Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja i povratnost

Lisičar, Arijan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Arijan Lisičar

MARKOVLJEVI LANCI NA OPĆENITOM SKUPU STANJA I POVRATNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Pojam Markovljevog procesa prvi je uveo matematičar Andrej Markov za slučaj kada je prostor stanja diskretan. Ovdje ćemo proučavati Markovljeve procese na općenitom skupu stanja. Jasno je da su nam za promatranje takvih procesa potrebni finiji alati nego u diskretnom slučaju, no usprkos poteškoćama, do 70-ih godina prošlog stoljeća je glavni dio teorije doveden do stanja gdje je većina fundamentalnih problema poput cikličnosti, prolaznosti i povratnosti, postojanja invarijantne mjere te konvergencije, riješena na zadovoljavajući način. Jedan od poznatijih primjera Markovljevog procesa je autoregresivni proces reda 1 (AR(1) proces) koji je jedan od najvažnijih primjera u teoriji vremenskih nizova i kojem ćemo se dijelom i u ovom radu posvetiti.

Nama će posebno zanimljivi biti Harrisovi lanci, nazvani tako po matematičaru Theodoreu Harrisu. Manje je poznato da se dio ove teorije može pripisati Wolfgangu Doeblinu, matematičaru koji je, za vrijeme službe u 2. svjetskom ratu, napisao svoj osvrt na Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe te ih u ”pil cacheté” (zatvorena kuverta) poslao Francuskoj akademiji znanosti. Doeblin je u ratu poginuo, no kada je ta zatvorena kuverta otvorena 2000. godine, pokazalo se da je Doeblin, u pogledu razvijanja teorije Markovljevih procesa, bio daleko ispred svog vremena.

U prvom poglavlju ćemo se prisjetiti teorije Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja. Nakon toga ćemo, u drugom poglavlju, razviti teoriju Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja te pojmove poput φ-ireducibilnosti, subinvarijantne mjere, povratnosti i prolaznosti te uniformne i geometrijske ergodičnosti. U trećem poglavlju ćemo suziti tu teoriju samo na Harrisove lance, posebnu vrstu Markovljevih lanaca na općenitim skupovima stanja. Pokazat ćemo da je za neke od pojmova iz drugog poglavlja lakše dokazati postojanje ako radimo s Harrisovim lancem. Na kraju, rad ćemo završiti s par primjera Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja.

Poglavlje 1

Diskretni Markovljevi lanci

U ovom poglavlju ćemo se prisjetiti nekih definicija i rezultata vezanih uz Markovljeve lance na diskretnom skupu stanja kako bi ih kasnije mogli poopćiti na općenite skupove stanja.

Definicija 1.0.1. *Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s vrijednostima u skupu S je Markovljev lanac ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

za svaki $n \geq 0$ *i za sve* $i_0, ..., i_{n-1}, i, j \in S$ *za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.*

Prisjetimo se nekih pojmova i definicija koji će nam trebati za daljnji rad. Stohastička matrica $P = [p_{ij}]$ je matrica dimenzije $S \times S$ kojoj je suma svakog retka jednaka 1 te je konačna ukoliko je broj stanja u S konačan.

Definicija 1.0.2. *Neka je* $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ *vjerojatnosna distribucija na S, te neka je* $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ *stohastička matrica. Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s prostorom stanja S je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ *za sve* $i \in S$*, te*

(ii)

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = p_{ij}$$

za svaki $n \geq 0$ *i za sve* $i_0, ..., i_{n-1}, i, j \in S$.

Takve Markovljeve lance nazivamo (λ, P)-Markovljevim lancima.

Primjer 1.0.3. *Slučajna šetnja. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}$ i distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = k) = p_k, k \in \mathbb{Z}$. Definiramo slučajnu šetnju $Z = (Z_n : n \geq 0)$ sa*

$$Z_0 = 0, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_i, n \geq 1.$$

Uočite da za $n \geq 0$ vrijedi $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}$. Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_n = i_n, ..., Z_1 = i_1, Z_0 = 0) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} + i_n = i_{n+1} | Z_n = i_n, ..., Z_1 = i_1, Z_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = p_{i_{n+1} - i_n} \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_n = i_n),\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog nezavisnosti slučajne varijable Y_{n+1} sa $Z_0, Z_1, ..., Z_n$. Dakle, slučajna šetnja Z je Markovljev lanac.

Jedan od najzanimljivijih primjera slučajne šetnje je jednostavna slučajna šetnja kod koje su slučajne varijable Y_k Bernoullijeve na $\{-1, 1\}$. Preciznije, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Pripadajući Markovljev lanac Z pomiče se samo za jedno mjesto ulijevo ili udesno. Prijelazne vjerojatnosti su $p_{ii-1} = q$, $p_{ii+1} = p$, $p_{ij} = 0$ za $j \neq i - 1, i + 1$. Za jednostavnu slučajnu šetnju kažemo da je simetrična ako je $p = q = \frac{1}{2}$.

Slučajne šetnje možemo promatrati i na d-dimenzionalnoj rešetci $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$. Sa e_i označimo vektor $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^d$ s jedinicom na i-tom mjestu. Pretpostavimo da je $Y = (Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih. jednako distribuiranih slučajnih vektora s vrijednostima u skupu $\{\pm e_1, \pm e_2, ..., \pm e_d\}$ s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = e_i) = \mathbb{P}(Y_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$. Definiramo $Z_0 = 0$, te $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, za $n \geq 1$. Tada se $Z = (Z_n : n \geq 0)$ zove jednostavna, simetrična d-dimenzionalna slučajna šetnja. U svakom trenutku se Z može pomaknuti na jedno od $2d$ susjednih mjesta na rešetci.

Množenje beskonačnih stohastičkih matrica definira se po analogiji s množenjem konačnih matrica. Ako su $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ i $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ matrice (konačne ili beskonačne), definiramo matricu $PQ = (r_{ij} : i, j \in S)$ sa

$$r_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} q_{kj}.$$

Specijalno, n-ta potencija matrice P dana je s $P^n = (p_{ij}^{(n)} : i, j \in S)$, gdje je

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} j}.$$

Konačno, definirajmo nultu potenciju matrice P kao $P^0 = I = (\delta_{ij})$ gdje je $\delta_{ii} = 1$, a $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

Iz formule za konačnodimenzionalne distribucije možemo izračunati jednodimenzionalne distribucije. Zaista, koristeći gornju formulu imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_0 \in S} \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} j} \\ &= \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 j}^{(n)} = (\lambda P^n)_j. \end{aligned}$$

U zadnjem retku smo sa λP^n označili produkt vektor-retka λ i matrice P, dok $(\lambda P^n)_j$ označava j-ti element rezultirajućeg vektor-retka. Iz te formule odmah slijedi da je za sve $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}.$$

Ta formula nam govori da ako Markovljev lanac kreće iz stanja i, tada je vjerojatnost da nakon n koraka bude u stanju j jednaka ij-tom elementu n-te potencije prijelazne matrice P. Vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)}$ zovu se n koračne prijelazne vjerojatnosti.

Na kraju, spomenimo rezultat poznat pod nazivom *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti*: za sve $i, j \in S$

$$\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

Interpretacija te formule je: lanac koji kreće iz stanja i, te se u trenutku $n+m$ nalazi u stanju j mora u trenutku n biti u nekom stanju $k \in S$, te iz tog stanja k u preostalih m koraka treba doći u stanje j.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo *prvo vrijeme pogađanja tog skupa* kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset = +\infty$. U slučaju $B = \{j\}$ za $j \in S$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto preciznijeg $T_{\{j\}}$.

Imajući to na umu, za stanja $i, j \in S$ kažemo da je *j dostižno iz i*, $i \longrightarrow j$, ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0$ te da stanja $i, j \in S$ *komuniciraju* ako $i \longrightarrow j$ i $i \longrightarrow j$. Nadalje, ako se S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. za sve $i, j \in S$ vrijedi $i \longleftrightarrow j$ za S kažemo da je *ireducibilan*. Ukoliko je podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo daje *zatvoren* ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$, tj. skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. U tom slučaju za stanje $j \in S$ kažemo da je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup.

Za slučajnu varijablu T, kažemo da je *vrijeme zaustavljanja* ako vrijedi $\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, ...X_n)$, za sve $n \geq 0$. Za fiksno stanje $i \in S$ promatramo smo vremena u kojima se Markovljev lanac vraća u stanje i. Uz definiciju $T_i = T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\}$, indukcijom za $m \geq 1$ se pokaže

$$T_j^{(m+1)} = \begin{cases} \min\{n > T_i^{(m)} : X_n = i\}, & T_i^{(m)} < \infty \\ \infty, & T_i^{(m)} = \infty \end{cases}$$

Vrijeme $T_i^{(m)}$ zove se *vrijeme m-tog povratka* u stanje i.

Nadalje, za stanje $i \in S$ kažemo da je *povratno* ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, tj. *pozitivno povratno* ako vrijedi $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$, a $j \in S$ je prolazno ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, tj. *nul-povratno* ako nije pozitivno povratno. Pokaže se da, ukoliko je $i \in S$ povratno te $i \longleftrightarrow j$ da je tada i $j \in S$ povratno. Uz to, ako je Markovljev lanac X ireducibilan i povratan tada su sva stanja i povratna.

Podsjetimo se da je *stacionarna distribucija* Markovljevog lanca ona vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in S)$ za koju vrijedi $\pi = \pi P$. Netrivijalna mjera λ na S je *invarijantna mjera* Markovljevog lanca X (tj. prijelazne matrice P) ako vrijedi $\lambda = \lambda P$. Nadalje, definiramo i *graničnu distribuciju* Markovljevog lanca X, $\pi = (\pi_i : i \in S)$ ako za sve $i, j \in S$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. Definirajmo još i *aperiodičnost* Markovljevog lanca, tj. aperiodičnost jednog stanja $i \in S$ s $d(i)$, gdje je $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Ako je taj skup prazan, $d(i) = 1$ te u tom slučaju kažemo da je i aperiodično. U suprotnom, kažemo da je i periodično s periodom $d(i)$. Uz takvu definiciju kažemo da je X aperiodičan ukoliko su mu sva stanja aperiodična. Sada možemo iskazati sljedeći teorem koji nećemo dokazati. Sam dokaz teorema se može naći [7].

Teorem 1.0.4. *Neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan, te ima stacionarnu distribuciju π. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \quad \text{za sve } j \in S.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \text{za sve } i,j \in S,$$

tj. stacionarna distribucija je ujedno i granična.

Podsjetimo se vrlo važnog rezultata iz teorije vjerojatnosti.

Teorem 1.0.5. *(Jaki zakon velikih brojeva) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, takvih da je $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, te stavimo $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$. Tada je*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Na kraju, dajemo jedan od najvažnijih rezultata teorije Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja. Teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 1.0.6. *(Ergodski teorem) Pretpostavimo da je Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na S. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1.$$

Primjer 1.0.7. *(a) Jednostavna slučajna šetnja u $\mathbb{Z}$. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Jednostavna slučajna šetnja $Z = (Z_n : n \geq 0)$ definirana je s $Z_0 = 0$, $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Izračunajmo m koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{00}^{(m)}$. Ukoliko je $m = 2n + 1$ neparan, tada je $p_{00}^{(m)} = 0$ (u početno stanje šetnja se može vratiti samo u parnom broju koraka). Za $m = 2n$ vrijedi*

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}e^{-2n}(2n)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n)^2}(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Gornja asimptotska jednakost povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \geq n_0$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \leq p_{00}^{(2n)} \leq 2\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Pretpostavimo da je $p = q = 1/2$, odnosno da je Z jednostavna simetrična slučajna šetnja. Tada je $4pq = 1$, pa je

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty$$

iz čega zaključujemo da je Z povratan lanac. Nadalje, ako je $p \neq 1$, tada je $4pq < 1$, pa imamo

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n < +\infty$$

iz čega zaključujemo da je Z prolazan lanac.

Pokušajmo naći stacionarnu distribuciju od Z. Zamislimo da u svakoj točki od $\mathbb{Z}$ imamo česticu mase 1. Svaka od tih čestica se podijeli u skladu s prijelaznim vjerojatnostima i pomakne na odgovarajuće mjesto. Konkretnije, čestica u stanju i podijeli se na dvije čestice, svaka mase 1/2 od kojih se jedna pomakne u $i-1$, a druga u $i+1$. S druge strane, u stanje i dolaze dvije čestice, svaka mase 1/2, jedna iz $i-1$, a druga iz $i+1$. Nakon simultane podjele svih čestica, odgovarajućih pomaka i sljepljivanja, očito je da u svakom stanju i imamo opet česticu mase 1. Preciznije, neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in \mathbb{Z})$ definirano s $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Tada se gornji postupak kratko može zapisati kao

$$\lambda = \lambda P,$$

gdje je P prijelazna matrica jednostavne simetrične slučajne šetnje. Drugim riječima, λ je skoro stacionarna distribucija. Razloga zašto to nije je taj da λ nije vjerojatnosna distribucija (suma komponenti nije jednaka 1). Štoviše, $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i = +\infty$ što znači da se λ ne može normirati tako da postane stacionarnom distribucijom. Intuitivno je jasno da bi stacionarna distribucija π trebala imati svojstvo da je $\pi_i = \pi_j$ za sve $i, j \in \mathbb{Z}$, tj. da je konstantna. Međutim, takva vjerojatnost na $\mathbb{Z}$ ne postoji. Zaključujemo da jednostavna simetrična slučajna šetnja nema stacionarnu distribuciju.

(b) *Promotrimo sada slučajnu šetnju na skupu $\mathbb{Z}_d = \{0, 1, 2, .., d-1\}$. I dalje je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$, no sada je $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran sa $X_0 = 0$, $X_n = (X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i) \mod d$, gdje $\mod d$ označava ostatak pri dijeljenju s brojem* *d. Primijetimo da je matrica prijelaza P ovakve slučajne šetnje jednaka*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & q \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

Iz grafičkog prikaza ovog Markovljevog lanca vidimo da je lanac ireducibilan. Odatle nam odmah slijedi da je lanac povratan, štoviše, pozitivno povratan pa postoji jedinstvena stacionarna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in \{0, 1, 2, ..., d-1\})$.
Rješavamo sustav $\pi = \pi P$, $\sum_{i=0}^{d-1} \pi_i = 1$, $\pi_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 q + \pi_{d-1} p = (1-p)\pi_1 + p\pi_{d-1} \\ \pi_1 &= \pi_0 q + \pi_2 p = (1-p)\pi_0 + p\pi_2 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \pi_{i-1} q + \pi_{i+1} p = (1-p)\pi_{i-1} + p\pi_{i+1} \\ &\vdots \\ \pi_{d-1} &= \pi_{d-2} q + \pi_0 p = (1-p)\pi_{d-2} + p\pi_1 \end{aligned}$$

Zbog simetrije slutimo da su svi π_i *jednaki. Zaista, ako je* $\pi_i = c$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, *za sve* $i \in \{0, 1, 2, ..., d-1\}$, *onda vrijedi* $\pi = \pi P$.
Sada imamo:

$$1 = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_i \;\Rightarrow\; 1 = \sum_{i=0}^{d-1} c \;\Rightarrow\; 1 = dc \;\Rightarrow\; c = 1/d$$

Odavde slijedi da je stacionarna distribucija jednaka $\pi = (\pi_i = \frac{1}{d} : i \in \{0, 1, 2, ..., d-1\})$.

Poglavlje 2

Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja

2.1 Osnovne definicije i svojstva

Definicija 2.1.1. *Ako je $P = \{P(x, A), x \in \Phi, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})\}$ takva da vrijedi:*

(i) za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, $P(\cdot, A)$ je nenegativna izmjeriva funkcija na $\mathbb{S}$

(ii) za svaki $x \in \mathbb{S}$, $P(x, \cdot)$ je vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$

tada P nazivamo jezgrom prijelaznih vjerojatnosti, Markovljevom funkcijom prijelaza ili kraće prijelaznom jezgrom.

Za Markovljeve lance na općenitim skupovima stanja najvažnije je svojstvo *zaboravljivosti* (eng. forgetfulness) dano teoremom koji nećemo dokazivati, no njegov dokaz se može pronaći u Meyn i Tweedie [4] (Teorem 3.4.1).

Teorem 2.1.2. *Za svaku početnu mjeru μ na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ i prijelaznu jezgru $P = \{P(x, A), x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})\}$ postoji stohastički proces $X = (X_n : n \geq 0)$ na $\Omega = \Pi_{i=0}^{\infty}\mathbb{S}_i$, izmjeriv obzirom na $\mathcal{F} = \bigvee_{i=0}^{\infty}$ te vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_\mu$ na $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}_\mu(B)$ vjerojatnost događaja $\{X \in B\}$ za $B \in \mathcal{F}$. Nadalje, za izmjerive $A_i \subseteq \mathbb{S}_i$, $i = 0, \ldots n$ i za bilo koji prirodan broj n, za taj stohastički proces vrijedi:*

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \int_{y_0 \in A_0} \cdots \int_{y_{n-1} \in A_{n-1}} \mu(\mathrm{d}y_0) P(y_0, \mathrm{d}y_1) \cdots P(y_{n-1}, A_n). \tag{2.1}$$

Sada možemo formalno definirati Markovljev lanac na općenitom skupu stanja.

