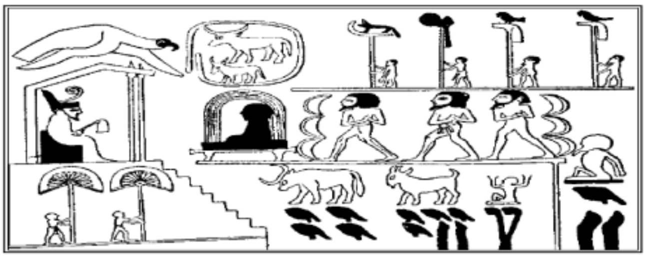
Osim astronomije, matematika je najstarija egzaktna znanost, a njena su saznanja kontinuirano nadograđivana. Njen točan početak se ne zna. Često se kaže da u matematici svi putovi vode natrag u Grčku. Grci su imali druge ideje o počecima matematike. Najpoznatija je ona koju je zastupao Aristotel, koji je u svom djelu „ Metafizika" napisao: „Matematička znanost je nastala u susjednom Egiptu, jer je postojala svećenička klasa koja je dozvoljavala slobodno vrijeme i razonodu.“ To je iz današnje perspektive samo djelomično točno jer se u starom Egiptu doduše razvila prva matematika, no matematika u današnjem smislu potječe iz Grčke.

Neprocjenjiv izvor informacija iz predeuklidske geometrije je razmatranje grčkog komentatora Proklosa (410. – 485.) koje se nalazi u prvoj knjizi Euklidovih elemenata: „Prema svemu sudeći geometrija je prvi put otkrivena među Egipćanima i nastala je mjerenjem njihovih posjeda. To je bilo neophodno jer se Nil prelijevao i brisao granice.“

Matematika se razvila zbog praktičnih ljudskih potreba. Egipćanima je bilo nužno svakodnevno računanje u trgovačkim poslovima, državnoj vlasti za računanje poreza, za računanje kamata na kredit, za računanje nadnice i za izradu kalendara. Svake godine za vrijeme redovnih godišnjih poplava u dolini rijeke Nil, granice zemljišnih posjeda su se izbrisale i trebalo ih je ponovno odrediti. Zbog toga se počela razvijati geometrija. Jednostavna geometrijska pravila koristila su se za određivanje granica posjeda i polja te sadržaja žitnice.[7]

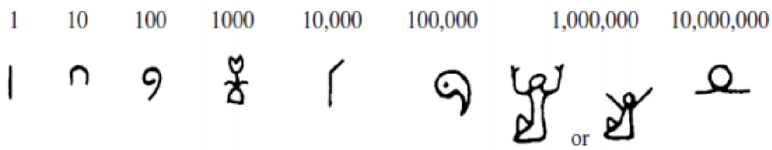
2.3 Zapisi brojeva u starom Egiptu

Ubrzo nakon ujedinjenja Egipta počeo se razvijati administrativni sustav. U svezi s time pojavilo se mnogo potrebnih računa: morali se napraviti popis stanovništva, nametnuti poreze i dr. Jedna od godina II. dinastije (2890. – 2686. pr. Kr.) zvala se Godina numeriranja sve sitne i krupne stoke Sjevernog i Južnog Egipta. Egipćani su imali razvijen brojevni sustav koji je omogućavao brojanje svih njima potrebnih brojeva. To potvrđuje povijesni nalaz, jedan od najznačajnijih ostataka staroga doba koji se nalazi u muzeju Sveučilišta u Oxfordu. On svjedoči o vojnoj pobjedi vladara Menesa te se na njemu nalazi zapis njegovih postignuća: uzimanje 120000 zatvorenika i podatak o broju zatočenih životinja, 400000 goveda i 422000 koza (Slika 2.2). Još jedan primjer ranog bilježenja velikih brojeva nalazimo u Knjizi mrtvih, zbirci vjerskih tekstova i tekstova o magiji, čiji je cilj bio osigurati pokojniku zadovoljavajući zagrobni život.



Slika 2.2: Prikaz jednog dijela buzdovana (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

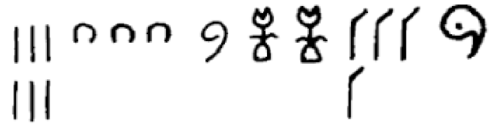
U jednoj od grobnica blizu piramida u Gizi otkriveni su hijeroglifski simboli za brojeve.



Slika 2.3: Hijeroglifski simboli za brojeve (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

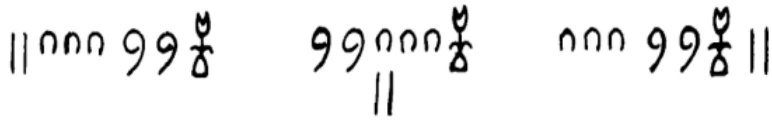
Broj 1 prikazan je vertikalnim potezom ili slikom štapa, za broj 10 koristili su potkovu, jer je svaka potkova na sebi imala 10 rupica. Za broj 100 koristili su znak za zakrivljeno uže koje je označavalo mjerno uže od 100 lakata dužine. Nadalje, broj 1000 prikazan je lotosovim cvijetom, koji je u tisućama prekrivao močvare oko Nila. Broj 10 000 označavao se savijenim prstom, a broj 100 000 punoglavcem kojih je poslije poplava Nila u stotinama tisuća bilo po močvarnim obalama. Za broj 1 000 000 korišten je znak za čovjeka ruku raširenih prema nebu, koji kao da govori „toliko je zvijezda na nebu". Broj 10 000 000 prikazan je simbolom izlazećeg Sunca. Kao što vidimo, koristili su poseban simbol za svaku novu potenciju od 10 do 10 000 000. Drugim riječima, egipatski brojevni sustav bio je dekadski (grčki:deka – deset). Deset se često može naći kao baza za brojevne sustave kod drevnih naroda. To se može pripisati tome što ljudi imaju 10 prstiju na rukama te je prirodno računati na prste. Iz istog razloga simbol sličan staroegipatskoj oznaci broja 1 se u gotovo svim kulturama koristi za oznaku broja 1.

Drugi brojevi se prikazuju koristeći te simbole aditivno, to jest broj je predstavljen skupom simbola čiji zbroj predstavlja taj broj, s tim da se svaki pojedinačno može prikazati najviše devet puta jer postoji oznaka za deset jedinica. Smjer pisanja je bio s desna u lijevo, s tim da su veće potencije prve na popisu, zatim druge po veličini i tako do kraja zapisa broja. Tako slika 2.4. predstavlja zapis broja 142 136 hijeroglifskim simbolima.



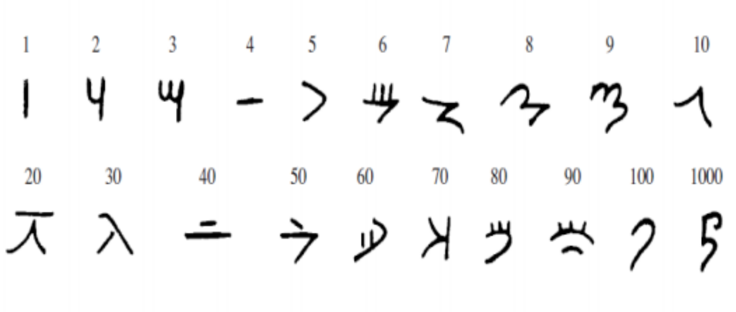
Slika 2.4: Hijeroglifski zapis broja 142 136 (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Ponekad su veće potencije bile zapisane s lijeve strane i u tom slučaju su simboli bili okrenuti prema smjeru iz kojeg je pisanje započelo. Zapis istog broja moguće je pisati u dva ili tri reda kako bi se smanjila duljina zapisa. To nam pokazuje slika 2.5, gdje je hijeroglifima na tri različita načina zapisan broj 1 232.



Slika 2.5: Tri načina hijeroglifskog zapisa broja 1232 (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Kako je postojao različit simbol za svaku potenciju broja 10, na vrijednost zapisanog broja nije utjecao poredak grupiranih hijeroglifa, stoga egipatski brojevni sustav nije bio pozicijski. Otkrićem papirusa, ponavljanje jednog simbola u hijeroglifskom zapisu zamijenjeno je drugim simbolom. Na primjer, 5 više nije skup pet vertikalnih poteza, nego mu je dodijeljen jedan karakterističan znak. Slika 2.6 prikazuje pojednostavljeni hijeratski zapis brojeva.



Slika 2.6: Hijeratski zapis brojeva (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Ovim načinom pisanja brojevi su se također prikazivali aditivno, kao i kod hijeroglifskog zapisa. Primjetimo da su oznake za 10, 100 i 1000 pojednostavljene u odnosu na starije. Pogledajmo zapis istog broja hijeroglifima i hijeratskim pismom. Slika 2.7 prikazuje hijeroglifski zapis broja 37, dok slika 2.7 prikazuje hijeratski zapis istog broja sa samo dva simbola.

Slika 2.7: Hijeroglifski / Hijeratski zapis broja 37 (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Veći broj simbola za brojeve u hijeratskom zapisu zahtjevao je bolje pamćenje, ali egipatski pisari to su smatrali opravdanim zbog brzine i sažetosti.[2]

2.4 Egipatska aritmetika

Dva glavna povijesna izvora iz kojih saznajemo o egipatskoj matematici su Rhindov papirus i Goleniščevljev papirus, oba nazvana po svojim prijašnjim vlasnicima. Goleniščevljev je poznat pod nazivom Moskovski papirus, jer se nalazi u Muzeju likovnih umjetnosti u Moskvi. Oni nisu jedini, ali su najznačajniji otkriveni i sačuvani matematički papirusi.

