Takensov teorem i primjene

Živković, Karla

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karla Živković

TAKENSOV TEOREM I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, Rujan, 2015

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

Teorija dinamičkih sustava proučava dugoročno ponašanje sustava u razvoju. Pod terminom dinamičkih sustava smatramo matematičke objekte koji se koriste za modeliranje nekih fizikalnih pojava čija se stanja mijenjaju s vremenom.

Moderna teorija dinamičkih sustava nastala je u 19. stoljeću iz istraživanja stabilnosti i razvitka solarnog sustava. Ona izvire kao posebna tema iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi, te se razvila u bogatu i moćnu teoriju koja danas svoju primjenu nalazi u fizici, biologiji, meteorologiji, astronomiji, ekonomiji i financijama, u raznim medicinskim istraživanjima, istraživanju okoliša, industrijskog razvoja i mnogim drugima. Zbog svoje mladosti i zanimljivosti ova grana matematike vrlo je privlačna za proučavanje.

Cilj ovog diplomskog rada je upoznati se sa osnovnim pojmovima i primjerima dinamičkih sustava, teorijom dimenzija i osnovnim rezultatima teorija ulaganja u terminima proučavanih definicija dimenzije, te izreći i obraditi jedan od najvažnijih rezultata teorije dinamičkih sustava - Takensov teorem.

Poglavlje 1

Uvod u dinamičke sustave

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1.1. *Diskretni dinamički sustav sastoji se od nepraznog skupa X i preslikavanja $f\colon X \to X$.*

Za $n \in \mathbb{N}$, n-ta iteracija preslikavanja f je n-terostruka kompozicija $f^n = f \circ \ldots \circ f$ gdje je f^0 identiteta i označavamo ju sa Id.

Napomena 1.1.2. *Ako je f invertibilno preslikavanje, tada je $f^{-n} = f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$, n puta. S obzirom da vrijedi $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, navedene iteracije čine polugrupu, a ukoliko je f invertibilna čine grupu.*

Iako smo dinamičke sustave definirali u potpuno apstraktnom okruženju, bez posebnih zahtjeva na skup X, u praksi X ima dodatne zahtjeve na strukturu koja je očuvana preslikavanjem f. Na primjer, (X, f) može biti metrički prostor i izometrija, topološki prostor i neprekidna funkcija ili glatka mnogostrukost i diferencijabilna funkcija.

Definicija 1.1.3. *Neprekidni dinamički sustav sastoji se od prostora X i jednoparametarske familije preslikavanja $\{f^t\colon X \to X\}$, $t \in \mathbb{R}$ ili $t \in \mathbb{R}_0^+$, koja formiraju jednoparametarsku grupu ili polugrupu, to jest $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ i $f^0 = Id$.*

Ukoliko je vrijeme $t \in \mathbb{R}$, dinamički sustav nazivamo tokom, a ako je $t \in \mathbb{R}_0^+$ polutokom.

Napomena 1.1.4. *Budući da je za $t \in \mathbb{R}$ $f^{-t} = (f^t)^{-1}$, preslikavanje f^t je invertibilno. Za fiksni t_0 iteracije $(f^{t_0})^n = f^{t_0 n}$ čine diskretni dinamički sustav.*

Terminom dinamički sustav označavat ćemo i diskretni i neprekidni slučaj. Većina pojmova i rezultata dinamičkih sustava ima diskretnu i neprekidnu verziju, te često rezultate za neprekidnu izvodimo iz diskretne verzije. Elemente dinamičkog sustava označavat ćemo sa f^t, gdje je $t \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}_0^+$.

Definicija 1.1.5. *Za $x \in X$ definiramo:*

(i) pozitivnu poluorbitu s $O_f^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} f^t(x)$;

(ii) negativnu poluorbitu (u invertibilnom slučaju) s $O_f^-(x) = \bigcup_{t \leq 0} f^t(x)$;

(iii) orbitu s $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \bigcup_t f^t(x)$.

Definicija 1.1.6. *Za točku $x \in X$ kažmo da je periodička točka s periodom $T > 0$ ako je $f^T(x) = x$. Orbitu periodičke točke zovemo periodička orbita.*

Ako vrijedi $f^t(x) = x, \forall t$, tada je x fiksna točka.

Ako je x periodička, ali ne i fiksna, tada se najmanji pozitivni T, takav da vrijedi $f^T(x) = x$, zove minimalni period od x.

Ako je $f^s(x)$ periodička za neki $s > 0$, tada za x kažemo da je eventalno periodička točka. U inertibilnom dinamičkom sustavu eventualno periodičke točke su periodičke.

Za $A \subset X$ i $t > 0$ neka je $f^t(A)$ slika od A, a f^{-t} praslika od A po preslikavanju f^t. $f^{-t}(f^t(A))$ sadrži A, ali za neinvertibilne dinamičke sustave općenito nije jednako A.

Definicija 1.1.7. *Za $A \subset X$ kažemo da je:*

(i) f-invarijantan ako $f^t(A) \subset A, \forall t$;

(ii) unaprijed f-invarijantan ako $f^t(A) \subset A, \forall t \geq 0$;

(iii) unatrag f-invarijantan ako $f^{-t}(A) \subset A, \forall t \geq 0$.

Definicija 1.1.8. *Neka su $f^t \colon X \to X$ i $g^t \colon Y \to Y$ dinamički sustavi. Polukonjugacija sa (Y, g) na (X, f) je surjektivno preslikavanje $\pi \colon Y \to X$ koje zadovoljava $f^t \circ \pi = \pi \circ g^t, \forall t$. Invertibilnu polukonjugaciju nazivamo konjugacija.*

Napomena 1.1.9. *Kažemo da dva dinamička sustava konjugiraju ako postoji konjugacija među njima. Konjugacija je relacija ekvivalencije.*

U svrhu proučavanja i klasificiranja dinamičkih sustava često tražimo konjugaciju ili polukonjugaciju, također promatramo klase ekvivalencije određene konjugacijom, uz očuvanje određene strukture. U nekim klasama dinamičkih sustava koristimo riječ izomorfizam umjesto konjugacije.

Definicija 1.1.10. *Ako postoji polukonjugacija π sa g u f, tada za (X, f) kažemo da je faktor od (Y, g), a (Y, g) ekstenzija od (X, f). Preslikavanje $\pi\colon Y \to X$ se također naziva faktorsko preslikavanje ili projekcija.*

Primjer 1.1.11. *Najjednostavniji primjer ekstenzije je direktni produkt dva dinamička sustava $f_i^t\colon X_i \to X_i,\ i = 1, 2$;*

$$(f_1 \times f_2)^t\colon X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$$

pri čemu je $(f_1 \times f_2)^t(x_1, x_2) = (f_1^t(x_1), f_2^t(x_2))$. Projekcija $X_1 \times X_2$ na X_1 ili X_2 je polukonjugacija, iz čega slijedi da su (X_1, f_1) i (X_2, f_2) faktori od $(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2)$.

1.2 Rotacije kružnice

Promatrajmo jediničnu kružnicu $S^1 = [0, 1]/\sim$, gdje $\sim$ označava da su 0 i 1 identificirane. Dodatno, mod 1 čini S^1 Abelovom grupom. Prirodna udaljenost na $[0, 1]$ inducira udaljenost na S^1; posebno

$$d(x, y) = min(|x - y|, 1 - |x - y|).$$

Lebesgueova mjera na $[0, 1]$ daje prirodnu mjeru λ na S^1, koju također zovemo Lebesgueova mjera.

Također, jediničnu kružnicu možemo opisati kao skup $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\}$, sa kompleksnim množenjem kao zadanom binarnom operacijom na danoj grupi. Navedeni zapisi povezani su sa $z = e^{2\pi ix}$, što je izometrija ako podijelimo duljinu luka multiplikativne kružnice sa 2π. Općenito ćemo koristiti aditivnu notaciju za kružnicu.

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ neka je R_α rotacija od S^1 za kut $2\pi\alpha$, to jest

$$R_\alpha x = x + \alpha \ mod\ 1.$$

Skup $\{R_\alpha\colon \alpha \in [0, 1)\}$ je komutativna grupa s kompozicijom kao grupnom operacijom, $R_\alpha \circ R_\beta = R_\gamma$, pri čemu je $\gamma = \alpha + \beta \ mod\ 1$. Primjetimo da je R_α izometrija, čuva udaljenost d, te također čuva Lebesgueovu mjeru λ, to jest Lebesgueova mjera skupa jednaka je Lebesgueovoj mjeri praslike tog skupa.

Ako je $\alpha = p/q$ racionalan broj, tada je $R_\alpha^q = Id$, pa je svaka orbita periodička. S druge strane, ukoliko je α iracionalan, tada je svaka pozitivna poluorbita gusta u S^1. Zaista, princip razmještanja implicira da za svaki $\epsilon > 0$ postoje $m, n < 1/\epsilon$ takvi da $m < n$ i $d(R_\alpha^m, R_\alpha^n) < \epsilon$. Stoga je R^{m-n} rotacija za kut manji od ϵ, pa je svaka pozitivna poluorbita

ϵ-gusta u S^1. Budući da je ϵ proizvoljan, svaka pozitivna poluorbita je gusta.

Za iracionalni α, gustoća svake orbite od R_α implicira da je S^1 jedini R_α-invarijantan zatvoren neprazan podskup. Dinamički sustav bez pravih zatvorenih nepraznih invarijantnih podskupova zovemo minimalni dinamički sustav. Svaki R_α-invarijantan podskup od S^1 je ili mjere 0 ili pune mjere. Izmjeriv dinamički sustav s ovim svojstvom zovemo ergodski.

Rotacije kružnice su primjer vrlo važne klase dinamičkih sustava koje proizlaze iz translacija grupa.

Definicija 1.2.1. *Za danu grupu G i dani element $h \in G$, definiramo preslikavanja $L_h \colon G \to G$ i $R_h \colon G \to G$ sa*

$$L_h g = hg \quad i \quad R_h g = gh.$$

Ta preslikavanja zovemo lijeva i desna translacija po h. Posebno, ako je G komutativna $L_h = R_h$.

Definicija 1.2.2. *Topološka grupa je topološki prostor G sa strukturom grupe takvom da su grupna operacija množenja $(g, h) \mapsto gh$, sa inverzom $g \mapsto g^{-1}$ neprekidna preslikavanja.*

Definicija 1.2.3. *Homomorfizam između dvije topološke grupe je preslikavanje koje čuva strukturu grupe. Neprekidni homomorfizam topološke grupe na samu sebe zove se endomorfizam, ukoliko ima inverz zovemo ga automorfizam.*

Mnogi važni primjeri dinamičkih sustava proizlaze iz translacija ili endomorfizama topoloških grupa.

1.3 Prošireni endomorfizmi kružnice

Definicija 1.3.1. *Za $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > 1$, definiramo m-terostruko preslikavanje $E_m \colon S^1 \to S^1$ sa*

$$E_m x = mx \; mod \; 1.$$

Definirano preslikavanje je neinvertibilni endomorfizam grupa na S^1. Svaka točka ima m praslika. Za razliku od rotacija kružnice, E_m proširuje duljinu luka i udaljenost između susjednih točaka za faktor m; ako je $d(x, y) \leq 1/(2m)$, tada je $d(E_m(x), E_m(y)) = md(x, y)$.

Definicija 1.3.2. *Preslikavanje (metričkog prostora) koje povećava udaljenosti susjednih točaka za faktor najmanje $\mu > 1$ zovemo širenje.*

Preslikavanje E_m čuva Lebesgueovu mjeru λ na S^1 u sljedećem smislu: ako je $A \subset S^1$ izmjeriv, tada je $\lambda(E_m^{-1}(A)) = \lambda(A)$. Primjetimo da je za dovoljno mali interval I, $\lambda(E_m(I)) = m\lambda(I)$.

Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Sada ćemo konstruirati polukonjugaciju sa nekog drugog prirodnog dinamičkog sustava na E_m.

Definicija 1.3.3. *Neka je* $\Sigma = \{0, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ *skup nizova elemenata iz* $\{0, \ldots, m-1\}$. *Pomak* $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma$ *je preslikavanje koje odbacuje prvi element niza i pomiče preostale elemente niza za jedno mjesto ulijevo:*

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Prikaz u bazi m broja $x \in [0, 1]$ je niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ takav da $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/m^i$. Analogno s decimalnom notacijom pišemo $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$. Prikaz u bazi m nije uvijek jedinstven; razlomak čiji je nazivnik potencija broja m može se prikazati kao niz sa zadnjim m-1 znamenkama ili kao niz sa zadnjim nulama. Na primjer, u bazi 5, imamo $0.1444\ldots = 0.200\ldots = 2/5$.

Definirajmo preslikavanje

$$\phi \colon \Sigma \to [0, 1], \qquad \phi((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{m^i}.$$

Na ϕ gledamo kao na preslikavanje na S^1 pomoću identificiranja 0 i 1. Preslikavanje ϕ je surjektivno, te injektivno osim na prebrojivom skupu nizova sa zadnjim znamenkama 0 ili $m-1$. Ako je $x = 0.x_1x_2x_3\ldots \in [0, 1)$, tada je $E_m x = 0.x_2x_3\ldots$. Stoga je $\phi \circ \sigma = E_m \circ \phi$, dakle ϕ je polukonjugacija sa ϕ na E_m.