Definicija 2.1.3. *Stohastički proces X definiran na $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se vremenski homogen Markovljev lanac sa prijelaznom jezgrom $P(x, A)$ i početnom distribucijom μ ako sve konačno-dimenzionalne distribucije od X zadovoljavaju* (2.1) *za svaki n.*

Kao i u diskretnom slučaju, na općenitim skupovima stanja se n koračna jezgra Markovljevog lanca definira iterativno. Neka je $P^0(x, A) = \delta_x(A)$, Diracova mjera definirana sa:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

pa, za $n \geq 1$, induktivno definiramo:

$$P^n(x, A) = \int_{\mathbb{S}} P(x, \mathrm{d}y) P^{n-1}(y, A), \quad x \in \mathbb{S},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}).$$

Za n koračnu jezgru prijelaznih vjerojatnosti $\{P^n(x, A), x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})\}$ pišemo P^n te primijetimo da je P^n definirana analogno kao i n koračna prijelazna matrica za diskretni slučaj.

Nadalje, i u diskretnom slučaju, i na općenitim skupovima stanja imamo *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti* koje su podloga za sva naša razmatranja. Teorem nećemo dokazivati, no njegov se dokaz može naći u Meyn i Tweedie [4] (Teorem 3.4.2).

Teorem 2.1.4. *Za svaki m takav da je $0 \leq m \leq n$,*

$$P^n(x, A) = \int_{\mathbb{S}} P^m(x, \mathrm{d}y) P^{n-m}(y, A), \quad x \in \mathbb{S}, a \in \mathcal{B}(\mathbb{S}).$$

Chapman-Kolomogorovljeve jednakosti nam zapravo govore da, kako se X kreće iz stanja x u skup A u n koraka, u bilo kojem međukoraku m lanac mora posjetiti neko stanje $y \in \mathbb{S}$ i u tom trenutku m, obzirom da je Markovljev lanac, zaboravlja prošlost i sljedećih $(n - m)$ koraka nastavlja kao da je krenuo iz stanja y. Stoga, te jednakosti možemo alternativno zapisati kao

$$\mathbb{P}_x(X_n \in A) = \int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}_x(X_m \in \mathrm{d}y) \mathbb{P}_y(X_{n-m} \in A).$$

Isto kako prijelazna jezgra P opisuje lanac X, tako m koračna jezgra, gledana zasebno, zadovoljava definiciju prijelazne jezgre pa tako opisuje lanac $X^m = (X_n^m : n \geq 1)$ sa prijelaznim vjerojatnostima

$$P_x(X_n^m \in A) = P^{mn}(x, A). \tag{2.2}$$

Definicija 2.1.5. *Lanac X^m za kojeg vrijedi* (2.2) *zove se m-kostur lanca X. Rezolventa K_{a_ε} je definirana za* $0 < \varepsilon < 1$ *sa*

$$K_{a_\varepsilon}(x, A) = (1 - \varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P^i(x, A), \qquad x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}).$$

Markovljev lanac s prijelaznom jezgrom K_{a_ε} naziva se K_{a_ε}-lanac.

Napomena 2.1.6. *Primijetimo da je K_{a_ε} doista prijelazna jezgra. Za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ $K_{a_\varepsilon}(\cdot, A)$ je, kao suma nenegativnih izmjerivih funkcija, nenegativna izmjeriva funkcija na $\mathbb{S}$. Primijetimo i da je $K_{a_\varepsilon}(x, \emptyset) = 0$ te $K_{a_\varepsilon}(x, \mathbb{S}) = 1$. Pokažimo još da je K_{a_ε} σ-aditivna. Neka je $(A_n)_{n\geq 0}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ te $x \in \mathbb{S}$ proizvoljan. Tada je*

$$\begin{aligned}
K_{a_\varepsilon}\left(x, \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P^i \left(x, \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) \\
&= (1 - \varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i P^i(x, A_j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P^i(x, A_j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} K_{a_\varepsilon}(x, A_j)
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti od $x \in \mathbb{S}$, to znači da je $K_{a_\varepsilon}(x, \cdot)$ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$.

Kako bi mogli detaljnije promatrati i analizirati naš lanac X, nije nam dovoljno samo znati njegovu distribuciju, nego i distribuciju u nekim posebnim trenucima.

Definicija 2.1.7. *Neka je X Markovljev lanac. Definiramo:*

(i) Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, vrijeme posjeta η_A je broj posjeta lanca X skupu A nakon vremena 0 *i dan je sa*

$$\eta_A := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n \in A)}.$$

(ii) Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, varijable

$$\begin{aligned}
\tau_A &:= \min\{n \geq 1 : X_n \in A\} \\
\sigma_A &:= \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}
\end{aligned}$$

zovu se vrijeme prvog povratka i vrijeme prvog pogađanja lanca X skupu A.

Uz vremena posjeta, prvog povratka i prvog pogađanja skupa A, za potrebe daljnjeg razmatranja definiramo:

$$\begin{aligned} U(x, A) :=& \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \\ =& \mathbb{E}_x[\eta_A] \end{aligned} \tag{2.3}$$

koja preslikava $\mathbb{S} \times \mathcal{B}(\mathbb{S})$ u $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, i vjerojatnosti povratka u konačnom vremenu

$$\begin{aligned} L(x, A) :=& \mathbb{P}(\tau_A < \infty) \\ =& \mathbb{P}(X \text{ pogodi } A). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Uz to, da bi mogli analizirati broj posjeta našeg lanca nekom skupu, nekada je bolje promatrati ponašanje lanca nakon prvog posjeta τ_A skupu A (koji se događa u nekom slučajnom trenutku) nego ga promatrati u fiksnim vremenskim intervalima. Nadalje, jedan od najvažnijih aspekata teorije Markovljevih lanaca je da svojstvo zaboravljivosti dano s (2.1) ili, ekvivalentno, s

$$\mathbb{E}_\mu[h(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)|X_0, \ldots, X_n; X_n = x] = \mathbb{E}_x[h(X_1, X_2, \ldots)], \tag{2.5}$$

gdje je μ početna distribucija lanca, a funkcija $h : \Omega \to \mathbb{R}$ ograničena i izmjeriva, vrijedi za lanac opažen u nekom slučajnom trenutku, a ne samo u u fiksnim vremenima n.

Definicija 2.1.8. *Funkcija $\zeta : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ naziva se vrijeme zaustavljanja za X ako je, za bilo koju početnu distribuciju μ, događaj $\{\zeta = n\} \in \mathcal{F}_n^X$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, gdje je $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n+1})$.*

Propozicija 2.1.9. *Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, varijable τ_A i σ_A su vremena zaustavljanja.*

Dokaz. Primijetimo

$$\{\tau_A = n\} = \cap_{m=1}^{n-1}\{X_m \in A^c\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 1$$

$$\{\sigma_A = n\} = \cap_{m=0}^{n-1}\{X_m \in A^c\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X, \quad n \geq 0.$$

pa po definiciji slijedi da su τ_A i σ_A uistinu vremena zaustavljanja. □

Nadalje, koristeći elemente prijelazne jezgre te koristeći Markovljevo svojstvo za svaki fiksni $n \in \mathbb{Z}_+$ dobivamo:

Propozicija 2.1.10. *(i) Za sve $x \in \mathbb{S}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$*

$$\mathbb{P}_x(\tau_A = 1) = P(x, A)$$

te induktivno, za $n > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau_A = n) &= \int_{A^c} P(x, \mathrm{d}y)\mathbb{P}_y(\tau_A = n-1)\\ &= \int_{A^c} P(x, \mathrm{d}y_1)\int_{A^c} P(y_1, \mathrm{d}y_2)\cdots\int_{A^c} P(y_{n-2}, \mathrm{d}y_{n-1})P(y_{n-1}, A).\end{aligned}$$

(ii) Za sve $x \in \mathbb{S}$*,* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$

$$\mathbb{P}_x(\sigma_A = 0) = \mathbb{1}_A(x)$$

i za svaki $n \geq 1$ *te za* $x \in A^c$

$$\mathbb{P}_x(\sigma_A = n) = \mathbb{P}(\tau_A = n).$$

Za vrijeme zaustavljanja ζ i slučajnu varijablu $H = (X_0, X_1, \ldots)$, operator pomaka θ^ζ se definira sa

$$\theta^\zeta H = h(X_\zeta, X_{\zeta+1}, \ldots)$$

na skupu na kojem vrijedi $\{\zeta < \infty\}$.

Definicija 2.1.11. *Kažemo da X zadovoljava jako Markovljevo svojstvo ako za bilo koju početnu distribuciju* μ *i bilo koju realnu ograničenu izmjerivu funkciju h na* Ω *te bilo koje vrijeme zaustavljanja* ζ *vrijedi*

$$\mathbb{E}_\mu[\theta^\zeta H \mid \mathcal{F}_\zeta^X] = \mathbb{E}_{X_\zeta}[H], \quad \mathbb{P}_\mu\text{-}g.s.$$

na skupu na kojem vrijedi $\{\zeta < \infty\}$*, gdje je* $\mathcal{F}_\zeta^X := \left\{A \in \mathcal{F} : \{\zeta = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n^X, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$.

2.2 φ-ireducibilnost i aperiodičnost

U ovom poglavlju ćemo razviti koncept sličan ireducibilnosti Markovljevog lanca na diskretnom skupu stanja. No, problem sa proširenjem te ideje ireducibilnosti je taj da ne možemo definirati direktni analogon relacije komuniciranja stanja, "$\leftrightarrow$", jer iako možemo na $L(x, A)$ gledati kao na pozitivnu vjerojatnost pogađanja skupa A ukoliko krenemo iz stanja x, općenito ne možemo reći da se možemo vratiti u neko određeno stanje x. Stoga uvodimo pojam φ-ireducibilnosti

Definicija 2.2.1. *Kažemo da je lanac* $X = (X_n : n \geq 0)$ φ*-ireducibilan ako postoji mjera* φ *na* $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ *takva da, kad god je* $\varphi(A) > 0$*, tada je* $L(x, A) > 0$ *za sve* $x \in \mathbb{S}$*.*

Npr., ako je $\varphi(A) = \delta_{x_*}(A)$, tada ono zahtijeva da stanje x_* ima pozitivnu vjerojatnost dostižnosti iz bilo kojeg stanja x. Stoga, ako lanac ima ijedno stanje koje je dostižno iz svih drugih stanja, tada je φ-ireducibilan. No, ako je $\mathbb{S}$ neprebrojiv, tada je često $P(x, \{y\}) = 0$ za sve x i y. U tom slučaju, $\varphi(\cdot)$ bi mogla biti npr. Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ tako da je $\varphi(\{x\}) = 0$ za sve jednočlane skupove, no takva da su svi podskupovi A pozitivne Lebesgue mjere s vremenom dostižni s pozitivnom vjerojatnošću iz bilo kojeg stanja $x \in \mathbb{S}$.

Primijetimo da je pojam φ-ireducibilnosti u principu slabiji od pojma ireducibilnosti kakav imamo na diskretnim skupovima stanja. Pokazati ćemo da se φ-ireducibilnost može proširiti tako da, ukoliko imamo ireducibilan lanac u smislu da je svako stanje dostižno iz bilo kojeg drugog stanja, tada se prirodna mjera ireducibilnosti (npr. brojeća mjera) generira kao "maksimalna" mjera ireducibilnosti.

Definirajmo još prijelaznu jezgru

$$K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) := \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) 2^{-(n+1)}, \quad x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}),$$

i primijetimo da je to poseban slučaj rezolvente lanca X koju smo ranije definirali. Jezgra $K_{a_{\frac{1}{2}}}$ za svaki $x \in \mathbb{S}$ definira vjerojatnosnu mjeru ekvivalentnu mjeri $\mathbb{1}_A(x) + U(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)$, koja može biti beskonačna za dosta skupova A.

Propozicija 2.2.2. *Ako je X φ-ireducibilan za neku mjeru φ, tada postoji vjerojatnosna mjera ψ na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ takva da da vrijedi:*

(i) X je ψ-ireducibilan,

(ii) za bilo koji drugu mjeru φ' lanac X je φ'-ireducibilan ako i samo ako je $\psi \succ \varphi'$,

(iii) ako je $\psi(A) = 0$, tada je $\psi(\{y : L(x, A) > 0\}) = 0$,

(iv) vjerojatnosna mjera ψ je ekvivalentna mjeri

$$\psi'(A) := \int_{\mathbb{S}} \varphi'(\mathrm{d}y) K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A),$$

za bilo koju konačnu mjeru ireducibilnosti φ'.

Dokaz. Budući da je bilo koja vjerojatnosna mjera koja je ekvivalentna mjeri ireducibilnosti φ, i sama mjera ireducibilnosti, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\varphi(\mathbb{S}) = 1$. Uzmimo mjeru ψ zadanu sa

$$\psi(A) := \int_{\mathbb{S}} \varphi(\mathrm{d}y) K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A). \tag{2.6}$$

Primijetimo da je ψ također vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$. Kako bi pokazali da ψ ima sva iskazana svojstva, definiramo skupove:

$$\bar{A}(k) = \left\{ y : \sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) > k^{-1} \right\}.$$

Iskazana svojstva ćemo dokazati opetovanom upotrebom Chapman-Kolmogorovljevih jednakosti. Da bi pokazali (i), primijetimo da, kada je $\psi(A) > 0$, tada po (2.6) postoji k takav da je $\varphi(\bar{A}(k)) > 0$ i to zato što $\bar{A}(k) \uparrow \{y : \sum_{n\geq 1} P^n(y, a) > 0\} = \mathbb{S}$. Za bilo koji fiksni x, po φ-ireducibilnosti, postoji m takav da je $P^m(x, \bar{A}(k)) > 0$. Tada imamo

$$\sum_{n=1}^{k} P^{m+n}(x, A) = \int_{\mathbb{S}} P^m(x, \mathrm{d}y) \left(\sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) \right) \geq k^{-1} P^m(x, \bar{A}(k)) > 0,$$

što pokazuje ψ-ireducibilnost. Nadalje, neka je sad φ' takva da je X φ'-ireducibilan. Ako je $\varphi'(A) > 0$, tada imamo $\sum_n P^n(y, A) > 0$ za sve y i po definicije je $\psi(A) > 0$ kad god je $\psi \succ \varphi'$. Obratno, pretpostavimo da je lanac ψ-ireducibilan i da je $\psi \succ \varphi'$. Ako je $\varphi'(A) > 0$ tada je i $\psi(A) > 0$ pa, po ψ-ireducibilnosti slijedi da je $K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) > 0$ za bilo koji $X \in \mathbb{S}$ te je stoga X φ'-ireducibilan što se i traži u (ii). Tvrdnja (iv) slijedi iz konstrukcije (2.6) i činjenice da su svake dvije maksimalne mjere ireducibilnosti ekvivalentne, što je posljedica (ii). Naposljetku, imamo

$$\int_{\mathbb{S}} \psi(\mathrm{d}y) P^m(y, A) 2^{-m} = \int_{\mathbb{S}} \varphi(\mathrm{d}y) \sum_n P^{m+n}(y, A) 2^{-(n+m+1)} \leq \psi(A)$$

otkuda svojstvo (iii) slijedi direktno. □

Uvedimo sada notaciju koju ćemo koristiti u nastavku:

(i) Za Markovljev lanac kažemo da je ψ-ireducibilan ako je φ-ireducibilan za neku mjeru φ i mjera ψ je maksimalna mjera ireducibilnosti koje zadovoljava uvjete Propozicije 2.2.2.

(ii) Pišemo

$$\mathcal{B}^+(\mathbb{S}) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}) : \psi(A) > 0\}$$

za skupove pozitivne mjere ψ. Ekvivalentnost maksimalnih mjera ireducibilnosti nam osigurava da je $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ jedinstveno definiran.

(iii) Skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ nazivamo *punim* ako je $\psi(A^c) = 0$.

(iv) Skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ nazivamo *apsorbirajućim* ako je $P(x, A) = 1$ za $x \in A$.

Za Markovljeve lance na općenitom skupu stanja postoji veza između punih i apsorbirajućih skupova.

Propozicija 2.2.3. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Tada*

(i) Svaki apsorbirajući skup je puni skup,

(ii) Svaki puni skup ima neprazan apsorbirajući podskup.

Dosada smo zaključili da nam relacija $x \leftrightarrow y$ ne koristi previše kad je $\mathbb{S}$ neprebrojiv jer je $P^n(x, y) = 0$ u većini slučajeva. No, sada ćemo uvesti pojam *dostižnosti* i *uniformne dostižnosti* koji nam učvršćuju ideju komuniciranja na kojoj se ψ-ireducibilnost zasniva.

