Metoda nivo skupa u optimizaciji oblika

Kunštek, Petar

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Kunštek

METODA NIVO SKUPA U OPTIMIZACIJI OBLIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, lipanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

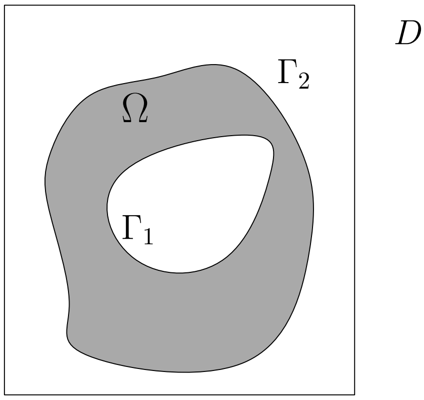
Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Optimizaciju oblika možemo shvatiti kao traženje particije skupa $D \subset \mathbb{R}^d$ na Ω i $D \setminus \Omega$ koja minimizira dani funkcional. Da bismo bolje objasnili problem krenimo s modelom kondenzatora.



Neka je Ω ograničen i otvoren skup. Odaberimo Ω_1 i Ω_2 otvorene skupove, takve da su Ω_1 i Ω_2 kompaktno sadržani u Ω_2 i D respektivno. Stavimo $\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$. Označimo granice $\Gamma_1 := \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}_1$ i $\Gamma_2 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Skup $D \setminus \Omega$ interpretiramo kao metalno kućište kondenzatora, dok je Ω ispunjen materijalom koji ne provodi struju (izolatorom).

Električni potencijal y zadovoljava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu s Dirichletovim rubnim uvjetom:

$$\text{(RZ)} \qquad \begin{cases} \Delta y = 0 & \text{na } \Omega \\ y = 0 & \text{na } \Gamma_1 \\ y = 1 & \text{na } \Gamma_2. \end{cases}$$

Uvedimo dopustivi skup

$$\mathcal{V} = \left\{ \Omega \subset D \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{postoje otvoreni skupovi } \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset D \\ \text{takvi da je } \Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1 \text{ i } \mu(\Omega) = \alpha \end{array} \right\}.$$

Skup $\mathcal{V}$ ovisi o prirodi modela. Na primjer, fiksnu mjeru možemo tumačiti kao unaprijed zadanu količinu materijala. Radi jednostavnosti označimo sa $y(\Omega)$ rješenje zadaće (RZ) za $\Omega \in \mathcal{V}$. Tada možemo definirati energiju kondenzatora kao:

$$C(\Omega) = \int_\Omega |\nabla y(\Omega)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Zadaća optimizacije oblika sastoji se u određivanju $\Omega \in \mathcal{V}$ koji zadovoljava

$$C(\Omega) = \inf_{\omega \in \mathcal{V}} C(\omega).$$

Nas će zanimati kako se $C(\Omega)$ mijenja pri malim "pertubacijama" skupa Ω. Pitanje egzistencije rješenja ove zadaće je netrivijalna i njime se nećemo baviti u ovom radu.

Želimo definirati koncept malih "pertubacija" skupa Ω. Pokazuje se da je Soboljevljev prostor $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$ izuzetno pogodan za definiranje malih promjena domene Ω. Za $\theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ gledamo $(\mathrm{Id} + \theta)\Omega$, gdje je $\|\theta\|$ dovoljno mali tako da $(\mathrm{Id} + \theta)\Omega$ pripada dopustivom skupu. Rješenje zadaće (RZ) na skupu $(\mathrm{Id} + \theta)\Omega$ skraćeno označavamo sa $y(\Omega; \theta) = y((\mathrm{Id} + \theta)\Omega)$. Analogno funkcional energije zapisujemo kao $C(\Omega; \theta) = C((\mathrm{Id} + \theta)\Omega)$. Kasnije ćemo uzimati da je Ω fiksiran čime oznaku Ω radi jednostavnosti izostavljamo i radimo samo s $y(\theta)$ i $C(\theta)$.

Definicija. *(Derivacija oblika)*
Ako postoji derivacija u smjeru preslikavanja $\theta \mapsto C(\Omega; \theta) : W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ tada

$$C'(\Omega; \theta) = \lim_{t \to 0^+} \frac{C(\Omega; t\theta) - C(\Omega; 0)}{t}$$

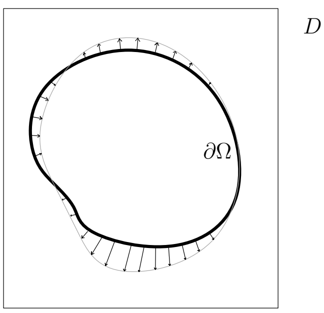
nazivamo derivacijom oblika skupa Ω u smjeru θ.

Mi ćemo za ovaj primjer pokazati i više. Preslikavanje $\theta \mapsto C(\Omega; \theta)$ će biti Fréchet-diferencijabilno u nuli iz $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $\mathbb{R}$ čime je derivacija u smjeru θ upravo (Fréchetov) diferencijal u točki 0 primjenjen na θ. Pritom $\partial\Omega$ mora imati određenu regularnost. Kao rezultat, za derivaciju oblika dobivamo izraz :

$$C'(\Omega, \theta) = -\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial y(\Omega; 0)}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \theta \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S.$$

U radu ćemo pokazati opću teoriju koja daje dovoljne uvjete za postojanje derivacije oblika. U praksi, često dolazimo do sljedećeg izraza za derivaciju oblika (vidi Teorem 3.4.2 i 3.5.6):

$$\text{(DO)} \qquad C'(\Omega, \theta) = -\int_{\partial\Omega} v \, \theta \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S.$$



Uz pretpostavku dovoljne glatkoće na $v\mathbf{n}$ odabirom θ

$$\theta = v\mathbf{n} \quad \text{na } \partial\Omega, \quad \theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d),$$

dobivamo za funkcional ocjenu:

$$C(\Omega, t\theta) = C(\Omega, 0) - t \int_{\partial\Omega} v^2 \, \mathrm{d}S + o(t).$$

Posebno, za male $t > 0$ vrijedit će $C(\Omega, t\theta) < C(\Omega, 0)$, pa nam ova formula daje ideju kako "pomicati" granicu kako bismo lokalno pronašli particiju s nižom vrijednosti funkcionala.

Metoda nivoa skupa je numerička metoda za optimizaciju oblika koja je zasnovana na ovoj ideji. U ovoj metodi skup $\Omega \subset D$ reprezentiramo skalarnom funkcijom $\psi : D \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:

$$(*) \qquad \begin{cases} \psi(x) < 0, & x \in \Omega \\ \psi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ \psi(x) > 0, & x \in D \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Pogledajmo

$$\psi(x) = (-1)^{\chi_D} \mathrm{d}(x, \partial\Omega),$$

gdje je χ karakteristična funkcija, a $d(\cdot, \partial\Omega)$ označava euklidsku udaljenost od ruba skupa. Gornja funkcija očito zadovoljava $(*)$ i ima svojstvo da je $\nabla\psi$ uvijek vektor jedinične duljine. Time smo dobili implicitnu reprezentaciju skupa Ω. Kažemo da je preslikavanje ψ funkcija nivo skupa za Ω ako zadovoljava $(*)$.

Ideja metode nivo skupa je uvesti evoluciju skupa $\Omega(t)$ kroz vrijeme. To se radi funkcijom $\psi(t, x) : [0, T] \times D \to \mathbb{R}$ gdje je $\psi(t, \cdot)$ funkcija nivo skupa za $\Omega(t)$. Pritom se definira polje brzine $V(t, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, koje reprezentira gibanje $\Omega(t)$. To vodi na jednadžbu konvekcije:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V \cdot \nabla\psi = 0.$$

Pretpostavljamo još da je $V(t, x) = v_0(x)\mathbf{n}_t(x)$ uz $\mathbf{n}_t(x) = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$. Uočimo da je $\mathbf{n}_t$ proširenje vanjske normale ruba $\partial\Omega(t)$. Time smo došli do Hamilton-Jacobijeve jednadžbe:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + v_0|\nabla\psi| = 0.$$

Da bi jednadžba imala jedinstveno rješenje potrebno je još zadati inicijalni uvjet $\psi(0, \cdot) = \psi_0$. Zadani v_0 biramo kao proširenje funkcije v iz (DO) za dani $\Omega(t)$ na cijeli D. Osnovni cilj ovog rada je dati teorijske rezultate potrebne za računanje funkcije v_0.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na strpljenju i pomoći pri izradi ovog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i rezultati

1.1 Notacija i osnovni pojmovi

Koristimo sljedeću notaciju :

d	dimenzija prostora, najčešće 2 ili 3
$\overline{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$	prostor uniformno neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}^d$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ (ne nužno ograničenih)
$L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$	prostor izmjerivih, esencijalno ograničenih funkcija na $\mathbb{R}^d$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	prostor beskonačno diferencijbilnih funkcija s kompaktnim nosačem, alternativna oznaka $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Razlikovati ćemo sljedeća dva prostora za $c = \overline{c}$ i $c = \infty$:

$$W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \left\{ \theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \middle| \begin{array}{r} \theta = (\theta_1, ..., \theta_d),\ D^\alpha \theta_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ i = 1, ..., d, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

$$W^{k,\overline{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \left\{ \theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \middle| \begin{array}{r} \theta = (\theta_1, ..., \theta_d),\ D^\alpha \theta_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \overline{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^d) \\ i = 1, ..., d,\ 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

Norme na danim prostorima su prirodno dane, preko:

$$\|\theta\|_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \text{ess} \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \theta(x)|^2 \Big)^{1/2}$$

gdje je $|\cdot|$ standardna euklidska norma na $\mathbb{R}^d$, dok sup ess stoji za esencijalni supremum. Uz dane prostore vežemo i normu:

$$\|\theta\|_{M,k} = \max_{i=1,...,d} \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha \theta_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Napomena 1.1.1. (*O ekvivalenciji normi* $\|\cdot\|_k$ *i* $\|\cdot\|_{M,k}$ *na* $W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$)

Radi jednostavnosti zapisujemo npr. $\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}$ kao $\sum_\alpha$. Dokazujemo ekvivalenciju normi za slučaj $c=\infty$. Kako je $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\subset W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ tvdrnja će slijediti i za $c=\bar{c}$. Direktno iz definicije za svaki α i svaki i postoji $M_{\alpha,i}\subset\mathbb{R}^d$ skup mjere 0 takav da je $|D^\alpha\theta_i(x)|\leq\|D^\alpha\theta_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ za $x\in\mathbb{R}^d\setminus M_{\alpha,i}$. Zato možemo uzeti $M=\cup_{\alpha,i}M_i$ (opet skup mjere 0) i promatrati relacije samo na $\mathbb{R}^d\setminus M$.

$$\begin{aligned}\Big(\sum_\alpha|D^\alpha\theta(x)|^2\Big)^{1/2}&\leq\Big(\sum_\alpha d\Big)^{1/2}\Big(\max_{\alpha,i}|D^\alpha\theta_i(x)|^2\Big)^{1/2}=C'(d,k)\Big(\max_{\alpha,i}|D^\alpha\theta_i(x)|^2\Big)^{1/2}\\&\leq C'(d,k)\Big(\max_{\alpha,i}\|D^\alpha\theta_i\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2}=C'(d,k)\max_{\alpha,i}\|D^\alpha\theta_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

za $x\in\mathbb{R}^d\setminus M$. Dobili smo

$$\|\theta\|_k\leq C'(d,k)\|\theta\|_{M,k}.$$

Za obratnu ocjenu, prema definiciji max postoje α_0 i i_0 t.d. je $\max_{\alpha,i}\|D^\alpha\theta_i\|_{L^\infty}=\|D^{\alpha_0}\theta_{i_0}\|_{L^\infty}$.

$$\max_{\alpha,i}\|D^\alpha\theta_i\|_{L^\infty}=\|D^{\alpha_0}\theta_{i_0}\|_{L^\infty}=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\text{ess}|D^{\alpha_0}\theta_{i_0}(x)|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\text{ess}\Big(\sum_{\alpha,i}|D^\alpha\theta_i(x)|^2\Big)^{1/2}$$

Time je pokazano da

$$\|\theta\|_{M,k}\leq\|\theta\|_k$$

te su norme ekvivalentne.

Napomena 1.1.2. (*Prostori* $W^{k,c}$ *su potpuni*)

$\big(W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d),\|\|_{M,k}\big)$ je Soboljevljev prostor. $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ je potpun, dok se $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$ može shvatiti kao zatvoreni potprostor u $\big(L^\infty(\mathbb{R})\big)^{N(d,k)}$ gdje je $N(d,k)=\sum_{l=0}^k\binom{d-1+l}{l}$. Zato je i $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})^d$ kao kartezijev produkt Banachovih prostora opet Banachov. Prostor $W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ možemo shvatiti i kao $W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})^d$ čime smo pokazali tvrdnju za $c=\infty$.

Pokažimo da je $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ je zatvoren potprostor od $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ niz takav da konvergira prema f u $\|\cdot\|_k$. Tada to povlači da $D^\alpha f_n\to D^\alpha f$ u normi $L^\infty(\mathbb{R})$. Općenito, ako niz uniformno neprekidnih funkcija uniformno konvergira prema funkcija, tada je ta funkcija opet uniformno neprekidna. Time je $D^\alpha f\in\overline{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^d)$ za $0\leq|\alpha|\leq k$ čime je pokazana tvrdnja. $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ je kao zatvoren potprostor Banachovog prostora, opet Banachov.

Definicija 1.1.3. *(ograničena Lipshitzova funkcija)*
Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ *i* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup. Kažemo da je funkcija* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ograničena Lipshitzova funkcija ako vrijedi sljedeće:*

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & \exists (L_0 > 0),\ \forall x \in \Omega & |f(x)| \leq L_0 \\ \text{ii)} & \exists (L_1 > 0),\ \forall x, y \in \Omega & |f(x) - f(y)| \leq L_1 |x - y| \end{array}$$

1.2 Teorem o karakterizaciji prostora $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

Za razumijevanje uvedenih prostora od interesa je teorem o karakterizaciji prostora $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Prije toga dokažimo sljedeću lemu.

Lema 1.2.1. *(Morreyeva nejednakost)*
Neka je $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ *i* $p > d$. *Tada postoji konstanta* $C(d) > 0$ *takva da za svaki* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *vrijedi:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C(d) \Bigg(\int\limits_{K(x, 2|x-y|)} \big|\nabla u(z)\big|^p \, dz \Bigg)^{\frac{1}{p}} \big|x - y\big|^{1 - \frac{d}{p}}$$

Dokaz: Neka je $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int\limits_{K(x,r)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{d}y &= \int\limits_0^r \int\limits_{S(x,\rho)} |u(y) - u(x)| \, \mathrm{dS}(y) \mathrm{d}\rho \\ &= \int\limits_0^r \int\limits_{S(0,1)} |u(x + \rho y) - u(x)| \rho^{d-1} \, \mathrm{dS}(y) \mathrm{d}\rho \end{aligned}.$$

Iskoristimo da je funkcija klase $\mathcal{C}^1$. Za $y \in K(x, r)$ imamo

$$\begin{aligned} |u(x + \rho y) - u(x)| &= \left| \int\limits_0^\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x + ty) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int\limits_0^\rho |\nabla u(x + ty) \cdot y| \, \mathrm{d}t \\ &\leq \int\limits_0^r |\nabla u(x + ty)| \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

te dobivamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{K(x,r)} |u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}y &\leq \int\limits_0^r \rho^{d-1} \int\limits_{S(0,1)} \int\limits_0^r |\nabla u(x+ty)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{dS}(y)\,\mathrm{d}\rho \\ &= \tfrac{r^d}{d} \int\limits_0^r \int\limits_{S(0,1)} \frac{|\nabla u(x+ty)|}{t^{d-1}} t^{d-1}\,\mathrm{dS}(y)\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{r^d}{d} \int\limits_{K(x,r)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{d-1}}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

gdje je iskorištena zamjena $t = |z-x|$. Primjenom Hölderove nejednakosti na prethodni izraz dobivamo

$$\int\limits_{K(x,r)} |\nabla u(z)||z-x|^{1-d}\,\mathrm{d}z \leq \Big(\int\limits_{K(x,r)} |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}z \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_{K(x,r)} \big|z-x\big|^{(1-d)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}z \Big)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Drugi izraz možemo direktno izračunati

$$\int\limits_{K(x,r)} \big|z-x\big|^{(1-d)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^r \int\limits_{S(0,1)} \rho^{(1-d)\frac{p}{p-1}} \rho^{d-1}\,\mathrm{dS}(z)\mathrm{d}\rho = C r^{\frac{p-d}{p-1}}.$$

Time smo dobili

$$(*) \quad \int\limits_{K(x,r)} |\nabla u(z)||z-x|^{1-d}\,\mathrm{d}z \leq C \Big(\int\limits_{K(x,r)} |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}z \Big)^{\frac{1}{p}} r^{1-\frac{d}{p}}.$$

Vrijedi da je mjera $\mu(K(x,r)) = C(d)r^d$, te možemo zapisati izraz kao

$$(**) \fint_{K(x,r)} |u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}y \leq C \int_{K(x,r)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{d-1}}\,\mathrm{d}z, \quad \text{gdje je} \fint_U f\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu(U)} \int_U f\,\mathrm{d}x.$$

Fiksirajmo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Stavimo $W = K(x,r) \cap K(y,r)$ i $r = |y-x|$. Označimo

$$\frac{\mu(W)}{\mu(K(x,r))} = \frac{\mu(W)}{\mu(K(y,r))} = m > 0,$$

gdje konstanta m ovisi samo o dimenziji prostora d.