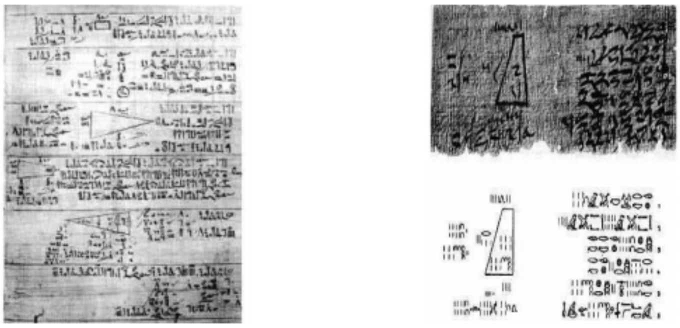
Rhindov papirus pronašao je škotski arheolog Alexander Henry Rhind 1858. godine u Luxoru u Egiptu. Na tome mjestu nalazio se drevni egipatski grad Teba koji je bio glavni grad Egipta tijekom Srednjeg i Novog kraljevstva. Rhind je prvotno bio škotski odvjetnik, a nakon što mu je zdravlje oslabilo posjetio je Egipat, gdje mu je godila blaga egipatska klima. U Egiptu je postao arheolog, specijaliziravši se za iskapanje grobnica u Tebi te se vjeruje da je Rhindov papirus pronađen u ruševinama Tebe. Nakon Rhindove smrti taj papirus stigao je u *British Museum* u Londonu, gdje se čuva i danas.

Rhindov papirus pisan je hijeratskim pismom oko 1650. godine prije Krista, a napisao ga je pisar Ahmes. Ahmes navodi da je to prijepis svitka iz razdoblja XII. dinastije (1849. − 1801. pr. Kr.), tj. svitka tada starog 200 godina. Iako je papirus izvorno bio svitak u jednom dijelu, dug 5,4 metra i širok 33 centimetra, u *British Museum* stigao je u dva dijela, bez središnjeg dijela. Možda je papirus prelomljen dok ga je odmatao netko tko nije znao rukovati tako osjetljivim dokumentima ili su bila dva pronalazača te je svaki htio svoj dio. Bilo kako bilo, činilo se da je taj središnji dio papirusa zauvijek izgubljen sve dok se nije dogodio jedan slučajan događaj, kako se često događa u arheologiji. Otprilike četiri godine nakon Rhindovog otkrića papirusa, američki egiptolog Edwin Smith kupio je nešto za što je mislio da je medicinski papirus. Pokazalo se da je taj papirus varka te da je napravljen od starih dijelova drugih papirusa. Nakon Smithove smrti 1906. godine njegova zbirka egipatskih starina bila je predstavljena Povijesnom društvu u New Yorku, a 1922. godine je otkriveno da dijelovi tog lažnog papirusa pripadaju Rhindovom papirusu. Nakon što su ti dijelovi doneseni u *British Museum* i stavljeni na pripadajuća mjesta, dovršeno je i dešifriranje Rindova papirusa. Na Rhindovom papirusu nalazi se 85 problema i zadataka zajedno s rješenjima te tablica koja prikazuje rastavljanje razlomaka kojima je brojnik 2, a nazivnici neparni brojevi od 5 do 101, na zbroj jediničnih razlomaka.

Za razliku od Rhindovog papirusa, autor Moskovskog papirusa je nepoznat. Papirus potječe iz oko 1850. godine pr. Kr., što znači da je stariji od Rhindovog papirusa. Pronašao ga je ruski istraživač Vladimir Semyonović Goleniščev i 1893. godine donio u Moskvu. Moskovski papirus također je pisan hijeratskim pismom. Duljine je oko pola metra i širine oko 8 cm. Sadrži 25 zadataka, među kojima su najveća dostignuća egipatske geometrije. Najzanimljiviji je četrnaesti zadatak. U tom zadatku nazvanom *Operacije s krnjom piramidom* dan je točan izračun obujma krnje kvadratne piramide čije su duljine bridova donje baze 4, gornje 2, a visine je 6. U papirusu je napisano da je obujam jednak 56. Nije navedena formula kojom su izračunali obujam, ali se može vidjeti da je obujam izračunat prema pravilu koje danas bilježimo formulom

$$V = h\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \tag{2.1}$$

(tu su h visina , a a i b duljine stranica baze krnje kvadratne piramide)



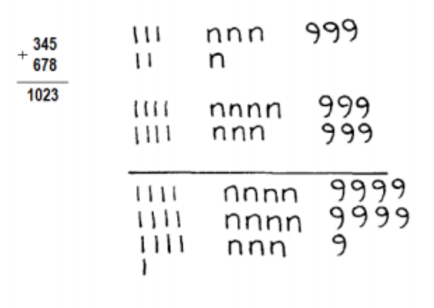
Slika 2.8: Rhindov/Moskovski papirus (izvornik:http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt.html)

U egipatskim papirusima otkrivena su različita matematička dostugnuća, no bez ikakva objašnjenja kako se do pojedinačnih rješenja došlo. Za pretpostaviti je da je većina rezultata dobivena iskustveno ili metodom pokušaja i pogrešaka, ali također mnogi opisi rješenja omogućavaju poopćavanje na slične probleme.[6]

2.5 Zbrajanje i oduzimanje

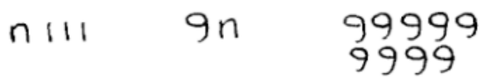
Egipatski brojevni sustav nije bio pogodan za računanje, ali je trgovina zahtijevala svakodnevno zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje prirodnih brojeva i razlomaka. Opisat ćemo račun s hijeroglifskim brojkama. Najlakše je bilo zbrajanje. Za zbrajanje je bilo potrebno skupiti iste simbole zajedno, a ako se tako odjednom skupilo 10 istih simbola zamijeniti ih odgovarajućim simbolom sljedećeg višekratnika od 10.

Primjer 2.1. *Egipatski način zbrajanja brojeva 345 i 678 (hijeroglifske brojke).*



Slika 2.9: Zbrajanje brojeva 345 i 678. (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Na slici 2.10. prikazana je zamjena 10 istih simbola za jedan simbol veće potencije broja 10:



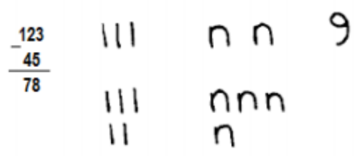
Slika 2.10: Zamjena simbola za simbol veće potencije (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Istim postupkom dobivamo konačan zbroj, 1023 prikazan na slici 2.11:

Slika 2.11: Broj 1023. (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

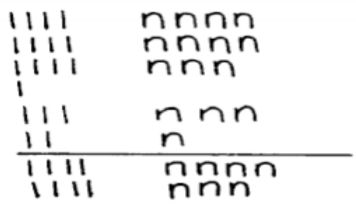
Oduzimanje se provodilo na analogan način. Po potrebi se koristila „posudba", pri čemu se zamjenjuje jedan simbol umanjenika s deset simbola niže potencije broja 10.

Primjer 2.2. *Egipatski način oduzimanja brojeva 123 i 45 prikazan je na slici 2.12 (hijeroglifskom brojke).*



Slika 2.12: Oduzimanje brojeva 123 i 45. (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Nakon „posudbe“, uklanjanjem određenog broja simbola dobijemo rezultat 78. Postupak je prikazan na slici 2.13.[2]



Slika 2.13: Prikaz konačnog rješenja (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

2.6 Množenje i dijeljenje

Iz Rhindova papirusa saznajemo kako su Egipćani množili i dijelili. Množenje se provodi udvostručavanjem i zbrajanjem. Broj su udvostručavali zbrajajući ga sa samim sobom. Postupak množenja dva broja je sljedeći. Svaki od faktora ima svoj stupac, dakle imamo dva stupca. U prvi stupac umjesto prvog faktora uvijek upisujemo 1, a paralelno s njim u drugi stupac upisujemo drugi faktor. Zatim te brojeve u svakom sljedećem retku udvostručujemo, sve dok u prvom stupcu ne dobijemo broj koji je veći od prvog faktora, tada udvostručavanje staje. Zatim gledamo koji brojevi prvog stupca zbrajanjem daju prvi faktor te njih označimo, a zbroj odgovarajućih udvostručenja u drugom stupcu je traženi umnožak. U primjerima u ovom poglavlju koristit ćemo suvremeni zapis brojeva.[2]

Primjer 2.3. *Egipatski način množenja brojeva 19 i 71.*
Neka je prvi faktor 19, a drugi faktor 71. Dakle, u prvom stupcu pišemo 1, a u drugom 71. Te brojeve paralelno udvostručujemo sve dok u prvom retku ne dobijemo veći broj od 19. Navedeni postupak prikazan je u tablici 2.1.