Definicija 2.2.4. *Za skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ kažemo da je dostižan iz skupa $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ ako je $L(x, B) > 0$ za svaki $x \in A$. Nadalje, za skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ kažemo da je uniformno dostižan iz skupa $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ ako postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi*

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta, \tag{2.7}$$

Ako (2.7) *vrijedi, pišemo $A \rightsquigarrow B$.*

Važna činjenica relacije "$A \rightsquigarrow B$" je da vrijedi uniformno za svaki $x \in A$. Općenito, relacija "$\rightsquigarrow$" nije refleksivna iako mogu postojati skupovi A, B takvi da je skupu A uniformno dostižan iz skupa B i obratno. No, ono što je važno je da se može pokazati da je "$\rightsquigarrow$" tranzitivna, tj. ako $A \rightsquigarrow B$ i $B \rightsquigarrow C$, tada $A \rightsquigarrow C$.

U nastavku ćemo uvesti pojmove atoma i tzv. malih skupova te minorizacijskog uvjeta jer pomoću tih pojmova se velik dio teorije Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja može analogno razviti kao i u diskretnom slučaju.

Definicija 2.2.5. *Skup $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ za naziva atomom za X ako postoji mjera ν na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ takva da vrijedi*

$$P(x, A) = \nu(A), \quad x \in \alpha.$$

Ako je X ψ-ireducibilan i $\psi(\alpha) > 0$ tada se α naziva dostižnim atomom.

Primijetimo, jednočlani skupovi α takvi da je $\psi(\alpha) > 0$ su uvijek atomi. No, na općenitim skupovima stanja, dostižni atomi nisu toliko česti. Atome ćemo susretati kod "jako periodičnih" lanaca tako što ćemo konstruirati "udvostručeni lanac" $\check{X}$ na udvostručenom prostoru stanja $\check{\mathbb{S}} = \mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_1$, gdje su $\mathbb{S}_0$ i $\mathbb{S}_1$ kopije skupa stanja $\mathbb{S}$ za koje vrijedi:

(i) lanac X je marginalni lanac lanca $\check{X}$ u smislu da je $\mathbb{P}(X_k \in A) = \mathbb{P}(\check{X}_k \in A_0 \cup A_1)$ za pripadne početne distribucije,

(ii) "donja razina" $\mathbb{S}_1$ je dostižan atom za $\check{X}$.

Dokaz da se skup stanja doista može udvostručiti tako da je donja razina atom nećemo ovdje dati, no u njemu se koriste takozvani "mali skupovi" C za koje postoji $m > 0$ i minorizacijska mjera ν na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ takvi da vrijedi

$$P^m(x, B) \geq \nu(B), \quad x \in C.$$

Isto tako, može se pokazati da, ukoliko je lanac ψ-ireducibilan, vrijedi:

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

gdje je svaki C_i mali što nam omogućava da je takvo dijeljenje uvijek moguće za takve lance. Isto tako, još jedna netrivijalna posljedica uvođenja malih skupova je da na općenitim skupovima stanja imamo konačnu cikličku dekompoziciju za ψ-ireducibilan lanac, tj. postoje skupovi D_i, $i = 0, 1, \ldots, d-1$, tj. "d-ciklus" skupova takav da vrijedi:

$$\mathbb{S} = N \cup \bigcup_{i=0}^{d-1} D_i,$$

gdje je $\psi(N) = 0$ i $P(x, D_i) \equiv 1$ za $x \in D_{i-1}$, pri čemu indekse skupova D zbrajamo i oduzimamo modulo d. Detalji dokaza tih tvrdnji se mogu naći u Meyn i Tweedie [4] (Poglavlje 5), no dati ćemo formalne definicije pojmova navedenih u gornjem tekstu.

Definicija 2.2.6. *(i) Minorizacijski uvjet: Za realan broj $\delta > 0$, neki skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ te vjerojatnosnu mjeru ν za koju vrijedi $\nu(C^c) = 0$ i $\nu(C) = 1$ vrijedi*

$$P(x, A) \geq \delta \mathbb{1}_C(x)\nu(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}), x \in \mathbb{S}. \tag{2.8}$$

(ii) Skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ je mali skup ako postoji prirodan broj $m > 0$ i netrivijalna mjera ν_m na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ takvi da za svaki $x \in C$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ vrijedi:

$$P^m(x, B) \geq \nu_m(B) \tag{2.9}$$

Kada (2.9) vrijedi, za skup C kažemo da je ν_m-malen.

(iii) Periodičnost: Neka je X ψ-ireducibilan Markovljev lanac. Najmanji prirodan broj d za koji X ima $d-$ ciklus se nazivam periodom lanca X. Kada je $d = 1$, za lanac X kažemo da je aperiodičan. Nadalje, kada postoji ν_1-mali skup A sa svojstvom $\nu_1(A) > 0$, tada kažemo da je lanac jako aperiodičan.

Sljedeća dva rezultata dajemo bez dokaza:

Teorem 2.2.7. *Ako je X ψ-ireducibilan, tada minorizacijski uvjet vrijedi za neki m-kostur i za svaki K_{a_ε}-lanac,* $0 < \varepsilon < 1$.

Propozicija 2.2.8. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan Markovljev lanac.*

(i) Ako je X jako aperiodičan, tada minorizacijski uvjet (2.9) *vrijedi.*

(ii) Rezolventa, tj. K_{a_ε}-lanac, je jako aperiodičan za svaki $0 < \varepsilon < 1$.

(iii) Ako je X aperiodičan, tada mu je svaki kostur ψ-ireducibilan i aperiodičan, te postoji m-kostur koji je jako aperiodičan.

Odavde vidimo da je poželjno uvijek raditi s jako aperiodičnim lancima. No, u daljnjim razmatranjima ćemo se uglavnom baviti periodičnim lancima. Pozitivno je što, kao i u diskretnom slučaju, na općenitim skupovima stanja imamo:

Propozicija 2.2.9. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan lanac s periodom d i d-ciklusom $\{D_i : i = 1, \dots, d\}$. Tada je svaki od skupova D_i apsorbirajući ψ-ireducibilan skup za lanac $X_d = \{X_d, X_{2d}, \dots\}$ s prijelaznom jezgrom P^d te je X_d na svakom D_i aperiodičan.*

Dokaz. Da su D_i apsorbirajući i ψ-ireducibilni za X_d je očito. Aperiodičnost od X_d slijedi iz definicije broja d kao najveće vrijednosti za koju ciklus postoji. □

Neka je $a = \{a(n)\}$ distribucija ili vjerojatnosna mjera, na $\mathbb{Z}_+$ te promotrimo Markovljev lanac M_a s prijelaznom jezgrom

$$K_a(x, A) := \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n), \quad x \in \mathbb{S}, \; A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}).$$

Primijetimo da je K_a uistinu prijelazna jezgra tako da je X_a dobro definiran obzirom na Teorem 2.1.2. X_a zovemo K_a-lancem sa uzoračkom distribucijom a. Ovaj koncept lanca nam odmah omogućava da razvijemo uvjete pri kojima je neki skup uniformno dostižan. Koristeći a, kažemo da je skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ uniformno dostižan iz skupa $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\inf_{x \in A} K_a(x, B) > \delta \tag{2.10}$$

i kada (2.10) vrijedi pišemo $A \overset{a}{\rightsquigarrow} B$.

Lema 2.2.10. *Ako $A \overset{a}{\rightsquigarrow} B$ za neku distribuciju a, tada $a \rightsquigarrow B$.*

Dokaz. Budući da je $L(x, A) = \mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) = \mathbb{P}(X_n \in B \text{ za neke } n \in \mathbb{Z}_+)$ i $K_A(x, A) = \mathbb{P}(X_\eta \in B)$, gdje η ima distribuciju a, slijedi da je

$$L(x, B) \geq K_a(x, B)$$

za bilo koju distribuciju a pa slijedi tvrdnja. □

Za slijedeći rezultat, koji ćemo koristiti prilikom razvijanja teorije Harrisove povratnosti i Harrisovih lanaca, nam je potrebna definicija petite skupova.

Definicija 2.2.11. *Skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ nazivamo ν_a-petite skupom ako lanac X_a zadovoljava*

$$K_a(x, B) \geq \nu_a(B),$$

za svaki $x \in C$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, gdje je ν_a netrivijalna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$.

Iz definicije vidimo da je mali skup ujedno i petite skup ukoliko se za distribuciju a uzme δ_m za neki m. Stoga je svojstvo malog skupa općenito jače od svojstva petite skupa.

Sljedeći rezultat nam daje neka korisna svojstva petite skupova, po kojima se uvelike razlikuju od malih skupova.

Propozicija 2.2.12. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan.*

(i) Ako je A ν_a-petite, tada postoji uzoračka distribucija b takva da je A ψ_b-petite, gdje je ψ_b maksimalna mjera ireducibilnosti.

(ii) Unija dva petite skupa je petite skup.

(iii) Postoji uzoračka distribucija c, izmjeriva funkcija $s : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ koja je strogo pozitivna na cijelom $\mathbb{R}$ te maksimalna mjera ireducibilnosti ψ_c takvi da vrijedi

$$K_c(x, B) \geq s(x)\psi_c(B), \quad x \in \mathbb{S},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}),$$

tj., postoje rastući niz $\{C_i\}$ ψ_c-petite skupova, sa uzoračkom distribucijom c i minorizacijskom mjerom ekvivalentnom ψ za koje vrijedi $\cup C_i = \mathbb{S}$.

2.3 Prolaznost i povratnost

U ovom dijelu ćemo se dotaknuti pitanja stabilnosti i nestabilnosti lanaca, u obliku povratnosti i prolaznosti za ψ-ireducibilne Markovljeve lance. Za to nam je potrebna sljedeća definicija:

Definicija 2.3.1. *Skup A nazivamo uniformno prolaznim ako postoji $M < \infty$ takav da je $\mathbb{E}_x[\eta_A] \leq M$ za svaki $x \in A$. Skup A je povratan ako je $\mathbb{E}_x[\nu_A] = \infty$ za svaki $x \in A$. Nadalje, skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ nazivamo prolaznim ako ga se može prekriti s prebrojivo mnogo uniformno prolaznih skupova.*

Pretpostavimo sada da promatramo lance koji su jako aperiodični i nemaju atoma. U tom slučaju, možemo dati definicije povratnosti i prolaznosti lanca X.

Definicija 2.3.2. *(i) Lanac X je povratan ako je ψ-ireducibilan i $U(x, A) \equiv \infty$ za svaki $x \in \mathbb{S}$ i svaki $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$.*

(ii) Lanac X je prolazan ako je ψ-ireducibilan i $\mathbb{S}$ je prolazan.

Pokaže se da početni lanac X i podijeljeni lanac $\check{X}$ imaju vrlo slično ponašanje kad je u pitanju povratnost tj. prolaznost. Naime, ukoliko je X ψ-ireducibilan i jako aperiodičan, tada su X i $\check{X}$ oboje povratni ili prolazni. Isto tako, samo pretpostavka o ψ-ireducibilnosti lanca X je dovoljna da se pokaže da je X prolazan ako i samo ako je svaki K_{a_ε} prolazan, tj. povratan ako i samo ako je svaki K_{a_ε} povratan te konačno, da X koji je ψ-ireducibilan može biti ili povratan ili prolazan. Detalje dokaza ovdje nećemo iznositi, no mogu se naći u Meyn i Tweedie [4] (Teorem 8.2.6).

Teorem 2.3.3. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan i aperiodičan.*

(i) Lanac X je prolazan ako i samo ako je jedan, a onda i svaki, m-kostur X^m prolazan.

(ii) Lanac X je povratan ako i samo ako je jedan, a onda i svaki, m-kostur X^m povratan.

Dokaz. Za dokaz tvrdnje (i) primjetimo da ako je A uniformno prolazan skup za m-kostur X^m, sa $\sum_j P^{jm}(x, A) \geq M$, tada iz Chapman-Kolmogorovljevih jednakosti dobivamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} P^j(x, A) = \sum_{r=1}^{\infty} P^r(x, \mathrm{d}y) \sum_j P^{jm}(y, A) \leq mM. \tag{2.11}$$

To povlači da je A uniformno prolazan za X. Stoga je X prolazan kad god je neki od kostura prolazan. Obratno, ako je X prolazan, tada je svaki X^k prolazan jer vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} P^j(x, A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} P^{jk}(x, A).$$

Nadalje, za dokaz tvrdnje (ii), ako je m-kostur povratan, tada po (2.11) imamo

$$\sum P^j(x, a) = \infty, \quad x \in \mathbb{S}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$$

pa je X povratan. Obratno, pretpostavimo da je X povratan. Za svaki m, aperiodičnost i Propozicija 2.2.8 povlače da je X^m ψ-ireducibilan pa je stoga ili povratan ili prolazan. Kada bi bio prolazan, po (i) bi imali da je i X prolazan što bi bila kontradikcija s pretpostavkom. □

Sada ćemo dati uvjete na vremena pogađanja koja osiguravaju da je skup uniformno prolazan čime počinjemo vezati ponašanje slučajne varijable τ_A s ponašanjem slučajne varijable η_A.

Propozicija 2.3.4. *Pretpostavimo da je X Markovljev lanac koji nije nužno ireducibilan.*

(i) Ako je bilo koji $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ uniformno prolazan sa svojstvom $U(x, A) \leq M$ za neki $x \in A$, tada je $U(x, A) \leq 1 + M$ za svaki $x \in \mathbb{S}$.

(ii) Ako bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ zadovoljava $L(x, A) = 1$ za svaki $x \in A$, tada je A prolazan. Ako je X ψ-ireducibilan, tada je $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ i vrijedi $U(x, A) \equiv \infty$ za $x \in \mathbb{S}$.

(iii) Ako bilo koji skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ zadovoljava $L(x, A) \leq \varepsilon < 1$ za $x \in A$, tada je $U(x, A) \leq 1/[1 - \varepsilon]$ za $x \in \mathbb{S}$, tj. A je uniformno prolazan.

(iv) Neka je $\tau_A(k)$ k-to vrijeme povratka skupu A te pretpostavimo da za neki m vrijedi

$$\mathbb{P}_x(\tau_a(m) < \infty) \leq \varepsilon < 1, \quad x \in A. \tag{2.12}$$

Tada je $U(x, A) \leq 1 + m/[1 - \varepsilon]$ za svaki $x \in \mathbb{S}$.

Dokazati ćemo samo tvrdnju (iv), ostatak dokaza se može naći u Meyn i Tweedie [4] (Propozicija 8.3.1)

Dokaz. Kako bi pokazali tvrdnju (iv) pretpostavimo da (2.12) vrijedi. To znači da za neki fiksan $m \in \mathbb{Z}_+$ i za $\varepsilon < 1$ imamo

$$\mathbb{P}_x(\eta_A \geq m) \leq \varepsilon, \quad x \in A. \tag{2.13}$$

Indukcijom iz (2.13) dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\eta_A \geq m(k+1)) &= \int_A \mathbb{P}_x(X_{\tau_A(km)} \in \mathrm{d}y)\mathbb{P}_y(\eta_A \geq m)\\ &\leq \varepsilon \mathbb{P}_x(\tau_A(km) < \infty)\\ &\leq \varepsilon \mathbb{P}_x(\eta_a \geq km)\\ &\leq \varepsilon^{k+1},\end{aligned} \tag{2.14}$$

pa, za $x \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned} U(x, A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\eta_A \geq n) \\ &\leq m[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\eta_A \geq km)] \\ &\leq m/[1 - \varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sada primjenom Propozicije 2.3.4 (i) vidimo da tvrdnja vrijedi za svaki $x \in \mathbb{S}$. □

Teorem 2.3.5. *Ako je X ψ-ireducibilan i prolazan, tada je svaki petite skup uniformno prolazan.*

Odavde vidimo da su petite skupovi "mali" s obzirom na definiciju prolaznosti. To nam daje kriterij za povratnost koji ćemo koristiti u nastavku zajedno s kriterijem za prolaznost.

Teorem 2.3.6. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Tada*

(i) X je povratan ako postoji petite skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ takav da je $L(x, C) \equiv 1$ za svaki $x \in C$.

(ii) X je prolazan ako i samo ako postoje dva skupa $D, C \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ sa svojstvom $L(x, C) < 1$ za svaki $x \in D$.

Dokaz. (i) Po Propoziciji 2.3.4 (ii) vidimo da je C povratan. Obzirom da je C petite skup, po Teoremu 2.3.5 slijedi da je X povratan.