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &= \fint_W |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}z \\
&\leq \fint_W |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z + \fint_W |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}z \\
&= \tfrac{m}{\mu(K(x,r))}\int_W |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z + \tfrac{m}{\mu(K(y,r))}\int_W |u(y)-u(z)|\,\mathrm{d}z \\
&\leq C\left(\fint_{K(x,r)} |u(x)-u(z)|\,\mathrm{d}z + \fint_{K(y,r)} |u(y)-u(z)|\,\mathrm{d}z\right).
\end{aligned}
$$

Preostaje iskoristiti $(*)$ i $(**)$ te činjenicu da je $K(x,r), K(y,r) \subset K(x,2r)$ čime dobivamo tvrdnju leme.

$\square$

Teorem 1.2.2. (*o karakterizaciji prostora* $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$)
Funkcija $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *pripada prostoru* $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ *ako i samo ako je funkcija* u *ograničena Lipschitzova funkcija.*

Dokaz: Bez smanjena općenitosti možemo gledati funkciju $v = u_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ako pokažemo da je $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ ako i samo ako je v ograničena Lipschitzova, tada tvrdnja vrijedi i za vektorsku $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

$$
\begin{aligned}
& u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \\
\iff\ & (\forall i = 1,2,...,d) \quad u_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \\
\iff\ & (\forall i = 1,2,...,d),\ (\exists L_i)\ (\forall x,y \in \mathbb{R}^d) \quad |u_i(x)-u_i(y)| \leq L_i\,|x-y| \\
\iff\ & (\forall x,y \in \mathbb{R}^d) \quad |u(x)-u(y)|_\infty \leq (\max_i L_i)\,|x-y| \\
& (\forall x,y \in \mathbb{R}^d) \quad |u(x)-u(y)| \leq L\,|x-y|
\end{aligned}
$$

gdje $|x|_\infty = \max_{i=1,\dots,d}|x_i|$. Posljednja ekvivalencija slijedi iz činjenice da su norme na konačnodimenzionalnom prostoru ekvivalentne. Definirajmo diferencijalni kvocijent kao:

$$
D_i^h v(x) = \frac{v(x+he_i)-v(x)}{h} \qquad \text{za } i = 1,2,...,d, \quad \text{za } h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}
$$

Koristimo izglađujuće funkcije ρ_ε definirane formulom $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ za $\varepsilon > 0$, gdje je

$$
\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}, \quad \text{gdje je } C \text{ t.d. je } \int\limits_{K(0,1)} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1.
$$

Uočimo da je nosač $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) = \overline{K}(0, \epsilon)$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{K(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{K(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^d}\rho(\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x = \int\limits_{K(0,1)} \rho(y)\,\mathrm{d}y = 1$$

Označimo konvoluciju $f^\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$, gdje je $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1, \infty\rangle$. Tada je f^ε glatka funkcija i $f^\varepsilon \to f$ u $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
Odaberimo niz $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takav da je $\psi_{k|\overline{K}(0,k)} = 1$. Tada je $v\psi_k \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za svaki $p \in [1, \infty\rangle$. Fiksirajmo $p > d$. Jasno je $\mathrm{supp}(v\psi_k)$ kompaktan. Iz svojstva izglađujućeg niza znamo da

$$(v\psi_k)_\varepsilon \to v\psi_k \quad \text{u } L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{kada } \varepsilon \to 0$$

te

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k)\right)_\varepsilon \to \frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k) \quad \text{u } L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, d \text{ kada } \varepsilon \to 0.$$

Fiksirajmo niz $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Tada za svaki k postoji podniz (opet označen sa $(\varepsilon_n)_n$) te skup M_k mjere 0 takav da

$$(v\psi_k)_{\varepsilon_n}(x) \to v\psi_k(x) \quad i \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k)\right)_{\varepsilon_n} \to \frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k) \quad \text{za } x \in \mathbb{R}^d \setminus M_k \text{ i } n \to +\infty.$$

Neka je $M = \cup_k M_k$. Prema Lemi 1.2.1 vrijedi za $\varepsilon > 0$ te $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus M$ i $k = k(x, y) \in \mathbb{N}$ t.d. $k > |x| + 2|x - y|$

$$\left|(v\psi_k)_{\varepsilon_n}(x) - (v\psi_k)_{\varepsilon_n}(y)\right| \le C\Bigg(\int\limits_{K(x,2|x-y|)} \left|\nabla(v\psi_k)_{\varepsilon_n}(z)\right|^p \mathrm{d}z\Bigg)^{\frac{1}{p}} \left|x - y\right|^{1-\frac{d}{p}}$$

Pustimo li za fiksan $k(x, y)$, $\quad n \to \infty$ dobivamo:

$$\left|(v\psi_k)(x) - (v\psi_k)(y)\right| \le C\Bigg(\int\limits_{K(x,2|x-y|)} \left|\nabla(v\psi_k)(z)\right|^p \mathrm{d}z\Bigg)^{\frac{1}{p}} \left|x - y\right|^{1-\frac{d}{p}}$$

Zato što je $\psi_k(x) = 1$ za $|x| < k$, $v\psi_k(x) = v(x)$ s.s.. Za slabe derivacije vrijedi $\frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v)\psi_k + v\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_k)$, dobivamo $\frac{\partial}{\partial x_i}(v\psi_k)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v)(x)$ za $|x| < k$ s.s..

Postupak možemo napraviti za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus M$ te imamo ocjenu:

$$\left|v(x) - v(y)\right| \leq C \Bigg(\int\limits_{K(x,2|x-y|)} \left|\nabla v(z)\right|^p \mathrm{d}z \Bigg)^{\frac{1}{p}} \left|x - y\right|^{1-\frac{d}{p}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \setminus M$$

Time smo pokazali da postoji neprekidna reprezentacija za v. Dogovorno je onda $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Preostaje još pokazati da je funkcija Lipschitzova (za sada smo pokazali samo da je lokalno Lipschitzova). Opet koristimo izglađujuće funkcije jer je $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, pa ima smisla promatrati $v^\varepsilon = v * \rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Jasno onda $v^\varepsilon \to v$ s.s.. Zbog neprekidnosti od v, v^ε zapravo konvergira po točkama na cijelom $\mathbb{R}^d$.

Definiramo

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \|\nabla v\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathrm{ess} |\nabla v(x)|$$

Pokažimo da je $\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{\partial}{\partial x_i} v^\varepsilon(x)\right| &= \left|\tfrac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\mathbb{R}^d} v(x-y) \rho_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x-y)\right) \rho_\varepsilon(y)|\, \mathrm{d}y \\
&\leq \|\tfrac{\partial}{\partial x_i} v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\rho_\varepsilon(x-y)|\, \mathrm{d}y \\
&= \|\tfrac{\partial}{\partial x_i} v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

Time vrijedi $\|\nabla v^\varepsilon\|_{M,0} \leq \|\nabla v\|_{M,0}$ prema Napomeni 1.1.1.

Preostaje jednostavan račun:

$$v^\varepsilon(y) - v^\varepsilon(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} v^\varepsilon(tx + (1-t)y)\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \nabla(v^\varepsilon)(tx + (1-t)y) \cdot (y - x)\, \mathrm{d}t.$$

Uzimanjem norme

$$\begin{aligned}
|v^\varepsilon(y) - v^\varepsilon(x)| &\leq |y - x| \int\limits_0^1 |\nabla(v^\varepsilon)(tx + (1-t)y)|\, \mathrm{d}t \leq \|\nabla(v^\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |y - x| \\
&\leq C \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |y - x| = L|y - x|,
\end{aligned}$$

pa zbog konvergencije po točkama slijedi

$$|v(y) - v(x)| \leq L|y - x|$$

što smo i trebali dokazati.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je v ograničena Lipschitz neprekidna funkcija. Treba pokazati da tada funkcija ima slabe prve derivacije i to ograničene. Zato što je v Lipschitz neprekidna funkcija (sa Lipschitzovom konstantom $L > 0$):

$$|v(x - he_i) - v(x)| < L| - he_i| \;\Rightarrow\; |D_i^{-h} v(x)| = \frac{|v(x - he_i) - v(x)|}{|h|} < L.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Definiramo za k funkciju $\varphi_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ tako da je $\varphi_k\big|_{\overline{K}(0,k)}(x) = 1$, te $\varphi_k\big|_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,k+1)}(x) = 0$.

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } |x| \le k + 1/4 \\ 2\,[|x| - (k + 1/4)] & \text{za } |x| \in \langle k + 1/4, k + 3/4 \rangle \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija φ_k je radijalna,

$$\nabla \varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{2x}{|x|} & , |x| \in \langle k + 1/4, k + 3/4 \rangle \\ 0 & , \text{ina\^ce} \end{cases} \quad , \qquad \text{te } \|\nabla \varphi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)^d} \le 2$$

Pogledajmo funkciju $\phi_k = \varphi_k * \rho_{1/4}$ ($\rho_{1/4}$ je izglađujuća funkcija od ranije). Ideja ovakve konstrukcije je napraviti niz funkcija $(\phi_k)_k \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ koje će biti ograničene u $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ sa $\phi_k\big|_{\overline{K}(0,k)}(x) = 1$, te $\phi_k\big|_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,k+1)}(x) = 0$. Zaista je ϕ_k Lipschitzova funkcija gdje Lipschitzova konstanta ne ovisi o k,

$$|\phi_k(x) - \phi_k(y)| \le L_\phi |x - y|$$

Pokažimo da je $v\phi_k$ Lipschitzova funkcija.

$$\begin{aligned} \big|v(x)\phi_k(x) - v(y)\phi_k(y)\big| &= \big|v(x)\phi_k(x) \pm v(x)\phi_k(y) - v(y)\phi_k(y)\big| \\ &\le \big|v(x)[\phi_k(x) - \phi_k(y)]\big| + \big|\phi_k(y)[v(x) - v(y)]\big| \\ &\le \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} L_\phi |x - y| + L|x - y| = \big(\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} L_\phi + L\big)\, |x - y| \end{aligned}$$

Vidimo da je $v_k := v\phi_k$ Lipschitzova funkcija sa uniformnom ocjenom koja ne ovisi o odabiru $k \in \mathbb{N}$.

Analogno jer je v_k Lipschitzova funkcija vrijedi:

$$|D_i^{-h} v_k(x)| = \frac{|v_k(x - he_i) - v_k(x)|}{|h|} < L'.$$

Odaberimo niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \langle 0, +\infty\rangle$ t.d. $h_n \to 0$.

Neka je $k = 1$.
Vrijedi da je $\left|D_i^{-h_n} v_1\right| < L', \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Zato što je $\overline{K}(0,2)$ kompaktan skup onda je $D_i^{-h_n} v_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, te je niz ograničen u L^2. $L^2(\mathbb{R}^d)$ je Hilbertov prostor pa postoji slabo konvergentan podniz p_1 takav da

$$D_i^{-h_{p_1(n)}} v_1 \rightharpoonup w_i^{(1)} \quad \text{u } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Neka je $k = 2$.
Gledamo niz funkcija $(D_i^{-h_{p_1(n)}} v_2)_{n\in\mathbb{N}}$, te analogno konstruiramo funkciju p_2 tako da je $(D_i^{-h_{p_2(n)}} v_2)_{n\in\mathbb{N}}$ podniz od $(D_i^{-h_{p_1(n)}} v_2)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$D_i^{-h_{p_2(n)}} v_2 \rightharpoonup w_i^{(2)} \quad \text{u } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Važno je za uočiti da su $w_i^{(2)}\Big|_{K(0,1)} = w_i^{(1)}\Big|_{K(0,1)}$ jednaki (u $L^2(\mathbb{R}^d)$).

Danu konstrukciju možemo nastaviti redom za $k = 3, 4, ...$
Time dobivamo niz funkcija p_k i $w_i^{(k)}$ gdje:

$$D_i^{-h_{p_k(n)}} v_k \rightharpoonup w_i^{(k)} \quad \text{u } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Analogno vrijedi

$$w_i^{(k)}\Big|_{K(0,k)} = w_i^{(k+1)}\Big|_{K(0,k)}$$

Zbog prethodne tvrdnje ima smisla definirati funkciju

$$w_i \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ t.d. je } w_i\Big|_{K(0,k)} = w_i^{(k)}\Big|_{K(0,k)}$$

Odaberimo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ i neka je $k \in \mathbb{N}$ t.d. $\operatorname{supp}\varphi \subset K(0,k)$, uz dogovor da je niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (h_{p_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} v \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} v D_i^{h_n}\varphi \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} v(x)\frac{\varphi(x+h_n e_i)-\varphi(x)}{h_n}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to 0} -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{v(x-h_n e_i)-v(x)}{-h_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to 0} -\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_i^{-h_n}(v)\varphi \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{n\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} D_i^{-h_n}(v_k)\varphi \mathrm{d}x = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} w_i^{(k)}\varphi \mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^d} w_i\varphi \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pokazali smo da v ima slabe derivacije prvog reda. Jasno $w_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ čime je $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, što smo i htjeli pokazati.

$\square$

Napomena 1.2.3. (*Alternativna definicija prostora* $W^{k,\infty}$)

Prostore $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$ možemo shvatiti na sljedeći način:

$$W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \left\{ \begin{array}{l|r} \theta \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) & D^\alpha \theta_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \ \sup\limits_{x,y \in \mathbb{R}^d} \frac{|D^\alpha\theta_i(y) - D^\alpha\theta_i(x)|}{|y-x|} < +\infty, \\ & i = 1, ..., d, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k-1 \end{array} \right\}$$

Ovo će nam predstavljati alternativnu definiciju prostora $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Ako je $k = 1$ pozivamo se na dokazani teorem o karakterizaciji prostora $W^{k,\infty}$. Za $k > 1$ tvrdnja slijedi iz leme:

Lema 1.2.4. *Neka je $k \geq 1$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1) *Funkcija f pripada prostoru $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$*

2) *Funkcija $\left(f, \frac{\partial}{\partial x_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d} f\right)$ pripada prostoru $W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d(d+1)})$*

Dokaz: 1) povlači 2) očito. U obratu je dovoljno pokazati da D^β f za $|\beta| = k$ postoji. Neka je $i_0 \in \{1, 2, ..., d\}$ takav da $\beta_{i_0} > 0$. Neka je α multi-indeks ($|\alpha| = k-1$) odabran tako $\alpha_j = \beta_j$ za $j \neq i_0$ te $\alpha_{i_0} = \beta_{i_0} - 1$. Vidimo da je

$$D^\beta f = D^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_{i_0}} f \right] \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

$\square$

Općenito kada radimo sa $u \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$ uzimamo neprekidnu reprezentaciju, dakle u je neprekidna funkcija. Koristit ćemo radi jednostavnosti oznaku $W^{k,c} := W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, gdje $c = \infty$ ili $c = \overline{c}$. Ako nije eksplicitno naznačeno drugačije, svaka tvrdnja vrijedi i za $c = \infty$ i za $c = \overline{c}$.

1.3 Difeomorfizmi na $\mathbb{R}^d$

Stavimo da je Id funkcija identitete ($\mathrm{Id}(x) = x$, za $x \in \mathcal{D}_{\mathrm{Id}}$)
Od interesa će biti sljedeći afini prostori:

$$\mathcal{V}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \left\{ \theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \,\middle|\, \theta - \mathrm{Id} \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \right\} \tag{1.3}$$

Uočimo da je $\mathcal{V}^{k,c}$ afini prostor, $\mathcal{V}^{k,c} = \mathrm{Id} + W^{k,c}$ Za nas će biti zanimljivi sljedeći homeomorfizmi u $\mathbb{R}^d$:

$$\mathscr{C}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \left\{ T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \middle| \begin{array}{c} T \text{ bijekcija uz } T \in \mathcal{V}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \\ T^{-1} \in \mathcal{V}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

Ako je $c = \overline{c}$ za $k \geq 1$ radi se o difeomorfizmima kao i za slučaj $c = \infty$ ako je $k \geq 2$.

Proširenje definicije $W^{k,c}$, $\mathcal{V}^{k,c}$ na matrice

Potpuno analogno proširujemo Definicije 1.1, 1.2, i 1.3 sa vektorske funkcije na matrične funkcije. $M_d(\mathbb{R})$ je oznaka za prostor kvadratnih matrica nad realnim poljem.

$$W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) := \left\{ M : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R}) \middle| \begin{array}{c} D^\alpha [M]_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ i,j = 1,2,....,d,\ 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\} \tag{1.5}$$

$$W^{k,\overline{c}}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) := \left\{ M : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R}) \middle| \begin{array}{c} D^\alpha [M]_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \overline{C}(\mathbb{R}^d) \\ i,j = 1,2,....,d,\ 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\} \tag{1.6}$$

Na prostorima $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ definiramo normu:

$$|M|_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j=1,2,\ldots,d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} \left| D^\alpha [M]_{i,j}(x) \right|.$$

gdje je $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_d!$, uz dogovor da je $0! = 1$. Prostori $(W^{k,c}(\mathbb{R}, M_d(\mathbb{R})), |\cdot|_k)$, $c = \infty$ ili $c = \overline{c}$, time postaju normirani (Banachovi) prostori.

Pogledajmo $I(x) = I_d$, gdje je

$$I : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R}), \qquad [I_d]_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$$

Tada je $|I|_k = d$. Uvedimo još prostor

$$\mathcal{V}^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) := \left\{ M : \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R}) \,\middle|\, M - I \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) \right\}. \tag{1.7}$$

Ako imamo $A, B \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ standardno definiramo množenje matričnih funkcija kao

$$[AB]_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{d} [A]_{i,k}(x)[B]_{k,j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Dogovorno uzimamo $A^0 = I$, $A^1 = A$, i $A^{k+1} = A^k A$.