1	71
2	142
4	284
8	568
16	1136

Tablica 2.1: Udvostručavanje faktora

Ovdje udvostručavanje staje, budući da bi u sljedećem retku u prvom stupcu dobili 32, a to je veće od prvog faktora 19. Zatim označimo brojeve prvog stupca koji zbrajanjem daju naš prvi faktor, 19, njih ćemo označiti strelicom kao u tablici 3. 2.. Vidimo da su to brojevi 1, 2 i 16. Budući da je $1 + 2 + 16 = 19$*, zbrajanjem pripadnih udvostručenja u desnom stupcu, nasuprot strelica, egipatski matematičari bi dobili traženi produkt 1349.*

>	1	71
>	2	142
	4	284
	8	568
>	16	1136
ukupno:	19	1349

Tablica 2.2: Označavanje i zbrajanje odgovarajućih faktora

Dakle, $1349 = 71 + 142 + 1136 = (1 + 2 + 16) \cdot 71 = 19 \cdot 71$. *Ako bi za prvi faktor uzeli 71, a za drugi faktor 19, postupak prikazan u tablici 3. 3, bio bi sljedeći:*

>	1	19
>	2	38
>	4	76
	8	152
	16	304
	32	608
>	64	1216
ukupno:	71	1349

Tablica 2.3: Množenje faktora 71 i 19.

Kako je $64 + 4 + 2 + 1 = 71$, *treba jednostavno zbrojiti pripadne višekratnike broja 19 u drugom stupcu kako bi ponovno dobili 1349.*

Ovakav način množenja je uvijek primjenjiv, budući da se svaki pozitivni cijeli broj može izraziti kao zbroj različitih potencija broja 2, odnosno kao zbroj izraza 1, 2, 4, 8, 16, 32,...Vidimo da su stari Egipćani koristili kombinaciju dekadske i binarne aritmetike, te svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Ovaj način množenja udvostručavanjem i zbrajanjem ponekad se naziva i ruskim množenjem, jer su ga koristili ruski seljaci. Očita prednost ovog načina množenja je ta što je nepotrebno pamtiti ikakvu tablicu (osim zbrajanja).

Egipatsko dijeljenje možemo opisati kao obrnuto množenje gdje se djelitelj udvostručuje sve dok rezultat udvostručenja bude manji od djeljenika. Njihova metoda dijeljenja temelji se na jednostavnoj matematičkoj činjenici koja je bila poznata i egipatskim pisarima, a to je da su množenje i dijeljenje inverzne matematičke operacije, tj. da je $a \cdot b = c$ *ako i samo ako je* $c \div b = a$. *Dakle, njihov način dijeljenja zahtjevao je korištenje množenja i vrlo često upotrebu razlomaka. Pogledajmo sljedeći primjer.*

Primjer 2.4. *Podijelimo 91 sa 7.*
Egipćani su znali da trebaju pronaći broj takav da je njegov sedmerostruki broj 91. U prvom stupcu tablice 2.4. opet imamo potencije broja 2, dok paralelno s tim u drugom stupcu udvostručujemo djelitelja, u ovom slučaju 7, sve dok su udvostručenja manja od djeljenika, tj. 91:

>	1	7
	2	14
>	4	28
>	8	28
ukupno:	13	91

Tablica 2.4: Dijeljenje 91 sa 7.

Uočavamo da je $7 + 28 + 56 = 91$*, dakle naš traženi kvocijent je zbroj brojeva prvog stupca koji odgovaraju ovim udvostručenim. Kvocijent je jednak* $1 + 4 + 8 = 13$*. Prednost egipatskog načina dijeljenja je što se ne uvode nikakve nove operacije, no dijeljenje nije uvijek ovako jednostavno kao u prethodnom primjeru, jer ostatak nije uvijek 0. Pogledajmo sljedeći primjer.*

Primjer 2.5. *Podijelimo 35 sa 8.*
Pisar Ahmes započinje udvostručenjem djelitelja, dakle 8, sve dok udvostručenje ne bi bilo veće od djeljenika, 35. Zatim se počinje prepolavljati djelitelj kako bi se dobio potrebni ostatak. Postupak računanja prikazan je u tablici 2.5.:

	1	8
	2	16
>	4	32
	1/2	4
>	1/4	2
>	1/8	1
ukupno:	4 + 1/4 + 1/8	35

Tablica 2.5: Dijeljenje 35 sa 8.

Dakle, traženi kvocijent je

$$4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}. \tag{2.2}$$

2.7 Egipatski razlomci

Egipćani su imali vrlo specifičan zapis razlomaka, koji ni u jednoj drugoj kulturi nije tako sustavno korišten. Pri računanju su koristili samo jedinične razlomke, odnosno razlomke oblika $\frac{1}{n}$, gdje je n prirodan broj. Prikazivali su ih stavljanjem oka iznad hijeroglifa koji predstavlja nazivnik. Razlomak $\frac{2}{3}$ je imao poseban simbol, a sve ostale razlomke izražavali su kao zbroj jediničnih razlomaka, od kojih je svaki imao različiti nazivnik, npr.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} \tag{2.3}$$

Takav zapis razlomka zove se zapis u egipatskom obliku odnosno egipatski razlomak. Slika 2.14. prikazuje primjere nekih egipatskih razlomaka.

Slika 2.14: Egipatski razlomci $\frac{1}{3} i \frac{3}{4}$

izvornik:`http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt.html`

Uočimo da egipatski zapis razlomaka nije jedinstven: $\frac{6}{7}$ možemo prikazati kao

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \tag{2.4}$$

Štoviše, svaki razlomak ima beskonačno mnogo rastava na jedinične razlomke. Postavlja se pitanje kako su Egipćani dolazili do takvog zapisa. To nije točno poznato, ali jedna od pretpostavki je sljedeća: zapis se dobivao iz uobičajenog postupka dijeljenja.

	1	7
>	1/2	3 + 1/2
>	1/4	1 + 1/2 + 1/4
	1/7	1
>	1/14	1/2
>	1/28	1/4
ukupno:	1/2 + 1/4 + 1/14 + 1/28	6

Tablica 2.6: Rastav razlomka $\frac{6}{7}$ na jedinične razlomke

Kako bi se pojednostavilo i olakšalo rastavljanje razlomaka na jedinične razlomke, postojale su mnoge povezane tablice, zbog čega Egipćani nisu morali sve pamtiti. Najopsežnija od svih aritmetičkih tablica koje su pronađene među drevnim egipatskim papirusima koji su došli do nas je ona koja se nalazi na početku Rhindovog papirusa. Na toj tablici nalazi se zapis razlomaka kojima je brojnik 2, a nazivnici neparni brojevi od 5 do 101, kao zbroj jediničnih razlomaka. Ona zauzima trećinu ukupne duljine Rhindovog papirusa. Navedeni razlomci prikazani su u Tablici 2.7. Otkad se pojavio prijevod Rhindovog papirusa te je dešifrirana ova tablica, matematičari su pokušavali objasniti koju je metodu pisar Ahmes koristio pri njenoj izradi. Zašto je za $n = 19$ razlomak zapisan

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} \tag{2.5}$$

a ne kao

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}? \tag{2.6}$$

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$
$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$
$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$
$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$
$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$
$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$
$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$
$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$	$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$
$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$
$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$	$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$
$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$
$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$	$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$
$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$	$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$
$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$	$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$
$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$	$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$
$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$	$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$
$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{101}$	$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Tablica 2.7: Tablica jediničnih razlomaka (iz Rhindova papirusa, u suvremenom zapisu)

Do danas nije otkriveno općenito pravilo koje daje rezultate u tablici. Jedino pravilo koje je otkriveno slijedi iz posljednjeg zapisa

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}, \tag{2.7}$$

taj konkretni slučaj može se poopćiti formulom

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}, \tag{2.8}$$

No, iz te formule dobili bismo drugačiju tablicu razlomaka $\frac{2}{n}$:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}, \tag{2.9}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}, \tag{2.10}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}, \tag{2.11}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} \tag{2.12}$$

Iako je Ahmes vjerojatno bio toga svjestan, nisu zapisane te vrijednosti u tablicu (osim u posljednjem slučaju $\frac{2}{101}$) jer su očito postojali drugi načini za rastavljanje razlomaka na jedinične razlomke.
Čini se da su pravila koje je Ahmes koristio bila sljedeća:

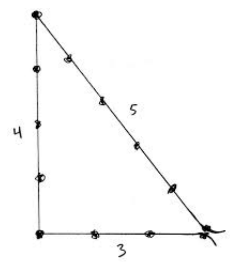
- Ako se razlomak može prikazati na više načina, zapisuje se onaj koji ima najmanji broj jediničnih razlomaka (ne više od 4).
- Koristi se što veći jedinični razlomak u raspisu, osim ako to nije kontradiktorno prvom pravilu.
- Jedinični razlomci pišu se od većeg prema manjem te ne postoje dva jednaka.
- Za početni član poželjniji su parni nazivnici.