(ii) Pretpostavimo da skupovi C, D postoje u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$. Tada mora postojati $D_\varepsilon \subset D$ sa svojstvima $\psi(D_\varepsilon) > 0$ i $L(x, C) \leq 1-\varepsilon$ za svaki $x \in D_\varepsilon$. Ako je ujedno i $\psi(D_\varepsilon \cap C) > 0$, tada zbog $L(x, C) \geq L(D_\varepsilon \cap C)$, po Propoziciji 2.3.4 slijedi da je lanac prolazan. U suprotnom je $\psi(D_\varepsilon \cap C^c) > 0$. Maksimalna mjera ireducibilnosti ψ implicira da za realan broj $\delta > 0$ i neki prirodan broj $n \geq 1$ skup $C_\delta := \{y \in C :_C P^n(y, D_\varepsilon \cap C^c) > \delta\}$ isto ima pozitivnu ψ-mjeru. Zato je, za $x \in C_\delta$

$$1 - L(x, C_\delta) \geq \int_{D_\varepsilon \cap C^c} {}_C P^n(x, \mathrm{d}y)[1 - L(y, C_\delta)] \geq \delta\varepsilon$$

pa je skup C_δ uniformno prolazan, otkuda slijedi da je i lanac prolazan. Kako bi pokazali obrat, pretpostavimo da je X prolazan. Tada je, za neki petite skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, skup $D = \{y \in C^c : L(x, C) < 1\}$ neprazan jer bi, u suprotnom, lanac bio povratan. Pretpostavimo da je $\psi(D) = 0$. Tada po Propoziciji 2.2.3 postoji puni apsorbirajući skup $F \subset D^c$. Po definiciji, $L(x, C) = 1$ za $x \in F \setminus C$ i, obzirom da je F apsorbirajući, slijedi da je $L(x, C) = 1$ za svaki $X \in F$ pa je zato $L(x, C_0) = 1$ za $x \in F$, gdje je $C_O = C \cap F$, $C_0 \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$. Sada, po Propziciji 2.3.4 (ii) vidimo da je C_0 povratan što je kontradikcija s Teoremom 2.3.5 pa zaključujemo da je $D \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ što se i tražilo.

□

Propozicija 2.3.7. *Ako je X ψ-ireducibilan, tada je svaki skup ψ-mjere nula prolazan.*

Definicija 2.3.8. *Drift operator za bilo koju nenegativnu izmjerivu funkciju V definira se relacijom*

$$\Delta V(x) := \int P(x, \mathrm{d}y)V(y) - V(x), \quad x \in \mathbb{S}$$

Definirajmo još i nivo skup $C_V(r) := \{x : V(x) \leq r\}$

Teorem 2.3.9. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan lanac. Tada je X prolazan ako i samo ako postoji ograničena funkcija $V : \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$ i $r \geq 0$ takvi da*

(i) $C_V(r)$ i $C_V(r)^c$ oba leže u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$,

(ii) Ako je $x \in C_V(r)^c$, tada vrijedi

$$\Delta V(x) > 0.$$

Po Teoremu 2.3.9 vidimo da je X prolazan ako ima svojstvo drifta *"od"* nekog skupa u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$. No, možemo promatrati što se događa ako X ima svojstvo drifta *"prema"* nekom skupu u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$.

Definicija 2.3.10. *Drift svojstvo za povratnost*

(V1) *Postoji pozitivna funkcija V i skup $C \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ koji zadovoljavaju*

$$\Delta V(x) \leq 0, \quad x \in C^c. \tag{2.16}$$

Kako bi za X provjerili zadovoljava li uvjete takvog drifta, promatrati ćemo funkcije $V : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ za koje su skupovi $C_V(M) = \{y \in \mathbb{S} : V(y) \leq M\}$ "konačni" za svaki M.

Definicija 2.3.11. *Funkciju $V : \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$ nazivamo neograničenom van petite skupova za X ako je, za bilo koji $n < \infty$, nivo skup*

$$C_V(n) = \{y : V(y) \leq n\}$$

petite skup.

Budući da je, za ireducibilan lanac, konačna unija petite skupova petite skup, i obzirom da je bilo koji podskup petite skupa petite skup, tada će funkcija $V : \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$ biti neograničena van petite skupova za X ako postoji niz $\{C_j\}$ petite skupova takvih da za bilo koji $n < \infty$ vrijedi

$$C_V(n) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} C_j$$

za neki prirodan broj $N < \infty$.

Teorem 2.3.12. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Ako postoje petite skup $C \subset \mathbb{S}$ i funkcija V koja je neograničena van petite skupova takvi da vrijedi (V1), tada je $L(x, C) \equiv 1$ i X je povratan.*

Dokaz. Pokazati ćemo da je $L(x, C) \equiv 1$ što će nam, po Teoremu 2.3.6, dati povratnost lanca X. Pretpostavimo suprotno, tj. da je lanac prolazan. To znači da postoji $x^* \in C^c$ za koji vrijedi $L(x^*, C) < 1$. Neka je $C_V(n) = \{y \in \mathbb{S} : V(y) \leq n\}$. Po definiciji od V znamo da je skup $C_V(n)$ petite skup, a po Teoremu 2.3.5 slijedi i da je uniformno prolazan za bilo koji n. Fiksirajmo sada prirodan broj M dovoljno velik tako da vrijedi

$$M > V(x^*)/[1 - L(x^*, C)].$$

Modificirajmo P kako bi definirali jezgru $\hat{P}$ za koju je $\hat{P}(x, A) = P(x, A)$ za $x \in C^c$ i $\hat{P}(x, x) = 1$ za $x \in C$. To definira lanac $\hat{X}$ sa skupom C koji je apsorbirajući i sa svojstvom da za svaki $x \in \mathbb{S}$ vrijedi

$$\int \hat{P}(x, \mathrm{d}y)V(y) \leq V(x). \tag{2.17}$$

Budući da je P nepromijenjena izvan skupa C, a lanac X je apsorbiran u C, dobivamo

$$\hat{P}^n(x, C) = \mathbb{P}_x(\tau_C \leq n) \uparrow L(x, C), \quad x \in C^c, \tag{2.18}$$

dok za $A \subseteq C^c$ vrijedi

$$\hat{P}^n(x, A) \leq P^n(x, A), \quad x \in C^c. \tag{2.19}$$

Iterirajući (2.17) dobivamo, za fiksni $x \in C^c$

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \int \hat{P}^n(x, \mathrm{d}y)V(y) \\ &\geq \int_{C^c \cap [C_V(M)]^c} \hat{P}^n(x, \mathrm{d}y)V(y) \\ &\geq M[1 - \hat{P}^n(x, C_V(M) \cup C)]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Budući da je $C_V(M)$ uniformno prolazan, po (2.19) imamo

$$\hat{P}^n(x^*, C_V(M) \cap C^c) \leq P^n(x^*, C_V(M) \cap C^c) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Kombinirajući to s (2.18) dobivamo

$$[1 - \hat{P}^n(x^*, C_V(M) \cup C)] \to [1 - L(x^*, C)], \quad n \to \infty.$$

Puštajući $n \to \infty$ u (2.20) za $x = x^*$ dobivamo kontradikciju s (2.20) i našim izborom M-a. Sada vidimo da mora vrijediti $L(x, C) \equiv 1$ i da je X povratan. □

2.4 Egzistencija invarijantne mjere

Kako bi nastavili detaljnije proučavati stabilnost Markovljevih lanaca na općenitim skupovima stanja, fokusirati ćemo se samo na povratne lance i gledati ćemo pod kojim uvjetima se distribucija takvih lanaca ne mijenja za različite izbore broja n. Tada će, po Markovljevom svojstvu, konačnodimenzionalne distribucije lanca X biti invarijante obzirom na vrijeme. Takvim razmišljanjem dolazimo do definicije invarijantne mjere.

Definicija 2.4.1. *σ-konačna mjera π na $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ sa svojstvom*

$$\pi(A) = \int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}x) P(x, A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}) \tag{2.21}$$

se naziva invarijantnom mjerom.

Teorem 2.4.2. *Ako je lanac X povratan, tada za njega postoji (do na multiplikativnu konstantu) invarijantna mjera π sa svojstvom da za bilo koji $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ vrijedi*

$$\pi(B) = \int_A \pi(\mathrm{d}\omega) \mathbb{E}_\omega \left[\sum_{n=1}^{\tau_A} \mathbb{1}_{(X_n \in B)} \right], \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}). \tag{2.22}$$

Invarijantna mjera π je konačna (ne samo σ-konačna) ako postoji petite skup C takav da vrijedi

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\tau_C] < \infty.$$

Teorem navodimo bez dokaza, no može se naći u Meyn i Tweedie [4] (Teorem 10.0.1).

Ako je invarijantna mjera konačna, tada se može normalizirati na vjerojatnosnu mjeru. No, ako invarijantna mjera ima beskonačnu ukupnu masu, tada je njena vjerojatnosna interpretacija puno teža. No, primijetimo da za povratne lance barem postoji interpretacija kao u (2.22). Ovi rezultati nas navode na sljedeću podjelu lanaca.

Definicija 2.4.3. *Ako ψ-ireducibilan lanac X ima invarijantnu vjerojatnosnu mjeru π, tada je on pozitivan lanac. Ukoliko X nema takvu mjeru, on je nul-lanac.*

Procesi sa svojstvom da se za bilo koji k marginalne distribucije od $\{X_n, \ldots, X_{n+k}\}$ ne mijenjaju obzirom na izbor broja n zovu se *stacionarni procesi*. Primijetimo da Markovljev lanac općenito neće biti stacionaran jer za neku realizaciju možemo imati $X_0 = x$ sa vjerojatnošću jedan za neko fiksno stanje x. No, možemo odabrati početnu distribuciju za X_0 tako da dobijemo stacionaran proces $(X_n : n \in \mathbb{Z}_+)$.
Odavde odmah vidimo da trebamo promatrati samo *stacionarnost prvog koraka* kako bi generirali cijeli stacionaran proces. Ako nam je dana invarijantna vjerojatnosna mjera π takva da vrijedi

$$\pi(A) = \int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}\omega)P(\omega, A),$$

možemo to iterirati kako bi dobili

$$\begin{aligned}
\pi(A) &= \int_{\mathbb{S}} \left[\int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}x)P(x, \mathrm{d}\omega) \right] P(\omega, A) \\
&= \int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{S}} P(x, \mathrm{d}\omega)P(\omega, A) \\
&= \int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}x)P^2(x, A) \\
&\vdots \\
&= \int_{\mathbb{S}} \pi(\mathrm{d}x)P^n(x, A) = \mathbb{P}_\pi(X_n in A), \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

za bilo koji prirodan broj n i za svaki skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$.

Iz Markovljevog svojstva je jasno da je X stacionaran ako i samo ako se distribucija od X_n ne mijenja kroz vrijeme. Odatle odmah slijedi

Propozicija 2.4.4. *Ako je lanac X pozitivan, tada je i povratan.*

Najlakši način pokazivanja egzistencije π je preko još šire klase mjera.

Definicija 2.4.5. *Ako je μ σ-konačna i zadovoljava*

$$\mu(A) \geq \int_{\mathbb{S}} \mu(\mathrm{d}x)P(x, A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}) \qquad (2.24)$$

tada μ nazivamo subinvarijantnom mjerom.

Propozicija 2.4.6. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan. Ako je μ bilo koja mjera koja zadovoljava* (2.24) *sa svojstvom $\mu(A) < \infty$ za neki $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$, tada*

(i) μ je σ-konačna te je zato μ subinvarijantna mjera,

(ii) $\mu \succ \psi$,

(iii) ako je C petite skup, tada je $\mu(C) < \infty$,

(iv) ako je $\mu(\mathbb{S}) < \infty$, tada je μ invarijantna.

Koristeći ova svojstva subinvarijantnih mjera može se pokazati da povratan i jako aperiodičan lanac X ima jedinstvenu (do na multiplikativnu konstantu) subinvarijantnu mjeru koja je invarijantna. Isti rezultat se može pokazati i ako je X samo povratan. Nadalje, za ψ-ireducibilan i aperiodičan lanac X se pokaže da je za svaki prirodan broj m π invarijantna za m-kostur ako i samo ako je invarijantna za X, tj. lanac je pozitivan ako i samo ako su svi m-kosturi, X^m, pozitivni. Dokaze tih tvrdnji nećemo dati, no mogu se naći u Meyn i Tweedie [4] (Poglavlje 10).

2.5 Uniformna i geometrijska ergodičnost

Sada, kada smo dobili uvjete pod kojima naš lanac ima invarijantnu vjerojatnosnu mjeru, možemo promatrati i druga svojstva našeg lanca. Primijetimo da važnost takve mjere nije samo u tome što definira stacionarni proces. Pokaže se da takve mjere definiraju i dugoročno, tj. ergodsko ponašanje našeg lanca. Kako bi vidjeli zašto bi to bilo tako, razmotrimo $\mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot)$ za bilo koju početnu distribuciju μ. Ako granična mjera γ_μ postoji u odgovarajućoj topologiji na prostoru vjerojatnosnih mjera, takva da vrijedi

$$\mathbb{P}_\mu(X_n \in A) \to \gamma_\mu(A)$$

za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, tada je

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(A) &= \lim_{n\to\infty} \int \mu(\mathrm{d}x)P^n(x,A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}} \mu(\mathrm{d}x) \int P^{n-1}(x,\mathrm{d}\omega)P(\omega,A)\\ &= \int_{\mathbb{S}} \gamma_\mu(\mathrm{d}\omega)P(\omega,A),\end{aligned}$$

jer skupovna konvergencija $\int \mu(\mathrm{d}x)P^n(x,\cdot)$ implicira konvergenciju integrala ograničenih funkcija kao što je $P(\omega,A)$. Stoga, ako granična distribucija postoji, ona je invarijantna vjerojatnosna mjera i primijetimo, ako postoji jedinstvena invarijantna vjerojatnosna mjera, tada će γ_μ, kad god postoji, biti nezavisna od μ.

U prethodnom odjeljku smo ustanovili da će naš lanac imati jedinstvenu (do na multiplikativnu konstantu) invarijantnu vjerojatnosnu mjeru π ukoliko je povratan te da se ta mjera može normirati tako da bude vjerojatnosna. Stoga, od sada nadalje, ćemo pretpostavljati da je X ψ-ireducibilan povratan lanac te da je π njegova invarijantna vjerojatnosna mjera obzirom na koju je on stacionaran proces. Isto tako, od sada nadalje, π ćemo zvati stacionarnom distribucijom našeg lanca.

Definicija 2.5.1. *Totalna varijacija dviju vjerojatnosnih mjera $\nu_1(\cdot)$ i $\nu_2(\cdot)$ je:*

$$\|\nu_1(\cdot) - \nu_2(\cdot)\| \;=\; \sup_A |\nu_1(A) - \nu_2(A)|$$

Sada ima smisla pitati se je li $\lim_{n\to\infty} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| = 0$? Ili, za dani realan broj $\varepsilon > 0$, koliko velik mora n biti da bi vrijedilo $\lim_{n\to\infty} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| < \varepsilon$? No, prije odgovora na takva pitanja, pokažimo neka svojstva totalne varijacije mjera.

Propozicija 2.5.2. *Neka je $\mathbb{S}$ neki općeniti skup stanja. Tada vrijedi:*

(a) $\|\nu_1(\cdot) - \nu_2(\cdot)\| \;=\; \sup_{f:\mathbb{S}\to[0,1]} \left| \int f \mathrm{d}\nu_1 - \int f \mathrm{d}\nu_2 \right|$.

(b) $\|\nu_1(\cdot) - \nu_2(\cdot)\| \;=\; \frac{1}{b-a} \sup_{f:\mathbb{S}\to[a,b]} \left| \int f \mathrm{d}\nu_1 - \int f \mathrm{d}\nu_2 \right|$ *za bilo koje $a < b$, i posebno,* $\|\nu_1(\cdot) - \nu_2(\cdot)\| \;=\; \frac{1}{2} \sup_{f:\mathbb{S}\to[-1,1]} \left| \int f \mathrm{d}\nu_1 - \int f \mathrm{d}\nu_2 \right|$.

(c) Ako je $\pi(\cdot)$ stacionarna za Markovljevu jezgru P, tada je $\| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|$ monotono opadajući niz po n, tj. $\| P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot) \| \;\le\; \| P^{n-1}(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|$ za $n \in \mathbb{N}$.

(d) Općenitije, uz $(\nu_i P)(A) = \int \nu_i(dx)P(x,A)$, uvijek vrijedi $\| (\nu_1 P)(\cdot) - (\nu_2 P)(\cdot) \| \;\le\; \|\nu_1(\cdot) - \nu_2(\cdot)\|$.

(e) Neka je $t(n) = 2\sup_{x\in\mathbb{S}} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|$, gdje je $\pi(\cdot)$ stacionarna. Tada je t submultiplikativan niz, tj $t(m+n) \le t(m)t(n)$ za $m,n \in \mathbb{N}$.