Napomena 1.3.1. ($|\cdot|_k$ *je submultiplikativna*)

Pokažimo da je norma submultiplikativna (u odnosu na matrično množenje):

$$|AB|_k \leq |A|_k\,|B|_k\,, \qquad \text{za } A,B \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$$

$$\begin{aligned}
|AB|_k &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \tfrac{1}{\alpha!} \left| D^\alpha \left[AB\right]_{i,j}(x) \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \tfrac{1}{\alpha!} \left| D^\alpha \left\{ \sum_{l=1}^{d} \left[A\right]_{i,l}(x) \left[B\right]_{l,j}(x) \right\} \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j,l=1}^{d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \tfrac{1}{\alpha!} \left| D^\alpha \left\{ \left[A\right]_{i,l}(x) \left[B\right]_{l,j}(x) \right\} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j,l=1}^{d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \tfrac{1}{\alpha!} \left| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \tfrac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta \left[A\right]_{i,l}(x) D^\gamma \left[B\right]_{l,j}(x) \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j,l=1}^{d} \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \left| \tfrac{1}{\beta!} D^\alpha \left[A\right]_{i,l}(x) \right| \left| \tfrac{1}{\gamma!} D^\gamma \left[B\right]_{l,j}(x) \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \text{ess} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\leq|\beta|\leq k} \tfrac{1}{\beta!} \left| D^\beta \left[A\right]_{i,j}(x) \right| \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\leq|\gamma|\leq k} \tfrac{1}{\gamma!} \left| D^\gamma \left[B\right]_{i,j}(x) \right| \\
&\leq |A|_k |B|_k
\end{aligned}$$

$\alpha = \beta + \gamma$ shvaćamo kao $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$. Posljednja nejednakost slijedi iz činjenice da za $A, B \subset [0, +\infty\rangle$ vrijedi:

$$\sup \text{ess}(AB) \leq \sup \text{ess} A \cdot \sup \text{ess} B, \quad AB = \{ab |\, a \in A,\, b \in B\}$$

Time smo dobili jaču strukturu na prostoru $(W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})), ||_k)$: uz uvedeno množenje radi se o Banachovoj algebri. Za $|M|_k < 1$ gdje je $M \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ dobivamo sljedeću propoziciju:

Propozicija 1.3.2. *Neka je $M \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$, $k \geq 0$, takav da je $|M|_k < 1$. Tada je dobro definirana $(I-M)^{-1}(x) = (I(x) - M(x))^{-1}$ za s.s. $x \in \mathbb{R}^d$ te $(I-M)^{-1} \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$. Dodatno vrijedi:*

1) $\quad (I-M)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M^n,$

2) $\quad |(I-M)^{-1}|_k \leq d - 1 + \frac{1}{1-|M|_k},$

3) $\quad |(I-M)^{-1} - I|_k \leq \frac{|M|_k}{1-|M|_k}.$

Dokaz: Definirajmo normu na matrici $C \in M_d(\mathbb{R})$:

$$|C|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{d} |[C]_{i,j}|$$

Dana norma je submultiplikativna. Ako je $|C|_{l_1} < 1$ tada je matrica $I_d - C$ regularna i vrijedi $(I_d - C)^{-1} = \sum_k C^k$. Pokazat ćemo tvrdnju kasnije. Neka je $M \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ i $|M|_k < 1$, tada iz definicije slijedi

$$|M(x)|_{l_1} \leq |M|_0 \leq |M|_k, \quad \text{s.s. } x \in \mathbb{R}^d$$

Tada vrijedi: $(I(x) - M(x))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M(x)^n$. Iz toga slijedi prva tvrdnja.

Druga relacija slijedi iz prve relacije:

$$\begin{aligned} |(I_d - M)^{-1}|_k &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} M^n\right|_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} |M^n|_k \\ &\leq d + \sum_{n=1}^{\infty} |M|_k^n \\ &\leq d - 1 + \tfrac{1}{1-|M|_k} \end{aligned}$$

Slično dobivamo za treću relaciju:

$$\begin{aligned} |((I - M)^{-1} - I)(x)|_k &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} M(x)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |M(x)|_k^n \\ &= \tfrac{|M|_k}{1-|M|_k} \end{aligned}$$

$\square$

Stavimo oznaku za Jacobijevu matricu:

$$[\nabla\theta]_{i,j}(x) := \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}(x), \quad i, j = 1, 2, ..., d.$$

To treba razlikovati od oznake

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right]^t$$

za gradijent skalarne funkcije f. Za skalarnu funkciju sa

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right]$$

označavamo Jacobijevu matricu. Tada je $Df(x)(v) = \nabla f(x) \cdot v$.

Pogledajmo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \left|D^\alpha \left[\nabla\theta\right]_{i,j}(x)\right|^2 &\le \left(\sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \tfrac{(k-1)!}{\alpha!} \left|D^\alpha \left[\nabla\theta\right]_{i,j}(x)\right|\right)^2 \\
\sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \left|D^\alpha \left[\nabla\theta\right]_{i,j}(x)\right|^2 &\le (k-1)!^2 \left|\nabla\theta\right|_{k-1}^2 + 2(k-1)!|\nabla\theta|_{k-1} \qquad \Big/ + \|\theta\|_0^2 \\
\sum_{i=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k} |D^\alpha\theta_i(x)|^2 &\le ((k-1)!|\nabla\theta|_{k-1} + \|\theta\|_0)^2 \qquad \Big/\sqrt{} \\
\left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k} |D^\alpha\theta_i(x)|^2\right)^{1/2} &\le (k-1)!|\nabla\theta|_{k-1} + \|\theta\|_0 \qquad \Big/ \operatorname*{sup\,ess}_{x\in\mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

U prvoj nejednakosti koristimo činjenicu da je $\sum |y_i|^2 \le (\sum |y_i|)^2$ te

$$\begin{aligned}
\tfrac{(k-1)!}{\alpha!} &= \tfrac{(k-1)!}{\alpha_1!(k-1-\alpha_1)!} \tfrac{(k-1-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-1-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \tfrac{(k-1-\sum_{i\neq d}\alpha_i)!}{\alpha_d!(k-1-\sum\alpha_i)!} \\
&= \tbinom{k-1}{\alpha_1}\tbinom{k-1-\alpha_1}{\alpha_2} \ldots \tbinom{k-1-\sum_{i\neq d}\alpha_i}{\alpha_d} \ge 1
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je

$$\|\theta\|_k \le (k-1)!|\nabla\theta|_{k-1} + \|\theta\|_0 \tag{1.8}$$

Vrijedi (iz Cauchy-Schwarz-Bunjakowskijeve nejednakosti):

$$\sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \tfrac{1}{\alpha!} \left|D^\alpha \left[\nabla\theta\right]_{i,j}(x)\right| \le \left(d^2 \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \tfrac{1}{\alpha!^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{0\le|\alpha|\le k-1} \left|D^\alpha \left[\nabla\theta\right]_{i,j}(x)\right|^2$$

Primjenom sup ess dobivamo

$$|\nabla\theta|_{k-1} \le C(d,k)\|\theta\|_k \tag{1.9}$$

Ako je $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ za $k \ge 1$, tada je $\nabla\theta \in W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$. Odjeljak završavamo sa jednostavnom lemom:

Lema 1.3.3. *Neka su $\theta, \phi \in \mathcal{V}^{1,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ te $\phi \in \mathscr{C}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Tada je $\theta \circ \phi \in \mathcal{V}^{1,c}$ i vrijedi $\nabla(\theta \circ \phi)(x) = \nabla(\theta) \circ \phi(x)\, \nabla\phi(x)$*

Dokaz: U slučaju da je $c = \bar{c}$ tada su dodatno funkcije θ i ϕ glatke funkcije. Time je druga tvrdnja posljedica formule za diferencijal kompozicije.

Vidimo da je onda $\theta \circ \phi - \mathrm{Id}(x) = (\theta - \mathrm{Id}) \circ \phi + \phi - \mathrm{Id} \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Treba još provjeriti da je $\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta \circ \phi) \in L^\infty$. Zato što su $\theta, \phi \in \mathcal{C}^1$ vrijedi lančano pravilo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta \circ \phi) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)$$

Jer je

$$\Big\| (\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \circ \phi) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} \leq \Big\| \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} \Big\| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

slijedi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta \circ \phi) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

Provjerili smo da je $\theta \circ \phi \in \mathcal{V}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. $\theta \circ \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, pa je $\theta \circ \phi \in \mathcal{V}^{1,\bar{c}}$, što smo i htjeli dokazati.

Ako je $c = \infty$ tada se pozivamo na 1.2.2 da su funkcije $\theta - \mathrm{Id}$ i $\phi - \mathrm{Id}$ ograničene Lipschitzove funkcije. Raspišemo li kao ranije

$$\theta \circ \phi - \mathrm{Id} = (\theta - \mathrm{Id}) \circ \phi + \phi - \mathrm{Id}$$

S obzirom da je suma Lipschitzovih funkcija opet Lipschitzova funkcija, kompozicija Lipschitzovih funkcija opet Lipschitzova, time je gornji izraz Lipschitzova funkcija. Suma dviju ograničenih funkcija daje ograničenu funkciju čime smo pokazali da je $\theta \circ \phi - \mathrm{Id}$ ograničena Lipschitzova funkcija. Ponovno koristeći Teorem 1.2.2 $\theta \circ \phi - \mathrm{Id} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

U klasičnom smislu $\frac{\partial \theta}{\partial x_k}(x)$ i $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)$ postoje skoro svuda na $\mathbb{R}^d$, dakle postoji izmjeriv skup Z, $\mu(Z) = 0$ tako da su $\nabla \theta$ i $\nabla \phi$ dobro definirane funkcije na $\mathbb{R}^d \backslash Z$. Iskoristimo dodatno da je i ϕ^{-1} dobro definirana Lipschitzova funkcija, pa je $\mu(\phi^{-1}(Z)) = 0$ te je time izraz $\frac{\partial \theta}{\partial x_k}(\phi(x)) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)$ dobro definiran na $\mathbb{R}^d \backslash (Z \cup \phi^{-1}(Z))$. Tada je $\theta \circ \phi$ diferencijabilna s.s. kao kompozicija diferencijabilnih funkcija s.s..

□

Prostor $M_d(\mathbb{R})$

U prethodnom poglavlju definirali smo prostor funkcija čije su kodomene prostor matrica $M_d(\mathbb{R})$. Sve norme na konačnodimenzionalnim vektorskom prostoru su ekvivalentne, ali za daljni račun potrebno je dodatno svojstvo submultiplikativnosti (konzistentnosti) norme:

$$\big(\forall M, N \in M_d(\mathbb{R})\big) \quad \|MN\| \leq \|M\| \|N\|$$

S obzirom da ćemo raditi samo sa regularnim matricama te njihovim derivacijama ključna je sljedeća propozicija:

Lema 1.3.4. *Prostor regularnih matrica je otvoren skup.*

Dokaz: Neka je $M \in M_d(\mathbb{R})$ regularna matrica. Pogledajmo sumu $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Ako je $\|A\| < 1$ tada je red apsolutno konvergentan. Dani red ima inverz i to je $(I_d - A)$. Vrijedi da je

$$(I_d - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = I_d - A^{n+1}$$

Znači

$$\|(I_d - A) \sum_{k=0}^{n} A^k - I_d\| = \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0 \quad \text{kada } n \to +\infty$$

te je tvrdnja pokazana (analogno za $\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)(I_d - A)$)

Odaberimo $N \in M_d(\mathbb{R})$ tako da je $\|N\| < \frac{1}{2\|M^{-1}\|}$. Zato što je

$$\|M^{-1}N\| \leq \|M^{-1}\|\|N\| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Time je $I_d - M^{-1}N$ regularna matrica. Tada je izraz $M - N = M(I_d - M^{-1}N)$ regularan kao umnožak regularnih matrica. Dakle za proizvoljan regularan A, $K(A, \frac{1}{2\|A^{-1}\|})$ je unutar skupa regularnih matrica, čime je skup regularnih matrica otvoren skup. □

Lema 1.3.5. *Neka je $M \in M_d(\mathbb{R})$. Vrijedi:*

a) *Ako je $\|M\| < 1$, tada je funkcija $M \mapsto (I_d - M)^{-1}$ diferencijabilna na okolini nule te vrijedi:*

$$D_M((I_d - M)^{-1})(0)[N] = N.$$

b) *Neka je M regularna matrica. Funkcija $M \mapsto \det M$ je diferencijabilna u okolini od M te vrijedi:*

$$D_M(\det(M))(M)[N] = \det(M) \cdot tr(M^{-1}N).$$

Dokaz:

a) Treba pokazati da je funkcija

$$f(M) = (I_d - M)^{-1}$$

diferencijabilna na okolini 0. S obzirom da je $\|M\| < 1$ neka je δ takva da je $0 < \delta < 1 - \|M\|$. Neka je $N \in M_d(\mathbb{R})$. Za $h > 0$ takav da je $|h| < \frac{\delta}{\|N\|}$, funkcija $f(M + hN)$ će biti dobro definirana. Pokazali smo ranije da se funkcija $f(M + hN)$ može razviti u red.

$$\begin{aligned} f(M + hN) - f(M) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (M + hN)^k - (M)^k \right\} \\ &= hDf(M)[N] + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

gdje je $Df(M)[N] = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} M^l N M^{k-1-l}$, uočimo da je $N \mapsto Df(M)[N]$ linearni operator (dobro definiran jer je dio apsolutno konvergentnog reda).

Time smo pokazali da je

$$f(M + hN) - f(M) - Df(M)[N] = o(h)$$

Specijalno za $M = 0$ jedini član koji ostane je Df(0)[N]=N, čime je tvrdnja pod a) dokazana.

b) Kao u dijelu a) pokazati ćemo diferencijabilnost direktno preko definicije. Sada je $f(M) = \det(M)$.

Odaberimo $N \in M_d(\mathbb{R})$. Neka je h dovoljno mali, tako da je $M + hN$ opet regularna matrica.

$$f(M + hN) = \det(M + hN) = \det(M(I_d + hM^{-1}N)) = \det(M)\det(I_d + hM^{-1}N).$$

Direktno iz definicije $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}$ dobivamo da je:

$$\det(I + hA) = 1 + h\mathrm{tr}(A) + \mathcal{O}(h^2).$$

Naime prva dva izraza upravo slijede iz sume kada je permutacija σ identiteta tj.

$$\prod_i (1 + ha_{ii}) = 1 + h\sum_i a_{ii} + \mathcal{O}(h^2).$$

Sve ostale permutacije sadrže barem dva člana van dijagonale, dakle sadrže h^2, pa je i suma (jer je konačna) reda $\mathcal{O}(h^2)$.
Time smo dobili da je :

$$\det(M + hN) = \det(M)(1 + h\mathrm{tr}(M^{-1}N) + \mathcal{O}(h^2)).$$

Dakle

$$\det(M + hN) - \det(M) - h\det(M)\mathrm{tr}(M^{-1}N) = o(h)$$

čime je $Df(M)[N] = \det(M)\mathrm{tr}(M^{-1}N)$.

□

Sada smo pripremili teoriju za važne rezultate o derivaciji oblika.

Poglavlje 2

Rezultati o diferencijabilnosti

U daljnjem, ako kažemo da je funkcija diferencijabilna to znači da je Fréchet-diferencijabilna osim ako drugačije nije navedeno.

2.1 Tehnički rezultati

Propozicija 2.1.1 je analogni rezultat Leme 1.3.5.

Propozicija 2.1.1. *Stavimo* $k \geq 1$.

a) *Preslikavanje* $\theta \mapsto |\det(I + \nabla\theta)|$ *je diferencijabilno u točki* $\theta = 0$ *iz* $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *u* $W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. *Vrijedi:*

$$D_\theta(|\det(I + \nabla\theta)|)(0)[\psi] = \mathrm{div}(\psi). \tag{2.1}$$

b) *Preslikavanje* $\theta \mapsto (I + \nabla\theta)^{-1}$ *je diferencijabilno u točki* $\theta = 0$ *iz* $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *u* $W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$. *Vrijedi:*

$$D_\theta(I + \nabla\theta)^{-1}(0)[\psi] = -\psi. \tag{2.2}$$

c) *Neka je* $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty\rangle$ *i* $\|\theta\|_k < \frac{1}{2}$. *Tada je:*

$$(\nabla f) \circ (Id + \theta) = [I + \nabla\theta]^{-t} \nabla(f \circ (Id + \theta)). \tag{2.3}$$

Dokaz:
a) Iskoristimo li dokaz Leme 1.3.5 pod b) možemo zaključiti da je ostatak

$$X(\theta) = \det(I + \nabla\theta) - \det(I) - \mathrm{div}(\theta)$$

suma (konačna po iznosu) sastavljena od barem dva umnoška tipa $\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}$. Zbog toga je koristeći submultiplikativnost.

$$\|X(\theta)\|_{k-1} \leq C'\|\nabla\theta\|_{k-1}^2$$

Iz relacije (1.9) je

$$\|X(\theta)\|_{k-1} \leq C\|\theta\|_k^2$$

čime je pokazana tvrdnja.

b) Prema Propoziciji 1.3.2 $(I+\nabla\theta)^{-1}$ je dobro definiran i ostatak je

$$X(\theta) = (I+\nabla\theta)^{-1} - I - \nabla\theta = \sum_{i=2}^{\infty}(-\nabla\theta)^i.$$

Uzimajući normu

$$\|X(\theta)\|_{k-1} \leq \sum_{i=2}^{\infty}\|\nabla\theta\|_{k-1}^i = \frac{\|\nabla\theta\|_{k-1}^2}{1-\|\nabla\theta\|_{k-1}}$$

i koristeći relaciju (1.9) dobivamo

$$\|X(\theta)\|_{k-1} \leq C\|\theta\|_k^2$$

pa vrijedi tvrdnja.

c) Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. S obzirom da je $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, dobro je definiran $(I+\nabla\theta)$ s.s., dakle $(\mathrm{Id}+\theta)$ je diferencijabilna funkcija s.s.. Prema pravilu za diferencijal kompozicije:

$$D(\varphi\circ(\mathrm{Id}+\theta)) = D\varphi\circ(\mathrm{Id}+\theta)(I+\nabla\theta),$$

tj.

$$\nabla(\varphi\circ(\mathrm{Id}+\theta))^t = \nabla(\varphi)^t\circ(\mathrm{Id}+\theta)(I+\nabla\theta),$$

množenjem s inverznim $[I+\nabla\theta]^{-1}$ sa desne strane i transponiranjem dobivamo:

$$(\nabla\varphi)\circ(\mathrm{Id}+\theta) = [I+\nabla\theta]^{-t}\,\nabla(\varphi\circ(\mathrm{Id}+\theta)).$$

Uočimo da gornja relacija vrijedi skoro svuda. S obzirom da je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gust u $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, to povlači da postoji niz $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_n \to f$ za $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)^d$. Zato za prvi izraz i-tu komponentu vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_i(\varphi_n - f)|^p\circ(\mathrm{Id}+\theta)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}|\partial_i(\varphi - f)|^p\det(I+\nabla\theta)|^{-1}\,\mathrm{d}x\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\left|\partial_i(\varphi - f)\right|^p\mathrm{d}x \to 0.\end{aligned}$$

Ukratko, preko gornje relacije pokazali smo da

$$\nabla(\varphi_n \circ (\mathrm{Id} + \theta)) \to (I + \nabla\theta)^t (\nabla f) \circ (\mathrm{Id} + \theta), \quad \text{u } L^p(\mathbb{R}^d)^d.$$

Prilično se jednostavno pokaže da

$$\nabla(\varphi_n \circ (\mathrm{Id} + \theta)) \to \nabla(f \circ (\mathrm{Id} + \theta)) \quad \text{u smislu slabe-}* \text{ topologije na } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

Limesi moraju biti jedinstveni iz čega slijedi tvrdnja. Tvrdnje koriste generalizirani teorem o zamjeni varijabli koji navodimo kasnije.