Smatra se da je 3 000 godina kasnije talijanski matematičar Leonardo iz Pise poznatiji po svom prezimenu Fibonacci u svojoj knjizi *Liber abaci* opisao metodu kako bilo koji razlomak može prikazati kao zbroj jediničnih razlomaka tzv. Fibonaccijev teorem.[1]

Teorem 1. *(Fibonaccijev teorem) Svaki (pozitivan) racionalan broj može se zapisati kao konačan zbroj jediničnih razlomaka.*

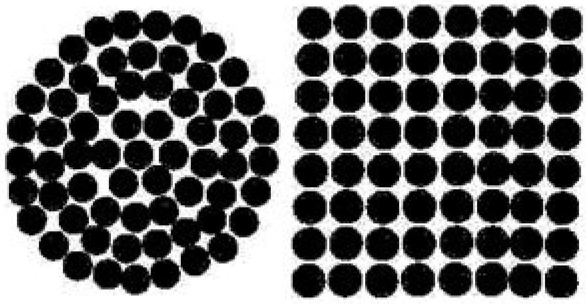
2.8 Egipatska geometrija

Stari Egipćani imali su dobro razvijenu geometriju, posebice sve što im je bilo potrebno za izgradnju piramida i hramova. Izvori navode da su za određivanje pravog kuta koristili konop koji je čvorovima podijeljen na 12 jednakih dijelova (3 + 4 + 5 = 12), tj. koristili su pitagorejsku trojku (3,4,5) prikazanu na Slici 2.15.



Slika 2.15: Određivanje pravog kuta (izvornik:`http://www.math.buffalo.edu/mad/AncientAfrica/mad_ancient_egypt_geometry.html`)

Računali su površinu trokuta kao pola umnoška dviju kraćih stranica (što vrijedi samo za pravokutan trokut), a pogreške u računu im nisu previše značile. Površinu pravokutnika računali su kao umnožak duljina njegovih stranica.
Jedan od geometrijskih problema koji nalazimo u Ahmesovom papirusu, jest kako su egipatski pisari računali površinu kruga poznatog promjera. Na slici 2.16. dan je krug promjera 8 kheta [1] i kvadrat stranice duljine 9 *kheta*.



Slika 2.16: Krug promjera 9 *kheta* i kvadrat stranice 8 *kheta* (izvornik:`http://www.math.buffalo.edu/mad/AncientAfrica/mad_ancient_egypt_geometry.html`)

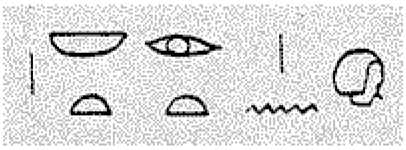
Postupak izračunavanja površine kruga opisan u Ahmesovom papirusu dan je u nekoliko sljedećih koraka:

- Pretpostavimo da krug ima dijametar 9 *kheta*
- Uzmi 1/9 dijametra, dakle 1
- Ostatak je 8
- Pomnoži 8 sa 8
- Dobiješ 64 i to je površina.

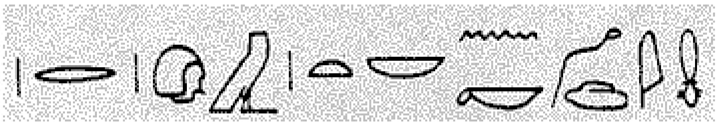
Ako to prevedemo u suvremeni matematički jezik, vidimo da se pravilo navedeno u Ahmesovom papirusu svodilo na $P = (\frac{8}{9} \cdot dijametar)^2$. Uspoređujući rezultat s egzaktnom formulom za izračunavanje površine kruga, $P = r^2 \cdot \pi$, dobili bismo zanimljiv rezultat: stari Egipćani su gotovo 1000 godina prije stvarnog otkrića broja π znali njegovu približnu vrijednost. Po njihovim računima π bi iznosio 3,1605. Postupak izračunavanja površine nalazimo i u problemu 10 Moskovskog papirusa.

[1] *Khet* je staroegipatska jedinica za duljinu.

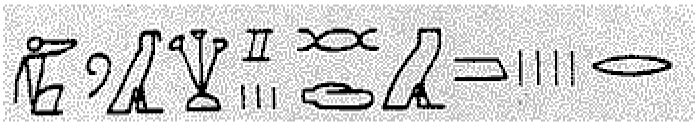
Promotrimo korake tog problema:

1 

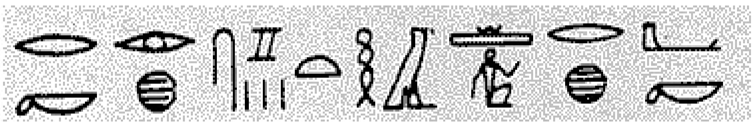
Primjer izračuna površine polucilindra(nb.t)

2 

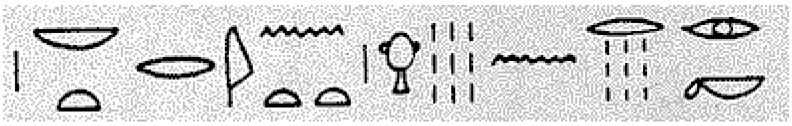
Ako ti kažu polucilindar(nb.t) od 4 $\frac{1}{2}$ u ustima (dijametra)

3 

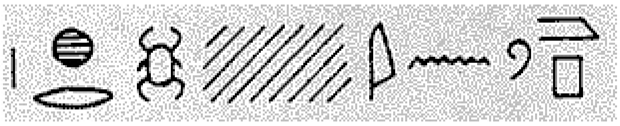
od 4 $\frac{1}{2}$ (u promjeru)

4 

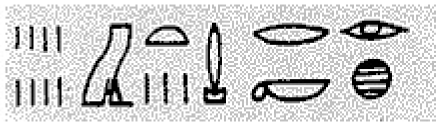
Što je njegova površina?

5 

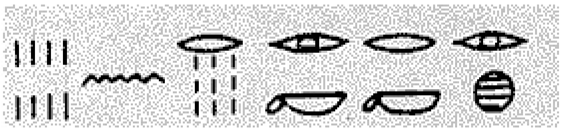
Uzmite 1/9 od 9 , jer je polucilindar(nb.t)

6 

polovica cilindra(ipt); Rezultat je 1.

7 

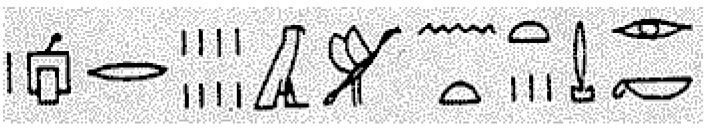
Uzmi ostatak, što je 8.

8 

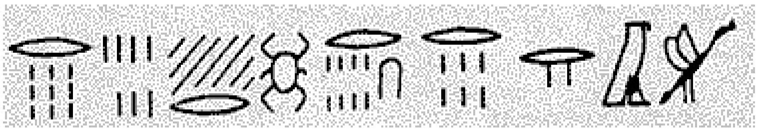
Izračunajte 1/9 od 8.

9 

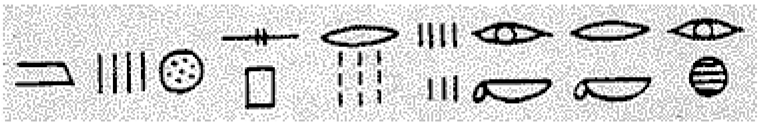
Dobit ćete 2/3+1/6+1/18. Uzmi

10 

ostatak od 8 nakon oduzimanja

11 

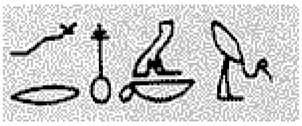
2/3+1/6+1/18; Rezultat je 7+1/9.

12 

Pomnožite 7+1/9 s 4+1/2.

13 

Rezultat je 32. To je njegova površina.

14 

Rezultat je točan.

Slika 2.17: Problem 10 MMP (izvornik:`http://www.math.buffalo.edu/mad/AncientAfrica/mad_ancient_egypt_geometry`)

Engleski egiptolog T.E.Peet i američki znanstvenik L. Cooper slažu se da se dio od petog do jedanaestog koraka odnosi na izračunavanje opsega kruga danog promjera (D). Postupak bi se ukratko mogao opisati kroz sljedeće korake:

- Pomnožite duljinu promjera kružnice s 4 (naći $4 \cdot D$).
- Pronađite $\frac{1}{9}$ od $4 \cdot D$ i oduzmite od $4 \cdot D$ (naći $\frac{8}{9}$ od $4 \cdot D$)
- Pronađite $\frac{1}{9}$ od dobivenog rezultata i oduzeti ga (tj. naći $\frac{8}{9}$ od $\frac{8}{9}$ od $4 \cdot D$)

Konačni rezultat ovog postupka, nakon množenja je $\frac{256}{81} \cdot D$. Analizirajući razlomak vidimo da je jednak 3,1605, no ne postoji pisani dokaz da su egipatski pisari razmišljali o konceptu broja π.[8]