(f) Ako $\mu(\cdot)$ i $\nu(\cdot)$ imaju gustoće g i h obzirom na neku σ-konačnu mjeru $\rho(\cdot)$, $M = \max(g,h)$ i $m = \min(g,h)$ tada je

$$\| \mu(\cdot) - \nu(\cdot) \| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} (M - m)\mathrm{d}\rho = 1 - \int_{\mathbb{S}} m\mathrm{d}\rho.$$

(g) Za dane vjerojatnosne mjere $\mu(\cdot)$ i $\nu(\cdot)$ postoje zajednički definirane slučajne varijable $\mathbb{S}$ i Y takve da je $\mathbb{S} \sim \mu(\cdot)$, $Y \sim \nu(\cdot)$ i $\mathbb{P}(X = Y) = 1 - \|\mu(\cdot) - \nu(\cdot)\|$.

Dokaz. Za dokaz tvrdnje (a) neka je $\rho(\cdot)$ bilo koja σ-konačna mjera takva da je $\nu_1 \ll \rho$ i $\nu_2 \ll \rho$ (npr. $\rho = \nu_1 + \nu_2$, i neka je $g = d\nu_1/d\rho$, $h = d\nu_2/d\rho$. Tada je $\left| \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2 \right| = \left| \int f(g-h) d\rho \right|$. Ta vrijednost je maksimalna (na cijelom $0 \leq f \leq 1$) kad je $f = 1$ na $\{g > h\}$ i $f = 0$ na $\{g < h\}$ (ili obratno), i u tom slučaju je jednaka $|\,\nu_1(A) - \nu_2(A)\,|$ za $A = \{g > h\}$ (ili $\{g < h\}$). Tvrdnja (b) se dokazuje slično kao i tvrdnja (a), uz razliku da je $f = b$ na $\{g > h\}$ i $f = a$ na $\{g < h\}$ (i obratno) iz čega slijedi $\left| \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2 \right| = (b-a)\,|\nu_1(A) - \nu_2(A)|$. Za dokaz tvrdnje (c) računamo:

$$\begin{aligned}
\left|P^{n+1}(x,A) - \pi(A)\right| &= \left| \int_{y\in\mathbb{S}} P^n(x,dy)P(y,A) - \int_{y\in\mathbb{S}} \pi(dy)P(y,A) \right| \\
&= \left| \int_{y\in\mathbb{S}} P^n(x,dy)f(y) - \int_{y\in\mathbb{S}} \pi(dy)f(y) \right| \\
&\leq \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|,
\end{aligned}$$

gdje je $f(y) = P(y,A)$ i nejednakost dolazi iz (a) dijela. Tvrdnja (d) pokazuje se vrlo slično kao i tvrdnja (c). Tvrdnja (e) slijedi iz činjenice da je $t(n)$ L^∞ operatorska norma od P^n (vidjeti Meyn i Tweedie [4], Lema 16.1.1). Konkretnije, neka su $\hat{P}(x,\cdot) = P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)$ i $\hat{Q}(x,\cdot) = P^m(x,\cdot) - \pi(\cdot)$ takve da je

$$\begin{aligned}
(\hat{P}\hat{Q}f)(x) &\equiv \int_{y\in\mathbb{S}} f(y) \int_{z\in\mathbb{S}} [P^n(x,dz) - \pi(dz)][P^m(z,dy) - \pi(dy)] \\
&= \int_{y\in\mathbb{S}} f(y)[P^{n+m}(x,dy) - \pi(dy) - \pi(dy) + \pi(dy)] \\
&= \int_{y\in\mathbb{S}} f(y)[P^{n+m}(x,dy) - \pi(dy)].
\end{aligned}$$

Nadalje, neka je $f : \mathbb{S} \to [0,1]$, neka je $g(x) = (\hat{Q}f)(x) \equiv \int_{y\in\mathbb{S}} \hat{Q}(x,dy)f(y)$ te neka je $g^* = \sup_{x\in\mathbb{S}} |g(x)|$. Tada je $g^* \leq \frac{1}{2}t(m)$ po dijelu (a). Sada, ako je $g^* = 0$, onda je očito i $\hat{P}\hat{Q}f = 0$. U suprotnom, računamo

$$2\sup_{x\in\mathbb{S}} |(\hat{P}\hat{Q}f)(x)| = 2g^* \sup_{x\in\mathbb{S}} |(\hat{P}[g/g^*])(x)| \leq t(m) \sup_{x\in\mathbb{S}} |(\hat{P}[g/g^*])(x)|.$$

Budući da je $-1 \leq g/g^* \leq 1$, imamo da je $(\hat{P}[g/g^*])(x) \leq t(n)$. Tvrdnja sada slijedi iz (a) dijela i gornje nejednakosti. Kod dokaza tvrdnje (f) prvi dio jednakosti slijedi koristeći (b) dio jer za $a = -1$ i $b = 1$ imamo

$$\|\mu(\cdot) - \nu(\cdot)\| = \frac{1}{2}\left(\int_{g>h} (g-h)d\rho + \int_{g<h} (h-g)d\rho \right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}} (M-m)d\rho.$$

Drugi dio jednakosti tada slijedi jer $M + m = g + h$ pa je $\int_{\mathbb{S}}(M + m)\mathrm{d}\rho = 2$ pa imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}}(M - m)\mathrm{d}\rho = 1 - \frac{1}{2}\left(2 - \int_{\mathbb{S}}(M - m)\mathrm{d}\rho\right) \\ = 1 - \frac{1}{2}\int_{chi}((M + m) - (M - m))\mathrm{d}\rho = 1 - \int_{\mathbb{S}} m\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

Na kraju, za dokaz tvrdnje (g) neka je $a = \int_{\mathbb{S}} m\mathrm{d}\rho$, $b = \int_{\mathbb{S}}(g - m)\mathrm{d}\rho$ te $c = \int_{\mathbb{S}}(h - m)\mathrm{d}\rho$. Tvrdnja je trivijalna ukoliko je bilo koji od brojeva a, b, c jednak 0 pa pretpostavimo da su svi pozitivni. Sad konstruiramo zajednički definirane slučajne varijable Z, U, V, I tako da Z ima gustoću m/a, U ima gustoću $(g - m)/b$, V ima gustoću $(h - m)/b$ i I je nezavisna od Z, U, V sa $\mathbb{P}(I = 1) = a$ i $\mathbb{P}(I = 0) = 1 - a$. Neka je sada $X = Y = Z$ za $I = 1$ i $X = U$, $Y = V$ za $I = 0$. Nadalje, U i V imaju disjunktne nosače pa je $\mathbb{P}(U = V) = 0$. Tada tvrdnja slijedi koristeći (f) dio jer

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(I = 1) = a = 1 - \|\mu(\cdot) - \nu(\cdot)\|.$$

□

Teorem 2.5.3. *Ako je Markovljev lanac, na skupu stanja s prebrojivo generiranom σ-algebrom, ψ-ireducibilan i aperiodičan te ima stacionarnu distribuciju $\pi(\cdot)$, tada π-g.s. za $x \in \mathbb{S}$ vrijedi,*

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| = 0. \tag{2.25}$$

Specijalno, $\lim_{n\to\infty} P^n(x, A) = \pi(A)$ *za svaki izmjerivi* $A \subseteq \mathbb{S}$.

Dokaz. Dokaz se može naći u Meyn i Tweedie [4] (Teoremi 5.2.1 i 5.2.2). Glavna ideja je razlučiti dio $P^{n_0}(x, \cdot)$ koji je apsolutno neprekidan obzirom na mjeru ψ i onda naći C sa svojstvom $\psi(C) > 0$ takav da je taj dio gustoće barem $\delta > 0$ kroz cijeli C.

□

Ako se prisjetimo definicije granične distribucije na diskretnim skupovima stanja, primijetiti ćemo da nam ovaj teorem daje sličnu tvrdnju za općenite skupove stanja. No,uočimo da konvergencija u gornjem teoremu vrijedi za π-g.s. $x \in \mathbb{S}$. Problem je što lanci mogu imati neobično ponašanje na skupovima π-mjere nula i na njima ne konvergirati.

Razumno je pitati se pod kojim uvjetima će tvrdnja (2.25) vrijediti za sve $x \in \mathbb{S}$, ne samo za π-g.s. $x \in \mathbb{S}$. Primijetimo, tvrdnja će vrijediti ukoliko su prijelazne jezgre $P(x, \cdot)$ apsolutno neprekidne obzirom na $\pi(\cdot)$ (npr. $P(x, \mathrm{d}y) = p(x, y)\pi(\mathrm{d}y)$ za neku funkciju $p : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to [0, \infty\rangle$).

Korolar 2.5.4. *Ako je Markovljev lanac ψ-ireducibilan s periodom $d \geq 2$ te ima stacionarnu distribuciju $\pi(\cdot)$ tada za π-g.s. $x \in \mathbb{S}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{d} \sum_{i=n}^{n+d-1} P^i(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\| = 0.$$

Dokaz. Neka je $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, ..., \mathbb{S}_d \subseteq \mathbb{S}$ dekompozicija skupa stanja našeg lanca te neka je P' d koračan lanac P^d restringiran na skup stanja $\mathbb{S}_1$. Tada je P' ψ-ireducibilan i aperiodičan na $\mathbb{S}_1$ sa stacionarnom distribucijom $\pi'(\cdot)$ koja zadovoljava $\pi(\cdot) = (1/d)\sum_{j=0}^{d-1}(\pi' P^j)(\cdot)$. Po (c) dijelu Propozicije 2.5.2, dovoljno je dokazati tvrdnju korolara za $n = md$ uz $m \to \infty$. Zbog jednostavnosti pretpostavljamo bez smanjenja općenitosti da je $x \in \mathbb{S}_1$. Po (d) dijelu Propozicije 2.5.2 imamo $\|P^{md+j}(x,\cdot) - (\pi' P^j)(\cdot)\| \leq \|P^{md}(x,\cdot) - \pi'(\cdot)\|$ za $j \in \mathbb{N}$. Tada je, po nejednakosti trokuta,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{d} \sum_{i=md}^{mn+d-1} P^i(x,\cdot)\pi(\cdot) \right\| &= \left\| \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} P^{md+j}(x,\cdot) - \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} (\pi' P^j)(\cdot) \right\| \\
&\leq \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \|P^{md+j}(x,\cdot) - (\pi' P^j)(\cdot)\| \\
&\leq \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} \|P^{md}(x,\cdot) - \pi'(\cdot)\|
\end{aligned}$$

Primjenom prethodnog teorema na P' dobivamo $\lim_{m\to\infty} \|P^{md}(x,\cdot) - \pi'(\cdot)\| = 0$ za π'-g.s. $x \in \mathbb{S}$ što povlači prvi dio tvrdnje korolara. □

U Teoremu 2.5.3 smo vidjeli što nam je potrebno da bi naš lanac asimptotski konvergirao stacionarnosti, no on nam ništa ne govori o brzini te konvergencije. Jedna od "kvalitativnih" mjera je uniformna ergodičnost:

Definicija 2.5.5. *Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom $\pi(\cdot)$ je uniformno ergodičan ako postoje realan broj $\rho < 1$ i prirodan broj $M < \infty$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{S}$ vrijedi:*

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi\| \leq M\rho^n, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Ekvivalentan iskaz uniformne ergodičnosti je dan sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.5.6. *Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom $\pi(\cdot)$ je uniformno ergodičan ako i samo ako je* $\sup_{x\in\mathbb{S}} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| < 1/2$ *za neki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Ako je lanac uniformno ergodičan, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{S}} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq \lim_{n\to\infty} M\rho^n,$$

pa $\sup_{x\in\mathbb{S}} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| < 1/2$ za sve dovoljno velike n.
Obratno, ako je $\sup_{x\in\mathbb{S}} \|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| < 1/2$ za neko $n \in \mathbb{N}$, onda, u Propoziciji 2.5.2 (e), imamo da je $d(n) \equiv \beta < 1$ tako da za svaki $j \in \mathbb{N}$, $d(jn) \leq (d(n))^j = \beta^j$. Stoga, po Propoziciji 2.5.2 (c),

$$\begin{aligned}\|P^m(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| &\leq \|P^{\lfloor m/n\rfloor n}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq \frac{1}{2} d(\lfloor m/n\rfloor n)\\ &\leq \beta^{\lfloor m/n\rfloor} \leq \beta^{-1}(\beta^{1/n})^m,\end{aligned}$$

tj. lanac je uniformno ergodičan za $M = \beta^{-1}$ i $\rho^{1/n}$.

□

Sljedeći rezultat je glavni rezultat koji nam jamči uniformnu ergodičnost, a potječe od Doeblina [1], Dooba [2] i, u nekom smislu, od Markova [3].

Teorem 2.5.7. *Promotrimo Markovljev lanac sa invarijantnom vjerojatnosnom distribucijom* $\pi(\cdot)$. *Pretpostavimo da minorizacijski uvjet* (2.8) *vrijedi za neki prirodan broj* n_0 *i realan broj* $\varepsilon > 0$ *te vjerojatnosnu mjeru* $\nu(\cdot)$, *u specijalnom slučaju kad je* $C = \mathbb{S}$ *(tj. cijeli prostor stanja je mali skup). Tada je lanac uniformno ergodičan i, ustvari,* $\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq (1-\varepsilon)^{\lfloor n/n_0\rfloor}$ *za sve* $x \in \mathbb{S}$, *gdje je* $\lfloor r\rfloor$ *najveće cijelo od* r.

Kako bi dokazali Teorem, prvo nam treba tzv. *nejednakost sparivanja*: Ideja je sljedeća. Pretpostavimo da imamo dvije slučajne varijable X i Y zajednički definirane na nekom prostoru $\mathbb{S}$. Ako su $\mathcal{L}(X)$ i $\mathcal{L}(Y)$ njihove vjerojatnosne distribucije, tada slijedi

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| &= \sup_A \big|\mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(Y\in A)\big|\\ &= \sup_A \big|\mathbb{P}(X\in A\,,\, X = Y) + \mathbb{P}(X\in A, X\neq Y)\\ &\quad - \mathbb{P}(Y\in A\,,\, Y = X) - \mathbb{P}(Y\in A, Y\neq X)\big|\\ &= \sup_A \big|\mathbb{P}(X\in A\,,\, X\neq Y) - \mathbb{P}(Y\in A, Y\neq X)\big|\\ &\leq \mathbb{P}(X\neq Y),\end{aligned}$$

to jest, vrijedi

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \leq \mathbb{P}(X\neq Y). \tag{2.26}$$

Tj., totalna varijacija između vjerojatnosnih distribucija dviju slučajnih varijabli je ograničena njihovom vjerojatnošću da su različite.

Dokažimo sada Teorem 2.5.7:

Dokaz. U ovom slučaju, $C = \mathbb{S}$ pa za svakih n_0 iteracija imamo vjerojatnosti od barem ε da su X_n i X'_n jednaki. Tada je, za $n = n_0 m$, $\mathbb{P}(\mathbb{S}_n \neq \mathbb{S}'_n) \leq (1-\varepsilon)^m$. Stoga je, po (2.26), $\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq (1-\varepsilon)^m = (1-\varepsilon)^{n/n_0}$. Tada, po Propoziciji 2.5.2 (c) vrijedi $\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq (1-\varepsilon)^{\lfloor n/n_0 \rfloor}$ za bilo koji n.

□

Ako Markovljev lanac *nije* uniformno ergodičan, tada ne možemo primijeniti Teorem 2.5.7. No i dalje nam je vrlo važno, za danu prijelaznu jezgru P Markovljevog lanca i početno stanje x, naći n_* takav da je, za realan broj $\varepsilon > 0$, $\|P^{n_*}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq \varepsilon$. Stoga definiramo slabiji uvjet od uniformne ergodičnosti, geometrijsku ergodičnost.

Definicija 2.5.8. *Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom $\pi(\cdot)$ je geometrijski ergodičan ako za neki $\rho < 1$ vrijedi:*

$$\|P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\| \leq M(x)\rho^n, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

gdje je $M(x) < \infty$ za π-g.s. $x \in \mathbb{S}$.

Primijetimo da je razlika između uniformne i geometrijske ergodičnosti u tome što sada konstanta M može ovisiti o početnom stanju x.

Definicija 2.5.9. *Neka su nam dane prijelazne vjerojatnosti P Markovljevog lanaca na skupu stanja $\mathbb{S}$ i izmjeriva funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Tada definiramo funkciju $Pf : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ takvu da je $(Pf)(x)$ uvjetno očekivanje od $f(\mathbb{S}_{n+1})$ uz uvjet da je $\mathbb{S}_n = x$, tj.*

$$(Pf)(x) = \int_{y \in \mathbb{S}} f(y) P(x, \mathrm{d}y).$$

Definicija 2.5.10. *Markovljev lanac zadovoljava uvjet drifta (ili uvjet univarijantnog geometrijskog drifta) ako postoje konstante $0 < \lambda < 1$ i $b < \infty$ te funkcija $V : \mathbb{S} \to [1, \infty]$ takve da vrijedi*

$$PV \leq \lambda V + b\mathbb{1}_C, \tag{2.27}$$

tj. takve da je $\int_{\mathbb{S}} P(x, \mathrm{d}y)V(y) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_C(x)$ za sve $x \in \mathbb{S}$.