Sada možemo iskoristiti polukonjugaciju E_m sa pomakom σ kako bi izveli svojstva za E_m. Na primjer, niz $(x_i) \in \Sigma$ je periodička točka za σ s periodom k ako i samo ako je (x_i) periodički niz perioda k, to jest $x_{k+i} = x_i, \forall i$. Slijedi da je broj periodičkih točaka za σ perioda k jednak m^k. Općenitije, (x_i) je periodička za σ ako i samo ako je niz (x_i) periodičan. Točka $x \in S_1 = [0, 1]/\sim$, je periodička za E_m s periodom k ako i samo ako x ima prikaz u bazi m, $x = 0.x_1x_2\ldots$, koji je periodičan s periodom k. Zato je broj periodičkih točaka perioda k od E_m jednak $m^k - 1$.

Neka je $\mathcal{F}_m = \cup_{k=1}^{\infty}\{0, \ldots, m-1\}^k$ skup svih konačnih nizova elemenata iz skupa $\{0, \ldots, m-1\}$. Podskup $A \subset [0, 1]$ je gust ako i samo ako se svaki konačan niz $w \in \mathcal{F}_m$ pojavljuje na početku razvoja u bazi m nekog elementa iz A. Slijedi da je skup periodičkih točaka gust u S^1. Orbita točke $x = 0.x_1x_2\dots$ je gusta u S^1 ako i samo ako se svaki konačan niz iz $\mathcal{F}_m$ pojavljuje u nizu (x_i). Budući da je $\mathcal{F}_m$ prebrojiv, možemo konstruirati takvu točku ulančavanjem svih elemenata iz $\mathcal{F}_m$.

Iako ϕ nije injekcija, možemo konstruirati desni inverz od ϕ. Promatrajmo particiju od $S^1 = [0,1]/\sim$ na intervale

$$P_k = [k/m, (k+1)/m), \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Za $x \in [0,1]$ definiramo $\psi_i(x) = k$ ako je $E_m^i x \in P_k$. Preslikavanje $\psi\colon S^1 \to \Sigma$, dano sa $x \mapsto (\psi_i(x))_{i=0}^{\infty}$ je desni inverz za ψ, to jest $\phi \circ \psi = Id\colon S^1 \to S^1$. Specijalno, $x \in S^1$ je jedinstveno određen nizom $(\psi_i(x))$.

Uporaba partricija za kodiranje točaka pomoću nizova je glavna motivacija dinamike simbola, koja se bavi proučavanjem pomaka na prostorima nizova.

1.4 Atraktori

Neka je X kompaktan topološki prostor i $f\colon X \to X$ neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.4.1. *Kažemo da je kompaktan skup $C \subset X$ atraktor ako postoji otvoreni skup U koji sadrži C, takav da $f(\overline{U}) \subset U$ i $C = \cap_{n\geq 0} f^n(U)$.*

Budući da je $f(C) = \cap_{n\geq 1} f_n(U) \subset C$ slijedi da $f(C) = C$. S druge strane, $C = \cap_{n\geq 1} f^n(U) = f(C)$ jer je $f(U) \subset U$. Štoviše, prednja orbita bilo koje točke $x \in U$ konvergira u C, to jest za bilo koji otvoren skup koji sadrži C, postoji $N > 0$ takav da $f^n(x) \in V$ za sve $n \geq N$. Da bismo ovo pokazali treba uočiti da je X pokriven s V zajedno s otvorenim skupovima $X \backslash f^n(\overline{U}), n \geq 0$. Radi kompaktnosti postoji konačan potpokrivač. Budući da je $f^n(U) \subset f^{n-1}(U)$, zaključujemo da postoji neki $N > 0$ takav da $X = V \cup (X \backslash f^n(\overline{U}))$ za svaki $n \geq N$. Prema tome , $f^n(x) \in f^n(U) \subset V$, za $n \geq N$.

Definicija 1.4.2. *Bazen atrakcije od C je skup $BA(C) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$.*

Bazen atrakcije je upravo skup točaka čije prednje orbite kovergiraju ka C.

Definicija 1.4.3. *Otvoren skup $U \subset X$ takav da je $\overline{U}$ kompaktan i $f(\overline{U}) \subset U$ zovemo područje hvatanja za f.*

Ako je U područje hvatanja, tada je $\cap_{n\geq 0} f^n(U)$ atraktor. U praksi, postojanje atraktora se pokazuje konstruiranjem područja hvatanja. Atraktor se može eksperimentalno proučavati numeričkim aproksimacijama orbita koje počinju u području hvatanja.

Najjednostavniji primjeri atraktora su: presjek slika potpunog prostora (ako je prostor kompaktan), privlačne fiksne točke(točke prema kojima sistem teži), privlačne periodičke orbite.

Mnogi dinamički sustavi imaju atraktore kompliciranije prirode. Kako bismo mogli opisati takve atraktore uvodimo sljedeće pojmove i definicije.

Definicija 1.4.4. *Dinamički sustav je determinitički u smislu da je evolucija sustava opisana posebnim preslikvanjem, takvim da sadašnjost (početno stanje) potpuno određuje budućnost (prednje orbite stanja).*

Definicija 1.4.5. *Kažemo da je dinamički sustav* (X, f) *iznimno osjetljiv na početne uvjete na* $X' \subset X$ *ako postoji* $\epsilon > 0$ *takav da za svaki* $x \in X'$ *i* $\delta > 0$ *postoji* $y \in X$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *za koje* $d(x, y) < \delta$ *i* $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$.

Definicija 1.4.6. *Za dinamički sustav kažemo da je kaotičan ako je iznimno osjetljiv na početne uvjete, to jest ako manje promjene u početnim uvjetima rezultiraju dramatičnim promjenama u dugoročnom ponašanju.*

Neki nelinearni sustavi imaju atraktore koji su kaotični (iznimno osjetljivi na početne uvjete). Takve atraktore nazivamo čudni ili kaotični atraktori. Najpoznatiji primjeri takvih atraktora su Hénonov atraktor i Lorenzov atraktor. Više o Lorenzovim jednadžbama i Lorenzovom atraktoru reći ćemo u zadnjem poglavlju ovog rada.

Poglavlje 2

Topološki dinamički sustavi

Definicija 2.0.7. *Topološki dinamički sustav je topološki prostor X i ili neprekidno preslikavanje $f\colon X \to X$ ili neprekidni (polu)tok f^t na X, to jest (polu)tok f^t za koji je preslikavanje $(t, x) \mapsto f^t(x)$ neprekidno.*

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je X lokalno kompaktan, metrizabilan i skoro prebrojiv skup, iako će mnogi rezultati ovog poglavlja vrijediti i pod slabijim pretpostavkama. Usmjerit ćemo našu pažnju na diskretne dinamičke sustave, premda će svi općeniti rezultati vrijediti također i za neprekidne dinamičke sustave.

Neka su X i Y topološki prostori. Prisjetimo se, neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam ukoliko je injektivno i ima neprekidan inverz.

Definicija 2.0.8. *Neka su $f\colon X \to X$ i $g\colon Y \to Y$ topološki dinamički sustavi. Topološka polukonjugacija sa g na f je surjektivno neprekidno preslikavanje $h\colon X \to Y$ takvo da vrijedi $f \circ h = h \circ g$.*

Napomena 2.0.9. *Ako je h homeomorfizam, onda ga zovemo topološka konjugacija, a za f i g kažemo da topološki konjugiraju, to jest da su izomorfni.*

Topološki konjugirani dinamički sustavi imaju jednaka topološka svojstva. Stoga, sva svojstva i invarijante koja ćemo spomenuti u ovom poglavlju, kao na primjer minimalnost, topološku tranzitivnost, ekstenzivnost i topološko miješanje, očuvana su topološkom konjugacijom.

Kroz ovo poglavlje sa (X, d) označavamo metrički prostor X sa metrikom d. Ako je $x \in X$ i $r > 0$, tada sa $B(x, r)$ označavamo otvorenu kuglu radijusa r sa središtem u x. Ako su (X, d) i (Y, d') metrički prostori , tada je $f\colon X \to Y$ izometrija ako je $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in X$.

2.1 Granični skupovi i povratnost

Definicija 2.1.1. *Neka je $f\colon X \to X$ topološki dinamički sustav, te neka je $x \in X$. Točka $y \in X$ je ω-granična točka od x ako postoji niz prirodnih brojeva $n_k \to \infty$ (kad $k \to \infty$) takav da vrijedi $f^{n_k} \to y$.*

ω-granični skup od x je skup $\omega(x) = \omega_f(x)$ svih ω_f graničnih točaka od x, to jest

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}.$$

Napomena 2.1.2. *Ukoliko je f invertibilna, α-granični skup od x je $\alpha(x) = \alpha_f(c) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$. Točka iz $\alpha(x)$ je granična točka od x. α- i ω-granični skupovi su zatvoreni i f-invarijantni.*

Definicija 2.1.3. *Za točku x kažemo da je (pozitivno) povratna ako je $x \in \omega(x)$; skup povratnih točaka označavamo sa $\mathcal{R}_f$ i on je f-invarijantan. Periodičke točke su ujedno i povratne.*

Definicija 2.1.4. *Za točku x kažemo da je 'nelutajuća' ako za svaku okolinu U od x postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Napomena 2.1.5. *Skup $NW(f)$ 'nelutajućih' točaka je zatvoren, f-invarijantan i sadrži $\omega(x)$ i $\alpha(x)$, za sve $x \in X$. Svaka povratna točka je nelutajuća i vrijedi $\overline{\mathcal{R}(f)} \subset NW(f)$, općenito obratna tvrdnja ne vrijedi, to jest $NW(f) \not\subset \overline{\mathcal{R}(f)}$.*

Prisjetimo se da je $O(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(x)$ za invertibilno preslikavanje f i da je $O^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(x)$.

Propozicija 2.1.6. *(i) Neka je f homeomorfizam, $y \in \overline{O(x)}$ i $z \in \overline{O(y)}$. Tada je $z \in \overline{O(x)}$.*

(ii) Neka je f neprekidno preslikavanje, $y \in \overline{O^+(x)}$ i $z \in \overline{O^+(y)}$. Tada je Tada je $z \in \overline{O^+(x)}$.

Definicija 2.1.7. *Neka je X kompaktan skup. Zatvoren, neprazan, unaprijed f-invarijantan podskup $Y \subset X$ je minimalan skup za f ako Y ne sadrži zatvoren, neprazan, unaprijed f-invarijantan podskup.*

Napomena 2.1.8. *Kompaktan invarijantan skup Y je minimalan ako i samo ako je prednja orbita svake točke iz Y gusta u Y. Primjetimo da je periodička orbita minimalan skup. Ako je X sam sebi minimalan tada je f minimalna.*

Propozicija 2.1.9. *Neka je $f\colon X \to X$ topološki dinamički sustav. Ako je X kompaktan, tada sadrži minimalni skup za f.*

Dokaz. Dokaz je direktna primjena Zornove leme. Neka je C kolekcija nepraznih, zatvorenih, f-invarijantnih podskupova od X, s parcijalnim uređajem danim s inkluzijom. Tada je C neprazan, budući da je $X \in C$. Pretpostavimo da je $\mathcal{K} \subset C$ podskup s totalnim uređajem. Tada svaki konačni presjek elemenata iz $\mathcal{K}$ je neprazan, pa prema svojstvu za konačne presjeke kompaktnih skupova vrijedi $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset$. Stoga, prema Zornovoj lemi, C sadrži minimalni element koji je minimalni skup za f. □

U kompaktnom topološkom prostoru, svaka točka minimalnog skupa je povratna, pa postojanje minimalnih skupova povlači postojanje povratnih točaka.

Definicija 2.1.10. *Za podskup $A \subset \mathbb{N}$ (ili $\mathbb{Z}$) kažemo da je relativno gust ako postoji $k > 0$ takav da $(n, n+1, \ldots, n+k) \cap A \neq \emptyset$ za bilo koji n.*

Točka $x \in X$ je skoro periodička ako je za bilo koju okolinu U od x, skup $\{i \in \mathbb{N} \colon f^i(x) \in U\}$ relativno gust u $\mathbb{N}$.

Propozicija 2.1.11. *Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor i $f \colon X \to X$ neprekidna, tada je $\overline{O^+(x)}$ minimalan za f ako i samo ako je x skoro periodička.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x skoro periodička i $y \in \overline{O^+(x)}$. Potrebno je pokazati da je $x \in \overline{O^+(x)}$. Neka je U okolina od x. Tada postoje otvoren skup $U' \subset X$, $x \in U' \subset U$ i otvoren skup $V \subset X \times X$ koji sadrži dijagonalu, takvi da ako je $x_1 \in U'$ i $(x_1, x_2) \in V$, tada je $x_2 \in U$. Jer je x skoro periodička, postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi da $f^{j+k}(x) \in U'$ za neki $0 \leq k \leq K$. Neka je $V' = \cap_{i=0}^{K} f^{-i}(V)$. Primjetimo da je V' otvoren i sadrži dijagonalu od $x \times X$. Postoji okolina $W \ni y$ takva da $W \times W \subset V'$. Odaberemo n takav da $f^n(x) \in W$, i odaberemo k takav da $f^{n+k}(x) \in U'$, uz $0 \leq k \leq K$. Tada je $(f^{n+k}(x), f^k(y)) \in V$, te stoga $f^k(y) \in U$.