Poglavlje 3

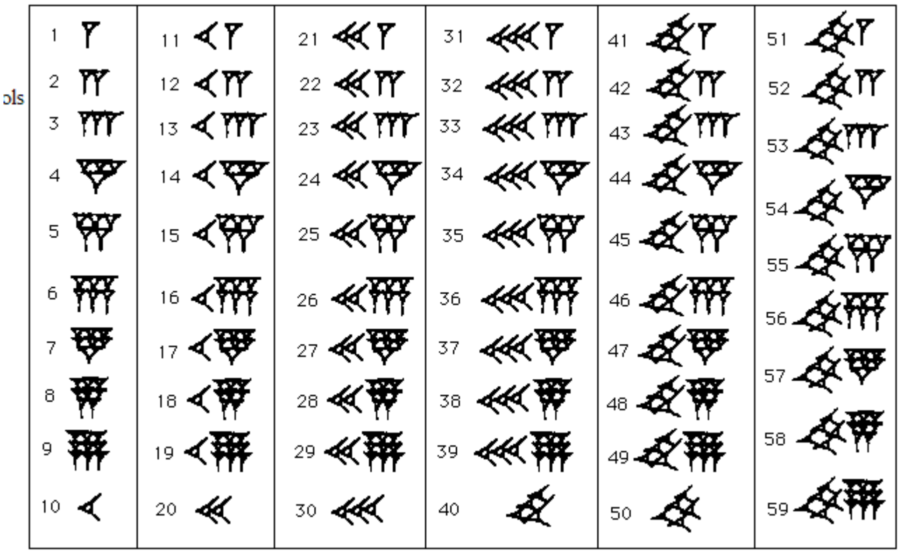
Babilonska matematika

Područje između rijeka Eufrata i Tigrisa, u Mezopotamiji 3500 godina prije Krista naseljavaju Sumerani. Sumerska civilizacija je bila napredna civilizacija koja je gradila gradove i sustave za navodnjavanje. Oko 2000. g. pr. Kr. apsorbira ih semitski narod Babilonaca. Babilonci su od Sumerana naslijedili ideje za seksagezimalni sustav (sustav s bazom 60) i klinasto pismo kojim su pisali po vlažnim glinenim pločicama. Mnoge od tih pločica su sačuvane i upravo su one izvor za proučavanje povijesti babilonske matematike. Mnoge sačuvane glinene pločice sadrže zadatke i tablice.

Slika 3.1: Babilonska glinena pločica (izvornik:http://mis.element.hr/fajli/1028/57-17.pdf)

Babilonci kao i Sumerani koristili su sustav s bazom 10, ali za neke primjene (recimo, u astronomiji) u kombinaciji sa seksagezimalnim sustavom, tj. sustavu s bazom 60. Jedna od prednosti sustava s bazom 60 je u tome što ima više djelitelja nego broj 10, pa više razlomaka ima konačan zapis. Seksagezimalni sustav koristimo i danas za računanje vremena i kutova. Babilonska matematika u mnogim aspektima je naprednija od egipatske jer

su koristili pozicijski brojevni sustav, koji se smatra prvim takvim brojevnim sustavom u povijesti. Dijelili su dan na 24 sata, sate na 60 minuta i minute na 60 sekundi.
Često se kada se spomene sustav s bazom 60 pomisli na puno posebnih simbola koje treba zapamtiti. No brojke (znamenke) od 1,2,3,..., 59 u babilonskom su sustavu izgrađene su od dva simbola (klina) „jedinice“ $\vee$ i simbola „desetke“ $<$ te da se zapravo radi o kombinaciji sustava s bazom 10 i 60. Na slici 3.2. prikazane su znamenke seksagezimalnog sustava.



Slika 3.2: Znamenke seksagezimalnog sustava (1800. – 1600. pr. Kr.) (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Postojale su posebne oznake za $10 \cdot 60, 60^2, 10 \cdot 60^2$. Pisalo se slijeva udesno. Sustav je bio pozicijski bez apsolutne pozicije, npr. 33 se zapisuje kao $<<< \vee \vee \vee$, a

$$81 = 60 + 21 = 1 \cdot 60^1 + 21 \cdot 60^0 \, je \ \vee << \vee. \tag{3.1}$$

Kako nema oznake za 0, zapis nije jedinstven.Tako znak $\vee$ može predstavljati bilo koju cjelobrojnu potenciju od 60, a stvarna vrijednost nalazi se iz konteksta; npr. 11, 61 i 3601 se pišu jednako kao $\vee\vee$.

U kasnijem razdoblju (oko 5. st. pr. Kr.) pojavljuje se i znak za 0, ali se koristi samo kad je nula potrebna „usred“ broja. Na babilonskim glinenim pločicama sačuvane su mnoge tablice. Jedna od babilonskih tablica je tablica recipročnih brojeva prikazana na slici 3.1. Tablica bi danas ovako izgledala:

a	1/a
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7;30
9	6;40
10	6
12	5
15	4
16	3;45
18	3;20
20	3
24	2;30
25	2;24
27	2;13;20

Tablica 3.1: Tablica recipročnih brojeva (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Zapis u tablici znači npr.: za $a = 9$ je $\frac{1}{n} = 6 \cdot 60^{-1} - 1 + 40 \cdot 60^{-2} - 2$. U tablici nedostaju $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ itd., tj. razlomci koji nemaju konačan prikaz. Takve razlomke Babilonci su računali približno, npr.:

$$\frac{1}{13} = \frac{7}{19} = 7 \cdot \frac{1}{91} \approx 7 \cdot \frac{1}{90} = 4 \cdot 60^{-1} + 4 \cdot 60^{-2} = 4;40. \tag{3.2}$$

.

Babilonci su znali množiti i dijeliti. Množenje su si olakšavali formulama

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \tag{3.3}$$

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} \tag{3.4}$$

Iz navedenih formula slijedi da im je za množenje bila potrebna samo tablica kvadrata. Dvije pločice koje potječu iz oko 2000. g. pr. Kr. sadrže tablice kvadrata brojeva do 59 i kubova do 32.

Dijeljenje se svodilo na množenje recipročnim brojem, gdje su koristili navedenu tablicu recipročnih vrijednosti.

Također su nađene tablice kvadratnih i kubnih korijena, tablice rješenja jednadžbi $x^2(x \pm 1) = a$ za različite a, tablice suma kvadrata itd.[1]

3.1 Pitagorin teorem u babilonskoj matematici

Babilonci su poznavali Pitagorin poučak odnosno bar njegove specijalne slučajeve. U tablici koja se čuva u *British Museum-u* nalazi se sljedeći problem: [2]

4 je duljina i 5 dijagonala.
Kolika je širina?
Njena duljina nije poznata.
4 puta 4 je 16.
5 puta 5 je 25.
Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9.
Što da uzmem da dobijem 9?
3 puta 3 je 9.
3 je širina.

Suvremenim jezikom, zadatak je bio odrediti jednu stranicu pravokutnika ako su poznate duljine druge stranice i dijagonale. Vidimo da su poznavali pitagorejsku trojku (3,4,5).
Pločica Plimpton 322

Jedan od važnijih izvora za babilonsku matematiku je pločica Plimpton 322 (slika 3.3.). Veličine je današnjeg kalkulatora te sadrži jedan redak čistog teksta i tablicu brojeva s 4 stupca i 15 redaka.

Slika 3.3: Plimpton 322 (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Pločica je djelomično oštećena, pa nedostaje dobar dio prvog stupca. U početku se smatralo kako je Plimpton 322 samo još jedan primjer babilonskog zapisnika, jer su Babilonci na pločicama zapisivali količine žitarica ili izračune poreza. No, početkom prošlog stoljeća su povjesničari Otto Neugebauer i Abraham Sachs primijetili da retci na pločici zadovoljavaju interesantno svojstvo, usko vezano uz Pitagorine trojke, tj. uređene trojke prirodnih brojeva (a,b,c) koje zadovoljavaju jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.

Naime, brojevi u srednja dva stupca su upravo duljine kraće katete b i hipotenuze c pravokutnog trokuta (gdje je $b < a$). U gornjem retku pločice iznad drugog stupca stoji „širina“, dok je iznad trećeg stupca napisano „dijagonala“. Kako je u to vrijeme pravokutni trokut bio promatran kao polovica pravokutnika, tj. dio na koji pravokutnik dijeli jedna njegova dijagonala, hipotenuza pravokutnog trokuta je bila nazivana dijagonalom, dok je kraća kateta bila nazivana širinom. Prvi stupac, gledano slijeva, sadrži kvocijente $\left(\frac{a}{c}\right)^2$ ili $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ dok posljednji stupac sadrži numeraciju redaka od 1 do 15. Nije moguće sa sigurnošću utvrditi o kojem se od navedenih kvocijenata radi jer oštećenja na pločici skrivaju vodeću znamenku, koja može biti 0 ili 1. Primjetimo da zaista iz identiteta $a^2 + b^2 = c^2$ dijeljenjem s a^2 dobivamo $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ te se navedeni kvocijenti razlikuju za 1.

Nekoliko prvih redova pločice prikazano je u tablici 3.2.

(1),9834	119	169	1
(1),9416	3367	11521	2
(1),9188	4601	6649	3
(1),8862	12709	18541	4
(1),8150	65	97	

Tablica 3.2: Nekoliko redova pločice Plimpton 322 (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 199)

Autor ove pločice je ipak načinio i nekoliko manjih pogrešaka u računu, koje se nalaze u drugom, osmom, devetom, trinaestom i petnaestom retku. To ipak ne umanjuje činjenicu kako je Plimpton dokaz da su pitagorejske trojke bile poznate i tisućama godina prije pojave matematike antičke Grčke.[6]

Poglavlje 4

Grčka matematika prije 500. g. pr. Kr.

Antička Grčka obuhvaćala je područje današnje Grčke, zapadnu Tursku (Joniju), ali i druga područja na kojima se govorilo grčkim jezikom. Počeci Grčke matematike javljaju se u Joniji. Grčki znanstvenici i filozofi na svojim putovanjima preuzeli su matematička znanja Egipta i Babilona te ih interpretirali na nov način. Do Grka matematika je bila pretežno empirijska znanost. Stari Grci imali su za cilj sva prijašnja znanja i sva nova matematička znanja povezati u skladan i cjelovit sustav unutar kojeg će svaki teorem biti dokazan, no taj se cilj razvio tek u razdoblju iza onog kojim se bavi ovaj rad.