Teorem 2.5.11. *Neka nam je dan ψ-ireducibilan Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom $\pi(\cdot)$. Pretpostavimo i da vrijedi minorizacijski uvjet* (2.8) *za neki skup $C \subseteq \mathbb{S}$ i realan broj $\varepsilon > 0$ te vjerojatnosnu mjeru $\nu(\cdot)$. Nadalje, pretpostavimo da je uvjet drifta* (2.27) *zadovoljen za neke konstante $0 < \lambda < 1$ i $b < \infty$ te funkciju $V : \mathbb{S} \to [1, \infty]$ takvu da je $V(x) < \infty$ za barem jedan (pa tako i za π-g.s.) $x \in \mathbb{S}$. Tada je lanac geometrijski ergodičan.*

Prije samog dokaza moramo navesti par rezultata koje nećemo dokazivati, no svi dokazi se mogu naći u Meyn i Tweedie [**?**].

Činjenica 2. Po Teoremima 15.0.1, 16.0.1 i 14.3.7 iz Meyn i Tweedie [4] te po Propoziciji 1 iz [6] slijedi da su minorizacijski uvjet (2.8) i uvjet drifta (2.27) Teorema 2.5.11 ekvivalentni (uz pretpostavljene ψ-ireducibilnost i aperiodičnost) očigledno jačem svojstvu *"V-uniformne ergodičnosti"*, tj. da postoje $C < \infty$ i $\rho < 1$ takvi da

$$\sup_{|f| \leq V} \left| P^n f(x) - \pi(f) \right| \leq C V(x) \rho^n, \qquad x \in \mathbb{S},$$

gdje je $\pi(f) = \int_{x \in \mathbb{S}} f(x) \pi(\mathrm{d}x)$. To znači da možemo uzeti $\sup_{|f| \leq V}$ umjesto $\sup_{0 < f < 1}$ te staviti da je $M(x) = CV(x)$ kao ogradu za geometrijsku ergodičnost. Nadalje, uvijek vrijedi $\pi(V) < \infty$.

Naš dokaz zahtijeva i *uvjet bivarijantnog drifta*:

$$\bar{P}h(x, y) \leq h(x, y)/\alpha, \qquad (x, y) \in C \times C \tag{2.28}$$

za neku funkciju $h : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to [1, \infty\rangle$ i neki realan broj $\alpha > 1$, gdje je

$$\bar{P}h(x, y) = \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} h(z, w) P(x, \mathrm{d}z) P(y, \mathrm{d}w).$$

Propozicija 2.5.12. *Neka je uvjet univarijantnog drifta* (2.27) *zadovoljen za neke $V : \mathbb{S} \to [1, \infty]$, $C \subseteq \mathbb{S}$, $\lambda < 1$ i $b < \infty$. Neka je $d = \inf_{x\ in C^c} V(x)$. Tada, ako je $d > [b/(1 - \lambda)] - 1$, tada uvjet bivarijantnog drifta* (2.28) *vrijedi za isti C, sa $h(x, y) = \frac{1}{2}[V(x) + V(y)]$ i $\alpha^{-1} = \lambda + b/(d + 1) < 1$.*

Neka je sada,

$$B_{n_0} = \max\left[1,\ \alpha^{n_0}(1 - \varepsilon) \sup_{C \times C} \bar{R}h\right], \tag{2.29}$$

gdje je za $(x, y) \in C \times C$,

$$\bar{R}h(x,y) = \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} (1-\varepsilon)^{-2} h(z,w)(P^{n_0}(x,\mathrm{d}z) - \varepsilon\nu(\mathrm{d}z))(P^{n_0}(y,\mathrm{d}w) - \varepsilon\nu(\mathrm{d}w)).$$

Teorem 2.5.13. *Neka nam je dan Markovljev lanac na skupu stanja $\mathbb{S}$ sa prijelaznom jezgrom P. Pretpostavimo da postoje $C \subseteq \mathbb{S}$, $h : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to [1, \infty\rangle$, vjerojatnosna distribucija $\nu(\cdot)$ na $\mathbb{S}$, $\alpha > 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijede* (2.8) *i* (2.28)*. Definirajmo B_{n_0} kao u* (2.29)*. Tada, za bilo koju zajedničku početnu distribuciju $\mathcal{L}(\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_0^{'})$ i bilo koje prirodne brojeve $1 \le j \le k$, ako su $\{\mathbb{S}_n\}$ i $\{\mathbb{S}_n^{'}\}$ dvije kopije Markovljevog lanca pokrenutog iz zajedničke početne distribucije $\mathcal{L}(\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_0^{'})$, tada je*

$$\|\mathcal{L}(\mathbb{S}_k) - \mathcal{L}(\mathbb{S}_k^{'})\|_{TV} \le (1-\varepsilon)^j + \alpha^{-k}(B_{n_0})^{j-1}\mathbb{E}[h(\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_0^{'})].$$

Posebno, ako uzmemo $j = \lfloor rk \rfloor$ za dovoljno mali $r > 0$, tada dobivamo eksplicitnu kvantitativnu ogradu za konvergenciju koja teži k 0 *eksponencijalno brzo kada $k \to \infty$.*

Dokaz. Sada ćemo dokazati Teorem 2.5.11 metodom direktnog sparivanja. Tako izbjegavamo tehnikalije dokaza Meyn i Tweedie [4] (doduše, sa malo slabijim zaključkom; vidjeti *Činjenica 2*). Pristupiti ćemo dokazu tako što ćemo koristiti Teorem 2.5.13. Neka je $h(x,y) = \frac{1}{2}[V(x) + V(y)]$. Dokaz će koristiti slijedeći tehnički rezultat.

Lema 2.5.14. *Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je*

$$\sup_{x \in C} V(x) < \infty \tag{2.30}$$

$$\tag{2.31}$$

Posebice, za malen skup C i drift funkciju V koji zadovoljavaju (2.8) *i* (2.27)*, možemo pronaći mali skup $C_0 \subseteq C$ takav da i dalje vrijede* (2.8) *i* (2.27) *(s istim n_0, ε i b, ali s $\lambda_0 < 1$ umjesto λ) takav da* (2.30) *i dalje vrijedi.*

Primijetimo da je moguće, u Lemi 2.5.14, ne zadovoljiti (2.30) tako što mijenjamo V, a C ostavimo nepromijenjenim:

Propozicija 2.5.15. *Postoji geometrijski ergodičan Markovljev lanac, s malenim skupom C i drift funkcijom V koji zadovoljava* (2.8) *i* (2.27)*, takav da ne postoji drift funkcija $V_0 : \mathbb{S} \to [0, \infty]$ takva da bi, ako zamijenimo V s V_0, uvjeti* (2.8)*,* (2.27) *te* (2.30) *i dalje vrijedili.*

Stoga, do kraja ovog dokaza, pretpostavljamo da (2.30) vrijedi. To, zajedno s (2.27) povlači

$$\sup_{(x,y) \in C \times C} \bar{R}h(x,y) < \infty, \tag{2.32}$$

što nam osigurava da će B_{n_0} u (2.29) biti konačan.

Neka je sada, $d = \inf_{C^c} V$. Tada, po Propoziciji 2.5.12 slijedi da će uvjet bivarijantnog drifta (2.28) vrijediti, ako vrijedi $d > b/(1-\lambda) - 1$. U tom slučaju, tvrdnja Teorema 2.5.11 slijedi odmah (štoviše, njegova kvantitativna verzija), kombinirajući Propoziciju 2.5.12 i Teorem 2.5.13. Primijetimo, uvjet $d > b/(1-\lambda) - 1$ nije obična tehnikalija: taj uvjet nam osigurava da je lanac aperiodičan.

No, ako je $d \le b/(1-\lambda) - 1$, tada nam ta argumentacija ne prolazi. Naš plan je da *povećamo* C tako da nova vrijednost od d zadovoljava $d > b/(1-\lambda) - 1$ i da iskoristimo aperiodičnost kako bi pokazali da je C ostao malen skup (tj. da i dalje vrijedi (2.8)) za eventualno nekontrolirano veći n_0 i manji $\varepsilon > 0$). Tada će Teorem 2.5.11 opet slijediti iz Propozicije 2.5.12 i Teorema 2.5.13 kao i prije. (Primijetimo da nećemo imati direktnu kontrolu nad novim vrijednostima od n_0 i C, zbog čega nam ovaj pristup ne daje kvantitativnu ogradu za brzinu konvergencije.)

Kako bi nastavili, uzmimo proizvoljan $d' > b/(1-\lambda)-1$, neka je $S = \{x \in \mathbb{S} : V(x) \le d\}$ te neka je $C' = C \cup S$. To osigurava da je $\inf_{x \in C'^c} V(x) \ge d' > b/(1-\lambda) - 1$. Nadalje, budući da je V po konstrukciji ograničen sa S, vidimo da će (2.30) vrijediti za C' umjesto C. Tada, iz (2.32) i (2.27) slijedi da ćemo i dalje imati $B_{n_0} < \infty$, čak i ako zamijenimo C sa C'. Stoga, Teorem 2.5.11 slijedi iz Propozicije 2.5.12 i Teorema 2.5.13 ako možemo dokazati:

Lema 2.5.16. *C' je malen skup.*

Prisjetimo se problema sa mogućim periodičnim ponašanjima lanca na petite skupovima. Slijedeći rezultat otklanja taj problem za aperiodičan, ψ-ireducibilan Markovljev lanac.

Lema 2.5.17. *(Meyn i Tweedie [4], Teorem 5.5.7) Za aperiodičan, ψ-ireducibilan Markovljev lanac, svaki petite skup je mali skup.*

Kako bi mogli iskoristiti Lemu 2.5.17, treba nam sljedeći rezultat.

Lema 2.5.18. *Neka je $C' = C \cup S$, gdje je $S = \{x \in \mathbb{S} : V(x) \le d\}$ za neko $d < \infty$, kao gore. Tada je C' petite skup.*

Konačno, kombinirajući Leme 2.5.18 i 2.5.17 zaključujemo da C' mora biti mali skup čime dokazujemo Lemu 2.5.16 pa i sam Teorem 2.5.11.

□

Poglavlje 3

Harrisovi lanci

3.1 Definicije

Dosada smo razmatrali Markovljeve lance na općenitim skupovima stanja te pritom razvili teoriju ψ-ireducibilnosti, prolaznosti i povratnosti, invarijantih mjera te ergodičnosti za takve lance. Sada ćemo se fokusirati na užu klasu Markovljevih lanaca, Markovljeve lance u Harrisovom smislu, tj. Harrisove lance.

Prilikom promatranja povratnosti za skupove $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, nećemo gledati samo prvo vrijeme pogađanja τ_A ili očekivanu vrijednost $U(\cdot, A)$ od η_A, već ćemo promatrati događaj da je $X \in A$ beskonačno mnogo puta (b.m.p), tj. $\eta_A = \infty$, što pišemo sa

$$\{X \in A \text{ b.m.p}\} := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \{X_k \in A\}$$

i što je dobro definirano kao $\mathcal{F}$-izmjerivi događaj na $\Omega := \mathbb{S}^\infty$. Za $x \in \mathbb{S}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ pišemo

$$Q(x, A) := \mathbb{P}_x(X \in A \text{ b.m.p}). \tag{3.1}$$

Primijetimo, za bilo koji x, A imamo $Q(x, A) \leq L(x, A)$ i po jakom Markovljevom svojstvu vrijedi:

$$Q(x, A) = \mathbb{E}_X[\mathbb{P}_{X_{\tau_A}}(X \in A \text{ b.m.p})\mathbb{1}_{(\tau_A < \infty)}] = \int_A U_A(x, \mathrm{d}y) Q(y, A). \tag{3.2}$$

Definicija 3.1.1. *Za skup A kažemo da je povratan u Harrisovom smislu (tj. Harrisov skup) ako vrijedi*

$$Q(x, A) = \mathbb{P}_x(\eta_A = \infty) = 1, \quad x \in A.$$

Lanac X je povratan u Harrisovom smislu (tj. Harrisov lanac) ako je ψ-ireducibilan i svaki skup u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ je Harrisov skup.

3.2 Svojstva Harrisovih skupova

Nakon što smo definirali što je Harrisov skup, promotriti ćemo neka svojstva takvih skupova.

Propozicija 3.2.1. *Pretpostavimo da za neki skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ vrijedi $L(x, A) \equiv 1$, $x \in A$. Tada je $Q(x, A) = L(x, A)$ za svaki $x \in \mathbb{S}$ i A je Harrisov skup.*

Dokaz. Koristeći jako Markovljevo svojstvo, dobivamo da, ako je $L(y, A) = 1$, $y \in A$, tada je za bilo koji $x \in A$

$$\mathbb{P}_x(\tau_A(2) < \infty) = \int_A U_A(x, \mathrm{d}y) L(y, A) = 1,$$

otkuda indukcijom, opet koristeći jako Markovljevo svojstvo, dobivamo, za $x \in A$

$$\mathbb{P}_x(\tau_A(k+1) < \infty) = \int_A U_A(x, \mathrm{d}y) \mathbb{P}_y(\tau_A(k) < \infty) = 1.$$

Za bilo koji x imamo

$$\mathbb{P}_x(\eta_A \geq k) = \mathbb{P}_x(\tau_A(k) < \infty),$$

otkuda, po Teoremu o monotonoj konvergenciji, iz

$$Q(x, A) = \lim_k \mathbb{P}_x(\eta_A \geq k)$$

dobivamo

$$Q(x, A) \equiv 1 \text{ za } x \in A,$$

Odatle slijedi da je

$$Q(x, A) = \int_A U_A(x, \mathrm{d}y) Q(y, A) = L(x, A)$$

što dokazuje tvrdnju. □

Teorem 3.2.2. *(i) Pretpostavimo da $D \rightsquigarrow A$ za bilo koje skupove D, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$. Tada je*

$$\{X \in D \ b.m.p\} \subseteq \{X \in A \ b.m.p\} \quad \mathbb{P}_* - g.s., \tag{3.3}$$

i vrijedi $Q(y, D) \leq Q(y, A)$, za svaki $x \in \mathbb{S}$. Ovdje $\mathbb{P}_*$ označava uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = *)$, dok $*$ označava bilo koje stanje $x \in \mathbb{S}$.

(ii) Ako je $\mathbb{S} \rightsquigarrow A$, tada je A Harrisov skup i vrijedi $Q(x, A) \equiv 1$ za svaki $x \in \mathbb{S}$.

Dokaz. Obzirom da događaj $\{X \in A \text{ b.m.p}\}$ uključuje cijeli put od X, ne možemo pokazati tvrdnju promatrajući P^n samo za fiksne n. Moramo promatrati sve događaje

$$E_n = \{X_{n+1} \in A\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

te ocijeniti vjerojatnost tih putova tako da beskonačno mnogo E_n postoji. Pokažimo prvo da, ako je $\mathcal{F}_n^X$ σ-algebra generirana s $\{X_0, \ldots, X_n\}$, tada, kako $n \to \infty$ imamo

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right] \to \mathbb{1}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i\right) \quad \mathbb{P}_*\text{-g.s.} \tag{3.4}$$

Kako bi to pokazali, primijetimo da za fiksan $k \leq n$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right] \geq \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right] \geq \mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right]. \tag{3.5}$$

Sada primijenimo Teorem o konvergenciji martingala na nejednakost (3.5) pa dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}\left[\cup_{i=k}^{\infty} E_i\right] &\geq \limsup_n \mathbb{P}\left[\cup_{i=n}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right] \\
&\geq \liminf_n \mathbb{P}\left[\cup_{i=n}^{\infty} E_i \mid \mathcal{F}_n^X\right] \\
&\geq \mathbb{1}\left[\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{i=m}^{\infty} E_i\right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Kako $k \to \infty$, izrazi u (3.6) konvergiraju što pokazuje da tvrdnja (3.4) vrijedi. Po jakom Markovljevom svojstvu, $\mathbb{P}_*[\cup_{i=n}^{\infty} E_I \mid \mathcal{F}_n^X] = L(X_n, A)$ $\mathbb{P}_*$-g.s. Iz pretpostavke $D \rightsquigarrow A$ imamo da je $L(X_n, A)$ ograničeno s 0 kad god je $X_n \in D$. Stoga, koristeći (3.4), imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}\{X_i \in D\}\right) &\leq \mathbb{1}\left(\limsup_n L(X_n, A) > 0\right) \\
&= \mathbb{1}\left(\lim_n L(X_n, A) = 1\right) \\
&= \mathbb{1}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

što je (3.3). Dokaz tvrdnje (ii) sad slijedi direktno, uvrštavajući $D = \mathbb{S}$ u (3.3). □

Kao jednostavnu posljedicu Teorema 3.2.2 imamo sljedeći teorem:

Teorem 3.2.3. *Ako je X Harrisov lanac, tada je $Q(x, B) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{S}$ i za svaki $B \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$.*

Dokaz. Neka je $\{C_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ niz petite skupova za koje vrijedi $\bigcup C_n = \mathbb{S}$. Po Propoziciji 2.2.12, za ireducibilan lanac je konačna unija petite skupova petite skup pa možemo pretpostaviti da je $C_n \subset C_{n+1}$ te da je $C_n \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ za svaki n.