□

Napomena 2.1.2. Rezultati o diferencijabilnosti iz prethodne propozicije možemo proširiti slično kao u Lemi 1.3.5 pod a) i pokazati da je $\theta \mapsto (I + \nabla\theta)^{-1}$ neprekidno diferencijabilna na okolini nule iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$. Prema Lemi 1.3.5 možemo zaključiti da je

$$D_\theta \left(I + \nabla\theta\right)^{-1}(\varphi)[\psi] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \nabla\varphi^l \nabla\psi \nabla\varphi^{k-1-l}$$

jasna je neprekidnost u prvoj i drugoj varijabli (na prostorima $W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$) za dovoljno male $\nabla\varphi$ i $\nabla\psi$.

2.2 Derivacija funkcije $\boldsymbol{\theta \mapsto f \circ (\mathrm{Id} + \theta)}$

Istaknimo teorem koji ne dokazujemo, a biti će potreban unutar sljedećih propozicija.

Teorem 2.2.1. ***(generalizacija tm. o zamjeni varijabli)***
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup, $T \in \mathscr{C}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $k \ge 1$. Tada je $f \in L^p(T(\Omega))$ ako i samo ako je $f \in L^p(\Omega)$ i vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_{T(\Omega)} f \, dx &= \int_{\Omega} f \circ T |\det \nabla T| \, dx \\ \int_{T(\Omega)} f |\det(\nabla(T^{-1}))| \, dx &= \int_{\Omega} f \circ T \, dx \end{aligned} \tag{2.4}$$

Prije nego što iskažemo glavne rezultate pokažimo sljedeća poopćenja Leme 1.2.4.

Lema 2.2.2. *Odaberimo $p \in [1, \infty]$. Neka je $G : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ preslikavanje takvo da je $k \ge 1$. Ekvivalentno je sljedeće:*

($*$) *Preslikavanje G je neprekidno u $\theta = 0$.*

($**$) *Preslikavanje $F : u \mapsto (G(u), \nabla(G(u)))$ je neprekidno u $\theta = 0$ iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d+1})$.*

Dokaz:
$(*) \Rightarrow (**)$

Neka je G neprekidna u točki 0. Tada je

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} \|G(\theta) - G(0)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Norme $\|\vartheta\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$ i $\|\vartheta, \nabla(\vartheta)\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})}$ su ekvivalentne norme te

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} \|G(\theta) - G(0), \nabla(G(\theta) - G(0))\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})} \leq \|G(\theta) - G(0)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

pa vrijedi neprekidnost preslikavanja F u nuli
$(**) \Rightarrow (*)$

Jasno je da neprekidnost od F povlači da je

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} \nabla G(\theta) \to \nabla G(0)$$

u $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. To znači da je $G(\theta) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, a iz prve pretpostavke vrijedi da

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} G(\theta) \to G(0)$$

u $L^p(\mathbb{R}^d)$ što znači

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} \|G(\theta) - G(0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

$\square$

Lema 2.2.3. *Odaberimo $p \in [1, \infty]$. Neka je $G : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ preslikavanje takvo da je $k \geq 1$. Ekvivalentno je sljedeće:*

($*$) *Preslikavanje G je diferencijabilno u $\theta = 0$.*

($**$) *Preslikavanje $F : u \mapsto (G(u), \nabla(G(u)))$ je diferencijabilno u $\theta = 0$ iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d+1})$.*

Dokaz:
$(*) \Rightarrow (**)$

Neka je G diferencijabilna u točki 0. Tada je

$$\lim_{\|\theta\|_k \to 0} \frac{\|G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta]\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}}{\|\theta\|_k} = 0.$$

Zbog ekvivalencije norma $\|\theta\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$ i $\|\theta, \nabla(\theta)\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})}$ slijedi

$$\frac{1}{\|\theta\|_k} \|G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta], \nabla(G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta])\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})} \to 0$$

kada $\|\theta\|_k \to 0$. Vidimo da je $u \mapsto F(u)$ diferencijabilna te je

$$DF(0)[\theta] = (DG(0)[\theta], \nabla DG(0)[\theta]) .$$

$(**) \Rightarrow (*)$

Uočimo da je

$$D\left(\nabla(G)\right)(0)[\theta]) = \nabla\left(DG(0)[\theta]\right)$$

u smislu distribucija (dakle, $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$). Tada možemo zaključiti da je

$$DG(0)[\theta] \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d),$$

pa ima smisla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|\theta\|_k} \|(G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta])\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \frac{C}{\|\theta\|_k} \|G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta], \nabla\left(G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta]\right)\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})} \\ &\le \frac{C}{\|\theta\|_k} \|G(\theta) - G(0) - DG(0)[\theta], \nabla G(\theta) - \nabla G(0) - D(\nabla G)(0)[\theta]\|_{W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d+1})} \end{aligned}$$

što ide u 0 ako $\theta \to 0$.

□

Propozicija 2.2.4. *(o derivaciji funkcije $\theta \mapsto f \circ (Id + \theta)$)*

Neka je $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, gdje je $m \in \mathbb{N}_0, \quad p \in [1, \infty]$. Dodatno, ako je $p = \infty$ stavljamo da je $f \in C^m(\mathbb{R}^d)$. Tada vrijedi sljedeće:

a) *Preslikavanje $\theta \mapsto f \circ (Id + \theta)$ je neprekidno sa prostora $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u prostor $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ ($p < \infty$) u točki $\theta = 0$, gdje je $k \ge max\{1, m\}$.*

b) *Preslikavanje $\theta \mapsto f \circ (Id + \theta)$ je diferencijabilno sa prostora $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u prostor $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^d)$ u točki $\theta = 0$, gdje je $k \ge max\{1, m-1\}$ i $m \ge 1$, i dodatno vrijedi:*

$$D_\theta \left(f \circ (Id + \theta)\right)(0)\,[\psi] = \nabla f \cdot \psi, \quad \forall \psi \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \tag{2.5}$$

Dokaz:
a) Prvo dokazujemo slučaj $k = 1$, $m = 0$, $p < \infty$. Tada je funkcija $f \in W^{0,p}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$. Odaberimo $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tako da je $|\nabla\theta|_0 \leq 1$. Tada je $\mathrm{Id} + \theta \in \mathscr{C}^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Raspišimo izraz:

$$f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f = \underbrace{(f - \varphi) \circ (\mathrm{Id} + \theta)}_{\mathbf{1})} - \underbrace{(f - \varphi)}_{\mathbf{2})} + \underbrace{(\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \varphi)}_{\mathbf{3})}$$

1)

$$\begin{aligned}
\|(f - \varphi) \circ (\mathrm{Id} + \theta)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f - \varphi|^p \circ (\mathrm{Id} + \theta)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f - \varphi|^p \, |\det(I + \nabla\theta)^{-1}|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f - \varphi|^p\,(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Uzimanjem p-tog korijena, dobivamo :

$$\|(f - \varphi) \circ (\mathrm{Id} + \theta)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|^{1/p}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

3) Pošto je φ glatka funkcija sa kompaktnim nosačem vidimo da je $\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ opet ograničena Lipschitzova funkcija, $\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$:

$$\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta)(x) - \varphi(x) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \{\varphi \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x)\,\}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\|\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \int\limits_0^1 \nabla\varphi \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x) \cdot \theta(x)\,\mathrm{d}t \Big|^p \mathrm{d}x \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_0^1 \Big| \nabla\varphi \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x) \cdot \theta(x) \Big|^p \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \nabla\varphi \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x) \cdot \theta(x) \Big|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x)\, |\theta(x)|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x)\, \|\theta\|_0^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \|\theta\|_0^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Iskoristimo tm. o zamjeni varijabli:

$$
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p \circ (\mathrm{Id} + t\theta)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)|^p |\det(I + t\nabla\theta(x))^{-1}|\,\mathrm{d}x
$$

Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\theta\|_0^p \sup_{t\in[0,1]} \|\det(I + t\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \|\theta\|_0^p \sup_{t\in[0,1]} \|\det(I + t\nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|\nabla\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
$$

Korjenovanjem:

$$
\|\varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\theta\|_0 \sup_{t\in[0,1]} \|\det(I + t\nabla\theta)^{-1}\|_0^{1/p} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}
$$

Sada povezujemo sva tri rezultata 1), 2) i 3).

Zbog neprekidnosti $\theta \mapsto \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ postoji $\delta_0(\theta) > 0$ takav da je za $\|\theta\|_k < \delta_2$, $\quad \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < 2^p$.

Sada imamo $\|\theta\| < \delta_0$:

$$
\|f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \big(\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\big) \tag{2.6}
$$

Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$.
S obzirom da je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gust u $L^p(\mathbb{R}^d)$ znači da postoji $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takav da je $\|f - \varphi_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Tada za $\delta(\varepsilon) < \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{\|\nabla\varphi_\varepsilon\|}\}$ i $\|\theta\|_1 < \delta$ slijedi da je

$$
\|f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon
$$

Time je pokazana tvrdnja za $k = 1, m = 0$.

Općeniti slučaj (za $m \geq 1$):
S obzirom da je $Id : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{k',c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ neprekidno preslikavanje za $k \geq k'$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k = \max\{1, m\}$.

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $m \in \mathbb{N}_0$. Baza je već razmotrena u ovom dokazu. Neka tvrdnja propozicije vrijedi za $m \in \mathbb{N}_0$.

Stavimo da je $f \in W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d)$. Tada je $\theta \mapsto \nabla f \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ neprekidna u točki $\theta = 0$ iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{m,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, što vrijedi prema pretpostavci indukcije.

Zbog Propozicije 2.1.1 b) i c) funkcija $\theta \mapsto \nabla(f \circ (\mathrm{Id} + \theta))$ je neprekidna u točki 0 iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{m,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Prema pretpostavci indukcije vrijedi da je $\theta \mapsto f \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ neprekidna u točki $\theta = 0$ iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{m,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (zato što je $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$). Znači da je (uz to da uzimamo $k := m + 1$)

$$\begin{cases} \quad \theta \mapsto (f \circ (\mathrm{Id} + \theta), \nabla(f \circ (\mathrm{Id} + \theta))) \\ \text{je diferencijabilna u točki 0 iz } W^{m+1,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d+1}) \;. \end{cases}$$

Direktno primjenom Leme 2.2.2 uz $G(\theta) = f \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ dobivamo da je

$$\begin{cases} \quad \theta \mapsto f \circ (\mathrm{Id} + \theta) \\ \text{je diferencijabilna u točki 0 iz } W^{m+1,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d+1}) \;, \end{cases}$$

čime slijedi korak indukcije.

b) Neka je $m = 1, k = 1$
Odaberimo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Tada za proizvoljan $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi:

$$\begin{aligned} f \circ (\mathrm{Id} + \theta)(x) - f(x) - \nabla f(x) \cdot \theta(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ (\mathrm{Id} + t\theta))(x)\,\mathrm{d}t - \nabla f(x)\theta(x) \\ &= \int_0^1 \big(\nabla f \circ (\mathrm{Id} + t\theta) - \nabla f\big)(x) \cdot \theta(x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Kao i ranije u dokazu dobivamo:

$$\|f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f - \nabla f \cdot \theta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f \circ (\mathrm{Id} + t\theta) - \nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)}$$

Uočimo, ocjena vrijedi i ako je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (jer je $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gust u $L^p(\mathbb{R}^d)$).
Sada ocjenu (2.6) možemo generalizirati za vektorske funkcije.

Za $\|\theta\|_1 < \delta_1$ te $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ vrijedi sljedeća ocjena:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|\theta\|_1} \|f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f - \nabla f \cdot \theta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq C\big(\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} + \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d^2})}\big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Čime je pokazana tvrdnja za $m = 1, k = 1, p < \infty$.
Za $p = \infty, m = 1, k = 1$ pokazali smo u Lemi 1.3.3

Općeniti slučaj pokazuje se slično kao u a) dijelu leme koristeći iste argumente i Lemu 2.2.3.

□

U prijašnjoj propoziciji posebno se proučava slučaj kada je $p = \infty$. Sljedeći primjer pokazuje zašto tvrdnja Propozicije 2.2.4 a) ne vrijedi za $p = \infty$.

Primjer 2.2.5. Neka je dana funkcija $\hat{f} : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, 1\rangle \\ \sin(2^n \pi(x - n)) & , x \in [n, n+1\rangle \, , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Definiramo li funkciju

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & , x \geq 0 \\ -\hat{f}(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Jasno je $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Pogledajmo niz θ_n, definiran na sljedeći način: $\theta_n(x) = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$. Jasno je niz $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ te očito vrijedi $\|\theta_n\|_1 \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\|f \circ (\mathrm{Id} + \theta_n) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq |f \circ (\mathrm{Id} + \theta_n) - f| \, (n + \tfrac{1}{2^{n+1}}) = |\sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2)| = 2$$

Dakle $\theta_n \to 0$, dok $\|f \circ (\mathrm{Id} + \theta_n) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 2 \not\to 0$. Time smo pokazali da ako je funkcija neprekidna i ograničena da tvrdnja o neprekidnosti ne mora vrijediti ako uvjet $p < \infty$ nije zadovoljen.

Primjer 2.2.6. Odaberimo $\theta \in W^{1,c}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.d. je $\theta(x) = x$ za $x \in \langle 0, 1\rangle$. Definirajmo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ x & , \; x \in [0, 1] \\ 1 & , \; x \in \langle 1, +\infty\rangle \end{cases}$$

uočimo da je $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, ali $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Derivacija postoji skoro svugdje i jednaka je:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & , \ x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle \,, \end{cases}$$

pa je $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ Neka je $h > 0$. Definiramo za $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$,

$$x_\alpha := \alpha \tfrac{1}{1+h} + (1-\alpha) \in \left\langle \tfrac{1}{1+h}, 1 \right\rangle.$$

Tada je $f \circ (\mathrm{Id} + \theta)(x_\alpha) = 1$, jer je $x_\alpha(1+h) = \alpha + (1-\alpha)(1+h) = 1 + h(1-\alpha) > 1$. $f(x_\alpha) = x_\alpha$, pa dobivamo da je:

$$\tfrac{1}{h} \| f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f - hf'\theta \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq | f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f - hf'\theta |(x_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Vidimo da za $\alpha = \frac{1}{2}$ je $\frac{1}{h} \| f \circ (\mathrm{Id} + \theta) - f - hf'\theta \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2}$ i to za proizvoljan $h > 0$. Time smo pokazali da tvrdnja za diferencijabilnost ne mora vrijediti ako nemamo dodatnu glatkoću funkcije ($f \in \mathcal{C}^1$).

2.3 Derivacija funkcije $\boldsymbol{\theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)}$

Propozicija 2.3.1. *Neka je $\phi : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dobro definirana u okolini nule, uz $k \geq m \geq 1$, $p \in [1, \infty\rangle$, takva da je*

$$\theta \mapsto \phi(\theta) \circ (Id + \theta) \ \textit{diferencijabilna u nuli.}$$

Tada je $\theta \mapsto \phi(\theta)$ diferencijabilna u nuli iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ i za svaki $\varphi \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ vrijedi:

$$D_\theta(\phi(\theta))(0)[\varphi] = D_\theta(\phi(\theta) \circ (Id + \theta))(0)[\varphi] - \nabla(\phi(0)) \cdot \varphi. \tag{2.8}$$

Dokaz: Promotrimo prvo slučaj $k = m = 1$.