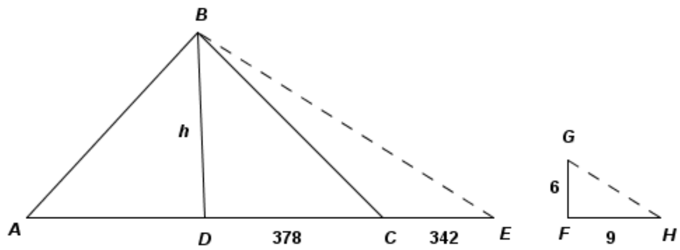
Jedini značajniji grčki matematičar prije 500. g. pr. Kr. je bio Tales iz Mileta (624. − 547. pr. Kr.). Nijedno njegovo djelo nije sačuvano, pa se ne može sa sigurnošću reći je li išta pisao, a ako i jest sva djela su nestala još prije Aristotela. Grčki filozof i matematičar Proklos (411. − 485.) pripisuje Talesu točno predviđanje pomrčine Sunca u svibnju 585. g. pr. Kr., a također i poznavanje sljedećih pet teorema:

- Svaki dijametar raspolavlja krug.
- Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.
- Vršni kutovi su jednaki.
- KSK-teorem o sukladnosti trokuta: Dva trokuta su sukladna ako imaju jednu jednako dugu stranicu i jednake njoj priležeće kutove.
- **Talesov teorem:** Kut nad dijametrom kruga je pravi.

Iako su Egićani i Babilonci empirijski znali navedene teoreme, pretpostavlja se da je Tales prvi koji je te teoreme dokazao. Prva četiri teorema Proklos pripisuje Talesu, a peti mu se pripisuje na osnovi odjeljka u knjizi Diogenesa Laertiusa (2. st. n. e.). U opisu drugog teorema Proklos koristi riječ značenja više „sličan“ nego „jednak“ jer se pretpostavlja da

Tales nije imao načina za mjerenje kutova. Četvrti teorem mu se pripisuje jer je prvi grčki povjesničar i filozof Eudemos Rodos (370. pr. Kr. – 300. pr. Kr.) tvrdio da je Tales sigurno morao znati taj teorem za svoju metodu nalaženja udaljenosti broda od obale.

Tales se bavio i praktičnim problemima. Pretpostavlja se da je Tales izračunao visinu piramide metodom omjera duljina sjena. Navodno je promatrao dva slična trokuta prikazana na slici 4.1. Uspoređivao je visinu piramide h s visinom štapa h', kao i duljinu sjene piramide s s duljinom sjene štapa koji je okomito zaboden u zemlju. Duljina brida baze piramide iznosila je 756 stopa, a duljina štapa je bila 6 stopa. Bilo je dovoljno izmjeriti sjenu piramide (udaljenost od vrha sjene do središta baze piramide) i sjene štapa. Duljina sjene od kraja baze do vrha sjene piramide iznosila je 342 stope, a duljina sjene štapa 9 stopa.



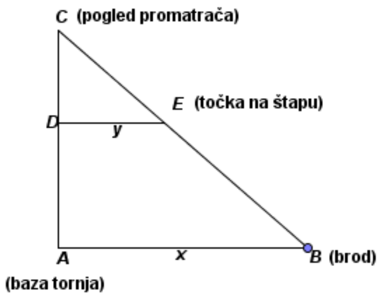
Slika 4.1: Kako je Tales navodno izračunao visinu piramide (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Dobio je, kažu, sljedeći omjer

$$h = \frac{sh'}{s'} = \frac{(378 + 342) \cdot 6}{9} = \frac{2}{3} \cdot 720 = 480 \tag{4.1}$$

Tražena visina piramide je 480 stopa.

Drugi praktični problem za kojeg se često navodi da se Tales njime bavio je određivanje udaljenosti broda od obale. Pretpostavlja se da je koristio teorem o sukladnosti trokuta (gore naveden pod 4). Izvori navode da je Tales promatrao brod s vrha tornja visine h, a koristio je proporcionalnost stranica sličnih pravokutnih trokuta. Dano mjerenje prikazano je na slici 4.2..



Slika 4.2: Mjerenje udaljenosti broda od obale (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Ako je x nepoznata udaljenost broda, tada vrijedi

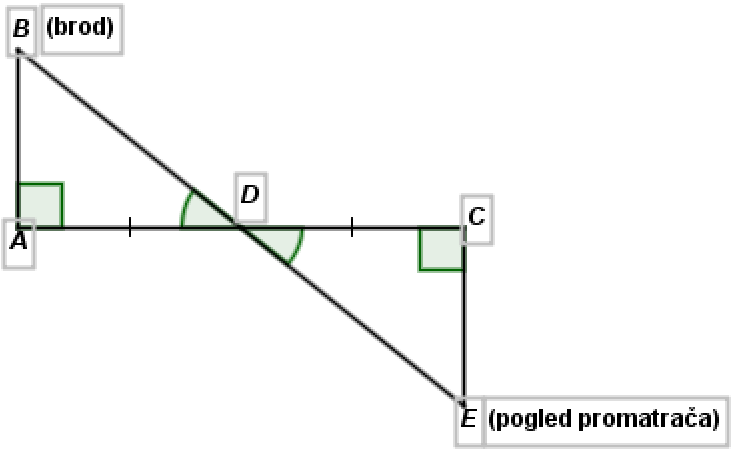
$$\frac{x}{y} = \frac{l+h}{l} \tag{4.2}$$

odnosno

$$x = \frac{y \cdot (h+l)}{l} \tag{4.3}$$

Drugi mogući pristup prikazan na slici 4.3. je nalaženje udaljenosti x od obale A do broda B. Odaberemo proizvoljnu dužinu $\overline{AC}$, odredimo polovište D dužine $\overline{AC}$. Od C povučemo liniju okomitu na $\overline{AC}$ suprotno od $\overline{AB}$ i tako da E bude na pravcu BD. Jasno je da $\overline{CE}$ ima istu duljinu kao i dužina $\overline{AB}$. Dužinu $\overline{CE}$ možemo izmjeriti , tj. onda znamo i duljinu $\overline{AB}$.

Ovaj pristup ima nedostatak. U određivanju udaljenosti broda od obale, promatrač bi na obali trebao formirati trokut velikih dimenzija. Takvo mjerenje u praksi bi bilo teško i neprecizno. Prihvatljivije je pretpostaviti da je trokut ECD sličan trokutu BAD nego sukladan.[6]



Slika 4.3: Mjerenje udaljenosti broda od obale na drugi način (izvornik:The History of Mathematics - An Introduction, David M. Burton, McGraw-Hill, New York, 1997)

Poglavlje 5

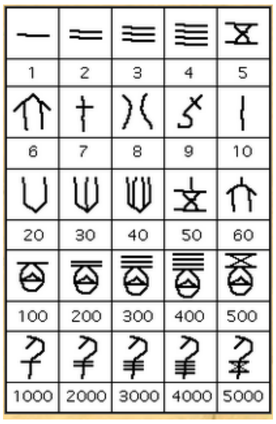
Matematika drevne Kine

Ne zna se točno kada se u Kini počela razvijati matematika, ali pretpostavlja se da je to bilo u 3. tisućljeću prije Krista neovisno o razvoju matematike u drugim civilizacijama. Prirodne granice Kine (planine i mora) izolirale su Kinu od ostalog dijela svijeta. Posljedica toga je kontinuirani kulturni razvoj. Kinesko pismo potječe iz drugog tisućljeća pr. Kr.. Kineska matematika kao i njihov jezik je vrlo koncizna. Orjentirana je na nalaženje algoritama za računanje i rješavanje konkretnih problema vezanih uz trgovinu, mjerenje zemljišta i poreza, a nije deduktivnog tipa.

U 19. st. na arheološkom nalazištu u selu Xiao Dun nađeno je tisuće kostiju i oklopa kornjači u koje su bili urezani drevni kineski znakovi. Slika 5.1. prikazuje jedan takav nalaz. Pretpostavlja se da potječu iz 14. st. pr. Kr. i bili su dio vjerskog obreda.

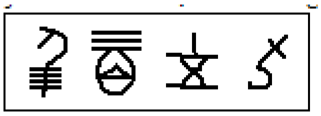
Slika 5.1: Numerički simboli zapisani na kostima stoke (izvornik:`http://ahyco.uniri.hr/seminari2007/povijestmatematike/3-2.htm`)

Mnogi nalazi sadrže numeričke podatke o poginulima, zarobljenicima, broju životinja ubijenih u lovu, broju dana ili mjeseci. Sustav koji su koristili bio je decimalni, aditivan i multiplikativan. U tablici 5.2. prikazani su tada korišteni simboli. Tako se simbol broja 200 sastojao od simbola broja 2 i simbola broja 100. Simbol broja 3000 sastojao se od simbola broja 3 i simbola broja 1000. Simbol broja 10 000 nije naveden u tablici ali se pretpostavlja da imao je oblik škorpiona.