Za bilo koji $B \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ i bilo koji $n \in \mathbb{Z}_+$, po Lemi 2.2.10 imamo $C_n \rightsquigarrow B$ i, obzirom da je C_n Harrisov skup, po Teoremu 3.2.2 (i) vidimo da je $Q(x, B) = 1$ za bilo koji $x \in C_n$. Budući da skupovi $\{C_k\}$ pokrivaju $\mathbb{S}$, slijedi da je $Q(x, B) = 1$ za svaki x kako se i tvrdi. □

3.3 Harrisovi lanci

Promotrimo sad bilo koji lanac X za koji je svaki skup u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ Harrisov skup. Dodajmo u $\mathbb{S}$ niz stanja $N = \{x_i\}$ te proširimo prijelaznu jezgru P do P' na $\mathbb{S}' := \mathbb{S} \cup N$ sa $P'(x, A) = P(x, A)$ za $x \in \mathbb{S}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ te

$$P'(x_i, X_{i+1}) = \beta_i, \quad P'(x_i, \alpha) = 1 - \beta_i$$

za specifičan $\alpha \in \mathbb{S}$ i sve $X_i \in N$. Bilo koji izbor vjerojatnosti β_i zadovoljava

$$1 > \prod_{i=0}^{\infty} \beta_i > 0$$

što osigurava

$$L'(x_i, A) = L'(x_i, \alpha) = 1 - \prod_{n=i}^{\infty} \beta_i < 1, \quad A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$$

tako da nijedan neprazan skup $B \subset \mathbb{S}'$ sa svojstvima $B \cap \mathbb{S} \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ i $B \cap \mathbb{S}$ nije Harrisov skup. No, s druge strane, vrijedi

$$U'(x_i, A) \geq L'(x_i, \alpha) U(\alpha, A) = \infty, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$$

što znači a je svaki skup u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ povratan. Ovime pokazujemo jedini način na koji ireducibilan lanac može biti povratan, ali ne Harris povratan; postojanjem apsorbirajućeg skupa koji je Harrisov skup, zajedno s jednim skupom ψ-mjere nula na kojem lanac nije Harrisov. Za bilo koji Harrisov skup D pišemo $D^\infty = \{y : L(y, D) = 1\}$ tako da je $D \subseteq D^\infty$ i D^∞ je apsorbirajući. D ćemo zvati *maksimalnim apsorbirajućim skupom* ako je $D = D^\infty$. Time je motivirana definicija:

Definicija 3.3.1. *Skup H nazivamo maksimalnim Harrisovim skupom ako je H maksimalan apsorbirajući skup sa svojstvom da je restrikcija lanca X na H Harrisov lanac.*

Teorem 3.3.2. *Ako je X povratan, tada možemo pisati*

$$\mathbb{S} = H \cup N, \tag{3.8}$$

gdje je H neprazan maksimalan Harrisov skup, a N prolazan skup.

Dokaz. Neka je C ψ_a-petite skup u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$, gdje je ψ_a maksimalna mjera ireducibilnosti. Neka je $H = \{y : Q(y, C) = 1\}$ i stavimo $N = H^c$.

Primijetimo, obzirom da je $H = H^\infty = \{y : L(y, H) = 1\}$, slijedi da je H ili prazan ili maksimalan apsorbirajući. Pokažimo prvo da je neprazan.

Pretpostavimo suprotno, tj. $Q(x, C) < 1$ za svaki x. Prvo pokazujemo da to implicira da je skup

$$C_1 := \{x \in C : L(x, C) < 1\}$$

u $\mathcal{B}^+(\mathbb{S})$.

U suprotnom, i ako je $\psi(C_1) = 0$, tada po Propoziciji 2.2.3 postoji apsorbirajući puni skup $F \subset C_1^c$. Tada, po definiciji vrijedi $L(x, C) = 1$ za bilo koji $x \in C \cap F$ i, obzirom da je F apsorbirajući, mora vrijediti $L(x, C \cap F) = 1$ za $x \in C \cap F$. Po Propoziciji 3.2.1 slijedi da je $Q(x, C \cap F) = 1$ za $x \in C \cap F$ što je kontradikcija s $Q(x, C) \geq Q(x, C \cap F)$. Dakle, $\psi(C_1) > 0$.

Sada, obzirom da je $C_1 \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$, postoji $B \subseteq C_1$, $B \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ i realan broj $\delta > 0$ sa svojstvom $L(x, C_1) \leq \delta < 1$ za svaki $x \in B$, tj.

$$L(x, B) \leq L(x, C_1) \leq \delta, \quad x \in B.$$

Po Propoziciji 2.3.4 (iii) slijedi da je $U(x, B) \leq [1 - \delta]^{-1}$, $x \in B$ što je kontradikcija s pretpostavkom o povratnosti lanca X.

Slijedi da je H neprazan maksimalni apsorbirajući skup i po Propoziciji 2.2.3 H je puni skup. Odavde, po Propoziciji 2.3.7, odmah slijedi da je N prolazan.

Pokažimo još da je H Harrisov skup. Za bilo koji skup $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ imamo $C \rightsquigarrow A$. Po Teoremu 3.2.2 slijedi da, ako je $Q(x, C) = 1$, tada je i $Q(x, A) = 1$ za svaki $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$. Budući da je, po konstrukciji, $Q(x, C) = 1$ za $x \in H$, imamo da je i $Q(x, A) = 1$ za bilo koji $x \in H$ i $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$ pa je restrikcija lanca X na skup H stvarno Harrisov lanac što se i tražilo. □

Sljedećim rezultatom ćemo dodatno ojačati vezu lanca i njegovih kostura.

Teorem 3.3.3. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan i aperiodičan. Tada je X Harrisov lanac ako i samo ako je svaki njegov kostur Harrisov lanac.*

Dokaz. Obzirom na $m\tau_A^m \geq \tau_A$ za neki skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$, gdje je $m\tau_A^m$ prvo vrijeme pogađanja za m-kostur, imamo da ako su m-kosturi Harrisovi lanci, tada je i X Harrisov lanac.

Obratno, pretpostavimo da je X Harrisov lanac. Za bilo koji prirodan broj $m \geq 2$ znamo da je, po Teoremu 2.3.3, X^m povratan pa Harrisov skup H_m postoji za taj m-kostur. Budući da je H_m puni skup, po Propoziciji 2.2.3 postoji $H \subset H_m$ koji je apsorbirajući i puni skup za X.

Budući da je X Harrisov lanac, imamo $\mathbb{P}_x(\tau_H < \infty) \equiv 1$ i, obzirom da je H apsorbirajući, znamo da je $m\tau_H^m \leq \tau_H + m$. Odavde slijedi

$$\mathbb{P}_x(\tau_H^m < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_H < \infty) \equiv 1$$

otkuda slijedi da je X^m Harrisov lanac. □

Harrisova povratnost nam daje korisna proširenja tvrdnji danih u Teoremu 2.3.5 i Teoremu 2.3.6.

Propozicija 3.3.4. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan.*

(i) Ako je neki petite skup C povratan, tada je i X povratan te je skup $C \cap N$ uniformno prolazan, gdje je N prolazan skup u Harrisovoj dekompoziciji (3.8).

(ii) Ako postoji neki petite skup u $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ za koji vrijedi $L(x, C) \equiv 1$, $x \in \mathbb{S}$, onda je X Harrisov lanac.

Dokaz. Po Teoremu 2.3.5, ako je C povratan, tada je i lanac povratan. Neka $D = C \cap N$ predstavlja dio skupa C koji nije u H. Budući je N ψ-mjere nula i ν je mjera ireducibilnosti, zbog maksimalnosti od ψ mora vrijediti $\nu(N) = 0$. Stoga, (2.13) vrijedi i, po (2.15), imamo ogradu za $U(x, D)$, $x \in \mathbb{S}$ takvu da je D uniformno prolazan što dokazuje tvrdnju (i). Za dokaz tvrdnje (ii) primijetimo da ako je $L(x, C) \equiv 1$, $x \in \mathbb{S}$ za neki ψ_a-petite skup C, tada po Teoremu 3.2.2 slijedi da je C Harrisov skup. Obzirom da je C petite skup, imamo $C \rightsquigarrow A$ za svaki $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{S})$. Harris povratnost skupa C, zajedno s Teoremom 3.2.2 (ii) povlače da je $Q(x, A) \equiv 1$ za svaki x što znači da je X Harrisov lanac.

□

Teorem 3.3.5. *Pretpostavimo da je X ψ-ireducibilan lanac. Ako postoji petite skup $C \subset \mathbb{S}$, i funkcija V koja je neograničena van petite skupova, takvi da (V1) vrijedi, tada je X Harrisov lanac.*

Dokaz. Teoremom 2.3.12 smo pokazali da je $L(x, C) \equiv 1$ pa je Harris povratnost pokazana u vidu Propozicije 3.3.4. □

3.4 Ergodičnost Harrisovih lanaca

U ovom odjeljku ćemo promatrati kako se Harrisovi lanci ponašaju dugoročno, tj. ergodski. Vidjeti ćemo da se ergodičnost može pokazati za aperiodičan Harrisov lanac, a i za Harrisov lanac s periodom d. No, kako bi to pokazali, potrebno nam je jedno vrlo korisno svojstvo mjere totalne varijacije.

Propozicija 3.4.1. *Neka je λ neka početna distribucija lanca X s prijelaznom jezgrom P. Ako je π invarijantna za P, tada je mjera totalne varijacije,*

$$\| \int \lambda(\mathrm{dx}) P^n(x, \cdot) - \pi \|, \tag{3.9}$$

monotono opadajući niz po n.

Dokaz. Po definiciji mjere totalne varijacije i zbog invarijantnosti od π imamo

$$\begin{aligned} &\| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^{n+1}(x, \cdot) - \pi \| \\ &= \sup_{f:|f|\le 1} \left| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^{n+1}(x, \mathrm{d}y) f(y) - \int \pi(\mathrm{d}y) f(y) \right| \\ &= \sup_{f:|f|\le 1} \left| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^{n}(x, \mathrm{d}\omega) \Big[\int P(\omega, \mathrm{d}y) f(y) \Big] - \int \pi(\mathrm{d}\omega) \Big[\int P(\omega, \mathrm{d}y) f(y) \Big] \right| \\ &\le \sup_{f:|f|\le 1} \left| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^{n}(x, \mathrm{d}\omega) f(\omega) \int \pi(\mathrm{d}\omega) f(\omega) \right| \end{aligned} \tag{3.10}$$

Gornji račun vrijedi jer kad god je $|f| \le 1$, tada je i $|Pf| \le 1$. □

Teorem 3.4.2. *Ako je X pozitivan i aperiodičan Harrisov lanac, tada za svaku početnu distribuciju λ vrijedi*

$$\| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^n(x, \cdot) - \pi \| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.11}$$

Dokaz. Znamo da je za neki prirodan broj m, m-kostur X^m jako aperiodičan i pozitivan Harrisov lanac (vidjeti komentar na kraju odjeljka 2.4). Odavde slijedi:

$$\| \int \lambda(\mathrm{d}x) P^{nm}(x, \cdot) - \pi \| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Tvrdnja za P^n slijedi direktno iz monotonosti u (3.10). □

Teorem 3.4.3. *(i) Ako je X pozitivan Harrisov lanac s periodom $d \ge 1$, tada za svaku početnu distribuciju λ vrijedi*

$$\| d^{-1} \int \lambda(\mathrm{d}x) \sum_{r=0}^{d-1} P^{nd+r}(x, \cdot) - \pi \| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.13}$$

(ii) Ako je X pozitivan i povratan s periodom $d \geq 1$ tada postoji skup N π-mjere nula takav da za svaku početnu distribuciju λ sa svojstvom $\lambda(N) = 0$ vrijedi

$$\|d^{-1} \int \lambda(\mathrm{d}x) \sum_{r=0}^{d-1} P^{nd+r}(x, \cdot) - \pi\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Dokaz. Tvrdnja (i) je lagana za pokazati obzirom na postojanje ciklusa i s tim da znamo da je lanac restringiran na ciklične skupove aperiodičan i d-kosturi su pozitivni Harrisovi lanci. Tvrdnja (ii) sada slijedi kao direktna posljedica teorema dekompozicije, tj. Teorema 3.3.2. □

Poglavlje 4

Primjeri

U ovom poglavlju ćemo pokazati primjere nekih Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja.

4.1 AR(1) proces

Definicija 4.1.1. *Proces $X = (X_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ se naziva autoregresivnim procesom reda 1, tj. AR(1) procesom ako zadovoljava:*

(AR1) za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, X_n i W_n su slučajne varijable na $\mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1},$$

za neki realan broj $\alpha \in \mathbb{R}$.

(AR2) niz slučajnih varijabli $\{W_n\}$ je niz nezavisnih jednako distribuiranih (n.j.d) slučajnih varijabli sa distribucijom Γ na $\mathbb{R}$.

Primijetimo, AR(1) proces je trivijalno Markovljev lanac; nezavisnost X_{n+1} od $X_{n-1}, ...$ za dano $X_n = x$ slijedi iz (AR1) jer vrijednosti od W_n, po (AR2), ne ovise o nijednom $\{X_1, X_2, \ldots\}$. Neka je μ bilo koja nenegativna izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^{n+1}$ te pretpostavimo da je X AR(1) proces. Nadalje, neka je $W_0 = X_0$ te neka $Q_{m,n}$ označava distribuciju od $X_n - \alpha X_s$, s pokratom $Q_k = Q_{k-1,k}$. Po tekstu iznad jednadžbe (2.5) znamo da je taj uvjet ekvivalentan sa Markovljevim svojstvom danim s (2.1) pa možemo promatrati

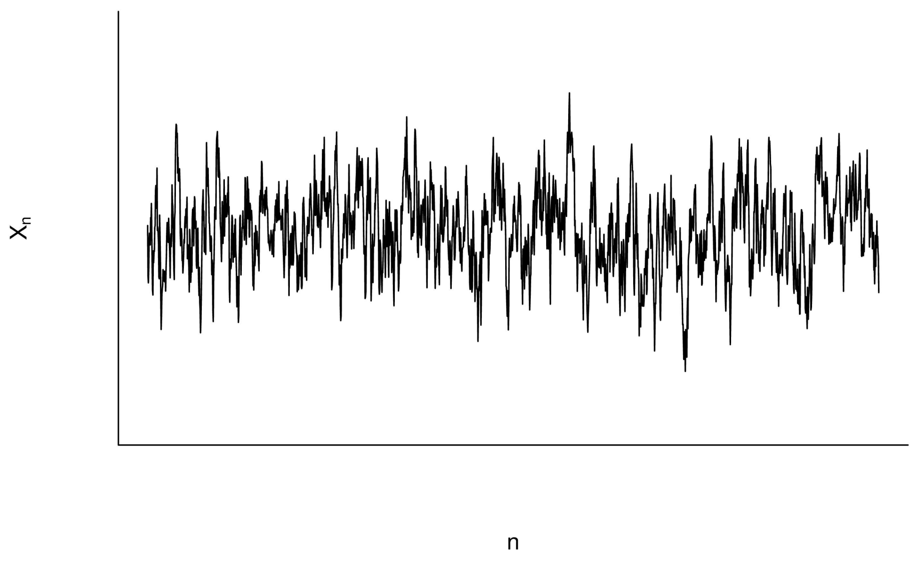
$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mu(X_0, X_1, \ldots, X_n)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mu(W_0, W_1 + \alpha W_0, \ldots, W_n + \alpha W_{n+1} + \ldots + \alpha^n W_0)\right] \\
&\quad = \int \cdots \int \mu(y_0, y_1 + \alpha y_0, \ldots, y_n + \alpha y_{n-1} + \cdots + \alpha^n y_0) Q_n(\mathrm{d}y_n) \ldots Q_1(\mathrm{d}y_1) \mathbb{P}_{X_0}(\mathrm{d}y_0) \\
&\quad = \int \cdots \int \mu(x_0, x_1, \ldots, x_n) Q_n(\mathrm{d}x_n - \alpha x_{n-1}) \cdots Q_1(\mathrm{d}x_1 - \alpha x_0) \mathbb{P}_{X_0}(\mathrm{d}x_0),
\end{aligned}
$$

što pokazuje da je X_n Markovljev proces sa prijelaznom jezgrom

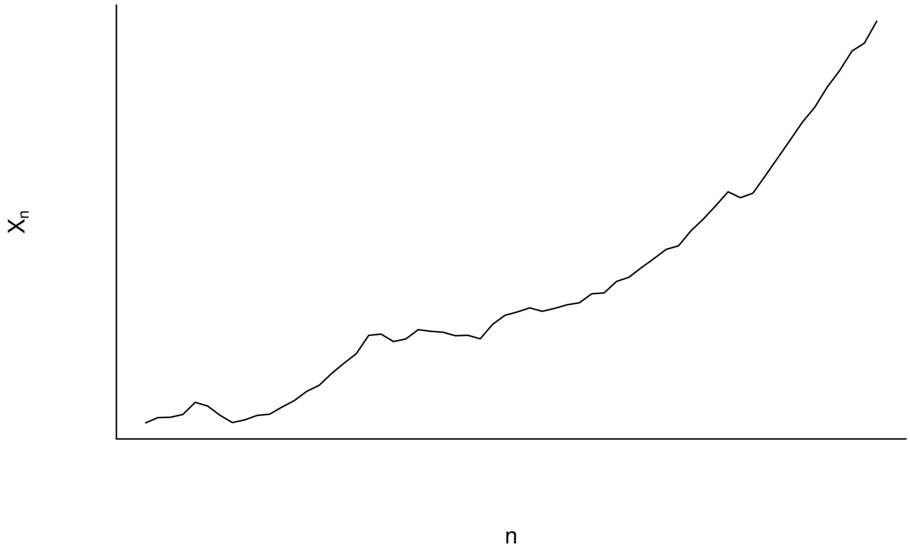
$$
\mathbb{P}(X_n \in B \mid X_m = x) = Q_{m,n}(B - \alpha x),
$$

za neki skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ te neko stanje $x \in \mathbb{S}$.