Obratno, pretpostavimo da x nije skoro periodička. Tada postoji okolina U od x takva da skup $A = \{i \colon f^i(x) \in U\}$ nije relativno gust. Stoga, postoje nizovi $a_i \in \mathbb{N}$ i $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \to \infty$, takvi da $f^{a_i+j} \notin U$ za $j = 0, \ldots, k_i$. Neka je y limes niza $f^{a_i}(x)$. Promatrajući podnizove možemo pretpostaviti da $f^{a_i} \to y$. Fiksirajmo $j \in \mathbb{N}$. Primjetimo da $f^{a_i+j}(x) \to f^j(y)(y)$, i $f^{a_i+j}(x) \notin U$ za i dovoljno velik. Stoga, $f^j(y) \notin U$ za sve $j \in \mathbb{N}$, dakle $x \notin \overline{O^+(y)}$, iz čega slijedi da $\overline{O^+(x)}$ nije minimalan. □

Prisjetimo se da je iracionalna rotacija kružnice R_α minimalna, pa je zbog toga svaka točka nelutajuća, povratna i skoro periodička. Prošireni endomorfizam E_m kružnice ima guste orbite, ali nije minimalan jer ima periodičke točke. Svaka točka je nelutajuća, ali nisu sve točke povratne.

2.2 Topološka tranzitivnost

Kroz ovo potpoglavlje pretpostavljamo da je X skoro prebrojiv.

Definicija 2.2.1. *Topološki dinamički sustav $f\colon X \to X$ je topološki tranzitivan ukoliko postoji točka $x \in X$ čija prednja orbita je gusta u X.*

Napomena 2.2.2. *Ako X nema izoliranih točaka, gornji uvjet je ekvivalentan postojanju točke čiji je ω-granični skup gust u X.*

Propozicija 2.2.3. *Neka je $f\colon X \to X$ neprekidno preslikavanje na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru X. Pretpostavimo da za bilo koja dva neprazna otvorena skupa U i V postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Tada je preslikavanje f topološki tranzitivno.*

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da je za dani otvoreni skup $V \subset X$, skup $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)$ gust u X, budući da presijeca svaki otvoreni skup. Neka je $\{V_i\}$ prebrojiva baza topologije X. Tada $Y = \bigcap_i \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V_i)$ je prebrojiv presjek otvorenih, gustih skupova te je stoga prema Baireovom kategoričkom teoremu neprazan. Prednja orbita bilo koje točke $y \in Y$ ulazi u svaki V_i, pa je prednja orbita gusta u X. □

U većini topoloških prostora postojanje guste prednje orbite slijedi iz postojanja guste potpune orbite za homeomorfizam, što ćemo pokazati u sljedećoj propoziciji. Primjetimo da gustoća pojedine potpune orbite $O(x)$ ne implicira gustoću odgovarajuće prednje orbite $O^+(x)$.

Propozicija 2.2.4. *Neka je $f\colon X \to X$ homeomorfizam na kompaktnom metričkom prostoru i pretpostavimo da X nema izoliranih točaka. Ako postoji gusta potpuna orbita $O(x)$ onda postoji i gusta prednja orbita $O^+(x)$.*

Dokaz. Budući da je $\overline{O(x)} = X$, orbita $O(x)$ barem jednom posjećuje svaki neprazni otvoreni skup U i tako beskonačno mnogo puta jer X nema izoliranih točaka. Stoga, postoji niz n_k, $|n_k| \to \infty$, takav da $f^{n_k}(x) \in B(x, 1/k)$ za $k \in \mathbb{N}$, to jest $f^{n_k}(x) \to x$ kada $k \to \infty$. Stoga, $f^{n_k+l}(x) \to f^l(x)$ za bilo koji $l \in \mathbb{Z}$. Postoji ili beskonačno mnogo pozitivnih ili beskonačno mnogo negativnih indeksa n_k, slijedi da vrijedi ili $O(x) \subset \overline{O^+(x)}$ ili $O(x) \subset \overline{O^-(x)}$. U prvom slučaju $\overline{O(x)} = X$ i tu smo gotovi. U drugom slučaju, neka su U i V neprazni otvoreni skupovi. Budući da je $\overline{O^-(x)} = X$, postoje cijeli brojevi $i < j < 0$ takvi da $f^i(x) \in U$ i $f^j(x) \in V$, stoga $f^{j-i}(U) \cap V \neq \emptyset$. Sada prema prethodnoj propoziciji slijedi da je f toplološki tranzitivna. □

2.3 Topološko miješanje i ekspanzivnost

Definicija 2.3.1. *Topološki dinamički sustav $f\colon X \to X$ je topološko miješanje ako za bilo koja dva neprazna otvorena skupa $U, V \subset X$, postoji $N > 0$ takav da $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ za svaki $n \geq N$.*

Napomena 2.3.2. *Topološko miješanje povlači topološku tranzitivnost, ali ne i obratno. Na primjer, iracionalna rotacija kružnice je minimalna i stoga topološki tranzitivna, ali nije topološko miješanje.*

Definicija 2.3.3. *Za homeomorfizam $f\colon X \to X$ kažemo da je ekspanzivan ukoliko postoji $\delta > 0$ takav da za bilo koje dvije različite točke $x, y \in X$, postoji neki $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.*

Definicija 2.3.4. *Neinvertibilno neprekidno preslikavanje $f\colon X \to X$ je pozitivno ekspanzivno ukoliko postoji $\delta > 0$ takav da za bilo koje dvije različite točke $x, y \in X$, postoji neki $n \geq 0$ takav da je $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.*

Svaki broj $\delta > 0$ sa gornjim svojstvom zovemo konstanta ekspanzivnosti za f.

Ranije spomenuti endomorfizmi kružnice E_m su ekspanzivni za $|m| \geq 2$. Rotacije kružnice i translacije grupa nisu ekspanzivna preslikavanja.

Propozicija 2.3.5. *Neka je f homeomorfizam beskonačnog kompaktnog metričkog prostora X. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje različite točke $x_0, y_0 \in X$ takve da $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \leq \epsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz. Fiksirajmo $\epsilon > 0$. Neka je E skup prirodnih brojeva m za koje postoji par točaka $x, y \in X$ takav da

$$d(x, y) \geq \epsilon \quad i \quad d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \quad za\ n = 1, \ldots, m. \quad (*)$$

Neka je $M = \sup E$ ako je $E \neq \emptyset$, a $M = 0$ ako je $E = \emptyset$.

Ako je $M = \infty$ tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji par x_m, y_m koji zadovoljava $(*)$. Iz kompaktnosti slijedi da postoji niz $m_k \to \infty$ takav da postoje limesi

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x', \qquad \lim_{k\to\infty} y_{m_k} = y'.$$

Zbog $(*)$, $d(x', y') \geq \epsilon$ i zbog neprekidnosti od f^j vrijedi

$$d(f^j(x'), f^j(y')) = \lim_{k\to\infty} d(f^j(x_{m_k}), f^j(y_{m_k})) \leq \epsilon$$

za svaki $j \in \mathbb{N}$. Slijedi da su $x_0 = f(x')$ i $y_0 = f(y')$ tražene točke.

Pretpostavimo sada da je M konačan. Budući da je svaki konačni skup iteracija od f jednakoneprekidan, postoji $\delta > 0$ takav da ako je $d(x,y) < \delta$, tada je $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ za $0 \leq n \leq M$; iz definicije od M slijedi da $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \epsilon$. Indukcijom zaključujemo da je $d(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) < \epsilon$ za $j \in \mathbb{N}$ kadgod je $d(x,y) < \delta$. Zbog kompaktnosti, postoji konačan skup $\mathcal{B}$ otvorenih $\delta/2$-kugli koje pokrivaju X. Neka je K kardinalitet od $\mathcal{B}$. Budući da je X beskonačan, možemo odabrati skup $W \subset X$ koji se sastoji od K+1 različitih točaka. Prema principu razmještanja, za svaki $j \in \mathbb{Z}$ postoje različite točke $a_j, b_j \in W$ takve da $f^j(a_j)$ i $f^j(b_j)$ pripadaju istoj kugli $B_j \in \mathcal{B}$, pa vrijedi $d(f^j(a_j), f^j(b_j)) < \delta$. Prema tome $d(f^n(a_j), f^n(b_j)) < \epsilon$ za $-\infty < n \leq j$. Budući da je W konačan, postoje različite točke $x_0, y_0 \in W$ takve da je $a_j = x_0$ i $b_j = y_0$ za beskonačno mnogo pozitivnih j te stoga $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) < \epsilon$ za sve $n \geq 0$. □

Korolar 2.3.6. *Neka je f ekspanzivan homeomorfizam beskonačnog kompaktnog metričkog prostora X. Tada postoje točke $x_0, y_0 \in X$ takve da kada $n \to \infty$, $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \to 0$.*

Dokaz. Neka je $\delta > 0$ konstanta ekspanzivnosti za f. Prema prethodnoj propoziciji postoje $x_0, y_0 \in X$ takvi da $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) < \delta$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) \nrightarrow 0$. Tada iz kompaktnosti slijedi da postoji niz $n_k \to \infty$ takav da $f^{n_k}(x_0) \to x'$ i $f^{n_k}(y_0) \to y'$, uz $x' \neq y'$. Tada $f^{n_k+m}(x_0) \to f^m(x')$ i $f^{n_k+m}(y_0) \to f^m(y')$ za bilo koji $m \in \mathbb{Z}$. Za velike k, $n_k + m > 0$ pa zato je $d(f^m(x'), f^m(y')) \leq \delta$ za sve $m \in \mathbb{Z}$, što je u kontradikciji s ekspanzivnošću od f. □

Poglavlje 3

Dimenzije

U ovom poglavlju razmatramo tri različite definicije dimenzije: Lebesgueovu dimenzija pokrivanja, Haussdorfovu i Box dimenziju (u oznakama redom $dim(X), d_H(X), d_B(X)$). Također istražujemo što znači biti konačnodimenzionalan u terminima 'ulaganja' u Euklidske prostore za svaku od tih dimenzija. Za bilo koji kompaktan metrički prostor (X, ϱ) pokazat ćemo da vrijedi

$$dim(X) \leq d_H \leq d_B$$

Nadalje, provjerit ćemo da svaka definicija zadovoljava prirodne pretpostavke dimenzije:

(i) monotonost $X \leq Y \implies d(X) \leq d(Y)$

(ii) stabilnost nad konačnim unijama $d(X \cup Y) = max(d(X), d(Y))$

(iii) $d(R^n) = n$ ($d(K) = n$ ako je K kompaktan podskup od R^n koji sadrži otvoren skup.)

Također promotrit ćemo kako se svaka od spomenutih definicija ponaša na produktima skupova.

3.1 Lebesgueova dimenzija pokrivanja

Mnoge definicije dimenzije su topološki invarijantne (invarijantne pod homeomorfizmima), npr. velika i mala induktivna dimenzija i Lebesgueova dimenzija. Iako a priori različite, velika induktivna dimenzija i Lebesgueova dimenzija pokrivanja su jednake u svakom metričkom prostoru, a sve tri definicije se podudaraju u separabilnim metričkim prostorima. Ovo potpoglavlje se koncentrira na Lebesgueovu dimenziju pokrivanja, koju ćemo nadalje oslovljavati sa 'dimenzija pokrivanja' i označavati dim(X). Među tri gore spomenute definicije, dimenzija pokrivanja je najpovoljnija za dokazivanje rezultata ulaganja.

Lebesgueova dimenzija pokrivanja dim(X) temelji se na maksimalnom broju istodobno presijecajućih skupova u profinjenjima otvorenih pokrivača skupa X. Ova definicija je topološki invarijantna i primarno se koristi u klasičnoj i apstraktnoj teoriji dimenzija.

Definicija 3.1.1. *Neka je (X, ϱ) metrički prostor, te $A \subseteq X$. Pokrivač od A je konačan skup $\{U_j : 1 \leq j \leq r\}$ otvorenih podskupova od X takav da*

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_j$$

Red pokrivača je najveći prirodni broj n takav da postoji n+1 članova pokrivača takvih da im je presjek neprazan.

β pokrivač je profinjenje pokrivača α, ako je svaki član od β sadržan u nekom članu od α .

Definicija 3.1.2. *Skup $A \subseteq X$ ima $dim(A) \leq n$ ako svaki pokrivač od A ima profinjenje reda manjeg ili jednakog n. Skup A ima $dim(A) = n$ ako $dim(A) \leq n$ i ne vrijedi $dim(A) \leq n - 1$*

Očigledno je *dim* topološka invarijanta. Nadalje ćemo pokazati neka elementarna svojstva pokrivajuće dimenzije.

Propozicija 3.1.3. *Neka je $B \subseteq A \subseteq X$, B zatvoren. Ako $dim(A) = n$ tada je $dim(B) \leq n$*

Dokaz. Neka je α pokrivač od B koji se sastoji samo od otvorenih podskupova U_j od X. Prekrijmo A sa skupovima U_j i sa otvorenim skupom $X \setminus B$.
Neka je β profinjenje ovog pokrivača reda najviše n. Tada je

$$\beta' := \{U \in \beta : U \cap B \neq \emptyset\}$$

profinjenje od α koje pokriva β i reda je najviše n. □

Pretpostavka zatvorenosti skupa B znatno pojednostavljuje dokaz, ali rezultat je istinit i za bilo koji proizvoljan skup A.

Propozicija 3.1.4. *Neka je $X = X_1 \cup X_2$ gdje su X_1 i X_2 zatvoreni potprostori od X, sa $dim(X_1) \leq n$ i $dim(X_2) \leq n$. Tada je $dim(X) \leq n$.*
Naravno, tvrdnja slijedi za sve prebrojive unije zatvorenih potprostora i dimenzije manje ili jednake n.