Prvo pokažimo da neprekidnost od $\theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ povlači neprekidnost od $\theta \mapsto \phi(\theta)$ u točki 0. Iskoristimo da je:

$$\|\phi(\theta) - \phi(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1/p} \|(\phi(\theta) - \phi(0)) \circ (\mathrm{Id} + \theta)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \|\det(I + \nabla\theta)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1/p} (\|\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \phi(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\phi(0) \circ (\mathrm{Id} + \theta) - \phi(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})$$

Pa iz Propozicije 2.1.1 pod **a**), Propozicije 2.2.4 i činjenice da je $\theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ neprekidna slijedi tvrdnja da je $\phi(\theta)$ neprekidna u nuli iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Slično se može pokazati direktno i za $\partial_i\phi(\theta)$, $i = 1, 2, ..., d$, opet koristeći Propoziciju 2.1.1 i pretpostavku da je $\partial_i\phi(\theta) \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Definirajmo

$$X(\varphi) := \phi(\varphi) - \phi(0) - \mathcal{D}_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\varphi] + \nabla(\phi(0)) \cdot \varphi.$$

Cilj je pokazati da

$$\lim_{\|\varphi\|_k \to 0} \frac{\|X(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_k} \to 0.$$

Prisjetimo se da prema Propoziciji 2.2.4

$$\phi(\varphi) \circ (\mathrm{Id} + \varphi) - \phi(0) - \mathcal{D}_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\varphi] = o_1(\varphi)$$

za $g \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ je

$$g \circ (\mathrm{Id} + \varphi) - g - \varphi \cdot \nabla g = o_2(\varphi)$$

to zajedno daje

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \phi(\varphi) - \phi(\varphi) \circ (\mathrm{Id} + \varphi) + \varphi \cdot \nabla\phi(0) + o(\varphi) \\ &= \phi(\varphi) - \phi(\varphi) \circ (\mathrm{Id} + \varphi) + \phi(0) \circ (\mathrm{Id} + \varphi) - \phi(0) + o(\varphi) \\ &= -(\phi(\varphi) - \phi(0)) \circ (\mathrm{Id} + \varphi) + (\phi(\varphi) - \phi(0)) + o(\varphi) \\ &= -\varphi \cdot \nabla(\phi(\varphi) - \phi(0)) + o(\varphi) \end{aligned}$$

Dobivamo

$$\frac{\|X(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}{\|\varphi\|_k} \leq C\|\nabla(\phi(\varphi) - \phi(0))\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)}$$

Zbog pokazane neprekidnosti $\partial_i\phi(\theta)$ u nuli iz $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ slijedi tražena tvrdnja. Generalni slučaj pokazujemo indukcijom slično kao u prijašnjoj propoziciji.

$\square$

Poglavlje 3

Lokalna derivacija

3.1 Definicija lokalne derivacije

U prethodnim propozicijama upoznali smo se sa dosta jakim rezultatima.

Definicija 3.1.1. *(Kompaktno uložen)*
Označimo sa $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Neka je $\omega \subset \Omega$ otvoren podskup. Kažemo da je ω kompaktno uložen u Ω ako je:

$$\begin{aligned} &i) \quad \overline{\omega} \subset \Omega \\ &ii) \quad \overline{\omega} \text{ je ograničen.} \end{aligned}$$

Koristimo oznaku $\omega \subset\subset \Omega$.

Cilj nam je poopćiti tvrdnje dane u Propoziciji 2.3.1 za:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \text{Neka je dano preslikavanje } \phi \text{, tako da za svaki} \\ \text{dovoljno mali } \theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ je } \phi(\theta) \in W^{m,p}((\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)), \\ \text{gdje je } \ k \geq m \geq 1 \ \text{ i } \ p \in [1, \infty\rangle. \end{cases}$$

Uočimo da ϕ kao preslikavanje ovisi o fiksnom otvorenom skupu Ω. θ se bira mali jer je tada $(\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)$ opet otvoren skup koji je "blizu" Ω. Gledajući kao preslikavanje ϕ, ima kodomenu koja nije vektorski prostor. Tome možemo doskočiti tako da promatramo restrikciju $\omega \subset\subset \Omega$. Za dovoljno mali θ, $\omega \subset\subset (\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)$ te tada ima smisla promatrati funkciju $\theta \mapsto \phi_{|\omega}(\theta)$. Radi jednostavnosti pišemo $\phi_\omega := \phi_{|\omega}$.

Definicija 3.1.2. *(Lokalna diferencijabilnost)*
Kažemo da je preslikavanje ϕ, definirano kao u (3.1)*, lokalno diferencijabilno ako za svaki $\omega \subset\subset \Omega$ restrikcija $\theta \mapsto \phi_\omega$ je Fréchet-diferencijabilna u točki $\theta = 0$ iz*

$W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *u* $W^{m,p}(\omega)$. *Tada za svaki* $\omega \subset\subset \Omega$ *definiramo lokalnu derivaciju u nuli u smjeru* θ*:*

$$\phi'(\theta)_{|\omega} := D(\phi_\omega)(0)[\theta].$$

Napomena 3.1.3. *(Derivacija u smjeru)*

Gornji objekt $\phi'(\theta)$ ima smisla uvesti neovisno o restrikciji na skup ω. Preslikavanje definirano u (3.1) prirodno inducira postojanje preslikavanje $\psi : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ gdje je $\psi_{|\omega} = \phi_{|\omega}$, za $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dovoljno mali. Pogledajmo derivaciju funkcije ψ u nuli u smjeru θ

$$D\psi(0)\theta = \lim_{t \to 0^+} \frac{\psi(t\theta) - \psi(0)}{t}.$$

Ako gornji limes postoji tada kažemo da funkcija ima derivaciju u nuli u smjeru θ. Ekvivalentno limes možemo zapisati kao

$$\forall \omega \subset\subset \Omega, \quad D\psi(0)\theta_{|\omega} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\psi_\omega(t\theta) - \psi_\omega(0)}{t}.$$

Pretpostavimo li da je funkcija ϕ lokalno diferencijabilna dobivamo

$$\begin{aligned}\forall \omega \subset\subset \Omega, \quad D\psi(0)\theta_{|\omega} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\psi_\omega(t\theta) - \psi_\omega(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi_\omega(t\theta) - \phi_\omega(0)}{t} \\ &= D(\phi_\omega)(0)[\theta].\end{aligned}$$

Objekt $D\psi(0)\theta$ je dobro definiran. Ako odaberemo $\omega_1, \omega_2 \subset\subset \Omega$, tada je

$$D\psi(0)\theta_{|\omega_1} = D\psi(0)\theta_{|\omega_2}, \quad \text{na } \omega_1 \cap \omega_2,$$

zato što je diferencijal jedinstven. Time smo pokazali da derivacija u smjeru funkcije ψ postoji te je dodatno linearna i ograničena (u θ). Nedostatak je što time izlazimo iz okvira Fréchetove diferencijabilnosti jer $W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ nije Banachov, nego Fréchetov prostor. U konačnici identificiramo $\phi'(\theta) = D(\psi)(0)\theta$, čime opravdamo oznaku u definiciji lokalne derivacije. Dodatno, uzimamo da je $\phi'(\theta) \in W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Dovoljni uvjeti za lokalnu diferencijabilnost

Pogledajmo preslikavanje $\theta \mapsto \phi \circ (\text{Id} + \theta)$. Jasno je $\phi \circ (\text{Id} + \theta) : W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to W^{m,p}(\Omega)$ dobro definirano preslikavanje. $\phi \circ (\text{Id} + \theta)$ možemo shvatiti kao transportnu funkciju od ϕ na fiksiranom skupu Ω. Pokazati ćemo da Fréchet-diferencijabilnost funkcije $\phi \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ povlači lokalnu diferencijabilnost od ϕ. Neka je ϕ definirana kao ranije u (3.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je } \theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ definirano na okolini nule,} \\ \text{diferencijabilno u } \theta = 0 \text{ iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m,p}(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Teorem 3.1.4. (*Egzistencija lokalne derivacije*)
Neka vrijedi (3.1) *i* (3.2)*. Tada za svaki* $\omega \subset\subset \Omega$ *preslikavanje:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto \phi_{|\omega}(\theta) \textit{ je dobro definirano na nekoj okolini nule} \\ \textit{te je diferencijabilno u } \theta = 0 \textit{ iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } W^{m-1,p}(\omega). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Pripadna derivacija u nuli u smjeru ϑ *je:*

$$\phi'(\vartheta) = D_\theta(\phi(\theta) \circ (Id + \theta))(0)[\vartheta] - \vartheta \cdot \nabla \phi(0).$$

Dokaz: Neka je ω otvoren skup takav da je $\omega \subset\subset \Omega$. Neka su ω_1, ω_2 otvoreni skupovi sa sljedećim svojstvom:

$$\omega \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \Omega.$$

Tada se može pronaći funkcija:

$$\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \quad \alpha_{\omega_1} = 1, \alpha_{\mathbb{R}^d \setminus \omega_2} = 0.$$

Definiramo funkciju:

$$\psi(\theta) := \left\{ \begin{array}{ll} \alpha\phi(\theta) & \text{na } \Omega \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{array} \right.$$

Prema Propoziciji 2.2.4 je:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto \alpha \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ je dobro definirana na okolini } \theta = 0 \\ \text{te je diferencijabilna u točki 0 iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d). \end{array} \right.$$

Tada je koristeći pretpostavku (3.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto \big(\alpha\phi(\theta)\big) \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ dobro definirana na okolini } \theta = 0 \\ \text{te je diferencijabilna u točki 0 iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m,p}(\Omega). \end{array} \right.$$

Za dovoljno mali θ preslikavanje $\alpha\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ jednako je 0 na $\mathbb{R}^d \setminus \omega_2$, pa možemo $W^{m,p}(\Omega)$ iz prethodnje tvrdnje zamijeniti s $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Dobili smo prema Propoziciji 2.3.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto \psi(\theta) \text{ je dobro definirana na okolini } \theta = 0 \\ \text{te je diferencijabilna u točki 0 iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m-1,p}(\mathbb{R}^d) \end{array} \right.$$

pa time je i diferencijabilna u $W^{m-1,p}(\omega)$. Prema Propoziciji 2.3.1

$$D_\theta(\psi(\theta))(0)[\vartheta] = D_\theta(\psi(\theta)\circ(\mathrm{Id}+\theta))(0)[\vartheta] - \vartheta\cdot\nabla(\psi(0)),\ \forall\vartheta\in W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$$

Restrikcijom na ω dobivamo derivaciju u smjeru:

$$\phi'(\vartheta)_{|\omega} = D_\theta(\phi_\omega(\theta)\circ(\mathrm{Id}+\theta))(0)[\vartheta] - \vartheta\cdot\nabla(\phi_\omega(0)),\ \forall\vartheta\in W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$$

Iz Napomene 3.1.3 slijedi tvrdnja. Istaknimo kako je $\phi'(\vartheta)\in W^{m-1,p}(\Omega)$, a ne samo u $W^{m-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ zato što je desna strana u $W^{m-1,p}(\Omega)$.

□

3.2 Diferenciranje jednakosti na $(\mathrm{Id}+\boldsymbol{\theta})\Omega$

Teorem 3.2.1. *Neka funkcija ϕ zadovoljava* (3.1), (3.2)*. Neka je $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i operator A, dobro definiran za svaki U otvoreni skup iz $W^{m-1,p}$ u $\mathcal{D}'(U)$, sa svojstvom:*

$$\begin{cases} \forall\,\omega\subset\subset\Omega, \quad A \text{ je linearan i neprekidan operator} \\ \text{sa } W^{m-1,p}(\omega) \text{ u } \mathcal{D}'(\omega) \text{ koji zadovoljava} \\ A(\phi(\theta)) = f, \quad \text{na } (Id+\theta)(\Omega) \\ \text{za dovoljno mali } \theta\in W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{3.4}$$

Tada za lokalnu derivaciju preslikavanja ϕ u nuli u smjeru θ vrijedi:

$$A\phi'(\theta) = 0 \quad u\ \mathcal{D}'(\Omega) \tag{3.5}$$

Dokaz: Neka je $\omega\subset\subset\Omega$. Prema Teoremu 3.1.4 preslikavanje

$$\begin{cases} \theta\mapsto\phi_\omega(\theta) \text{ je definirano na okolini 0 iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \\ \text{u } W^{m-1,p}(\omega) \text{ te je diferencijabilno u 0.} \end{cases}$$

Operator A je neprekidan u točki f iz $W^{m-1,p}(\omega)$ u $\mathcal{D}'(\omega)$ (u smislu slabe-$*$ topologije)

$$\big(\forall\varphi\in\mathcal{D}(\omega)\big) \quad \langle A(f_n),\varphi\rangle\to\langle A(f),\varphi\rangle \text{ čim } \|f_n-f\|_k\to 0.$$

Neka je $\omega\subset\subset\Omega$. Pogledajmo funkciju $\theta\mapsto A\circ(\phi_\omega)(\theta)$. Želimo pokazati da ona ima derivaciju u nuli u smjeru θ. Neka je $\varphi\in\mathcal{D}(\omega)$ i $\vartheta\in W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} \langle D_\theta(A\circ(\phi_\omega)(\theta))(0)\vartheta,\varphi\rangle &= \lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{A\circ\phi_\omega(t\vartheta)-A\circ\phi_\omega(0)}{t},\varphi\right\rangle \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left\langle A\left(\frac{\phi_\omega(t\vartheta)-\phi_\omega(0)}{t}\right),\varphi\right\rangle \\ &= \left\langle A\left(\phi'(\vartheta)_{|\omega}\right),\varphi\right\rangle. \end{aligned}$$

Iz proizvoljnosti test funkcije φ slijedi

$$D_\theta(A \circ (\phi_\omega)(\theta))(0)\vartheta = A\left(\phi'(\vartheta)_{|\omega}\right) = A(\phi'(\vartheta))_{|\omega}.$$

S druge strane je

$$\lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{A\circ\phi_\omega(t\vartheta) - A\circ\phi_\omega(0)}{t}, \varphi\right\rangle = \lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{f-f}{t}, \varphi\right\rangle = \langle 0, \varphi\rangle$$

čime smo pokazali da je $A(\phi'(\vartheta))_{|\omega} = 0$ u $\mathcal{D}'(\omega)$. Zbog proizvoljnosti skupa ω slijedi

$$A(\phi'(\vartheta)) = 0, \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

Napomena 3.2.2. Prethodni rezultat se iskazuje općenito za nelinearne operatore. Tada uvjet (3.4) moramo zamijeniti s jačim zahtijevom na kvalitetu preslikavanja, konkretno pretpostavlja se da je A iz $W^{m-1,p}(\omega)$ u $\mathcal{D}'(\omega)$ Fréchet-diferencijabilna u smislu

$$\big(\forall\varphi\in\mathcal{D}(\omega)\big) \quad v\mapsto\langle A(v),\varphi\rangle \text{ je Fréchet-diferencijabilan.}$$

3.3 Diferenciranje jednakosti na rubu $\partial(\mathrm{Id}+\theta)\Omega$

Prije nego krenemo na rezultate potrebno je bolje objasniti pojam glatkoće ruba Ω. Pretpostavljamo dodatno da radimo sa ograničenim, povezanim i otvorenim skupom.

Definicija 3.3.1. *(Lipschitzova domena)*

Neka je Ω otvoren, povezan i ograničen skup u $\mathbb{R}^d$. Kažemo da Ω ima Lipschitzovu granicu ako postoje konstante $\alpha > 0, \beta > 0$ i konačan broj lokalnih koordinatnih sustava [1] sa središtem u O_r, lokalnim kordinatama $\xi_r' = (\xi_1^r, \xi_2^r, ..., \xi_{d-1}^r)$ i $\xi_r = \xi_d^r$, te pripadnim preslikavanjima a_r, $1 \le r \le R$ takvi da zadovoljavaju:

- $\partial\Omega = \displaystyle\bigcup_{r=1}^{R} \{\, (\xi_r', \xi_r);\quad \xi_r = a_r(\xi_r');\quad |\xi_r'| < \alpha\}$,
- $\{\, (\xi_r', \xi_r);\quad a_r(\xi_r') < \xi_r < a_r(\xi_r') + \beta;\quad |\xi_r'| < \alpha\} \subset \Omega \quad 1 \le r \le R$,
- $\{\, (\xi_r', \xi_r);\quad a_r(\xi_r') - \beta < \xi_r < a_r(\xi_r');\quad |\xi_r'| < \alpha\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \quad 1 \le r \le R$

[1] lokalni koordinatni sustav dobiven je translacijom i rotacijom originalnog sustava

- $|a_r(\xi_r') - a_r(\eta_r')| \leq |\xi_r' - \eta_r'| \qquad |\xi_r'| \leq \alpha,\ |\eta_r'| \leq \alpha,\ 1 \leq r \leq R.$

Označimo sa

$$\Delta_r = \left\{\xi_r' \in \mathbb{R}^{d-1},\ |\xi_r'| < \alpha\right\}$$

Ako je za svaki r, $a_r \in W^{k,\infty}(\Delta_r)$ kažemo da je Ω domena klase Lip^k.

Teorem 3.3.2. (*Teorem o tragu*)

Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domena klase Lip^k, $s \geq 1$, $k \geq 1$ i q zadan s $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{1}{d-1}\frac{ks-1}{s}$, ako je $ks < d$ ili $q \in [1, +\infty\rangle$, za $ks = d$. Tada postoji linearni ograničeni operator

$$E : W^{k,s}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$$

koji za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ zadovoljava $E(\varphi) = \varphi_{|\partial\Omega}$.

