

# Numerička aproksimacija modela poroelastične ljuske

---

Ljulj, Matko

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:080677>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-09**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK

Matko Ljulj

NUMERIČKA APROKSIMACIJA  
MODELA POROELASTIČNE LJUSKE

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

Sadržaj	iii
<b>1 Model poroelastične ljuske</b>	<b>2</b>
1.1 Geometrija ljuske . . . . .	2
1.2 Definicija problema . . . . .	3
1.3 Osnovna svojstva . . . . .	5
1.4 Dokaz jedinstvenosti rješenja . . . . .	8
<b>2 Dokaz egzistencije rješenja</b>	<b>10</b>
2.1 Tehnički rezultati . . . . .	10
2.2 Definicija iteracija . . . . .	16
2.3 Dokaz konvergencije iteracija . . . . .	18
2.4 Dodatna pojašnjenja . . . . .	20
<b>3 Numerička aproksimacija</b>	<b>24</b>
3.1 Opis metode . . . . .	24
3.2 Primjeri i rezultati . . . . .	31
<b>Bibliografija</b>	<b>40</b>

# Uvod

U teoriji elastičnosti, ljuskom nazivamo trodimenzionalno elastično tijelo koje je u jednoj dimenziji relativno tanko u odnosu na druge dvije dimenzije. U stvarnom životu nalazimo ih u različitim sferama: mostovi, silosi, krvne žile, cijevi, krovovi, itd., pa je stoga bitno modelirati ponašanje takvih objekata pod opterećenjima.

S druge strane, u pojmu „poroelastičan“ skrivena su svojstva poroznosti i elastičnosti. Elastičnost znači da se objekt nakon prestanka djelovanja sile vraća u prvobitni položaj, dok poroznost znači da tijelo u sebi sadrži uske praznine koje može ispuniti fluid i time promijeniti mehanička svojstva objekta. Navedeni primjeri ljuski s početka većinom se odnose na elastične ljuske. Njihovo modeliranje široko je istraživano (vidjeti [1]). Naš model poroelastične ljuske bit će najbližiji modelu elastične ljuske opisanom u [9], te najavljenom u [8].

Modeli poroelastične ljuske nisu toliko široko istraženi kao modeli elastične ljuske. Mi ćemo se ovdje pozabaviti modelom najbližijem modelu opisanom u [5]. U tom radu autori izvode model fleksijskog tipa. S druge strane, u ovome radu bavit ćemo se modelom Naghdijeveg tipa, koji dopušta fleksijske i membranske efekte te smicanje.

Primjeri poroelastičnih ljuski koje možemo naći u stvarnom životu su filteri (zraka, vode ili ulja) u automobilima. Također, razna tkiva u ljudskome tijelu poput mjehura, ošita, arterija i kostiju modeliraju se kao poroelastične ljuske.

U ovome radu zadajemo model poroelastične ljuske Naghdijeveg tipa, pokazujemo rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje ga opisuju, te pokazujemo jednu numeričku metodu rješavanja sustava i rezultate dobivene tom metodom. Dokaz jedinstvenosti rješenja temelji se na metodi energija, dok se egzistencija temelji na iterativnom postupku sličnom numeričkoj metodi opisanoj u [4]. Iako smo tu metodu u ovome radu iskoristili za dokaz egzistencije rješenja, on se može u budućnosti iskoristiti za implementaciju numeričke metode.

# Poglavlje 1

## Model poroelastične ljuske

U prvom poglavlju postavljamo sustav parcijalnih jednažbi za model poroelastične ljuske u varijacijskoj formulaciji. Zadatak nam je objasniti geometriju problema (način parametrijacije ljuske i uvođenje dodatnih pojmova nužnih za zadavanje problema). Zatim uvodimo neke pokrate koje ćemo koristiti u cijelom radu, dokazujemo neka osnovna svojstva, a na kraju i dokazujemo jedinstvenost rješenja sustava. Time ćemo imati sve pripremljeno za dokazati egzistenciju u sljedećem poglavlju.

### 1.1 Geometrija ljuske

Zbog mogućnosti široke primjene, modeliranje elastičnih ljuski je vrlo intenzivno proučavano područje i u upotrebi je mnogo različitih modela (membranski, fleksijski, Koiterov, Naghdijev, Budansky-Sandersov i brojni drugi, vidi [1]). U ovome radu model poroelastične ljuske temeljimo na modelu elastične ljuske Naghdijeva tipa opisan u [8]. Ovaj model uvažava i membranske i fleksijske efekte, te dopušta smicanje poprečnog presjeka s obzirom na deformiranu središnju plohu.