Dokaz. Reći ćemo da otvoreni pokrivač α od X ima red najviše n u točkama od Y, ako svaka točka od Y leži u maksimalno n+1 elemanata od α.

Prvo pokazujemo da bilo koji otvoreni pokrivač α od X ima profinjenje koje je reda najviše n u točkama X_1 . Bilo koji takav pokrivač od X je pokrivač za X_1 , koji ima profinjenje β' reda najviše n. Za svaki $V \in \beta'$, postoji element $U_v \in \alpha$ takav da $V \subset U_V$. Tada je

$$\beta = \{U_V : V \in \beta'\} \cup \{U \setminus X_1 : U \in \alpha\}$$

traženo profinjenje od α. Možemo ponoviti ovaj argument počevši sa pokrivačem β od X te dobiti pokrivač γ koji profinjuje β i reda je najviše n u točkama od X_2.

Nadalje, definiramo sljedeći pokrivač od X, koji će se pokazati profinjenjem od α reda najviše n. U prvom koraku konstrukcije definiramo preslikavanje $f : \gamma \longrightarrow \beta$ na način da svakom $G \in \beta$ pridružuje $f(G) \in \beta$ tako da je $G \subset f(G)$. To je moguće napraviti s obzirom da je γ profinjenje od β. Sada $\forall B \in \beta$, neka je

$$d(B) = \{G \in \gamma : f(G) = B\}$$

i neka je

$$\delta = \bigcup_{B \in \beta} d(B).$$

Sada je δ profinjenje od α, s obzirom da je $d(B) \subset B$ $\forall B \in \beta$, i β je profinjenje od α. Također δ pokriva X, budući da γ pokriva X i svaki $G \in \gamma$ je sadržan u nekom $B \in \beta$ (pošto je γ profinjenje od β). Preostalo nam je pokazati da je δ najviše reda n.

Pretpostavimo da $x \in X$ takav da $x \in d(B_1) \cap d(B_2) \cap ... \cap d \cap (B_k)$, pri čemu su svi $d(B_k)$ međusobno razlıčti (pošto su $B_1, ..., B_k$ različiti). Slijedi da $\forall j = 1, ..., k, x \in G_j$ pri čemu $f(G_j = B_j)$; zato što su $B_1, ..., B_k$ različiti, različiti su i $G_1, ..., G_k$. Stoga

$$x \in G_1 \cap ... \cap G_k \subset d(B_1) \cap ... \cap d \cap (B_k) \subset G_1 \cap ... \cap G_k.$$

Ako je $x \in X_1$ tada je $k \leq n + 1$ budući da je β reda najviše n u točkama od X_1, a ako je $x \in X_2$ tada je $k \leq n + 1$, jer je γ reda najviše n u točkama X_2. □

Napomena 3.1.5. *U slučaju produkta skupova vrijedi* $dim(X \times Y) \leq dim(X) + dim(Y)$ *. To ovdje nećemo dokazivati.*

Uloženi skupovi konačne dimenzije pokrivanja

Fundamentalni rezultat teorije ulaganja govori o tome kako se svaki prostor pokrivajuće dimenzije n može topološki uložiti u $\mathbb{R}^{2n+1}$. To je karakteristika skupova konačne dimenzije pokrivanja kao homeomorfnih slika podskupova konačno dimenzionalnih Euklidskih prostora. Za rezultat ulaganja u slučaju kompaktnih skupova koji ćemo ovdje obraditi zaslužni su Menger i Nöbeling.

Teorem 3.1.6. *Neka je (X, ϱ) potpun metrički prostor, te neka je $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ prebrojiva kolekcija otvorenih i gustih podskupova od X. Tada je*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} X_j$$

gust podskup od X.

Lema 3.1.7. *Kompaktan skup $A \subseteq (X, \varrho)$ je dimenzije manje ili jednake n ako i samo ako ima pokrivače proizvoljno male finoće i reda $\leq n$.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da ako je α pokrivač od A tada postoji $\eta > 0$ takav da je svaki podskup od A dijametra manjeg od η cijeli sadržan u nekom članu od α (najveći takav η se zove 'Lebesgueov broj' pokrivača α). U suprotnom, postoji niz $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ podskupova od A čiji dijametri teže ka nuli te nisu cijeli sadržani u niti jednom članu od α. Proizvoljno odaberemo $x_j \in A_j$; budući da je A kompaktan, postoji podniz takav da $x_j \to x^*$. Naravno x^* se nalazi u nekom članu od α, tj. $x^* \in U \in \alpha$. Budući da je U otvoren, sadrži otvorenu kuglu sa središtem u x^*, radijusa δ, za neki $\delta > 0$, iz čega slijedi da $A_j \subset U \in \alpha$ za svaki dovoljno veliki j, što je u kontradikciji s našom polaznom pretpostavkom.

Sada pretpostavimo da je α pokrivač od A kao u našoj tvrdnji. Po pretpostavci postoji pokrivač β od A finoće $< n$ i reda $\leq n$; prema gore pokazanom svaki element pokrivača β je cijeli sadržan u nekom elementu od α. Slijedi da je β profinjenje od α reda $\leq$ n, stoga je $dim(A) \leq n$.

Preostalo nam je još dokazati drugi smjer dane tvrdnje. Pretpostavimo da je $dim(A) \leq n$ te promatrajmo sve otvorene kugle u A radijusa $\epsilon/2$. Jer je A kompaktan, postoji pokrivač od A koji se sastoji od konačno mnogo tih otvorenih kugli. Iz činjenice da je $dim(A) \leq n$ slijedi da postoji profinjenje navedenog pokrivača reda n (koji se sastoji od skupova čiji dijametar nije veći od ϵ). □

Definicija 3.1.8. *Kažemo da je neprekidno preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}^n$ ϵ-preslikavanje ako*

$$diam[f^{-1}(x)] < \epsilon \quad \forall x \in f(X)$$

Lema 3.1.9. *Ako je (X, ϱ) kompaktan tada je f homeomorfizam od X u $\mathbb{R}^k$ ako i samo ako je f 1/n-preslikavanje za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Ako je f 1/n-preslikavanje za svaki $n \in \mathbb{N}$ tada je $diam[f^{-1}(x)] = 0$ za svaki $x \in g(x)$, tj. $f^{-1}(x)$ se sastoji od jedne točke, pa zaključujemo da je f injekcija. Neprekidno injektivno preslikavanje kompaktnih skupova je homeomorfizam, iz toga slijedi tvrdnja. Dokaz obratne tvrdnje je očigledan. □

Lema 3.1.10. *Neka je (X, ϱ) kompaktan. Tada za svaki $\epsilon > 0$ je skup $\mathcal{F}_\epsilon$ ϵ-preslikavanja otvoren u $C(X, \mathbb{R}^k)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f \in C(X, \mathbb{R}^k)$ ϵ-preslikavanje. Budući da je X kompaktan, tada je i $X \times X$ kompaktan kao produkt kompakata, i pošto je

$$\{(x, x') \in X \times X \ t.d. \ \varrho(x, x') \geq \epsilon\}$$

zatvoren podskup od $X \times X$, također je kompaktan. Sljedi da

$$\eta = inf\{\mid f(x) - f(x') \mid : x, x' \in X \ t.d. \ \varrho(x, x') \geq \epsilon\};$$

ako bi η bio 0 tada f ne bi mogao biti ϵ-preslikavanje. Ako je q proizvoljno preslikavanje takvo da $\varrho(g, f) < \eta/2$ i $g(x) = g(x')$ slijedi da $\mid f(x) - f(x') \mid < \eta$ s time da je $\varrho(x, x') < \epsilon$, tj. g je također ϵ-preslikavanje. □

Propozicija 3.1.11. *Neka je (X, ϱ) kompaktan metrički prostor dimenzije $\leq n$. Tada za svaki $\epsilon > 0$, $\mathcal{F}_\epsilon$ je gust u $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$.*

Pokazali smo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup svih 1/n-preslikavanja gust i otvoren. Sada pomoću toga i Baireovog teorema kategorije (Tm 3.1.6) možemo dokazati naš rezultat ulaganja:

Teorem 3.1.12. *Neka je X kompaktan metrički prostor dimenzije $dim(X) \leq n$. Tada postoji gust skup $\mathcal{G}_\delta$ funkcija u $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ koje su homeomorfizmi skupa X u $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Dokaz. Za svaki $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{1/j}$ je otvoren i gust u $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$. Slijedi iz Baireovog teorema kategorije da je $cap_j \mathcal{F}_{1/j}$ gust $\mathcal{G}_\delta$ u tom prostoru. Međutim po Lemi 3.1.9 to je točno kolekcija svih homeomorfizama skupa X u $\mathbb{R}^{2n+1}$. □

Velika i mala induktivna dimenzija

Definicija 3.1.13. *Mala induktivna dimenzija, $ind(\cdot)$, definira se na slijedeći način:*

(i) $ind(\emptyset) = -1$*;*

(ii) $ind(X) \leq n$ *ako u svakoj točki* $p \in X$, p *ima proizvoljno male okoline* U *sa* $ind(\partial U) \leq n - 1$*;*

(iii) $ind(X) = n$ *ako* $ind(X) \leq n$ *ali ne vrijedi da* $ind(X) \leq n + 1$.

Velika induktivna dimenzija, $Ind(\cdot)$, se definira slično kao i mala samo sa zamijenjenim (ii) uvjetom:

(ii') $Ind(X) \leq n$ ako za svaki zatvoreni skup $A \subset X$ i svaki otvoreni skup $V \subset X$ koji sadrži skup A postoji otvoreni skup $U \subset X$ takav da

$$A \subset U \subset V \quad i \quad Ind(\partial U) \leq n - 1.$$

Velika induktivna dimenzija i dimenzija pokrivanja podudaraju se u svakom metričkom prostoru. Također je očito uvijek $ind(X) \leq Ind(X)$.

3.2 Haussdorffova dimenzija i Hausdorffova mjera

Hausdorffova dimenzija, u oznaci d_H, je jedna od najšire upotrebljavanih definicija dimenzija. Ima opsežnu primjenu u teoriji geometrijske mjere i u teoriji dinamičkih sustava. Njeno veliko značenje proizlazi iz činjenice da je definirana u terminima Hausdorffove mjere, prirodno povezujući dimenziju i mjeru.

Zauzima središnju poziciju između dimenzije pokrivanja i box dimenzije, $dim(X) \leq d_H(X) \leq d_B(X)$. Budući da je $dim(X) \leq d_H(X)$, upotrebom Teorema 3.1.12 osiguravamo da svaki skup konačne Haussdorfove dimenzije može biti topološki uložen u Euklidski prostor.

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, ϱ) metrički prostor. Vanjska mjera μ na X pridružuje nenegativan realan broj svakom podskupu od X, uz sljedeće pretpostavke:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) ako je $A \subset B$ tada je $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(iii) ako su $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ podskupovi od X tada

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Nadalje definiramo aproksimaciju s-dimenzionalne Hausdorffove mjere, i dokazujemo da je ona vanjska mjera.

Definicija 3.2.2. *Za podskup U od X, podsjećamo da $|U| = sup_{x,y \in U}\, \varrho(x, y)$; za $A \subseteq X, s \geq 0$ i $\delta > 0$, definiramo*

$$\mathcal{H}_{\delta}^{s}(A) = inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : X \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i \ t.d.\ |U_i| \leq \delta \Big\}.$$

Primjetimo da nije potrebno da skupovi $\{U_i\}$ u ovom pokrivaču od X budu otvoreni. Sada ćemo dokazati da je ovako definirana Hausdorffova mjera vanjska mjera.

Lema 3.2.3. *$\mathcal{H}^s_\delta$ je vanjska mjera na (X, ϱ) za svaki $\delta > 0$.*

Dokaz. Fiksirajmo $\delta > 0$. Očigledno (i) $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ i (ii) $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ kad god je $A \subseteq B$. Da bi dokazali da vrijedi (iii) uzmimo $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ kolekciju podskupova od X. Za dani ϵ postoji niz $\{B_j^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ podskupova od X takvih da

$$A_j \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_j^{(i)}, \quad |B_j^{(i)}| \leq \delta, \quad i \quad \sum_{i=1}^\infty |B_j^{(i)}|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A_j) + \epsilon 2^{-j}.$$

Slijedi da

$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j \subset \bigcup_{i,j=1}^\infty B_j^{(i)} \quad i \quad \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{i,j=1}^\infty |B_j^{(i)}|^s \leq \epsilon + \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_j).$$

S obzirom da ovo vrijedi za proizvoljni $\epsilon > 0$, $\mathcal{H}^s_\delta(\cup_{j=1}^\infty A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_j)$ što je i trebalo pokazati. □

Profinjenjem pokrivača iz definicije $\mathcal{H}^s_\delta$ dobiva se s-dimenzionalna Hausdorffova mjera, uzimajući da $\delta \to 0$:

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X).$$

Limes postoji s obzirom da $\mathcal{H}^s_\delta(X)$ raste kako se δ smanjuje. Direktno iz prethodne leme slijedi da je $\mathcal{H}^s$ vanjska mjera.

Teoremi i rezultati koji slijede govore o nekim svojstvima s-dimenzionalne Hausdorffove mjere. Njih ćemo ovdje samo iskazati i koristiti u daljnjim rezultatima vezanima za Hausdorffovu dimenziju.

Teorem 3.2.4. *Vanjska mjera $\mathcal{H}^s$ je metrika,tj.*

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

kad god je $d(A, B) > 0$.