AR(1) proces, u neku ruku, možemo smatrati proširenjem slučajne šetnje, gdje, u svakom novom trenutku uzimamo dio prethodne vrijednosti i dodajemo mu slučajnu vrijednost ("šum" ili "grešku"). Nadalje, pokaže se da izbor α dosta utječe na ponašanje lanca.



Slika 4.1: AR(1) proces za $\alpha = 0.85$, gdje je $\Gamma = N(0, 1)$; proces je stacionaran i ergodičan



Slika 4.2: AR(1) proces za $\alpha = 1.03$, gdje je $\Gamma = N(0, 1)$; proces nije stacionaran ni ergodičan

Pokažimo još φ-ireducibilnost AR(1) procesa. Neka je X AR(1) proces zadan relacijama (AR1) i (AR2) za $\Gamma = N(0, \sigma^2)$. Neka je $x \in \mathbb{S}$, $X_0 = x$, λ Lebesgueova mjera te $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S})$ takav da je $\lambda(A) > 0$. Primijetimo da je tada $X_1 = \alpha x + W_1$, gdje je $W_1 \sim N(0, \sigma^2)$ te da je $X_1 \sim N(\alpha x, \sigma^2)$. Neka je f funkcija gustoće za X_1 uz uvjet $X_0 = x$. Računamo

$$\begin{aligned} P(x, A) &= P(\alpha x + W_1 \in A) \\ &= \int_A f \mathrm{d}\lambda \\ &= \int f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\lambda > 0. \end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi po teoriji mjere. U suprotnom bi vrijedilo $f \mathbb{1}_A = 0$ λ-skoro svuda, tj. $f = 0$ na A, a f je strogo pozitivna na cijelome $\mathbb{R}$. Odavde slijedi da je $P(x, A) > 0$ pa tako i $U(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0$. Tada po Meyn i Tweedie [4] (Propozicija 4.2.1 (a) dio) vidimo da je naš AR(1) proces φ-ireducibilan.

4.2 AR(k) proces

Definicija 4.2.1. *Proces $Y = (Y_n : n \in \mathbb{Z}_+)$ se naziva autoregresivnim procesom reda k, tj. AR(k) procesom ako, za svaki skup početnih vrijednosti $(Y_0, \ldots, Y_{-k+1})$, zadovoljava*

(AR1) za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, Y_n i W_n su slučajne varijable na $\mathbb{R}$ koje, induktivno za $n \geq 1$, zadovoljavaju*

$$Y_n = \alpha_1 Y_{n-1} + \alpha_2 Y_{n-2} + \cdots + \alpha_k Y_{n-k} + W_n,$$

za neke realne brojeve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

(AR2) niz slučajnih varijabli $(W_n)_{n\geq 0}$ je niz n.j.d slučajnih varijabli na $\mathbb{R}$.*

$Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ u principu nije Markovljev lanac za $k > 1$ jer informacije o prošlosti (tj. prošlosti u terminima varijabli $Y_{n-1}, Y_{n-2}, \ldots, Y_{n-k}$) daju informaciju o trenutnoj vrijednosti od Y_n. No, možemo konstruirati proces koji će biti Markovljev lanac. Neka je

$$X_n = (Y_n, \ldots, Y_{n-k+1})^T$$

i stavimo $X = (X_n : n \geq 0)$. Jasno, X je Markovljev lanac čija prva komponenta opisuje upravo putove autoregresivnog procesa. Primijetimo da, ako X_0 ima proizvoljnu distribuciju, tada i prvih k varijabli $(Y_0, \ldots, Y_{-k+1})$ smatramo proizvoljnima. Primjetimo da AR(k) model tada možemo ovako prikazati:

$$X_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_k \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} X_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} W_n \tag{4.1}$$

Ako pretpostavimo da imamo reprezentaciju našeg lanca kao u (4.1), tada možemo odrediti uvjete pri kojima će naš lanac biti ψ-ireducibilan.
U praksi se pokazuje da je jedan od često korišteni uvjet taj da W ima distribuciju koja ima strogo pozitivnu gustoću. Ako je W gaussovski, tada je taj uvjet očito zadovoljen.
No, za ψ-ireducibilnost nije uvijek dovoljno imati gustoću koja je pozitivna samo u okolini 0. Ako su nultočke polinoma $A(z) = 1 - \alpha_1 z^1 - \cdots - \alpha_k z^k$ van zatvorenog kruga radijusa 1 uz $\mathbb{C}$, tada $Y_n \to 0$ za $n \to \infty$ kada je $W_n =$, za sve n. Odavde vidimo da je moguće da lanac pogodi $[-1, 1]$ u nekom trenutku u budućnosti. No, ako neka nultočka polinoma $A(z)$ leži unutar otvorenog kruga radijusa 1 u $\mathbb{C}$, tada će naš lanac "eksplodirati" te neće biti ireducibilan.

4.3 Model pohrane

Model pohrane ili model skladištenja (eng. Storage model) je primjer u kojem, iako su vremena u kojima se inputi događaju slučajna, između tih vremena postoji determinističko gibanje koje nam daje reprezentaciju u Markovljevom smislu.

Jednostavan model pohrane ima sljedeće elemente. Pretpostavljamo da postoji niz *vremena inputa* $T_0 = 0, T_0 + T_1, T_0 + T_1 + T_2, \ldots$ u kojima se događa input te pretpostavljamo da su *vremena međudolazaka* $(T_i)_{i \geq 1}$ nezavisne, jednako distribuirane (n.j.d) slučajne varijable, distribuirane kao i varijabla T, s distribucijom $G(-\infty, t] = \mathbb{P}(T \leq t)$.

U n-tom vremenu inputa, količina inputa S_n ima distribuciju $H(-\infty, t] = \mathbb{P}(S_n \leq t)$; količine inputa su nezavisne jedna od druge i od vremena međudolazaka. Između inputa, postoji konstantno povlačenje sadržaja iz sustava pohrane po stopi r; takvo da, u vremenskom periodu $[x, x+t]$, pohranjeni sadržaj se smanji za rt jer u tom periodu nije bilo inputa. Kada put procesa sadržaja dođe do nule, on ostaje na nuli sve dok ne dođe do trenutka u kojem je input pozitivan.

Ovaj model je pojednostavljena verzija načina na koji brana funkcionira. Isto tako, može poslužiti i kao model za inventar ili bilo koji drugi sličan sustav pohrane.

Osnovni model pohrane je proces indeksiran neprekidnim vremenskim parametrom $t \in [0, +\infty)$. Da bi se vidjelo da je Markovljev lanac, potrebno ga je analizirati u određenim vremenskim trenucima kada se (vjerojatnosno) regenerira.

Definicija 4.3.1. *Jednostavni model pohrane (eng. Simple storage model)*

(SSM1) *Za svaki $n \geq 0$ neku su S_n i T_n n.j.d slučajne varijable na $\mathbb{R}$ sa distribucijama H i G kao gore.*

(SSM2) *Definirajmo slučajne varijable*

$$X_{n+1} = [X_n + S_n - J_n]^+,$$

gdje su varijable J_n n.j.d, sa

$$\mathbb{P}(J_n \leq x) = G(-\infty, x/r) \tag{4.2}$$

za neki realan broj $r > 0$.

Tada lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ predstavlja sadržaj sustava pohrane u vremenima $\{T_n-\}$ neposredno prije svakog novog inputa i naziva se jednostavni model pohrane.

Primjetimo da su slučajne varijable T_n i J_n usko povezane, tj. $J_n = rT_n$.

Nezavisnost S_{n+1} od $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots$ i pravila (SSM1), (SSM2) osiguravaju da je $(X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac.

Primijetimo da općenito, ovaj proces zaustavljen u nekim drugim trenucima neće biti Markovljev jer je važno izračunati vjerojatnosti budućih putova kako bi znali koliko ranije od odabranog trenutka se zadnji input dogodio. Odabirom takvog način promatranja našeg lanca , u trenucima neposredno prije inputa, zaboravljamo prošlost (u smislu da je naš lanac stvarno Markovljev).

Pokažimo uvjete za ψ-ireducibilnost ovakvog procesa u prvom koraku. Neka je X proces zadan relacijama (SSM1) i (SSM2) te neka je $W_n := S_n - J_n$.

Propozicija 4.3.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajna šetnja na poluosi, zadana sa $X_{n+1} = (X_n + W_n)_+$, gdje je W varijabla prirasta s distribucijom Γ. Tada je X φ-ireducibilan sa $\varphi(0, \infty) = 0$, $\varphi(\{0\}) = 1$ ako i samo ako je*

$$P(W_n < 0) = \Gamma(-\infty, 0) > 0. \tag{4.3}$$

Dokaz. Nužnost od (4.3) je očita. Obratno, pretpostavimo da za neke realne brojeve δ, $\varepsilon > 0$ vrijedi $\Gamma(-\infty, -\varepsilon) > \delta$. Tada za bilo koji prirodan broj n, za koji je $x/\varepsilon < n$ vrijedi

$$P^n(x, \{0\}) \geq \delta^n > 0.$$

$\square$

Ako primijenimo ovaj rezultat na naš model pohrane, vidimo da imamo ψ-ireducibilnost ukoliko je

$$P(W_n < 0) > 0.$$

Uz uvjet da postoji vjerojatnost da se nijedan input ne dogodi dovoljno dugo, dobit ćemo δ_0-ireducibilnost u jednom koraku. To nam govori da možemo "isključiti" input na period duži od s kad god je količina zadnjeg inputa bila s, tj. pozitivnu vjerojatnost da će input "biti ugašen" dulje od s/r. Jedan od dovoljnih uvjeta za to je da distribucija H ima beskonačne repove.

Linearnost u ovom modelu pohrane nam omogućava da razvijemo detaljniji model. Postoje dva moguća smjera u kojima to možemo napraviti, a da proces ostane Markovljev.

Pretpostavimo ponovno da postoji niz vremena inputa $T_0 = 0, T_0 + T_1, T_0 + T_1 + T_2, \ldots$ te da su vremena međudolazaka $(T_i)_{i\geq 0}$ n.j.d s distribucijom G.

Pretpostavimo da je sadržaj u n-tom vremenu inputa dan sa $X_n = x$ i da količina inputa $S_n(x)$ ima distribuciju danu s $H_x(-\infty, t] = \mathbb{P}(S_n(x) \leq t)$ koja ovisi o x,. Tada količine inputa u vremenima međudolazaka ostaju nezavisne jedna od druge.

Alternativno, pretpostavimo da između inputa postoji povlačenje sadržaja iz sustava pohrane po stopi $r(x)$ koja isto ovisi o količini x u trenutku povlačenja. Tada dobivamo tzv. *sadržajno-ovisan model pohrane ili skladištenja (eng. Content-dependent storage model)*. Kao i prije, kada put ovog procesa pohrane dođe do nula, on ostaje u nula do trenutka s pozitivnim inputom. Isto tako, i ovaj proces je važno promatrati u trenucima neposredno prije svakog inputa kako bi imali Markovljev proces.

Bibliografija

[1] W. Doeblin, Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markov a un nombre fini d'états. Revue Mathematique de l'Union Interbalkanique, 2:77–105, 1938.

[2] J.L. Doob. Stochastic Processes. John Wiley & Sons, New York, 1953.

[3] A.A. Markov. Extension of the law of large numbers to dependent quantities (in Russian). Izv. Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ. (2nd Ser), 15:135–156, 1906.

[4] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. Markov chains and stochastic stability. Cambridge University Press, 2009.

[5] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. "General state space Markov chains and MCMC algorithms." Probability Surveys, 20–71, 2004.

[6] G.O. Roberts and J.S. Rosenthal. Geometric ergodicity and hybrid Markov chains. Electronic Comm. Prob. 2, 13–25, 1997.

[7] Z. Vondraček. Markovljevi lanci predavanja, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml13-predavanja.html`, (srpanj 2014.)

Sažetak

U prvom poglavlju se prisjećamo pojmova iz teorije diskretnih Markovljevih lanaca. Nakon toga tu teoriju u drugom poglavlju proširujemo na općenite skupove stanja. Definiramo pojmove poput jezgre Markovljevog lanca u Definiciji 2.1.1 te pojmove poput vremena posjeta η, prvog povratka τ, prvog pogađanja σ te vremena zaustavljanja ζ. Pokazujemo da Markovljevi lanci na općenitom skupu stanja mogu imati slična svojstva kao i na diskretnom skupu stanja. Uvodimo pojmove uniformne i geometrijske ergodičnosti te u Teoremima 2.5.7 i 2.5.13 pokazujemo uz koje uvjete naš lanac ima ta svojstva. U trećem poglavlju se fokusiramo na užu klasu Markovljevih lanaca, tzv. Harissove lance. Prisjetimo se, funkcija $Q(x, A)$ je vjerojatnost da lanac X, ako krene iz stanja x, beskonačno mnogo puta posjeti skup A, a funkcija $L(x, A)$ je vjerojatnost da lanac X pogodi skup A. U Teoremu 3.2.2 pokazujemo kako možemo svojstva funkcije Q povezati sa svojstvima funkcije L. Naposljetku, u Teoremima 3.4.2 i 3.4.3 dajemo uvjete pri kojima su Harrisovi lanci ergodični. Rad završavamo s primjerima Markovljevih lanaca na općenitom skupu stanja: autoregresivnim procesom reda k te poznatim modelom pohrane.

Summary

In the first chapter we list the main terms in the theory of Markov chains on discrete state space. After that, in the second chapter, we expand that theory to Markov chains on general state space. In Definition 2.1.1 we introduce terms like the kernel of a Markov chain as well as occupation times η, first return times τ, first hitting times σ and stopping times ζ. We show that Markov chains on general state space cam have similar properties as on discrete state space. We define uniform and geometric ergodicity and show, in Theorems 2.5.7 and 2.5.13, the conditions needed for our chain to have those properties. In chapter three we focus on a smaller class of Markov chains, so-called Harris chains. Function $Q(x,A)$ is the probability of chain X visiting set A infinite number of times, considering he starts from state x. On the other hand, function $L(x,A)$ is the probability of chain X to return to set A. In Theorem 3.2.2, we show how the properties of the function Q can be linked to those of the function L. Finally, in Theorems 3.4.2 and 3.4.3 we show the sufficient conditions Harris chains need to be ergodic. We finish this thesis with a couple of examples of Markov chains on general state space: the autoregressive process of order k and the well known storage model.

Životopis

Rođen sam 23. svibnja 1990. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Davorina Trstenjaka sam završio 2005. godine te iste godine upisao zagrebačku XV. gimnaziju. Po završetku gimnazije, 2009. godine, sam upisao Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom preddiplomskog studija sam shvatio da me zanimaju vjerojatnost i Markovljevi procesi te njihova primjena u svijetu financija te sam stoga 2012. godine upisao diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu. Tijekom diplomskog studija se moje zanimanje proširuje na vremenske nizove i slučajne procese. Uz to, tijekom studiranja sam bio i član studentske udruge eSTUDENT te kao dio tima Prakse i pripravništva imao priliku raditi na par projekata te udruge.