Dokaz: Dokaz teorema možete pročitati u [4] poglavlju 2, odjeljak 4. □

Radi jednostavnosti pišemo $u = E(u)$ ako radimo na $\partial\Omega$. Pretpostavimo da vrijede sljedeće hipoteze (restrikcije (3.1) i (3.2) na slučaj $m = 1$ i $p = 1$).

$$\text{(3.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je dano preslikavanje } \phi, \text{ tako da za svaki} \\ \text{dovoljno mali } \theta \text{ u } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ je } \phi(\theta) \in W^{1,1}((\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)). \end{array} \right.$$

$$\text{(3.7)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Neka je } \theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ definirano na okolini od nule} \\ \text{diferencijabilno u nuli iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{1,1}(\Omega). \end{array} \right.$$

Teorem 3.3.3. *Neka je Ω Lipschitzova domena, za koju vrijede* (3.6) *i* (3.7) *te dodatno:*

$$\text{(3.8)} \qquad \phi(0) \in W^{2,1}(\Omega),$$

$$\text{(3.9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \textit{za dani } \theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ dovoljno mali je} \\ \phi(\theta) = 0 \quad \textit{na } \partial(Id + \theta)(\Omega). \end{array} \right.$$

Tada je za proizvoljan $\omega \subset\subset \Omega$ preslikavanje

$$\text{(3.10)} \qquad \theta \mapsto \phi_\omega(\theta) \textit{ je diferencijabilno u nuli iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } L^1(\omega).$$

Kao posljedica je onda $\theta \mapsto \phi(\theta)$ lokalno diferencijabilno u nuli i vrijedi

$$\phi'(\theta) \in W^{1,1}(\Omega)$$

te

$$\phi'(\psi) = -\psi \cdot \boldsymbol{n} \frac{\partial \phi(0)}{\partial \boldsymbol{n}} \qquad \textit{na } \partial\Omega \qquad (\textit{u } L^1(\partial\Omega))$$

Dokaz: Zbog (3.6) i (3.7) primjenom Teorema 3.1.4 dobivamo da vrijedi (3.10) i derivacija u smjeru ψ je:

$$\phi'(\psi) = D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] - \psi \cdot \nabla\phi(0).$$

Zbog (3.7) i (3.9) i primjenom teorema o tragu

$$D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Dodatno $D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] \in W^{1,1}(\Omega)$ te zbog pretpostavke (3.8) je $\nabla\phi(0) \in W^{1,1}(\Omega)$ dobivamo da je $\phi'(\psi) \in W^{1,1}(\Omega)$. Primjenom traga dobivamo

$$\phi'(\psi) = D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] - \psi \cdot \nabla\phi(0) \text{ na } \partial\Omega\ ,$$

odnosno

$$\phi'(\psi) = -\psi \cdot \nabla\phi(0) \text{ na } \partial\Omega\ .$$

Ostaje još iskoristiti činjenicu da je $\phi(0)$ konstanta na $\partial\Omega$ čime $\nabla\phi(0)$ na $\partial\Omega$ ima smjer normalu $\mathbf{n}$. Tada je

$$\nabla\phi(0) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla\phi(0)) = \mathbf{n}\,\frac{\partial\phi(0)}{\partial\mathbf{n}}$$

□

Teorem 3.3.4. (*Ukupna promjena parcijalnih derivacija*)
Neka vrijedi (3.1) *i* (3.2). *Tada preslikavanje*

$$\begin{cases} \theta \mapsto (\partial_i\phi(\theta)) \circ (Id + \theta) \textit{ definirano na} \\ \textit{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } W^{m-1,p}(\Omega) \\ \textit{je diferencijabilno u nuli} \end{cases}$$

Dokaz: Prema Propoziciji 2.1.1 pod c), zapisano po komponentama

$$\partial_i\phi(\theta) = \sum_{k=1}^{d} M_{i,k}(\theta)\partial_k(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)),$$

gdje je

$$M_{i,j}(\theta) = [(I + \nabla\theta)^{-t}]_{i,j}.$$

Koristeći činjenicu da je transponiranje linearno i neprekidno $^t : W^{m,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) \to W^{m,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}))$ i Propoziciju 2.1.1 pod b) dolazimo do zaključka

$$\begin{cases} \theta \mapsto M(\theta) \text{ definirana na} \\ \text{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{k-1,c}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})) \\ \text{je diferencijabilna u nuli.} \end{cases}$$

Tada uz dogovor da je $k \geq m$ i restrikciju na otvoren skup Ω

$$\begin{cases} \theta \mapsto M(\theta) \text{ definirana na} \\ \text{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m-1,c}(\Omega, M_d(\mathbb{R})) \\ \text{je diferencijabilna u nuli.} \end{cases}$$

Iskoristivši (3.2) dobivamo za $i = 1, 2, ..., d$

$$\begin{cases} \theta \mapsto \partial_i(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)) \text{ definirana na} \\ \text{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m-1,p}(\Omega) \\ \text{je diferencijabilna u nuli.} \end{cases}$$

TIme smo dokazali teorem.

□

Napomena 3.3.5. Koristimo oznaku:

$$(\partial_i \phi)^\bullet(\psi) := D_\theta((\partial_i \phi(\theta)) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi].$$

Općenito vrijedi uz prirodne pretpostavke:

$$(\partial_i \phi)'(\psi) = (\partial_i \phi)^\bullet(\psi) - \psi \cdot \nabla(\partial_i \phi(0)).$$

Deriviramo li:

$$\phi'(\psi) = D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] - \psi \cdot \nabla(\phi(0))$$

i iskoristimo li da je operator deriviranja linearan:

$$\partial_i(\phi'(\psi)) = \partial_i \left(D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] \right) - \partial_i \left(\psi \cdot \nabla(\phi(0)) \right).$$

Uočimo da vrijedi

$$(\partial_i \phi)' = \partial_i \phi',$$

jer je

$$\begin{aligned} \partial_i(\phi')(\theta) &= \partial_i \left(\lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(t\theta) - \phi(0)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\partial_i \phi(t\theta) - \partial_i \phi(0)}{t} \qquad = (\partial_i \phi)'(\theta). \end{aligned}$$

Derivacija u smjeru se uvijek tako ponaša u odnosu na linearne operatore. Time smo dobili (koristeći još parcijalnu derivaciju):

$$(\partial_i \phi)^\bullet(\psi) - \partial_i \big(D_\theta(\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))(0)[\psi] \big) = -\partial_i \psi \cdot \nabla(\phi(0))$$

Sada pokazujemo glavni rezultat za diferencijalne operatore na rubu. Pretpostavke (3.1) i (3.2) uz $p = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Neka je dano preslikavanje } \phi, \text{ tako da za svaki}\\ \text{dovoljno mali } \theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ je } \phi(\theta) \in W^{m,1}((\mathrm{Id}+\theta)\Omega),\\ \text{gdje je } k \geq m \geq 1.\end{array}\right. \tag{3.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Neka je } \theta \mapsto \phi(\theta) \circ (\mathrm{Id}+\theta) \text{ definirano na okolini nule,}\\ \text{diferencijabilno u nuli iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{m,1}(\Omega).\end{array}\right. \tag{3.12}$$

Pretpostavljamo da operator ima oblik:

$$B = \sum_{|\alpha|<m-1} b_\alpha D^\alpha, \quad b_\alpha \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d), \tag{3.13}$$

definiran na cijelom $\mathbb{R}^d$.

Teorem 3.3.6. *Neka je Ω Lipschitzova domena (klase Lip*[1]*). Uz hipoteze* (3.11)-(3.13) *neka vrijedi*

$$B\phi(\theta) = g \ \text{na} \ \partial(Id+\theta)(\Omega) \tag{3.14}$$

za svaki $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u okolini nule. Neka je

$$B\phi(0) \in W^{2,1}(\Omega) \tag{3.15}$$

i

$$g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d). \tag{3.16}$$

Tada

$$B\phi'(\theta) = -\theta \boldsymbol{n} \frac{\partial(B\phi(0) - g)}{\partial \boldsymbol{n}} \ \text{na} \ \partial\Omega \tag{3.17}$$

Dokaz: Uz hipoteze (3.11), (3.12) te prema Teoremu 3.3.4 o promjeni parcijalnih derivacija možemo zaključiti:

$$\left\{\begin{array}{l}\theta \mapsto (B\phi(\theta)) \circ (\mathrm{Id}+\theta) \text{ je definirano}\\ \text{na okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{1,1}(\Omega)\\ \text{te je diferencijabilno u nuli.}\end{array}\right.$$

Označimo derivaciju u smjeru θ gornjeg preslikavanja sa $(B\phi)^\bullet(\theta)$. Prema teoremu o egzisteniciji lokalne derivacije 3.1.4 dobivamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto B\phi_\omega(\theta) \text{ je definirano na okolini } 0 \\ \text{iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } L^1(\omega) \text{ i diferencijabilno u } 0 \end{array} \right.$$

i to za svaki otvoreni $\omega \subset\subset \Omega$. Drugim riječima pokazali smo da je $\theta \mapsto B\phi(\theta)$ lokalno diferencijabilno u 0, te je derivacija u smjeru ψ jednaka:

$$(B\phi)'(\psi) \in L^1(\Omega).$$

S obzirom da je B kao diferencijalni operator linearan i neprekidan tada je jasno:

$$B\phi' = (B\phi)'.$$

Iskoristimo li pretpostavku (3.15) te Propoziciju 2.2.4 o derivaciji funkcije sa kompozicijom možemo zaključiti

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto g \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ je definirano iz} \\ W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{1,1}(\mathbb{R}^d) \text{ te diferencijabilno u nuli.} \end{array} \right.$$

Proučimo preslikavanje $\theta \mapsto f(\theta) = B\phi(\theta) - g$, uz pretpostavku da je θ dovoljno mali. S obzirom da g ne ovisi o θ jasno je onda f lokalno diferencijabilna. Označimo sa $f'(\theta)$ derivaciju u smjeru θ. Prilično je jednostavno za provjeriti da

$$f'(\theta) \in W^{1,1}(\Omega)$$

te da vrijedi

$$f'(\theta) = -\theta \cdot \mathbf{n} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \mathbf{n}} \text{ u } L^1(\partial\Omega)$$

Preostaje još iskoristiti da je $B\phi' = (B\phi)'$ čime dobivamo (3.17)

$\square$

3.4 Diferenciranje integrala

Cilj teorije optimizacije je određivanje skupa gdje realan funkcional

$$\theta \mapsto J(\theta, \phi(\theta))$$

definiran na $W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$ sa vrijednostim u realnim brojevima, ima minimum. Težina teorije je u tome što ϕ predstavlja rješenje rubnog problema koje odgovara otvorenom skupu $(\mathrm{Id}+\theta)(\Omega)$. Kao posljedica, biti će korisno izračunati derivaciju u smjeru (u odnosu na $W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$) sljedećih funkcija :

$$J(\theta,\phi(\theta)) = \int_{(\mathrm{Id}+\theta)\Omega} C(\theta,\phi(\theta))\,\mathrm{d}x$$

ili

$$J(\theta,\phi(\theta)) = \int_{\partial(\mathrm{Id}+\theta)\Omega} G(\theta,\phi(\theta))\,\mathrm{d}x$$

gdje su C i G parcijalni diferencijalni operatori definirani na cijelom $\mathbb{R}^d$. Preciznije

$$(\theta,\phi(\theta)) \mapsto C(\theta,\phi(\theta)) : W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \times W^{m,p}((\mathrm{Id}+\theta)\Omega) \to L^1((\mathrm{Id}+\theta)\Omega)$$

te

$$(\theta,\phi(\theta)) \mapsto G(\theta,\phi(\theta)) : W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \times W^{m,p}((\mathrm{Id}+\theta)\Omega) \to W^{1,1}((\mathrm{Id}+\theta)\Omega)$$

Diferenciranje integrala po varijabilnoj domeni

Teorem 3.4.1. *Neka je Ω otvoren skup te pretpostavimo da vrijedi:*

(3.18) $$\begin{cases} \theta \mapsto \phi(\theta) \text{ je definirano na okolini nule} \\ \text{iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d),\ k \geq 1, \text{ u } L^1\left((Id+\theta)\Omega\right), \end{cases}$$

(3.19) $$\begin{cases} \theta \mapsto \phi(\theta) \circ (Id+\theta) \text{ je definirana na} \\ \text{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \text{ u } L^1(\Omega) \text{ te} \\ \text{je diferencijabilna u nuli,} \end{cases}$$

Tada uz $k' \geq \max\{2,k\}$ za proizvoljan otvoren skup $\omega \subset\subset \Omega$ vrijedi:

(3.20) $$\begin{cases} \theta \mapsto \phi_\omega(\theta) \text{ definirana je} \\ \text{na okolini nule od } W^{k',c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \text{ u } (\mathcal{C}^1(\overline{\omega}))' \\ \text{i diferencijabilna u nuli.} \end{cases}$$

Kao posljedica, $\theta \mapsto \phi(\theta)$ je lokalno diferencijabilna u 0. Pripadna derivacija u smjeru θ u nuli je:

(3.20') $$\phi'(\theta) = D_\psi(\phi(\psi) \circ (Id+\psi))(0)[\theta] - \theta \cdot \nabla\phi(0),$$

Za svaki $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ dovoljno mali je:

(3.21) $$\phi'(\theta) \in (\mathcal{C}^1_c(\Omega))'$$

Dokaz: Prije nego krenemo na dokaz objasnimo pobliže kako shvaćamo tvrdnje pod (3.20) i (3.20'). Neka je $\omega \subset\subset \Omega$ i $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$. Prema dosadašnjim pretpostavkama ima smisla definirati (koristeći Teorem 2.2.1):

$$(*) \qquad \langle \phi_\omega(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta), \varphi \rangle = \left\langle \phi_\omega(\theta), \varphi \circ (\mathrm{Id} + \theta)^{-1} \mathrm{Jac}(\mathrm{Id} + \theta)^{-1} \right\rangle$$

Uočimo da je prvi integral definiran na ω dok je drugi na $(\mathrm{Id} + \theta)\omega$, pa odabiremo $\theta \in W^{k',c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dovoljno mali takav da je $(\mathrm{Id} + \theta)\omega \subset\subset \Omega$. Jasno je preslikavanje $\theta \mapsto \langle \phi_\omega(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta), \varphi \rangle$ diferencijabilno iz $W^{k',c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $\mathbb{R}$.

Neka je $\vartheta \in C^1(\overline{\omega})$. Preslikavanje $\theta \mapsto \langle \phi_\omega(\theta), \vartheta \rangle$ je prema Teoremu 2.2.1 ustvari $\theta \mapsto \langle \phi_\omega(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta), \vartheta \circ (\mathrm{Id} + \theta) \mathrm{Jac}(\mathrm{Id} + \theta) \rangle$. Vrijedi da je $\theta \mapsto \vartheta \circ (\mathrm{Id} + \theta) \mathrm{Jac}(\mathrm{Id} + \theta)$ diferencijabilno u nuli iz $W^{k',c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ prema Propoziciji 2.1.1. Možemo zaključiti da je time $\theta \mapsto \langle \phi_\omega(\theta), \vartheta \rangle$ diferencijabilno u nuli iz $W^{k',c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $\mathbb{R}$ tj. time je pokazana tvrdnja (3.20).

Vratimo se sada $(*)$. Zbog svega prethodno navedenog možemo tražiti diferencijal u nuli u smjeru θ:

$$\langle D_\psi(\phi_\omega(\psi) \circ (\mathrm{Id} + \psi))(0)[\theta], \varphi \rangle = \langle \phi'_\omega(\theta), \varphi \rangle + \langle \phi_\omega(0), -\nabla\varphi \cdot \theta - \varphi \,\mathrm{div}(\theta) \rangle$$

odnosno vrijedi:

$$\langle D_\psi(\phi_\omega(\psi) \circ (\mathrm{Id} + \psi))(0)[\theta], \varphi \rangle = \langle \phi'_\omega(\theta), \varphi \rangle + \langle \theta \cdot \nabla \phi_\omega(0), \varphi \rangle$$

uz dogovor da je $\langle \theta \cdot \nabla\phi_\omega(0), \varphi \rangle = \langle \phi_\omega(0), -\nabla\varphi \cdot \theta - \varphi \,\mathrm{div}(\theta) \rangle$ gdje je $\theta \cdot \nabla \phi_\omega(0) \in (C_c^1(\Omega))'$. Time smo pokazali (3.20') i (3.21).

□

Teorem 3.4.2. *Neka je* Ω *otvoren skup. Neka vrijedi* (3.18) *i* (3.19). *Pretpostavimo dodatno:*

$$(3.22) \qquad \phi(0) \in W^{1,1}(\Omega).$$

Tada je

$$(3.23) \qquad \phi'(\theta) + \mathrm{div}(\theta\phi(0)) \in L^1(\Omega) \quad i \quad \phi'(\theta) \in L^1(\Omega).$$

Preslikavanje

$$(3.24) \qquad \begin{cases} \theta \mapsto \int_{(Id+\theta)\Omega} \phi(\theta)\,\mathrm{d}x \textit{ je dobro definirano} \\ \textit{na okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } \mathbb{R} \\ \textit{i diferencijabilno u nuli.} \end{cases}$$

Derivacija u smjeru θ u nuli je:

$$\int\limits_{(Id+\theta)(\Omega)} \phi'(\theta) + \operatorname{div}(\phi(0)\theta)\,\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

Pretpostavimo li da je Ω Lipschitzova domena derivaciju u smjeru θ u nuli možemo zapisati kao:

$$\int\limits_{\Omega} \phi'(\theta)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} \phi(0)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{dS} \tag{3.26}$$

Dokaz: Znamo preko Teorema 3.4.1 da je $\phi'(\theta) \in (C_c^1(\Omega))'$. Iskoristimo da je $\phi(0) \in W^{1,1}(\Omega)$. Tada je

$$\theta \cdot \nabla\phi(0) \in L^1(\Omega),$$

te dobivamo:

$$\phi'(\theta) = D_\psi(\phi(\psi) \circ (\mathrm{Id} + \psi))(0)[\theta] - \theta \cdot \nabla\phi(0) \in L^1(\Omega),$$

čime smo pokazali (3.23).