Definicija 3.2.5. *Za skup $A \subset X$ kažemo da je $\mathcal{H}^s$-izmjeriv ukoliko za svaki $E \subset X$*

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \cap A) + \mathcal{H}^s(E \cap A^C).$$

S obzirom da je $\mathcal{H}^s$ metrika, slijedi da je svaki zatvoren podskup od X $\mathcal{H}^s$-izmjeriv, stoga je svaki Borelov podskup od X $\mathcal{H}^s$-izmjeriv. Specijalno, ako su $\{A_j\}$ međusobno disjunktni Borelovi skupovi tada

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_j).$$

Za podskupove od $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^n$ je višekratnik n-dimenzionalne Lebesgueove mjere, u oznaci $\mathcal{L}^n$.

Teorem 3.2.6. *Za svaki omeđen podskup A od $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \Omega_n \left(\frac{|A|}{2}\right)^n,$$

gdje je $\Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ volumen jedinične kugle u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.2.7. *Ako je A omeđen podskup od $\mathbb{R}^n$ tada*

$$\mathcal{H}^n(A) = 2^{-n}\Omega_n\mathcal{L}^n(A).$$

Sada ćemo pokazati da postoji 'kritična vrijednost' od s pri kojoj se s-dimenzionalna Hausdorffova mjera prebacuje s 0 u beskonačno - uz pomoć toga ćemo definirati Hausdorffovu dimenziju.

Propozicija 3.2.8. *Neka je A podskup od (X, ϱ). Uzmimo $s' > s > 0$: ako $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ tada je $\mathcal{H}^{s'}(A) = 0$, te ako je $\mathcal{H}^{s'} > 0$ tada je $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.*

Dokaz. Iskazane tvrdnje su ekvivalentne, dokazat ćemo samo prvu. Ako je $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ tada za bilo koji $\delta > 0$ postoji pokrivač od A skupovima $\{B_j\}$ s dijametrima $\leq \delta$ takvi da

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \leq \mathcal{H}^s(A) + 1$$

Slijedi da za $s' > s$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{s'} \leq \delta^{s'-s} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \leq \delta^{s'-s}[\mathcal{H}^s(A) + 1],$$

stoga $\mathcal{H}^{s'}(A) = 0$. □

Definicija 3.2.9. *Za bilo koji $A \subseteq (X, \varrho)$, Hausdorffova dimenzija skupa A je*

$$d_H(A) = inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = 0\}.$$

Lema 3.2.10. *Ako je $A \subseteq X$ i $s > 0$ tada $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji prebrojiv pokrivač od A, $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$, takav da*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s < \epsilon. \qquad (*)$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Tada za bilo koji $\delta > 0$ postoji pokrivač od A skupovima $\{U_j\}$ takvih da $|U_j| < \delta$ i vrijedi $(*)$; barem jedan takav pokrivač postoji. Obrnuto, za zadani proizvoljan $\delta > 0$, odaberemo $\epsilon > 0$ takav da je $\epsilon^{1/s} < \delta$, i pronađemo pokrivač koji zadovoljava $(*)$. To mora biti pokrivač sastavljen od skupova $\{U_j\}$ takvih da $|U_j| < \delta$, koji zadovoljava $(*)$, stoga $\mathcal{H}^s(A) < \epsilon$ za svaki $\epsilon > 0$, tj. $\mathcal{H}^s(A) = 0$. □

Sada ćemo dokazati neka osnovna svojstva Hausdorffove dimenzije:

Propozicija 3.2.11. *(i) Ako je $A, B \subset (X, \varrho)$ i $A \subseteq B$ tada je $d_H(A) \leq d_H(B)$;*

(ii) Hausdorffova dimenzija je zatvorena na prebrojive unije: ako je $X_k \subseteq X$ tada

$$d_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sup_k d_H(X_k);$$

(iii) ako je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ tada je $d_H(U) = n$, posebno $d_H(\mathbb{R}^n) = n$;

(iv) ako je $f\colon (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ je Hölder neprekidna s eksponentom $\theta \in (0, 1]$,

$$\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C\varrho_X(x_1, x_2)^\theta,$$

tada je $d_H(f(X)) \leqslant d_H(X)/\theta$.

Dokaz. (i) Dokaz slijedi direktno iz definicije.

(ii) Ako je $sup_k\ d_H(X_k) = \infty$ tada iz (i) slijedi da $d_H(X) = \infty$. Stoga pretpostavljamo da $sup_k\ d_H(X_k) < \infty$, i uzimamo $s > sup_k\ d_H(X_k)$: tada $\mathcal{H}^s(X_k) = 0$ za svaki k, a s obzirom da je $\mathcal{H}^s$ vanjska mjera $\mathcal{H}^s(\cup_k X_k) = 0$ stoga $d_H(X) < s$ iz čega slijedi (ii).

(iii) Promatrajući $U = \bigcup_{j=1}^{\infty}[U \cap B(0, j)]$ i koristeći (ii), dovoljno je pokazati da $d_H(U) = n$ za bilo koji ograničen otvoren skup U. Zasigurno U je sadržan u nekoj kocki C sa stranicama duljine R. Za dani $\delta > 0$, odaberemo $k \in \mathbb{N}$ takav da $k > R\sqrt{n}/\delta$, te podijelimo C na k^n kocaka sa stranicama duljine R/k (i dijametrima $\sqrt{n}R/k < \delta$); tada $\mathcal{H}^n_\delta(C) \leq R^n k^n (k^{-1}\sqrt{n})^n \leq R^n n^{n/2}$ i slijedi da je $\mathcal{H}^n(C) < \infty$, odakle $d_H(C) \leq n$. Iz (i) slijedi da je $d_H(U) \leq n$. Dokaz donje ograde slijedi iz Teorema 3.2.7, vrijedi $\mathcal{H}^n(U) \geq 2^n\Omega_n^{-1}\mathcal{L}^n(U) > 0$, stoga $d_H(U) \geq n$.

(iv) Uzmimo $s > d_H(X)$. Tada za bilo koji $\epsilon > 0$ postoji pokrivač $\{U_j\}$ od X sa

$$\sum_j |U_j|^s < \epsilon.$$

Tada je $\{f(U_j)\}$ pokrivač za $f(X)$ i $|f(U_j)| \leq C|U_j|^\theta$, iz čega slijedi

$$\sum_j |f(U_j)|^{s/\theta} < C^s \epsilon.$$

Prethodna lema garantira da $\mathcal{H}^{s/\theta}(f(X)) = 0$, stoga $d_H(f(X)) \leq s/\theta$.

□

Primjetimo da iz (ii) direktno slijedi da je Hausdorffova dimenzija bilo kojeg prebrojivog skupa 0.

Napomena 3.2.12. *Kao i u slučaju Lebesgueove dimenzije pokrivanja vrijedi rezultat za Hausdorffovu dimenziju produkta skupova i ovdje ga nećemo dokazivati; ukoliko su $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}^m$ zatvoreni skupovi tada vrijedi $d_H(X \times Y) \geq d_H(X) + d_H(Y)$.*

Hausdorffova dimenzija i dimenzija pokrivanja

U ovom odjeljku navest ćemo rezultate vezane za odnos Hausdorffove i Lebesgueove dimenzije pokrivanja. Hausdorffova dimenzija je gornja ograda za dimenziju pokrivanja.

Teorem 3.2.13. *Neka je X kompaktan metrički prostor. Tada je $dim(X) \leq d_H(X)$.*

Nejednakost u danoj tvrdnji može biti i stroga, s obzirom da je $dim(X)$ cijeli broj, a postoje skupovi za koje $d_H(X) \notin \mathbb{N}$. Međutim jednakost se uvijek postiže za neke homeomorfne slike od X:

Teorem 3.2.14. *Ako je (X, ϱ) kompaktan i $dim(X) = n$ tada postoji homeomorfizam $h\colon X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ takav da $d_H(h(X)) = n$.*

Sljedeći korolar je alternativna definicija Lebesgueove dimenzije pokrivanja. Iz nje se jasno vidi da je dimenzija pokrivanja topološka invarijanta, no nije jasno da mora biti cjelobrojne vrijednosti.

Korolar 3.2.15. *Ako je X kompaktan metrički prostor tada*

$$dim(X) = inf\{d_H(X') \ : \ X' je\ homeomorfan X\}.$$

3.3 Box dimenzija

Definicija 3.3.1. *Neka $N(X, \epsilon)$ označava minimalni broj potrebnih kugli radijusa ϵ (ϵ-kugli) sa središtima u X, potrebnih da se pokrije X. Definiramo box dimenziju od X na sljedeći način:*

$$d_{box}(X) = lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(X, \epsilon)}{-\log \epsilon};$$

naposlijetku $N(X, \epsilon) \sim \epsilon^{-d_{box}(X)}$ kada $\epsilon \to 0$.

Gore navedeni limes općenito ne mora nužno postojati, radi toga uvodimo sljedeće dvije definicije:

Definicija 3.3.2. *Neka je (X, ϱ) metrički prostor, i $A \subset X$. Neka $N(A, \epsilon)$ označava minimalni broj zatvorenih kugli radijusa ϵ sa središtima u A potrebnih za pokrivanje skupa A. Gornja box dimenzija skupa A je*

$$d_B(A) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(A, \epsilon)}{-\log \epsilon},$$

donja box dimenzija skupa A

$$d_{LB}(A) = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(A, \epsilon)}{-\log \epsilon}.$$

Iz definicije jasno slijedi nejednakost $d_{LB} \leq d_B$, uz mogućnost i stroge nejednakosti. Box dimenzija postoji samo u slučaju kada se donja i gornja box dimenzija podudaraju. S obzirom da će naš interes biti usmjeren najviše gornjoj box dimenziji, uglavnom će se pojam box dimenzije odnositi na $d_B(X)$, definirano kao gore.

Također iz definicije izravno slijedi da ako je $d > d_B(A)$ tada postoji ϵ_0 takav da

$$N(A, \epsilon) < \epsilon^{-d} \quad za\ svaki \quad \epsilon < \epsilon_0,$$

ako je $d < d_B(A)$ tada postoji niz $\epsilon_j \to 0$ takav da

$$N(A, \epsilon) > \epsilon_j^{-d}.$$

Primjetimo da smo isto tako mogli uzeti pokrivač koji se sastoji od otvorenih kugli umjesto zatvorenih, s obzirom da svaki pokrivač sastavljen od otvorenih kugli radijusa ϵ povlači postojanje pokrivača koji se sastoji od zatvorenih kugli radijusa ϵ. Također bilo koji pokrivač koji se sastoji od zatvorenih kugli radijusa ϵ povlači postojanje pokrivača sastavljenog od otvorenih kugli radijusa 2ϵ.

Ponekad je korisnije računati box dimenziju uzimajući limes superior niza $\{\epsilon_k\}$ različitih vrijednosti ϵ, nego uzimajući konačnu granicu.

Lema 3.3.3. *Ako je ϵ_k opadajući niz koji teži ka* 0*, takav da vrijedi $\epsilon_{k+1} \geq \alpha\epsilon_k$ za neki $\alpha \in (0,1)$, tada*

$$d_B(A) = \limsup_{\epsilon_k \to \infty} \frac{\log N(A,\epsilon_k)}{-\log \epsilon_k} \quad i \quad d_{LB}(A) = \liminf_{\epsilon_k \to \infty} \frac{\log N(A,\epsilon_k)}{-\log \epsilon_k}.$$

Dokaz. Očito je da su desne strane gornjih jednakosti omeđene sa $d_B(A)$. za dani ϵ takav da $0 < \epsilon < 1$ neka je k takav da $\epsilon_{k+1} < \epsilon < \epsilon_k$; tada

$$\begin{aligned} \frac{\log N(A,\epsilon)}{-\log \epsilon} &\leq \frac{\log N(A,\epsilon_{k+1})}{-\log \epsilon_{k+1}} \\ &= \frac{\log N(A,\epsilon_{k+1})}{-\log \epsilon_k + \log(\epsilon_{k+1}/\epsilon_k)} \\ &\leq \frac{\log N(A,\epsilon_{k+1})}{-\log \epsilon_k + \log \alpha} \end{aligned}$$

iz gore navedenog sijedi tvrdnja. Analogno se dokaže tvrdnja za $d_{LB}(A)$. □

Sada ćemo dokazati neka osnovna svojstva box dimenzije:

Lema 3.3.4. *Neka je (X,ϱ) metrički prostor, te A i B podskupovi od X.*

(i) *Ako je $A \subseteq B$ tada je $d_B(A) \leq d_B(B)$;*

(ii) *$d_B(\overline{A}) = d_B(A)$, gdje $\overline{A}$ označava zatvarač od A u (X,ϱ);*

(iii) *$d_B(A \cup B) \leq \max(d_B(A), d_B(B))$;*

(iv) *ako je $f\colon (X,\varrho_X) \to (Y,\varrho_Y)$ Hölder neprekidna s eksponentom θ,*

$$\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C\varrho_X(x_1,x_2)^\theta \quad \text{za sve} \quad x_1, x_2 \in X$$

tada

$$d_B(f(A)) \leq d_B(A)/\theta;$$

(v) *$d_H(A) \leq d_{LB}(A) \leq d_B(A)$;*

(vi) *ako je $I_n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ tada $d_{LB}(I_n) = d_{box}(I_n) = d_B(I_n) = n$.*

Dokaz. (i) Ako je $A \subset B$ tada je $N(A,\epsilon) \leq N(B,\epsilon)$, direktno slijedi tvrdnja.