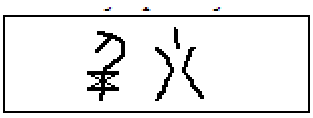
Slika 5.2: Simboli za brojeve 2000. g. pr. Kr. (izvornik:http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals.html)

Aditivnost sustava najbolje ilustrira broj 4359 prikazan na slici 5.3.. S lijeva na desno nalaze se simbol za broj 4000, zatim simbol za 300, simbol za 50 i na kraju simbol za 9.



Slika 5.3: Broj 4359 (izvornik:`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals.html`)

Sustav nije bio pozicijski, tako da je broj 5080 bio predstavljen simbolima kao na slici 5.4. Sastojao se od simbola broja 5000 i simbola broja 80.



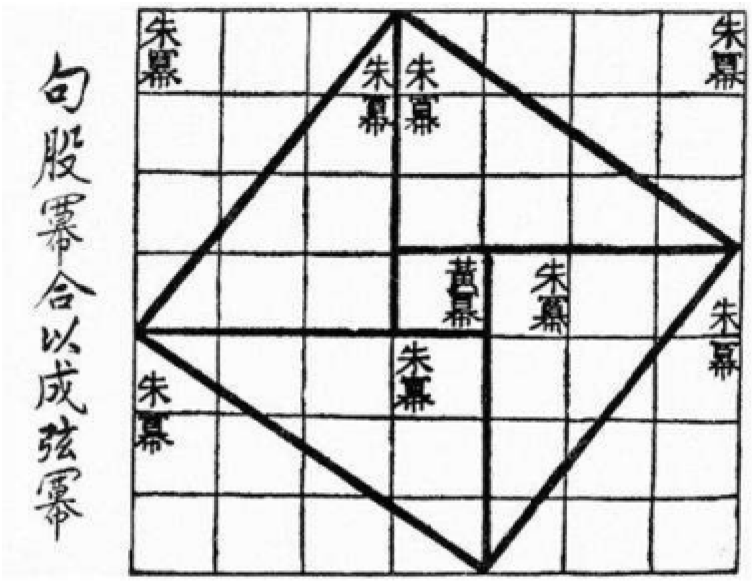
Slika 5.4: Broj 5080 (izvornik:`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals.html`)

Najstariji sačuvani kineski matematički tekstovi potječu tek iz doba oko 200. g. pr. Kr. , no to je čini se posljedica spaljivanja većine knjiga 213. g. pr. Kr. po naredbi vladajućeg tiranina.

Svakako je među najzanimljivijim starokineskim matematičkim otkrićima prvi poznati magični kvadrat. Budući da nema drugih konkretnih pisanih dokaza o njegovom otkriću, sve se oslanja na jednu legendu. Oko 2200. g. pr. Kr. zavladala je velika poplava i narod je nudio žrtvu bogu rijeke *Lo*. Tada je iz rijeke isplivala kornjača na čijem oklopu je bio vidljiv magični kvadrat. To je tablica s tri reda i stupca u kojoj se nalaze brojevi od 1,..,9. Zbroj u svakom redu i stupcu iznosi 15, što je ujedno i broj dana u jednom od 24 ciklusa kineske sunčane godine. Kornjaču je odnio u palaču na pručavanje. Posjećivali su je poznati matematičari te je tako postala najpoznatija kornjača na svijetu. Taj navedeni uzorak prikazan na slici 5.5. dobio je ime *Lo-Shu*.

Slika 5.5: Lo Shu magični kvadrat (izvornik:http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=655)

Neki izvori navode da su se u 6. st. pr. Kr. neki zadaci rješavali koristeći Pitagorin poučak i na slici 5.6. je prikazana ilustracija Pitagorinog poučka bez eksplicitnog dokaza.[6]



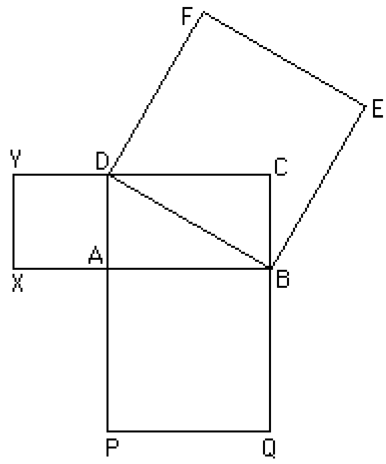
Slika 5.6: Ilustracija Pitagorinog poučka u drevnoj Kini (izvornik:http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f5/Chineese_Pythagorean)

Poglavlje 6

Staroindijska matematika

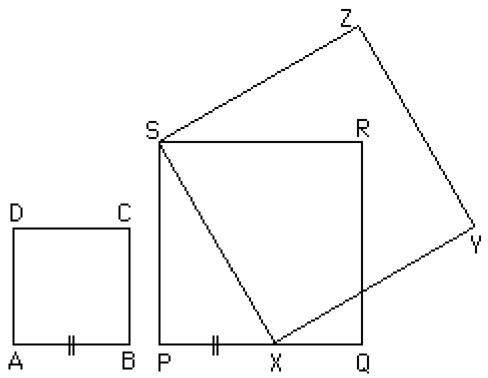
U dolini rijeke Inda prvu civilizaciju nalazimo u razdoblju 2500. – 1700. g. pr. Kr.. Razvoj matematike u tom području poticale su trgovina, građevina i astronomija. Arheološki nalazi u Mohenjodaro i Harrapa svjedoče o korištenju osnovne matematike. Ta rana civilizacija imala je razvijen sustav mjera. Imali su razvijenu tehnologiju za izradu opeka. Omjer bridova opeke bio je 4 : 2 : 1. Taj omjer i danas se smatra optimalnim za učinkovito zidanje. Mnogi pronađeni utezi imali su poznati geometrijski oblik (kocke, cilindra) te nam dokazuju da su imali osnovna geometrijska znanja. Najstariji pismeni podaci iz Indije su iz kasnijeg razdoblja Veda (pisanih na sanskrtu u razdoblju 1500. – 500. g. pr. Kr.), iz kojeg također potječu i najstariji poznati matematički tekstovi *Sulvasutre* („Pravila konopa“). *Sulvasutre* su dodaci vjerskim tekstovima poznatim kao Vede. U Vedama se nalaze pravila za mjerenje i izgradnju oltara. Na oltare su prinosili žrtve bogovima, a ako su bogovi bili zadovoljni to je za vjernike značilo zdravlje, sreću i materijalno bogatstvo. Oltari su zato morali biti precizno izgrađeni, tako da je matematička točnost bila od velike važnosti. Neke opisane konstrukcije su egzaktne (npr. konstrukcija kvadrata s površinom jednakom dvostrukoj površini zadanog pravokutnika), a neke aproksimativne (npr. konstrukcija kvadrature kruga), no nigdje se ne navodi je li metoda egzaktna ili aproksimativna. Sva pravila u *Sulvasutrama* su dana bez dokaza. Među *Sulvasutrama* najvažnije su *Baudhayana Sulvasutra* (oko 800. g. pr. Kr.) i *Apastamba Sulvasutra* (oko 600. g. pr. Kr.), gdje su imena *Sulvasutri* imena njihovih pisaca.

U *Baudhayana Sulvasutri* koristi se Pitagorin teorem, zapravo njegov specijalan slučaj za jednakokračani pravokutni trokut, no u kasnijim *Sulvasutrama* može se naći i opći oblik: „Konop rastegnut preko dijagonale pravokutnika daje površinu koju čine vodoravna i okomita stranica.“ Pritom pod površinom proizvedenom dužinom podrazumijevaju površinu kvadrata kojem je to stranica. Skica za navedeni problem dana je na slici 6.1.



Slika 6.1: Zadatak koji je navodno nađen u *Baudayana Sulvasutri* (izvornik:`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras.html`)

Navedimo još nekoliko primjera geometrijskih konstrukcija iz Sulvasutri. U sljedećem primjeru treba odrediti kvadrat čija je površina jednaka zbroju površina dvaju kvadrata različitih duljina stranica.

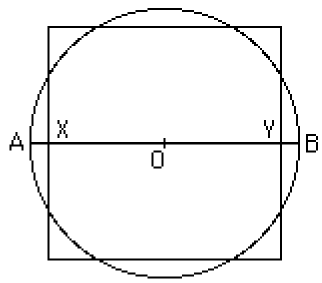


Slika 6.2: Problem navodno nađen u *Baudayana Sulvasutri* (izvornik:`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras.html`)

Zadana su dva kvadrata $ABCD$ i $PQRS$. Na $\overline{PQ}$ označimo točku X, tako da duljina $\overline{PX}$ jednaka duljini $\overline{AB}$. Na $\overline{SX}$ nacrtajmo kvadrat. Zbroj površina kvadrata $ABCD$ i $PQRS$ jednak je površini kvadrata nad $\overline{SX}$. Iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|PX|^2 + |PS|^2 = |SX|^2 \tag{6.1}$$

U Sulvasutrama su dane metode za konstrukciju kruga iste površine kao zadani kvadrat. Najčešće se uzima $\frac{13}{15}$ promjera kao stranica kvadrata prikazanog na slici 6.3.