Preko teorema o zamjeni varijabli 2.2.1 dobivamo

$$\int\limits_{(\mathrm{Id}+\theta)\Omega} \phi(\theta)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} ((\phi(\theta)) \circ (\mathrm{Id} + \theta))|\det(\mathrm{Id} + \nabla\theta)|\,\mathrm{d}x$$

Možemo pokazati da je

$$\begin{cases} \theta \mapsto (\phi(\theta) \circ (\mathrm{Id}+\theta))|\det(\mathrm{Id}+\nabla\theta)| \text{ definirana na} \\ \text{okolini nule iz } W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } L^1(\Omega), \end{cases}$$

diferencijabilna u nuli te je derivacija u smjeru θ u nuli:

$$\begin{aligned} D_\psi(\phi(\psi) \circ (\mathrm{Id} + \psi)))(0)[\theta] + \phi(0)\operatorname{div}(\theta) &= \phi'(\theta) + \theta \cdot \nabla\phi(0) + \phi(0)\operatorname{div}(\theta) \\ &= \phi'(\theta) + \operatorname{div}(\phi(0)\theta) \end{aligned}$$

Neka je $f(\theta) = \phi(\theta)) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ i $g(\theta) = |\det(\mathrm{Id} + \nabla\theta)|$. Prema (3.19)

$$f(\theta) = f(0) + Df(0)[\theta] + o_f(\theta), \qquad \lim_{\|\theta\|_k \to 0} \frac{\|o_f(\theta)\|_{L^1(\Omega)}}{\|\theta\|_k} = 0$$

iz Propozicije 2.1.1 pod a)

$$g(\theta) = g(0) + Dg(0)[\theta] + o_g(\theta), \qquad \lim_{\|\theta\|_k \to 0} \frac{\|o_g(\theta)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\theta\|_k} = 0$$

$$f(\theta)g(\theta) - f(0)g(0) - g(\theta)Df(0)[\theta] - f(\theta)Dg(0)[\theta] = \\ \mathscr{O}_f(\theta)g(\theta) + \mathscr{O}_g(\theta)f(\theta) + Df(0)[\theta]Dg(0)[\theta]$$

Prilično je jednostavno za provjeriti (Hölderova nejednakost) kako izrazi pripadaju $L^1(\Omega)$. Koristeći neprekidnost od f i g te neprekidnost diferencijala:

$$\|\mathscr{O}_f(\theta)g(\theta)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mathscr{O}_f(\theta)\|_{L^1(\Omega)}\|g(\theta)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_g\|\mathscr{O}_f(\theta)\|_{L^1(\Omega)}$$

pa

$$\lim_{\|\theta\|_k\to 0} \frac{\|\mathscr{O}_f(\theta)g(\theta)\|_{L^1(\Omega)}}{\|\theta\|_k} = 0$$

slično za drugi izraz dok treći vrijedi direktno:

$$\|Df(0)[\theta]Dg(0)[\theta]\|_{L^1(\Omega)} \leq \|Df(0)\|\|Dg(0)\|\|\theta\|_k^2.$$

Time smo pokazali gornju tvrdnju. Ako integriramo po Ω

$$((\phi(\theta)) \circ (\mathrm{Id} + \theta))|\det(\mathrm{Id} + \nabla\theta)| = \phi(0) + \phi'(\theta) + \operatorname{div}(\phi(0)\theta) + \mathscr{O}(\theta)$$

dobivamo (3.24) i (3.25). Uočimo da je

$$\operatorname{div}(\phi(0)\theta) \in L^1(\Omega).$$

unutar ovih uvjeta smijemo primjeniti teorem o divergenciji:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\phi(0)\theta)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\cdot(\phi(0)\theta)\,\mathrm{dS}$$

čime iz (3.25) dobivamo (3.26).

□

3.5 Diferenciranje integrala definiranog na rubu

Tehnički rezultati za granicu

Još uvijek nismo ništa rekli o diferenciranju funkcije oblika

$$\theta \mapsto \int_{\partial(\mathrm{Id}+\theta)\Omega} \phi(\theta)\,\mathrm{d}x$$

Neka je Ω domena klase Lip^1. Može se pokazati da je $\partial(\mathrm{Id} + \theta)\Omega$ opet Lipschitzova domena za dovoljno mali $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (u normi $\|\cdot\|_k$), gdje je $k \geq 1$. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \subset W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Tada je $\mathrm{Id} + \theta \in \mathscr{C}^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Definicija 3.5.1. (*Tangencijalni Jacobijan*)
Neka je Ω *Lipschitzova domena, te* $T \in \mathscr{C}^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. *Definiramo tangencijalni Jacobijan kao:*

$$\mathrm{Jac}_{\partial\Omega}(T) := \left|(\nabla T)^{-t}\mathbf{n}\right| |\det(\nabla T)| \quad \text{na } \partial\Omega$$

time je:

$$\mathrm{Jac}_{\partial\Omega}(T) \in L^\infty(\partial\Omega)$$

U površinskim integralima vrijedi sljedeći teorem (verzija od 2.2.1):

Teorem 3.5.2. (*Zamjena varijabli u površinskim integralima*)
Neka je Ω *Lipschitzova domena,* $T \in \mathscr{C}^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ *difeomorfizam na* $\mathbb{R}^d$. *Tada je* $f \circ (T) \in L^1(\partial\Omega)$ *ako i samo ako je* $f \in L^1(\partial T(\Omega))$ *i vrijedi:*

$$\int_{\partial T(\Omega)} f \,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} (f \circ T)\mathrm{Jac}_{\partial\Omega}(T)\,\mathrm{d}S \tag{3.27}$$

Dokaz. Dokaz možete vidjeti u [3] lema 4.7. □

Standardno ćemo koristiti da je $T = \mathrm{Id} + \theta$.

Definicija 3.5.3. (*Tangencijalna divergencija*)
Neka je Ω *Lipschitzova domena i* $v \in (W^{1,\infty}(\partial\Omega))^d$. *Pogledajmo* $\overline{v} \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^d$, *proširenje funkcije* v *na* $\mathbb{R}^d$. *Definiramo tangencijalnu divergenciju kao:*

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) = \mathrm{div}(\overline{v}) - ([\nabla\overline{v}]^t\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \textit{na } \partial\Omega$$

Može se pokazati da je $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v)$ dobro definiran, dakle ne ovisi o odabiru proširenja $\overline{v}$ te vrijedi:

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) \in L^\infty(\partial\Omega)$$

Sljedeće teoreme navodimo bez dokaza. Svi dokazi su izuzetno tehnički i mogu se pročitati u [3]

Lema 3.5.4. (*Diferenciranje tangencijalnog Jacobijana*)
Neka je Ω *domena klase* Lip^k, $(k \geq 1)$. *Preslikavanje*

$$\begin{cases} \theta \mapsto \mathrm{Jac}_{\partial\Omega}(\mathrm{Id} + \theta) \textit{ je dobro definirano} \\ \textit{na okolini od } 0 \textit{ iz } W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } W^{k-1,\infty}(\partial\Omega) \\ \textit{te je diferencijabilno u } 0 \end{cases}$$

Tada je $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\theta)$ *derivacija u smjeru* θ *u točki* 0.

Teorem 3.5.5. (*Tangencijalna Greenova formula*)
Neka je Ω domena klase Lip^2, $f \in W^{2,1}(\Omega)$ i $\theta \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Tada vrijedi formula:

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\theta \cdot \nabla f + f \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\theta)) \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\partial\Omega} \theta \cdot \boldsymbol{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} + Hf \right) \mathrm{d}S$$

gdje je H srednja zakrivljenost.

Rezultat za granicu

Može se pokazati pomoću prethodnih rezultata za granicu da vrijedi teorem:

Teorem 3.5.6. *Pretpostavimo da je Ω domena klase Lip^1, te neka vrijedi:*

$$\begin{cases} \theta \mapsto \phi(\theta) \text{ je definirano za} \\ \theta \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ dovoljno mali} \\ \text{tako da je } \phi(\theta) \in W^{1,1}((Id+\theta)\Omega), \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} \theta \mapsto \phi(\theta) \circ (Id+\theta) \text{ je definirano na} \\ \text{okolini nule iz } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{1,1}(\Omega), \\ \text{i diferencijabilno u nuli.} \end{cases}$$

uz $\phi(0) \in W^{2,1}(\Omega)$. Tada je

$$\begin{cases} \theta \mapsto \int_{\partial(Id+\theta)\Omega} \phi(\theta) \, \mathrm{d}S \text{ , definirano na} \\ \text{okolini nule iz } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } \mathbb{R}, \\ \text{te je diferencijabilno u nuli.} \end{cases}$$

Pripadna derivaciju u nuli u smjeru θ jednaka je:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \phi'(\theta) \, \mathrm{d}S + \int\limits_{\partial\Omega} (\theta \cdot \nabla\phi(0) + \phi(0) \, div_{\partial\Omega}(\theta)) \, \mathrm{d}S.$$

Dokaz: Detalje dokaza možete pronaći u [5] teorem 2.27. □

Ako iskoristimo Teorem 3.5.5 dolazimo do zaključka da se drugi dio izraza može zapisati u obliku:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \theta \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + Hf \right) \mathrm{d}S.$$

Vidimo da je time potrebno dobro poznavanje derivacije u smjeru $\phi'(\theta)$ da bismo izraz generalno mogli zapisati u formi

$$\int_{\partial\Omega} v\theta \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

Ideju ćemo pokazati u sljedećem poglavlju na konkretnom primjeru modela kondenzatora.

Poglavlje 4

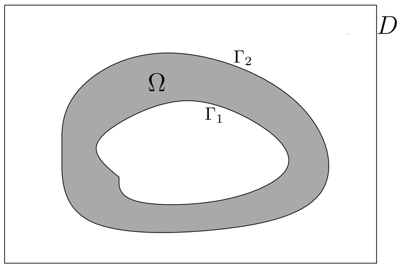
Primjena na model kondenzatora

U uvodu smo uveli primjer kondenzatora. Dopustivi skup bio je

$$\mathcal{V} = \left\{ \Omega \subset D \middle| \begin{array}{l} \Omega \text{ ima fiksnu mjeru}, \quad \Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1 \\ \Omega_1, \Omega_2 \text{ otvoreni skupovi}, \ \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset D \end{array} \right\}$$

uz dogovor da je D ograničen skup. Na Ω električni potencijal zadovoljava:

$$\begin{cases} \Delta y = 0 & \text{na } \Omega, \\ y = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ y = 1 & \text{na } \Gamma_2. \end{cases} \tag{4.1}$$



Slika 4.1: Primjer Ω iz $\mathcal{V}$

Prvo pokazujemo da za svaki $\Omega \in \mathcal{V}$ postoji jedinstveno rješenje y gornje zadaće. Za dani Ω nije teško pronaći funkciju

$$\hat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \begin{cases} \hat{g} = 0, & \text{na } \Gamma_1 \\ \hat{g} = 1, & \text{na } \Gamma_2 \end{cases}.$$

Uzimamo $g := \hat{g}_{|\overline{\Omega}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Trivijalno je $g \in W^{k,p}(\Omega)$ za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ te $p \in [1, \infty]$.

4.1 Egzistencija i regularnost rješenja

Propozicija 4.1.1. *(Egzistencija i jedinstvenost rješenja)*
Postoji jedinstvena funkcija $y \in H^1(\Omega)$ takva da zadovoljava

$$\begin{cases} y - g \in H_0^1(\Omega), \\ \Delta y = 0, \quad \textit{na } \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dokaz: pronaći rješenje problema (4.1) ekvivalentno je rješavanju zadaću:

$$\begin{cases} \Delta v = -\Delta g & \text{na } \Omega, \\ v = 0 & \text{na } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

Pretpostavimo da je rješenje y klase $\mathcal{C}^\infty$. Pomnožimo jednakost u (4.3) sa $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, te integrirajmo po Ω. Parcijalnom integracijom dolazimo do

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla v)\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \{\operatorname{div}(\nabla v\varphi) - \nabla v \nabla\varphi\} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla v \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integral po granici nestaje, i time dobivamo varijacijsku formulaciju zadaće:

$$\begin{cases} & \text{Naći } \ h \in H_0^1(\Omega), \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) & \int_\Omega \nabla h \nabla \varphi = \int_\Omega \Delta g \phi \end{cases} \tag{4.4}$$

Ako je rješenje dovoljno glatko iz (4.4) možemo dobiti (4.3), pa time i (4.1). Može se pokazati da je sa $\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x$ dobro definiran skalarni produkt na $H_0^1(\Omega)$, pa primjenom Rieszovog teorema reprezentacije postoji jedinstveno rješenje $h \in H_0^1(\Omega)$ od (4.3). Time smo pronašli egzistenciju i jedinstvenost rješenja zadaće (4.2) uzimajući $y := g + h$.

□

Naglasimo da u kontekstu dokazanog jednakost $\Delta y = 0$ moramo uzimati u smislu distribucija. No pokazuje se da je pristup opravdan jer uz pretpostavke na glatkoću domene Ω dobivamo regularnost rješenja y.

Teorem 4.1.2. *(Regularnost rješenja)*
Neka je Ω otvoren skup klase Lip^k, $k \geq 2$, te y rješenje od (4.1), tada je:

$$y \in W^{k,p}(\Omega), \quad p \in \langle 1, \infty \rangle \,. \tag{4.5}$$

Dokaz: Rezultate možete pročitati u [2]

□

Pretpostavimo da je Ω domena klase Lip^2. Neka je $\theta \in W^{k,c}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ gdje je $k \geq 2$. Označimo sa $y(\theta)$ rješenje od

$$\begin{cases} \Delta y(\theta) = 0 & \text{na } (\mathrm{Id} + \theta)\Omega, \\ y(\theta) = 0 & \text{na } (\mathrm{Id} + \theta)\Gamma_1, \\ y(\theta) = 1 & \text{na } (\mathrm{Id} + \theta)\Gamma_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Prema Propoziciji 4.1.1 znamo da je $y(\theta)$ dobro definiran. S obzirom da za granicu dodatno pretpostavljamo da je klase Lip^2, moramo uzeti da je $\theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 2$. Time $\partial(\mathrm{Id} + \theta)\Omega$ ostaje klase Lip^2, pa smijemo primijeniti Teorem 4.1.2 o regularnosti rješenja. Za $\theta \mapsto y(\theta)$ tada vrijedi:

$$\begin{cases} y(\theta) \in W^{2,p}((\mathrm{Id} + \theta)\Omega), \quad p \in \langle 1, \infty \rangle \\ \text{za } \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u okolini } 0 \\ \text{i vrijedi (4.6).} \end{cases}$$

Cilj je pokazati diferencijabilnost preslikavanja $\theta \mapsto y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ u nuli, što je i tvrdnja sljedećeg teorema:

4.2 Teorijski rezultati o derivaciji oblika

Neka je sa $\nabla^2 f$ označen Hesijanova matrica od funkcije f.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_d, \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_d, \partial x_d} \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.1. *(o diferencijabilnosti preslikavanje $\theta \mapsto y(\theta) \circ (Id + \theta)$)*
Za dani $p \in \langle 1, \infty \rangle$, preslikavanje

$$\begin{cases} \theta \mapsto y(\theta) \circ (Id + \theta) \textit{ definirano na} \\ \textit{okolini } 0 \textit{ iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

je diferencijabilno u 0. Derivacija u smjeru θ u točki 0 označena s $\dot{y}(\theta)$ zadovoljava:

$$\begin{cases} \Delta \dot{y}(\theta) = \mathrm{tr}(\nabla\theta \nabla^2 y(0)) + \mathrm{div}(\nabla\theta^t \nabla y(0)) \\ \dot{y}(\theta) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Dokaz: Pokazujemo teorem u tri koraka:
1) Označimo skup:

$$W_*^{2,p}(\Omega) = \left\{ v \in W^{2,p}(\Omega) \;\middle|\; v = 0 \text{ na } \Gamma_1, \, v = 1 \text{ na } \Gamma_2 \right\}$$

koji je afina mnogostrukost u $W^{2,p}(\Omega)$ s translacijskim potprostorom

$$V_*^{2,p}(\Omega) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Važno je za uočiti da je $W_0^{2,p}(\Omega)$ različito od $V_*^{2,p}(\Omega)$. Ako je $g = \hat{g}_{|\Omega}$, funkcija klase $\mathcal{C}^\infty$ definirana kao ranije slijedi $W_*^{2,p}(\Omega) = g + V_*^{2,p}(\Omega)$. Pogledajmo preslikavanje $F : W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \times V_*^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definirano formulom:

$$F(\theta, v) = \sum_{i,j,k=1}^{d} M_{i,j}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} (M_{i,k}(\theta)(\frac{\partial v}{\partial x_k} + \frac{\partial g}{\partial x_k})) \tag{4.7}$$

F je dobro definiran za $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dovoljno male norme te proizvoljan $v \in V_*^{2,p}(\Omega)$. Preslikavanje M je uvedeno u Teoremu 3.3.4 preko formule:

$$M_{i,j}(\theta) := [(I + \nabla\theta)^{-t}]_{i,j}$$

Ranije smo spomenuli da je preslikavanje $y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ dobro definirano te vrijedi:

$$\begin{cases} (\Delta y(\theta)) \circ (\mathrm{Id} + \theta) = 0 & \text{na } \Omega, \\ y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) = 1 & \text{na } \Gamma_2. \end{cases}$$

Uočimo da je $y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) \in W_*^{2,p}(\Omega)$, te uvedimo oznaku:

$$y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) = g + v(\theta), \qquad v(\theta) \in V_*^{2,p}(\Omega) \tag{4.8}$$

Prema tvrdnji Propozicije 2.2.4 pod c)

$$\left(\frac{\partial y(\theta)}{\partial x_i}\right) \circ (\mathrm{Id} + \theta) = \sum_{k=1}^{d} M_{i,k}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))$$

odnosno

$$\frac{\partial y(\theta)}{\partial x_i} = \left\{ \sum_{k=1}^{d} M_{i,k}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)) \right\} \circ (\mathrm{Id} + \theta)^{-1}$$

primjenimo opet tvrdnju propozicije na $\frac{\partial y(\theta)}{\partial x_i}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 y(\theta)}{\partial x_i^2}\right) \circ (\mathrm{Id} + \theta) &= \sum_{j=1}^{d} M_{i,j}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial y(\theta)}{\partial x_i} \circ (\mathrm{Id} + \theta) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{d} M_{i,j}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{k=1}^{d} M_{i,k}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))) \\ &= \sum_{j,k=1}^{d} M_{i,j}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_j} (M_{i,k}(\theta) \frac{\partial}{\partial x_k} (y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))) \end{aligned}$$

Sumirajući po i pokazali smo da je $\Delta y(\theta)\circ(\mathrm{Id}+\theta) = F(\theta, v(\theta))$ i time je prema (4.8):

$$F(\theta, v(\theta)) = 0 \tag{4.9}$$

2) U sljedećem koraka dokaza koristimo teorem o implicitnoj funkciji za Banachove prostore

Teorem 4.2.2. *(teorem o implicitnoj funkciji)*

Neka je zadano preslikavanje $F : U_1 \times U_2 \subset T \times X \to Y$ u Banachov prostor, gdje su U_1, U_2 otvoreni skupovi u Banachovim prostorima T, X respektivno.