(ii) Bilo koji konačni pokrivač skupa A zatvorenim kuglama mora pokriti i $\overline{A}$, stoga $d_B(A) \leq d_B(\overline{A})$. Jednakost slijedi iz (i) i činjenice da je $A \subset \overline{A}$.

(iii) Očito je $N(A \cup B, \epsilon) \leq N(A, \epsilon) + N(B, \epsilon)$. Tvrdnja sada slijedi direktno iz definicije.

(iv) Za dani $d > d_B(A)$, odaberemo ϵ_0 dovoljno mali takav da je $N(A, \epsilon) \leq \epsilon^{-d}$ za svaki $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Pokrijemo A sa ne više od ϵ^{-d} kugli radijusa ϵ. Slika ovog pokrivača po funkciji f daje pokrivač od $f(A)$ skupovima s dijametrima koji nisu veći od $C(2\epsilon)^\theta$; no ti su skupovi zasigurno sadržani u zatvorenim kuglama radijusa $2C(2\epsilon)^\theta$. Stoga

$$N(f(A), 2C(2\epsilon)^\theta) \leq \epsilon^{-d} \quad \Rightarrow \quad N(f(A), \delta) \leq 2^d(\delta/2C)^{-d/\theta} = c\delta^{-d/\theta},$$

te stoga $d_B(f(A)) \leq d_B(A)/\theta$.

(v) Ako je $s > d_{LB}(A)$ tada postoji niz $\epsilon_j \to 0$ takav da $N(A, \epsilon_j) < \epsilon_j^{-s}$; prema tome

$$\mathcal{H}^s_{2\epsilon_j}(A) \leq N(A, \epsilon_j)(2\epsilon_j)^s < 2^s < \infty,$$

stoga $\mathcal{H}^s(A) < 2^s < \infty$, iz čega slijedi $d_H(A) \leq s$. Pa vrijedi $d_H(A) \leq d_{LB}(A)$; $d_{LB}(A) \leq d_B(A)$ slijedi direktno iz definicije.

(vi) I_n se može pokriti sa k^n kocaka duljine stranica 1/k. Niz $\epsilon_k = 1/k$ zadovoljava pretpostavke Leme 1.3.3, stoga $d_B(I_n) \leq n$. Već smo pokazali da vrijedi $d_H(I_n) = n$, stoga $d_B(I_n) \geq d_{LB}(I_n) \geq d_H(I_n) \geq n$. Slijedi da je $d_B(I_n) = d_{box}(I_n) = d_{LB}(I_n) = n$.

□

Napomena 3.3.5. *Primjetimo da iz (i) i (vi) prethodne leme direktno slijedi da svaki kompaktan podskup A od $\mathbb{R}^n$ ima $d_B(A) \leq n$, a u slučaju da A sadrži otvoren skup vrijedi $d_B(A) = n$.*

Sljedeća propozicija govori o box dimenziji produkta skupova. Kao i u slučaju prethodne dvije obrađene dimenzije samo ćemo navesti rezultat, bez dokaza.

Propozicija 3.3.6. *Neka su (X, ϱ_X) i (Y, ϱ_Y) metrički prostori, i $X \times Y$ produktni prostor s metrikom*

$$\varrho_\alpha((x, y), (\xi, \eta)) = [\varrho_X(x, \xi)^\alpha + \varrho_Y(y, \eta)^\alpha]^{1/\alpha}$$

za neki $\alpha \in [1, \infty)$, ili

$$\varrho_\infty((x, y), (\xi, \eta)) = \max(\varrho_X(x, \xi), \varrho_Y(y, \eta)).$$

Tada vrijedi

$$d_B(X \times Y) \leq d_B(X) + d_B(Y) \quad i \quad d_{LB}(X \times Y) \geq d_{LB}(X) + d_{LB}(Y).$$

Stoga, ako su box dimenzije $d_{box}(X)$ i $d_{box}(Y)$ obje dobro definirane tada je dobro definirana i $d_{box}(X \times Y)$ i vrijedi

$$d_{box}(X \times Y) = d_{box}(X) + d_{box}(Y).$$

Teorem ulaganja za podskupove od $\mathbb{R}^N$ u terminima gornje box dimenzije

U ovom odjeljku dokazujemo teorem ulaganja za podskupove od $\mathbb{R}^N$ u terminima gornje box dimenzije: $X \subset \mathbb{R}^N$ možemo 'lijepo' uložiti u $\mathbb{R}^k$ za svaki cijeli broj $k > 2d_B(X)$.

Ideja je pokazati da je skoro svako linearno preslikavanje $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ injekcija na X uz inverz $L^{-1}|_{LX}$ Hölder neprekidan. S obzirom da je L linearno, $L\colon X \to \mathbb{R}^k$ je injekcija ako i samo ako $Lz = 0$ povlači $z = 0$ za $z \in X - X$, gdje je $X - X$ 'diferencijski skup'

$$X - X = \{x - y \ : \ x, y \in X\}.$$

Rezultati ulaganja vezani uz linearna preslikavanja se stoga oslanjanju na svojstva 'diferencijskog skupa' X-X prije nego na svojstva samog skupa X. Za gornju box dimenziju pak vrijedi $d_B(X - X) \leq 2d_B(X)$. To vrijedi jer $d_B(X \times X) \leq 2d_B(X)$ i $X - X$ je slika od $X \times X$ po Lipschitzovom preslikavanju $(x, y) \mapsto x - y$, a prema Lemi 3.3.4 (iv) takva preslikvanja ne mogu povećati box dimenziju.

Ako su X i Y Banachovi prostori, prostor svih omeđenih linearnih preslikavanja sa X na Y označavamo sa $\mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{L}(X, X)$ skraćeno zapisujemo $\mathcal{L}(X)$. Svako linearno preslikavanje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ možemo promatrati kao kolekciju k linearnih preslikavanja $L_j\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, takvih da

$$Lx = (L_1x, L_2x, \dots, L_kx);$$

i svako preslikavanje L_j je ekvivalentno uzimanju unutrašnjeg produkta s nekim $l_j \in \mathbb{R}^N$; sa l_j^* označavamo linearno preslikavanje sa $\mathbb{R}^N$ u $\mathbb{R}$ dano sa $x \mapsto (l_j, x)$.

Promatrat ćemo ograničen skup E linearnih preslikavanja, oblika

$$E = \{(l_1^*, \dots, l_N^*) : \ l_j \in B_N\}$$

gdje je $B_N = B_N(0, 1)$ jedinična kugla u $\mathbb{R}^n$. Primjetimo da svaki $L \in E$ ima normu najviše $\sqrt{N}$.

Identificirajući E sa $(B_N)^k$, definiramo vjerojatnosnu mjeru μ na E induciranu odabirom svakog l_j prema uniformnoj vjerojatnosnoj mjeri λ na B_N (λ je Lebesgueova mjera $\mathcal{L}^N$ normalizirana sa Ω_N), tj. μ je produktna mjera $\otimes_{j=1}^k \lambda$ na $(B_N)^k$.

Lema 3.3.7. *Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}^k$ i $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\mu\{L \in E \ : \ |\alpha + Lx| \leq \epsilon\} \leq cN^{k/2} \left(\frac{\epsilon}{|x|}\right)^k,$$

gdje je c apsolutna konstanta.

Lema 3.3.8 (Borel-Cantelli)**.** *Neka je μ vjerojatnosna mjera na E, i pretpostavimo da su $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ podskupovi od E takvi da $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j < \infty$. Tada μ-skoro sigurno svaki element $x \in E$ leži u samo konačno mnogo Q_j, tj. za svaki takav x postoji $j_x \in \mathbb{N}$ takav da $x \notin Q_j$, za svaki $j \geq j_x$.*

Teorem 3.3.9. *Neka je X kompaktan podskup od $\mathbb{R}^N$. Ako je $k > 2d_B(X)$ tada za svaki dani α takav da*

$$0 < \alpha < 1 - \frac{2d}{k}$$

i svako linearno preslikavanje $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$, za μ-skoro sigurno linearno preslikavanje $L \in E$ postoji $C = C_L$ takav da $L' = L_0 + L$ zadovoljava

$$|x - y| \leq C|L'x - L'y|^{\alpha} \quad zasvaki \quad x, y \in X;$$

posebno, L' je injekcija na X sa Hölder neprekidnim inverzom.

Poglavlje 4

Takensov teorem

U svome radu 1981. Takens je pokazao da za generički gladak sistem $x(t)$ razvijen na glatkoj d-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$, se dinamika rješenja može vjerno prikazati uzimajući k vremenski-odgođenih kopija 'generičke mjere' $h\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

$$h(x), \quad h(x(T)), \quad \ldots, \quad h(x(kT)),$$

takvih da $k \geq 2d$. Formalnije, pokazao je da za takav h, preslikavanje $\mathcal{M} \to \mathbb{R}^{k+1}$ difeomorfizam.

Iako su zaključci njegovog teorema jaki, također su i njegove pretpostavke, uglavnom ih je teško provjeriti i u mnogim praktičnim primjenama ne vrijede. Zahtjev da se dinamika odigrava na kompaktnoj konačno dimenzionalnoj mnogostrukosti je veoma restriktivan i isključuje svaku direktnu primjenu rezultata na atraktore beskonačno dimenzionalnih dinamičkih sustava.

4.1 Takensov teorem - konačno dimenzionalni slučaj

Sauer et al.(1991) je zamjenio mnogostrukost $\mathcal{M}$ sa invarijantnim podskupom od $\mathbb{R}^N$ (gornje) box dimenzije d i dozvolio dinamičke sustave koji su samo Lipschitz neprekidni umjesto glatki. U ovom odjeljku dajemo generaliziranu verziju njihovih tvrdnji koje vrijede za određene klase Hölder neprekidnih preslikavanja.

Za početak se moramo prisjetiti definicija singularnih vrijednosti matrice i njihovih svojstava. Neka je $M\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje, promotrimo $m \times m$ simetričnu matricu $M^T M$. Za navedenu matricu postoji skup ortonormiranih svojstvenih vektora $\{e_j\}_{j=1}^m$ sa odgovarajućim svojstvenim vrijednostima λ_j, tj. $M^t M e_j = \lambda_j e_j$.

Lema 4.1.1. *Svaki λ_j je nenegativan, a njih najviše n nisu nula. Singularne vrijednosti od M su $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, pri čemu je $\lambda_j = \alpha_j^2$. Vektori $\{Me_j\}_{j=1}^k$, koji odgovaraju ne-nul vrijednostima od λ_j, su ortogonalni u $\mathbb{R}^n$, te $|Me_j| = \alpha_j$.*

Dokaz. Primjetimo da

$$\lambda_j = (\lambda_j e_j, e_j) = (M^T M e_j, e_j) = (Me_j, Me_j) = |Me_j|^2 \geq 0,$$

dakle, svaka svojestvena vrijednost je nenegativna. Zatim,

$$(Me_i, Me_j) = (M^T M e_i, e_j) = \lambda_j (e_i, e_j) = \lambda_j \delta_{ij},$$

dakle $\{Me_i\}$ su ortogonalni. S obzirom da postoji najviše n međusobno ortogonalnih vektora u $\mathbb{R}^n$, slijedi da postoji najviše n ne-nul svojstvenih vrijednosti matrice $M^T M$. □

Sada koristimo singularne vrijednosti kako bi opisali sliku kugle u $\mathbb{R}^m$ po linearnom preslikavanju M. Sa $B_m(r)$ označavamo kuglu u $\mathbb{R}^m$, radijusa r, sa središtem u ishodištu i također uvodimo oznaku $B_m = B_m(1)$.

Lema 4.1.2. *Slika jedinične kugle u $\mathbb{R}^m$, po linearnom preslikavanju M, je elipsa u $\mathbb{R}^n$ sa poluosima $\{Me_j\}_{j=1}^k$ pri čemu M ima k ne-nul singularnih vrijednosti.*

Dokaz. Već smo pokazali da su $\{Me_j\}_{j=1}^k$ ortogonalni u $\mathbb{R}^n$ i da je $|Me_j| = \alpha_j$. Uzmimo neki $x \in B_m$; možemo zapisati

$$x = \sum_{j=1}^k x_j e_j + y \qquad \sum_{j=1}^k |x_j|^2 + |y|^2 \leq 1,$$

pri čemu je y ortogonalan sa $\{x_j\}$. Tada

$$Mx = \sum_{j=1}^k x_j (Me_j) = \sum_{j=1}^k x_j \alpha_j \frac{Me_j}{\alpha_j}.$$

Dobili smo prikaz Mx kao $\sum_{j=1}^k \xi_j \hat{e}_j$, gdje su $\{\hat{e}_j\}$ ortonormirani vektori smjera Me_j; očigledno

$$\sum_j \left(\frac{\xi_j}{\alpha_j}\right)^2 \leq 1,$$

te iz navedenog slijedi tvrdnja,slika od B_m po linearnom preslikavanju M je elipsa. □

U sljedećoj lemi navodimo nejednakost ključnu za konačno dimenzionalni Takensov teorem.