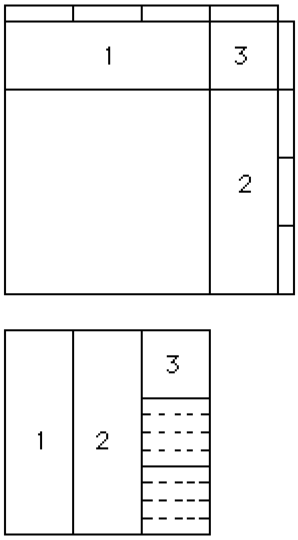


Slika 6.3: Metoda za određivanje kruga iste površine kao kvadrat (izvornik:http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras.html)

U danom slučaju aproksimacija broja $\pi = 4 \cdot (\frac{13}{15})^2 = \frac{676}{225} = 3,00444$ što je lošija aproksimacija nego što je bila poznata kod Babilonaca.
Osim navedene aproksimacije broja π javljaju se i mnoge druge aproksimacije, koje se ovisno o konstrukcijama svode na 2,99, 3, 3,004, 3,029, 3,047, 3,088, 3,1141, 3,125, 3,16049 i 3,2022.
Zanimljiv rezultat iz *Sulvasutri* je aproksimacija $\sqrt{2}$ točno na pet decimala, dana pravilom:
„ Povećaj jediničnu dužinu za trećinu i tu trećinu za njenu četvrtinu umanjenu za tridesetčetvrtinu te četvrtine.“
Drugim riječima, radi se o aproksimaciji

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{488} = 1.414215686 \tag{6.2}$$

Upitno je zašto mu je trebala tolika točnost. Nema pisanih dokaza kako su autori *Sulvasutri* dobili taj izuzetan rezultat. Indijski matematičar B. Datta je 1932. godine u svom djelu *The science of the Sulba* (1932.) iznio je pretpostavku kako je autor *Sulvasutri* došao do ovako točne aproksimacije. Pretpostavio je da je trebalo izgraditi oltar dvostruko veći od promatranog oltara. Njegova ideja prikazana je na slici 6.4. Uzmu se dva kvadrata jednakih stranica. Drugi kvadrat podijeli se na tri jednaka pravokutnika. Pravokutnici se izrežu i prva dva slažu se oko prvog kvadrata u položaj 1 i 2. Od trećeg pravokutnika izreže se najveći kvadrat i stavi u položaj 3. Slaganjem se dobio novi kvadrat, no potrebno je i ostatak poslagati oko prvog kvadrata. Preostali dio trećeg pravokutnika podijeli se na osam jednakih dijelova koji se slažu oko prvog kvadrata. Sada su iskorišteni svi dijelovi drugog kvadrata, ali se može uočiti da nedostaje mali dio u novom kvadratu, tj. dobili smo „nepotpuni“ kvadrat.



Slika 6.4: Pretpostavka kako je Apastamba našao aproksimaciju $\sqrt{2}$ (izvornik:`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Indian_sulbasutras.html`)

Duljina stranice „ nepotpunog“ kvadrata iznosi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \tag{6.3}$$

Postavlja se pitanje koliko jednu stranicu moramo smanjiti ,a drugu povećati da bi dobili potpuni kvadrat. Dio koji nedostaje ima površinu

$$(\frac{1}{12})^2. \tag{6.4}$$

Ako je x duljina stranice odrezanog dijela onda vrijedi

$$2 \cdot x \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}) = (\frac{1}{12})^2 \tag{6.5}$$

te slijedi da je

$$x = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \tag{6.6}$$

što približno iznosi 0,002450980392. Sada smo dobili kvadrat čija duljina stranice iznosi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 34} \tag{6.7}$$

što je točna aproksimacija koju daje Apastamba Sulvasutra. Postavlja se pitanje kada se dekadski brojevni sustav počeo razvijati u Indiji? Neka istraživanja svjedoče o tome da su stanovnici doline rijeke Ind koristili rane oblike dekadskog sustava 3000 godina pr. Kr.. U to vrijeme pravi pozicijski sustav nije bio razvijen kao ni simboli za brojeve od jedan do devet. Nakon razdoblja Veda nastaje razdoblje Jaina [1]. Iz tog doba sežu ideje o beskonačnosti i bavljenje velikim brojevima te osnove kombinatorike.[6]

[1]Jainizam je religija i filozofija osnovana u Indiji oko 600. g. pr. Kr.. Neki izvori tvrde da doprinosi Jainizma traju od oko 500. g. pr. Kr. do 18. stoljeća poslije Krista.

Poglavlje 7

Zaključak

Ovaj rad se bavio matematičkim dostignućima do 500. g. pr. Kr., tj. do doba pitagorejaca kada se matematika prvi put pojavljuje kao izraz, no ne u suvremenom značenju. Zbog utjecaja pitagorejaca 500. g. pr. Kr. smatra se prijelomnom u povijesti matematike. Nakon tog perioda objekti matematike postaju apstraktni i pojavljuje se potreba za logičkim dokazivanjem matematičkih činjenica. U prapovijesti primitivni narodi brojali su različite objekte. Broj prebrojanih objekata bilježili su na različite načine, pomoću rovaša, žetoni i čvorova. S pojavom pisma javljaju se i brojke. U kasnijem periodu, u različitim kulturama razvile su se razičite brojke i brojevni sustavi: decimalni i seksagezimalni. Istaknuti ćemo najvažnije značajke pojedine kulture. U Egiptu su nađena dva važna povijesna nalaza: Rhindov i Moskovski papirus. Iz njih saznajemo da su Egipćani rješavali praktične probleme, poznavali su osnovne četiri računske operacije i drugi korijen, te su rješavali zadatke s površinama i volumenima. Brojeve nisu smatrali apstraktnim vrijednostima, hijeroglifski brojevni sustav bio je dekadski, aditivan i nepozicijski. Poznavali su i jedinične razlomke. U Babilonu je bilo razvijeno klinasto pismo, a koristili su kombinaciju dekadskog i seksagezimalnog sustava. Babilonci su prvi u povijesti koristili pozicijski seksagezimalni sustav. Sustav je bio aditivan. Rješavali su i kvadratne jednadžbe ali samo s pozitivnim rješenjima. U Grčkoj upoznajemo prvog poznatog grčkog matematičara Talesa iz Mileta. Pretpostavlja se da je prenio geometrijska znanja u Grčku i koristio svojstva sličnih trokuta na izračunavanje udaljenosti broda ili visine piramide. Karakteristika drevne kineske matematike je bavljenje konkretnim problemima i postupcima za njihovo rješavanje. Sustav je bio decimalan, aditivan i multiplikativan. Indijsku matematiku do 500. g. pr. Kr. karakterizira decimalni sustav mjera, rješavanje praktičnih problema, bila je iskustvena i bez dokaza. U povijesnim nalazima opisana su mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara. Konstrukcije su bile egzaktne i apromaksitivne. Našli su geometrijsko rješenje jednadžbe $a \cdot x = b$, aproksimaciju $\sqrt{2}$ točno na pet decimala. U indijskoj matematici nalazimo na osnove kombinatorike, teorije brojeva i algebre.

Bibliografija

[1] F.M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2007.

[2] D. Burton, *The History od Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, 2007.

[3] D. Jankov, *Egipatski razlomci*, Osječki matematički list **11** (2011), 11–18.

[4] P. Jha, *Contributions of the Jainas to astronomy and mathematics*, Math. Ed. (Siwan) **18** (1984), br. 3, 98–107.

[5] D. Medić, *Povijest brojeva i njihove notacije*, Diplomski rad, Zagreb, 2011.

[6] *Ancient Egyptian mathematics*, The MacTutor History of Mathematics archive, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history`

[7] S.W. Williams, *The Mathematics od Ancient Egypt*, University of New York at Buffalo, `http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt.html`

[8] L. Cooper, *Historia Mathematica*, Elsevier **38** (2011), br. 4, 455–590.

[9] `http://ahyco.uniri.hr/seminari2007/povijestmatematike/3-2.htm`

Poglavlje 8

Sažetak

U radu se upoznajemo s načinima bilježenja brojeva i količina u starome vijeku do rane antike, tj. u doba u kojemu je matematika bila empirijska. Naime, oko 500. g. pr. Kr. je - bar za zapadnu civilizaciju - došlo do preokreta u matematici jer je ona u to doba pod utjecajem pitagorejske škole postala apstraktna, a tvrdnje su se počele dokazivati. Navodimo značajke najranijih i razvijenih civilizacija. Opisano je kako se matematika počela razvijati zbog praktičnih ljudskih potreba. Opisana su najvažnija dostignuća u pojedinim civilizacijama te povijesni izvori iz kojih to doznajemo. Među ostalim zapisano je kako su zapisivali brojeve te koje su brojevne sustave koristili. Kroz primjere je prikazano kako su zbrajali, oduzimali, množili i dijelili te zapisivali razlomke.

Poglavlje 9

Summary

The thesis presents the methods of ancient recording of numbers and quantities. About 500 BC a significant turn - at least for Western civilisation - in mathematics appeared as the influence of the Pythagoreans changed her into an abstract science in which claims are to be proven. Presented are the important characteristics of the earliest advanced civilizations. It is demonstrated that mathematics started to develop as a result of the practical human needs. The most important accomplishments of each civilization are described, and so are the historical sources. Among other things, it is described how the numbers were written in specific ancient cultures, and which numeral systems were used. Examples present methods of addition, subtraction, multiplication, division, and expressing fractions.