Pretpostavimo da je $F \in \mathcal{C}^1(U_1 \times U_2, Y)$, $F(\theta^*, v^*) = 0$ i $D_v(F(\theta, v))$ regularan operator sa ograničenim inverzom.

Tada postoje okolina $\Theta \subset U_1$ od θ^* i $V \subset U_2$ od v^*, preslikavanje $G \in \mathcal{C}^1(\Theta, X)$ koje zadovoljava:

- $F(\theta, G(\theta)) = 0$ *za svaki* $\theta \in \Theta$,
- $G(\theta^*) = v^*$,
- $DG(\theta) = -\left[D_v F(\theta, G(\theta))\right]^{-1} \circ D_\theta F(\theta, G(\theta))$, *za* $\theta \in \Theta$.

Dokaz: Za dokaz pogledajte [1] □

Prema Napomeni 2.1.2 možemo zaključiti:

$$\begin{cases} \theta \mapsto M(\theta) \text{ je neprekidno} \\ \text{diferencijabilna na okolini od nule} \\ \text{iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R})). \end{cases}$$

Zbog afinosti funkcije F po drugom argumentu imamo:

$$\begin{aligned} F(\theta, v+h) - F(\theta, v) &= \sum_{i,j,k=1}^{d} M_{i,j}(\theta)\frac{\partial}{\partial x_j}(M_{i,k}(\theta)(\frac{\partial h}{\partial x_k})) \\ &= D_v F(\theta, v)[h]. \end{aligned}$$

Time smo osigurali da je F neprekidno diferencijabilna na okolini $(0, v(0))$. Vrijedi

$$F(0, v(0)) = 0,$$

a specijalno je

$$D_v F(0, v(0)) = \sum_{i,j,k=1}^{d} M_{i,j}(0)\frac{\partial}{\partial x_j}(M_{i,k}(0)\frac{\partial}{\partial x_k}) = \Delta$$

Prema teoremu regularnosti 4.1.2 dobivamo da je Δ izomorfizam iz $V_*^{2,p}(\Omega)$ u $L^p(\Omega)$, čime su svi uvjeti teorema o implicitnoj funkciji zadovoljeni. Stoga postoji okolina Θ tako da je preslikavanje

$$v \in \mathcal{C}^1(\Theta, V_*^{2,p}(\Omega)).$$

Preciznije osigurali smo da je $\theta \mapsto y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ diferencijabilno u nuli iz $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ u $W^{2,p}(\Omega)$ (znamo i da je dodatno klase $\mathcal{C}^1$ na okolini nule). Time treba naglasiti da teoremom o implicitnoj funkciji osiguravamo glatkoću preslikavanja dok smo postojanje funkcije $\theta \mapsto v(\theta)$ znali i ranije.

3) Vrijedi iz teorema o implicitnoj funkciji:

$$\dot{y}(\psi) = D(H)(0)[\theta] = -\left[D_v F(0, z(0))\right]^{-1} D_\theta F(0, z(0))[\psi]$$

Odrediti $D_\theta F(0, z(0))[\psi]$ nije tehnički jednostavno. Poželjno je napisati (4.7) u kompaktnijoj formi.

$$F(\theta, v) = \mathrm{tr}\left([\nabla\big(M(\theta)\nabla(v+g)\big)]^t M(\theta)\right)$$

S obzirom da je $M(\theta) = I - \nabla\theta^t + o(\theta)$, može se pokazati da je

$$D_\theta F(0)[\psi] = -\mathrm{tr}(\nabla\psi\nabla^2 y(0)) - \mathrm{div}(\nabla\psi^t \nabla y(0))$$

posljednja tvrdnja slijedi primjenimo li za $p = 2$ i iskoristimo li činjenicu da je $y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta)$ konstantan na rubu čime je $\dot{y}(\theta)$ nužno iz $H_0^1(\Omega)$.

□

Korolar 4.2.3. *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$, i otvoren skup $\omega \subset\subset \Omega$. Pretpostavimo da y zadovoljava (4.1) te je Ω domena klase Lip^2. Tada je preslikavanje*

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto y(\theta)|_\omega \text{ definirano na} \\ \text{okolini } 0 \text{ iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } W^{2,p}(\omega), \\ \text{i diferencijabilno u } 0. \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Kao posljedica je $\theta \mapsto y(\theta)$ lokalno diferencijabilna u 0. Derivacija u nuli u smjeru θ, označena sa $y'(\theta)$ zadovoljava:

$$y'(\theta) \in W^{1,p}(\Omega),$$

vrijedi:

$$\Delta y'(\theta) = 0 \quad \text{na } \Omega,$$

te

$$y'(\theta) = -\theta \cdot \boldsymbol{n}\, \frac{\partial y(0)}{\partial \boldsymbol{n}} \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Dokaz: Primjenivši teorem o egzistenciji lokalne derivacije 3.1.4 za slučaj $k = m = 2$ i Teorem 4.2.1 dobivamo tvrdnju (4.10).

Teorem 3.2.1 osigurava

$$\Delta y'(\theta) = 0 \quad \text{na } \Omega$$

Pošto je $\dot{y}(\theta) \in H_0^1(\Omega)$ prema Teoremu 3.1.4 zaključujemo

$$y'(\theta) = -\theta \cdot \nabla(y(0)) \qquad \text{na } \partial\Omega$$

iz činjenice da je $y(0)$ konstanta na granici, gradijent je proporcionalan vektoru normale pa time dobivamo posljednju tvrdnju korolara.

□

Lema 4.2.4. *Neka y zadovoljava* (4.1)*. Preslikavanje*

$$\begin{cases} \theta \mapsto |\nabla y(\theta)|^2 \circ (Id + \theta) \textit{ definirano je} \\ \textit{na okolini od } 0 \textit{ iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } W^{1,1}(\Omega) \\ \textit{i diferencijabilno je u } 0 \end{cases}$$

Dokaz: Prema teoremu o ukupnoj promjeni parcijalnih derivacija 3.3.4 znamo :

$$\begin{cases} \theta \mapsto \nabla y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta) \text{ definirano je} \\ \text{na okolini od nule iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } (H^1(\Omega))^d \\ \text{i diferencijabilno je u nuli} \end{cases}$$

Uočimo da je preslikavanje $v \mapsto K(v) = |v|^2$ definirano sa $(H^1(\Omega))^d$ u $W^{1,1}(\Omega)$ je diferencijabilno u svakoj točki te je diferencijal

$$DK(a)[v] = 2a \cdot v$$

$$\begin{aligned} K(a+v) - K(a) &= |a+v|^2 - |a|^2 \\ &= ((a+v) + a) \cdot ((a+v) - a) \\ &= 2a \cdot v + |v|^2 \\ &= DK(a)[v] + o(v) \end{aligned}$$

Time je i kompozicija $K \circ ((\nabla y(\theta) \circ (\mathrm{Id} + \theta))$ diferencijabilna otkuda slijedi tvrdnja leme.

□

Po teoremu o egzistenciji lokalne derivacije za svaki otvoreni $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\begin{cases} \theta \mapsto \nabla y(\theta)|_\omega \text{ definirano je} \\ \text{na okolini od 0 iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ u } (L^2(\omega))^d \\ \text{i diferencijabilno je u 0} \end{cases}$$

čime je $\theta \mapsto \nabla y(\theta)$ lokalno derivabilna u 0. Uzimajući u obzir da je $\theta \mapsto y(\theta)$ lokalno diferencijabilna u točki 0 sa smjerom θ i

$$(\nabla y)'(\theta) = \nabla y'(\theta),$$

stavimo oznaku za lokalnu derivaciju od $\theta \mapsto \nabla y(\theta)$ u točki 0 u smjeru θ:

$$\nabla y'(\theta),$$

s obzirom da je K iz Teorema 4.2.4 diferencijabilno na proizvoljnoj $\omega \subset\subset \Omega$ možemo zaključiti da je preslikavanje $\theta \mapsto |\nabla y(\theta)|^2$ lokalno diferencijabilno i opet pozivom na Teorem 3.1.4 dobivamo

$$(|\nabla y|^2)'(\theta) = 2\nabla y(0) \cdot \nabla y'(\theta) = 2\nabla y(0) \cdot \nabla \dot{y}(\theta) - \theta \cdot \nabla |\nabla y(0)|^2 \in L^1(\Omega) \tag{4.11}$$

Derivacija oblika

Teorem 4.2.5. *(o derivaciji oblika) Neka y zadovoljava* (4.1)*. Za dani*

$$C(\theta) = \int\limits_{(Id+\theta)\Omega} |\nabla y(\theta)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

preslikavanje

$$\begin{cases} \theta \mapsto C(\theta) \textit{ definirano na} \\ \textit{okolini od nule iz } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \textit{ u } \mathbb{R} \\ \textit{je diferencijabilno u nuli} \end{cases} \tag{4.12}$$

Pripadna derivacija u smjeru θ u točki 0 *je*

$$C'(\theta) = -\int\limits_{\partial\Omega} \theta \cdot \boldsymbol{n} \left| \frac{\partial y(0)}{\partial \boldsymbol{n}} \right|^2 \mathrm{d}S$$

Dokaz: Početak dokaza je sličan dokazu Teorema 3.4.1

$$\int\limits_{(\mathrm{Id}+\theta)\Omega} |\nabla y(\theta)|^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} |\nabla y(\theta)|^2 \circ (\mathrm{Id}+\theta)\, |\det(I+\nabla\theta)| \,\mathrm{d}x$$

Prilično se jednostavno pokaže da je $\theta \mapsto |\nabla y(\theta)|^2 \circ (\mathrm{Id}+\theta)\, |\det(I+\nabla\theta)|$ diferencijabilna u okolini nule iz $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ u prostor $W^{1,1}(\Omega)$. Njezin diferencijal u nuli u smjeru ϑ dan je sa

$$D_\theta \left(|\nabla y(\theta)|^2 \circ (\mathrm{Id}+\theta)\right)(0)[\vartheta] + |\nabla y(0)|^2 \,\mathrm{div}(\vartheta)$$

Preostaje iskoristiti teorema o lokalnoj diferencijabilnosti i (4.11) čime dobivamo

$$\begin{aligned} C'(\theta) &= \int\limits_{\Omega} 2\nabla y(0)\cdot\nabla y'(\theta)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} \theta\cdot\nabla|\nabla y(0)|^2 + \int\limits_{\Omega} |\nabla y(0)|^2\,\mathrm{div}(\theta)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\Omega} 2\nabla y(0)\cdot\nabla y'(\theta)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(\theta|\nabla y(0)|^2)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Primjenom teorema o divergenciji dobivamo

$$C'(\theta) = \int\limits_{\Omega} 2\nabla y(0)\cdot\nabla y'(\theta)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} \theta\cdot\mathbf{n}\,|\nabla y(0)|^2 \,\mathrm{d}S.$$

Diferencijabilnost od (4.12) slijedi iz Leme 4.2.4.

$$\int\limits_{\Omega} \nabla y(0)\cdot\nabla(y'(\theta))\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\int\limits_{\Omega} \Delta y(0) y'(\theta)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int\limits_{\partial\Omega} y'(\theta)\nabla y(0)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Prema Korolaru 4.2.3, $y'(\theta) = -\theta\cdot\mathbf{n}\ \frac{\partial y(0)}{\partial\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \nabla y(0)\cdot\nabla(y'(\theta))\,\mathrm{d}x &= -\int\limits_{\partial\Omega} \theta\cdot\mathbf{n}\ \frac{\partial y(0)}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{n}\cdot\nabla y(0))\,\mathrm{d}S \\ &= -\int\limits_{\partial\Omega} \theta\cdot\mathbf{n}\left|\frac{\partial y(0)}{\partial\mathbf{n}}\right|^2 \mathrm{d}S \end{aligned}$$

Pošto je $|\nabla y(0)|^2 = \left|\frac{\partial y(0)}{\partial\mathbf{n}}\right|^2$, dobivamo

$$C(\theta)' = -\int\limits_{\partial\Omega} \theta\cdot\mathbf{n}\ \left|\frac{\partial y(0)}{\partial\mathbf{n}}\right|^2 \mathrm{d}S$$

□

Bibliografija

[1] Antonio Ambrosetti i Giovanni Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1995.

[2] David Gilbarg i Neil S Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2015.

[3] François Murat i Jacques Simon, *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*, VI Laboratoire d'Analyse Numérique, 1974.

[4] Jindrich Necas, Christian G Simader, Šárka Necasová, Gerard Tronel i Alois Kufner, *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Science & Business Media, 2011.

[5] Jacques Simon, *Différentiation de problèmes aux limites par rapport au domaine*, Lecture notes, University of Seville (1991).

Sažetak

U radu se promatra optimizacijski problem u kojemu je cilj pronaći particiju domene na dva skupa koja minimizira zadani funkcional integralnog tipa. Pritom funkcional kao argument uzima rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe definirane na elementu particije domene, označen sa Ω. Neka je $C = C(\Omega)$ opisani funkcional.

Prvo poglavlje obrađuje osnovna svojstva Banachovog prostora $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Kao direktna posljedica prostor $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ možemo poistovjetiti sa ograničenim Lipschitz-neprekidnim funkcijama. Uloga prostora $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ leži u opisivanju malih promjena skupa, a da pritom ostanu sačuvana neka dobra svojstva skupa kao što su otvorenost ili regularnosti ruba. Promjena skupa je skup $\Omega' = (\mathrm{Id} + \theta)\Omega$, gdje je Id identiteta, a $\theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Fiksiranjem Ω promatramo preslikavanje $C(\Omega; \theta) := C(\Omega')$. Od interesa je objasniti kako male promjene skupa Ω utječu na vrijednost funkcionala koristeći pojam derivacije oblika:

$$C'(\Omega, \theta) = \lim_{t \to 0^+} \frac{C(\Omega; t\theta) - C(\Omega; 0)}{t}.$$

Drugo poglavlje sadrži tehničke rezultate o Fréchet-diferencijabilnosti koji se koriste u narednom poglavlju. Treće poglavlje definira pojam lokalne diferencijabilnosti, pomoću kojeg se može detaljnije objasniti ponašanje rješenja diferencijalne jednadžbe pri malim promjenama skupa Ω. Pritom dolazimo do dovoljnih uvjeta za postojanje derivacije oblika $C'(\Omega, \theta)$.

U posljednjem poglavlju demonstrirana je primjena teorije na modelu kondenzatora.

Summary

This thesis studies the optimization problem in which the objective is to find the bipartition of domain that minimizes a given integral functional. The functional explicitly depends on the solution of a partial differential equation defined on a bipartion's element denoted with Ω. Let $C = C(\Omega)$ be mentioned functional.

In the first chapter basic properties of Banach space $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ are introduced. Essentially, $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ can be identified as a space of a bounded Lipschitz-continuous functions. That space is used to explain small changes of the set Ω, while preserving important properties like openness and regularity of the border. Change of a set Ω is the set $\Omega' = (\mathrm{Id} + \theta)\Omega$, where Id is an identity on $\mathbb{R}^d$ and $\theta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Fixing Ω we can introduce mapping $\theta \mapsto C(\Omega; \theta) := C(\Omega')$. To explain how small changes on Ω affect the value of the functional one can introduce shape derivative:

$$C'(\Omega, \theta) = \lim_{t \to 0^+} \frac{C(\Omega; t\theta) - C(\Omega; 0)}{t}.$$

The second chapter deals with technical results on a differentiability which are used in the next chapter. In the third chapter, the term local differentiability is introduced. It is used to better explain how solution can be differentiated with respect to small changes of a set Ω. Within this chapter, a sufficient conditions for existence of the shape derivative $C'(\Omega, \theta)$ are given.

All theory is applied in the last chapter, on a model of electric capacitor to prove existence of the local derivative.

Životopis

Petar Kunštek, rođen je 18. travnja 1991. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Dugave upisao je 15. gimnaziju u Zagrebu. Tijekom osnovne i srednje škole išao je na natjecanja iz matematike, fizike i biologije. Na državnom natjecanju 2009/2010. iz fizike osvojio je 1. mjesto. Na državnoj maturi imao je 1. rang iz matematike i fizike.

Godine 2010. upisuje prediplomski studij Matematika na Prirodoslovnom matematičkom fakultetu - Matematičkom odsjeku, Sveučilišta u Zagrebu. Završava preddiplomski studij 2013. godine te upisuje diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.