Lema 4.1.3. *Neka je* $M\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *linearno preslikavanje. Za pozitivan cijeli broj* r $(1 \leq r \leq n)$*, neka je* $\alpha_r > 0$ *r-ta po veličini singularna vrijednost od M. Tada za svaki* $b \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi*

$$\frac{Vol\,\{x \in B_m(\rho) \ : \ |Mx + b| < \delta\}}{Vol\,(B_m(\rho))} \leq C_{m,n} \left(\frac{\delta}{\alpha_r \rho}\right)^r .$$

Dokaz. U prethodnoj lemi smo pokazali da je slika od $B_m(\rho)$ po M, $MB_m(\rho)$, elipsa sa poluosima $\{\rho\alpha_i\}$, gdje su α_i singularne vrijednosti od M. Smanjenjem bilo koje singularne vrijednosti od M možemo samo smanjiti veličinu slike, te tako povećati izraz na lijevoj strani nejednakosti. Stoga možemo pretpostaviti da je $\alpha_1 = \ ... \ = \alpha_r > 0$ i $\alpha_{r+1} = \ ... \ = \alpha_n = 0$, što znači da je $MB_m(\rho)$ r-dimenzionalna kugla radijusa $\rho\alpha_r$. Jasno je da je presjek $MB_m(\rho) + b$ sa $B_n(\rho)$ maksimiziran kada je $b = 0$, i zato je

$$Vol\,\{x \in B_m(\rho) \ : \ |Mx + b| < \delta\} \leq \Omega_r \Omega_{m-r} \left(\frac{\delta}{\alpha_r}\right)^r \rho^{m-r} .$$

Jer je $Vol\, B_m(\rho) = \Omega_m \rho^m$ i $1 \leq r \leq n$, lijeva strana nejednakosti omeđena je sa

$$\left(\max_{1\leq r\leq n} \frac{\Omega_r \Omega_{m-r}}{\Omega_m}\right) \left(\frac{\delta}{\alpha_r \rho}\right)^r \leq C_{m,n} \left(\frac{\delta}{\alpha_r \rho}\right)^r .$$

□

Sada ćemo iskoristiti navedenu ogradu za dokaz sljedeće leme koja je glavna komponenta dokaza Takensovog teorema.

Lema 4.1.4. *Neka je A kompaktan podskup od* $\mathbb{R}^N$*, i neka su* $\{F_0,\ F_1,\ ...\ F_m\}$ θ*-Hölderova preslikvanja sa A u* $\mathbb{R}^k$*. Neka je* S_r *skup parova* $x \neq y$ *iz A za koje je* $k \times m$ *matrica*

$$M_{(x,y)} = (F_1(x) - F_1(y) \qquad \ldots \qquad F_m(x) - F_m(y))$$

ranga najmanje r, i pretpostavimo da je $S_0 = \emptyset$ *i* $d_B(\overline{S_r}) < r\theta$ *za* $1 \leq r \leq k$*. Tada je za gotovo svaki* $\alpha \in \mathbb{R}^m$*, preslikavanje* $F_\alpha\colon X \to \mathbb{R}^k$ *dano sa*

$$F_\alpha = F_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_j$$

injektivno na A.

Napomena 4.1.5. *Po Saueru, kažemo da 'G_α ima svojstvo Γ s vjerojatnošću p' ako je Lebesgueova mjera skupa $\alpha \in B_m(R)$ za koji G_α ima svojstvo Γ je p puta mjera od $B_m(R)$.*

Dokaz. Za $j = 0, ..., m$ neka je $G_j(x, y) = F_j(x) - F_j(y)$, i neka je G_α preslikavanje dano sa

$$G_\alpha(x, y) = G_0(x, y) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j G_j(x, y),$$

tako da po pretpostavci za svaki $z = (x, y) \in S_r$ $k \times m$ matrica

$$M_z = (G_1(z) \quad ... \quad G_m(z))$$

ima rang najmanje r.

Fiksiramo $R > 0$ i promatramo skup

$$S_{r,j} = \{z \in S_r : \text{r-ta najveća singularna vrijednost od } M_z > 1/j\}.$$

Budući da je rang M_z najmanje r za svaki $z \in S_r$, r-ta najveća singularna vrijednost je uvijek pozitivna, i vrijedi $S_r = \cup_{j=1}^{\infty} S_{r,j}$.

Primjetimo da je

$$G_\alpha(z) = G_0(z) + M_z\alpha,$$

pa iz Leme 2.1.3 slijedi da za $z \in S_{r,j}$, vjerojatnost da $|G_\alpha(z)| < \delta$ nije veća od $C_{m,n}(j\delta/R)^r$. Sada fiksirajmo r i j, i odaberimo d takav da $d_B(\overline{S_r}) < d < r\theta$. Zbog $d > d_B(\overline{S_r})$ slijedi da postoji $\epsilon_0 > 0$ takav da se za svaki $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $S_{r,j}$ može pokriti sa ne više od ϵ^{-d} kugli radijusa ϵ, $\{B(z_k, \epsilon)\}$. Neka je

$$Y_k = S_{r,j} \cap B(z_k, \epsilon).$$

Pošto je $|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)| \leq K|x - q|^\theta$,

$$|G_\alpha(z_k)| > K\epsilon^\theta \qquad \Rightarrow \qquad |G_\alpha(z)| > 0 \quad \text{za sve} \quad z \in Y_k;$$

dakle da bi vrijedilo $G_\alpha(z) = 0$, za neki $z \in Y_k$ mora vrijediti $|G_\alpha(z_k)| \leq K\epsilon^\theta$.

Za svaki fiksni z_k, iz Leme 2.1.3 slijedi da je vjerojatnost postizanja sljedeće nejednakosti

$$|G_\alpha(z_k)| = |G_0(z_k) + M_{z_K}\alpha| \leq K\epsilon^{theta}$$

najviše $C_{t,n}(jK\epsilon^k/R)^r$. Budući da $\{z_k\}$ nema više od ϵ^{-d} , slijedi da je vjerojatnost da je $G_\alpha(z) = 0$ za neki $z \in S_{r,j}$ omeđena sa

$$\epsilon^{-d} \times C_{m,n}(jK/R)^r\epsilon^{\theta r} = C_{m,n,j,R,r}\epsilon^{\theta r-d}.$$

Budući da je $d < \theta r$ i ϵ je proizvoljan, slijedi da je $G_\alpha(z) \neq 0$ za svaki $z \in S_{r,j}$ s vjerojatnošću 1.

Jer je $G_\alpha(z) \neq 0$ za svaki $z \in S_{r,j}$ s vjerojatnošću 1, te $A = \cup_{r=1}^{k} S_r$, slijedi da $G_\alpha(z) \neq 0$ za svaki $z \in A$ s vjerojatnošću 1, tj. za gotovo svaki $\alpha \in B_m(R)$. Budući da smo $R > 0$ proizvoljno odabrali, $G_\alpha(z) \neq 0$ za svaki $z \in A$ i gotovo svaki $\alpha \in \mathbb{R}^m$. □

Teorem 4.1.6. *Neka je X kompaktan podskup od $\mathbb{R}^N$ sa $d_B(X) = d$, i neka je $g\colon X \to X$ takva da je g^r θ-Hölderova funkcija za svaki $r \in \mathbb{N}$. Uzmimo $k > 2d/\theta$ ($k \in \mathbb{N}$), i pretpostavimo da skup X_p p-periodičkih točaka od g (tj. skup svih $x \in X$ takvih da $g^p(x) = x$) zadovoljava $d_B(X_p) < p\theta^2/2$ za sve $p = 1, \ldots, k$.*

Neka je $h_1, \ldots, h_m$ baza polinoma N varijabli stupnja najviše 2k, i za danu proizvoljnu θ-Hölderovu funkciju $h_0\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiramo

$$h_\alpha = h_o + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j.$$

Tada za gotovo svaki $\alpha \in \mathbb{R}^m$ je promatrano preslikavanje $F_k\colon X \to \mathbb{R}^N$ definirano sa

$$F_k[h_\alpha, g](x) = (h_\alpha(x),\ h_\alpha(g(x)),\ \ldots,\ h_\alpha(g^{k-1}(x)))^T$$

injektivno na X.

Dokaz. Za $i = 0, 1, \ldots, m$ definiramo

$$F_i(x) = \begin{pmatrix} h_i(x) \\ h_i(g(x)) \\ \vdots \\ h_i(g^{k-1}(x)) \end{pmatrix},$$

pa je po definiciji

$$F_k(h_\alpha, g) = F_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_j.$$

Da bi mogli upotrijebiti tvrdnje iz Leme 2.1.4 moramo za svaki $x \neq y$ provjeriti rang matrice

$$M_{(x,y)} = (F_1(x) - F_1(y) \quad \ldots \quad F_m(x) - F_m(y))$$

$$= \begin{pmatrix} h_1(x) - h_1(y) & \ldots & h_m(x) - h_m(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(g^{k-1}(x)) - h_1(g^{k-1}(y)) & \ldots & h_1(g^{k-1}(x)) - h_1(g^{k-1}(y)) \end{pmatrix}.$$

Kako bi to provjerili, korisno je zapisati M u obliku $M = JH$, gdje je

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} h_1(z_1) & \dots & h_m(z_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(z_q) & \dots & h_m(z_q) \end{pmatrix},$$

pri čemu su svi $z_1, \dots, z_q$ međusobno različiti ($q \leq 2k$), i gdje je $J_{(x,y)}$ $k \times q$ matrica čiji su elementi redaka svi 0, osim dva elementa, koji iznose 1 i -1. Za dani $\xi \in \mathbb{R}^k$, možemo pronaći skup koeficijenata $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ takvih da $\sum_j \alpha_j h_j(z_l) = \xi_l$, tj. takvih da $H_{(x,y)}\alpha = \xi$. Iz toga slijedi da je rang od H jednak q; budući da je $J\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^k$, potrebno je samo provjeriti rang od J.

Razdvojimo skup $\{(x, y) : x, y \in X,\ x \neq y\}$ na tri disjunktna skupa parova (x, y). Na svakom od ta tri skupa ćemo pokazati da za gotovo svaki α vijedi $F_\alpha(x) \neq F_\alpha(y)$. Iz toga će slijediti da vrijedi $F_\alpha(x) \neq F_\alpha(y)$ za gotovo svaki α i za sve $x, y \in X$ takve da $x \neq y$.

1.slučaj: x i y nisu obje periodičke točke perioda $\leq k$. U ovom slučaju, bez smanjenja općenitosti, skup $\{x, g(x), \dots, g^{k-1}(x)\}$ se sastoji od k diskretnih točaka, a skup $\{y, \dots, g^{k-1}(y)\}$ od $r \geq 1$ točaka različitih od iteracija točke x. Stoga

$$J_{(x,y)} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

gdje je desna blok matrica $k \times k$, a lijeva $r \times k$.

Slijedi da rang od $J\colon \mathbb{R}^{k+r} \to \mathbb{R}^k$ iznosi k, zato i rang od $F = JH$ iznosi k. Budući da skup parova $x \neq y$ ima box dimenziju najviše $2d$ i upravo smo pokazali da je rang od $M_{(x,y)}$ k, $k > 2d/\theta$ po pretpostavci, pretpostavke Leme 4.1.4 su zadovoljene za dani izbor (x, y), tj. za sve takve (x, y), $F_\alpha(x) \neq F_\alpha(y)$ za gotovo svaki α.

2.slučaj: x i y leže u različitim periodičkim orbitama perioda $\leq k$. Pretpostavimo da su p i q najmanji cijeli brojevi takvi da $g^p(x) = x$ i $g^q(y) = y$, bez smanjenja općenitosti $1 \leq q \leq p \leq k$. Tada je J ranga najmanje p. Zato je u ovom slučaju rang $M_{(x,y)} \geq p$, dok je po pretpostavci skup parova periodičkih točaka perioda $\leq p$ dimenzije strogo manje od p/θ. Stoga ponovno možemo primjeniti Lemu 4.1.4.

3.slučaj: x i y leže na istoj periodičkoj orbiti perioda $\leq k$. Pretpostavimo da su p i q najmanji cijeli brojevi takvi da $g^p(x) = x$ i $g^q(y) = y$, uz $1 \leq q \leq p \leq k$. Na primjer, neka je $p = 7$ i $q = 4$, tada je J sljedećeg oblika

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rang takve matrice je najmanje $p/2$, stoga je u ovom slučaju rang $M_{(x,y)} \geq p/2$. Box dimenzija skupa parova točaka koje leže na istoj periodičkoj orbiti je omeđen sa $d_B(A_p)/\theta$, budući da je svaki takav par (x, y) sadržan u slici od A_p po jednom od preslikavanja $x \mapsto (x, g^j(x))$, za neki $j = 1, \ldots, k$. $\square$

Poglavlje 5

Primjena - Lorenzova jednadžba

Dinamički sustav može biti opisan vektorom realnih brojeva, njegovim *stanjem*, kojim pokušavamo dati potpuni opis sustava u nekom trenutku u budućnosti. Skup svih mogućih stanja nazivamo *prostor faza sustava* ili *prostor stanja sustava*. Dinamički sustav definiraju prostor stanja i pravilo koje određuje njegovo ponašanje (razvoj sutava) kroz vrijeme. To pravilo najčešće proizlazi iz sustava diferencijalnih jednadžbi. Uređeni skup vrijednosti stanja kroz vrijeme nazivamo *trajektorijom*. Ovisno o sustavu, različite trajektorije se mogu razviti u zajednički podskup prostora stanja koji zovemo *atraktorom*. Postojanje i ponašanje atraktora nam daje intuiciju o podlozi promatranog dinamičkog sustava.

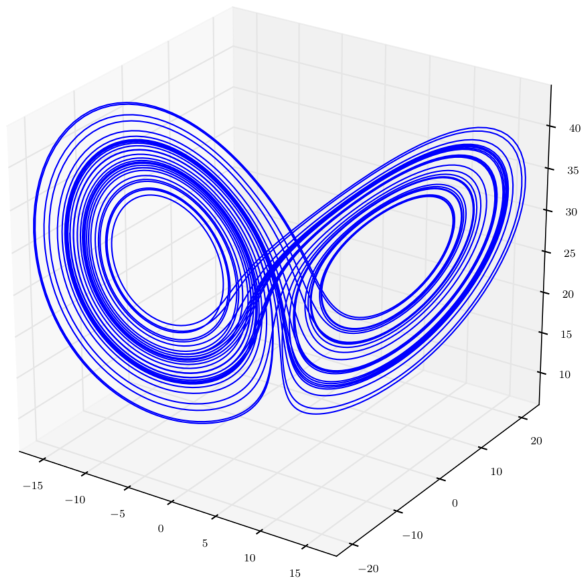
Dani sustav i njegove atraktore možemo vizualizirati pomoću grafova trajektorija različitih početnih stanja te ih numerički integrirati kako bi dobili aproksimaciju njihovog ponašanja u vremenski neprekidnom slučaju proizašlom iz diskretnih izračuna.

5.1 Lorenzov atraktor

Proučavanje čudnih (kaotičnih) atraktora započelo je od strane E.N.Lorenza 1963. godine. Naime, pri istraživanju meteoroloških modela, Lorenz je proučavao nelinearni sustav diferencijalnih jednadžbi danas poznat kao Lorenzov sustav, koji definira jedan od najpoznatijih primjera kaotičnih atraktora, Lorenzov atraktor:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x), \\
\dot{y} &= Rx - y - xz \\
\dot{z} &= -bz + xy.
\end{aligned}$$

Opazio je da će se od nekog trenutka za vrijednosti parametara $\delta = 10$, $b = 8/3$ i $R = 28$, uz početne uvjete $x = 8, y = -8, z = 27$, rješenja naizmjenično vrtiti oko dvije odbijajuće ravnotežne točke $(\pm\sqrt{72}, \pm\sqrt{72}, 27)$. Broj okretaja rješenja oko jedne ravnotežne točke prije nego prijeđe u drugu nije jasno određen. Postoji područje hvatanja U koje sadrži 0, ali ne i dvije odbijajuće ravnotežne točke. Atraktor sadržan u U zovemo Lorenzov atraktor.

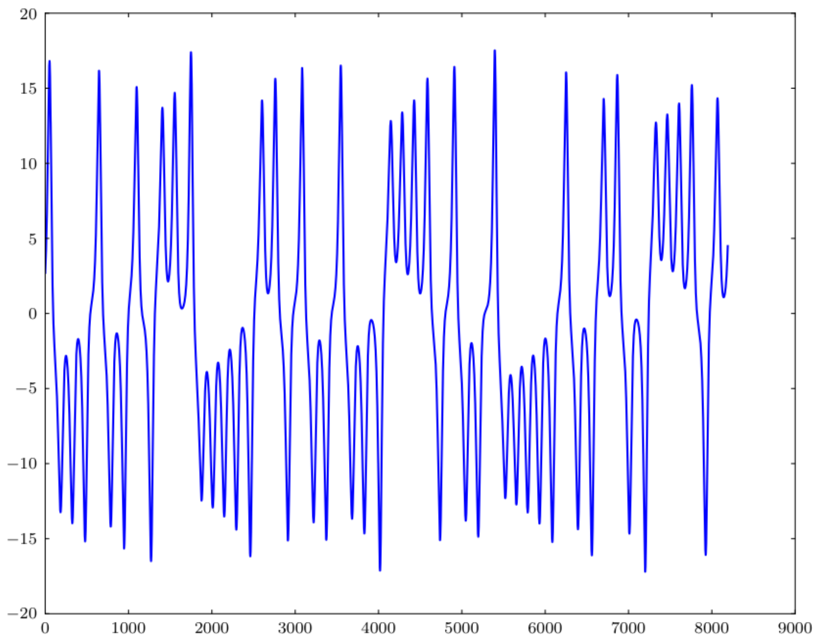


Slika 5.1: Lorenzov atraktor

Lorenzov atraktor je beskonačno dugačak i ekstremno složen skup, definiran aperiodičnim trajektorijama koje divergiraju eksponencijalnom brzinom. Sastoji se od snažnih ekspanzija i skupljanja, te je iznimno osjetljiv na početne uvjete. Radi svoje složene strukture je jedan od najpoznatijih čudnih atraktora. Izgledom podsjeća na krila leptira, te su stoga znanstvenici taj efekt iznimne osjetljivosti na početne uvjete prozvali efektom leptirovih krila (eng. 'the butterfly effect'). Ovaj efekt temelji se na tome da beskonačno male promjene, kao na primjer zamah krila malog insekta, mogu s vremenom dovesti do ogromnih posljedica.

Svrha primjera je primjetiti mogućnost rekonstrukcije kaotičnog atraktora iz nepotpunih mjerenja sustava; na primjer vremenskog niza mjerenja stanja samo prve Lorenzove jednadžbe. Takensov teorem ulaganja objašnjava kako se prostor faza atraktora može rekonstruirati koristeći vremenski-odgođene mjere jedne varijable.

Iz zadanog početnog stanja i zadanih vrijednosti parametara Lorenzovih jednadžbi numeričkim iteracijama dobivamo vremenski niz proizašao iz prve Lorenzove jednadžbe, prikazan sljedećim grafom:



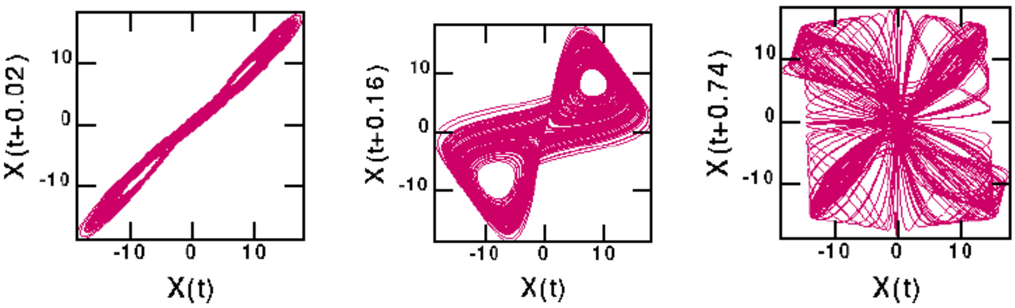
Slika 5.2: Vremenski niz generiran prvom Lorenzovom jednadžbom

Odgađanje vremenskog niza nastalog iz jedne jednostavne diferencijalne jednadžbe kreira višedimenzionalno ulaganje, i prema Takensovom teoremu dopušta rekonstrukciju faznog prostora atraktora. Ukoliko je mjerena varijabla u vremenskom trenutku t definirana sa $x(t)$, tada je $(n + 1)$-dimenzionalno ulaganje definirano sa:

$$[x(t), x((t + \tau), \ldots, x(t + n\tau))].$$

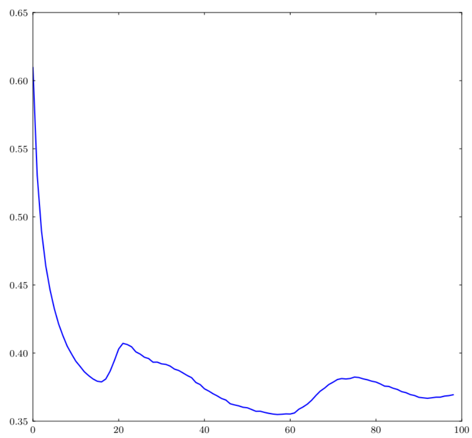
Izbor vremenske odgode τ definira točnost rekonstrukcije atraktora. Premala vrijednost će dati atraktor duž linije, a prevelika vrijednost neće rezultirati strukturom atraktora.

Na prvoj slici vidimo prikaz dobivenih atraktora za $\tau = 0.02$, kao primjera za premali τ. Možemo uočiti da podaci leže vrlo blizu pravca $x(t) = x(t+\tau)$. Na drugoj slici vidimo primjer atraktora za $\tau = 0.16$, ovo je primjer 'dobro' odabranog τ, budući da dobiveni atraktor zauzima veliko područje prostora u kojem se nalazi. Treća slika prikazuje primjer atraktora dobivenog odabirom prevelikog τ. S obzirom da se Lorenzov sustav sastoji od tri jednadžbe pravilnije bi bilo navedene grafove prikazati u trodimenzionalnom prostoru, no dovoljan je i dvodimenzionalni prikaz (budući da je dovoljno lijep).

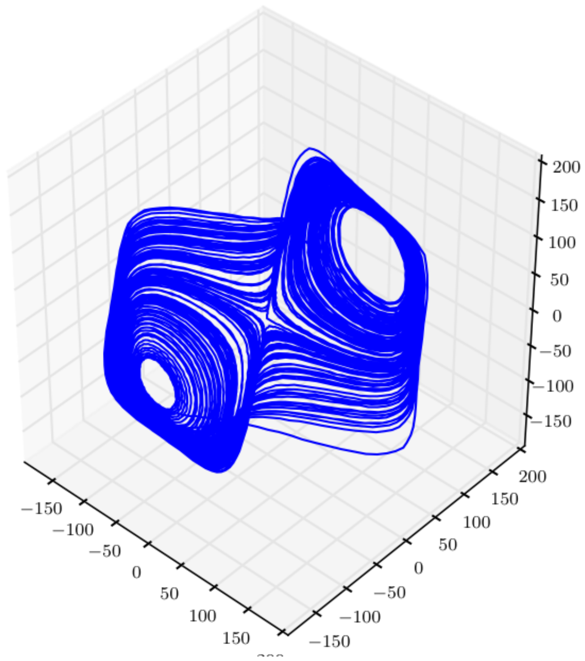


Slika 5.3: Rekonstrukcija atraktora za različite odabire τ

Uzimanje prvog lokalnog minimuma funkcije koja opisuje uzajamne informacije o odgođenom i neodgođenom vremenskom nizu efikasno daje vrijednost vremenske odgode τ za koju dijele najmanje informacija. Sljedeće slike daju grafički prikaz funkcije informacije, te atraktora rekonstruiranog za τ odabran kao prvi lokalni minimum funkcije informacije.



Slika 5.4: Prikaz funkcije informacije



Slika 5.5: Atraktor rekonstruiran za τ-prvi lokalni minimum

Bibliografija

[1] Robinson, J.C., Dimensions, Embeddings, Attractors, Cambridge University Press, 2011.

[2] Brin, M., Stuck, G., Intorduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, 2011.

[3] Munkers, J.R., Topology, Prentice Hall, 2000.

[4] Ungar, Š., Matematička analiza 3, Matematički odjel, PMF, Zagreb, 1994.

[5] Internet, http://www.physics.emory.edu/faculty/weeks//research/tseries4.html, www.node99.org/tutorials/ar, www.wikipedia.org

Sažetak

Na samom početku rada, u poglavlju Uvod u dinamičke sustave, obradili smo osnovne pojmove, te naveli neke primjere dinamičkih sustava. Objasnili smo kakvi sustavi mogu biti, definirali orbite, vrste točaka sustava i definirali za dinamičke sustave vrlo važan pojam atraktora i neka svojstva bitna za njegovo razumijevanje.

U drugom poglavlju proučavali smo topološke dinamičke sustave i naveli neka njihova svojstva. Objasnili smo što su to granični i minimalni skupovi, termin povratnosti točaka, te kakvi sustavi moraju biti da bi bili topološki tranzitivni, ekspanzivni ili topološko miješanje.

Nadalje, u poglavlju Dimenzije, proučavali smo tri različite definicije dimenzije; Lebesgueovu pokrivajuću dimenziju, Hausdorffovu te box dimenziju. Također proučavali smo pojam konačnodimenzionalnosti u terminima teorije ulaganja u Euklidske prostore za svaku od navedenih dimenzija.

U četvrtom poglavlju bavili smo se glavnom temom ovoga rada, Takensovim teoremom i njegovim dokazom, te nekim tehničkim rezultatima potrebnima za dokazivanje istoga.

U posljednjem, petom poglavlju, Primjena, obradili smo jedan od najvažnijih primjera teorije dinamičkih sustava - Lorenzove jednadžbe i njima pripadajući Lorenzov atraktor.

Summary

At the very beginning of this paper we are introduced to some basic examples and concepts of dynamic systems. We explained different types of dynamic systems, defined orbits, types of points in the dynamic systems and introduced the concept of the attractors and some of its properties, which is very important for the understanding of the dynamic systems theory.

In the second chapter we studied topological dynamic systems and their properties. We explained limit sets, minimal sets and the term of recurrence. We introduced the concepts and properties of dynamic systems regarding to being topologically transitive, expansive or topologically mixing.

Furthermore, next chapter, Dimensions, treated three different definitions of dimensions (Lebesgue covering dimension, Hausdorff dimension and upper box-counting dimension) and investigated what being 'finite dimensional' implies in terms of embeddings into Euclidean spaces for each of these definitions.

In the fourth chapter we presented the main subject of this paper,the Takens theorem and its proof. We also introduce some technical results.

In the last chapter we gave an important example in the dynamics theory - Lorenz equations and Lorenz attractor (defined by those equations).

Životopis

Rođena sam 23.studenog 1990. godine u Zagrebu, gdje sam pohađala osnovnu i srednju školu. Nakon završene 'X.gimnazije - Ivan Supek', 2009. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija i stjecanja titule univ.bacc.math, 2013. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike, također na Matematičkom odsjeku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.