Parametrizacija  $\varphi$  potrebna je za opis transformacije ljuske iz početne dvodimenzionalne domene u njen pravi oblik, te ju definiramo na sljedeći način:

Neka je  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  otvoren i povezan skup s Lipschitzovim rubom. Neka  $y = (y_\alpha)$  označava točku u  $\bar{\omega}$  te neka je  $\partial_\alpha := \partial/\partial y_\alpha$ . Neka je  $\varphi : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektivno preslikavanje iz  $C^3(\omega; \mathbb{R}^3)$  takvo da su vektori

$$\mathbf{a}_\alpha(y) = \partial_\alpha \varphi(y), \quad \alpha = 1, 2$$

linearno nezavisni u svim točkama  $y \in \bar{\omega}$ . Oni čine kovarijantnu bazu tangencijalne ravnine na 2-plohi

$$S = \varphi(\bar{\omega})$$

u točki  $\varphi(y)$ . Kontravarijantna baza iste tangencijalne ravnine dana je vektorima  $\mathbf{a}^\alpha(y)$ , koji su definirani s

$$\mathbf{a}^\alpha(y) \cdot \mathbf{a}_\beta(y) = \delta_\beta^\alpha,$$

gdje je  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  Kroneckerov simbol. Proširujemo obje baze do baza za cijeli  $\mathbb{R}^3$  dodavanjem vektora

$$\mathbf{a}_3(y) = \mathbf{a}^3(y) = \frac{\mathbf{a}_1(y) \times \mathbf{a}_2(y)}{\|\mathbf{a}_1(y) \times \mathbf{a}_2(y)\|}.$$

Kovarijantni ( $\mathbf{A}_c = (\mathbf{a}_{\alpha\beta})$ ) i kontravarijantni ( $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}^{\alpha\beta})$ ) metrički tenzori plohe  $S$ , dani su, respektivno, s

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta}, \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta}.$$

Element površine je  $\sqrt{a} dy$ , gdje je  $a := \det \mathbf{A}_c$ . Nadalje, koristimo oznake:

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2], \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3].$$

Ovime smo parametrizirali srednju plohu  $S = \varphi(\bar{\omega})$  ljuske. Sama ljuska je ustvari dana kao slika funkcije  $\mathbf{r} : \bar{\omega} \times [-h/2, h/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{r}(y, x_3) = \varphi(y) + x_3 \mathbf{a}_3(y).$$

Ovdje smo s  $h$  označili debljinu ljuske. Interior domene gornjeg preslikavanja odsad ćemo označavati s  $\Omega := \omega \times (-h/2, h/2)$ . Uvedimo još jednu pokratu:

$$\Sigma_+ = \bar{\omega} \times \{h/2\}, \quad \Sigma_- = \bar{\omega} \times \{-h/2\}.$$

Slika tih skupova pod preslikavanjem  $\mathbf{r}$  preslikavaju se u dvije najveće plohe nedeformirane ljuske.

## 1.2 Definicija problema

Sada formuliramo model ljuske, koji je definiran za središnju ljusku parametriziranu funkcijom  $\varphi \in W^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ . Primijetimo da su za tu parametrizaciju vektori kovarijantne i kontravarijantne baze dobro definirani i pripadaju  $L^{\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ .

Neka je  $\gamma_0 \subset \partial\omega$  dio ruba pozitivne duljine. Definirajmo prostore

$$V_N(\omega) = H_{\gamma_0}^1(\omega; \mathbb{R}^3) \times H_{\gamma_0}^1(\omega; \mathbb{R}^3) = \{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)^2 : \tilde{\mathbf{v}}|_{\gamma_0} = \tilde{\mathbf{w}}|_{\gamma_0} = 0\},$$

$$V_K(\omega) = \{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N(\omega) :$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{a}}((\partial_2 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_1 - (\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}(\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_2 - \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_3)\},$$

$$V_F(\omega) = \{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N(\omega) : \partial_{\alpha} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_{\alpha} \times \tilde{\mathbf{w}} = 0, \alpha = 1, 2\}.$$

Ovi prostori su Hilbertovi, s normom

$$\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}})\|_{V_N(\omega)} = (\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^3)}^2)^{1/2}.$$

Nadalje, pokazuje se i da vrijedi

$$V_F \subseteq V_K \subseteq V_N.$$

U notaciji  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in V_N(\Omega)$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}$  označava vektor pomaka središnje plohe ljuske, dok je  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka. Uz tlak  $\pi$  to će biti nepoznanice našeg problema.

Model sada glasi: naći  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in H^1(0, T; V_N(\omega))$  i  $\pi \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , uz  $\partial_{z_3}\pi \in L^2((0, T) \times \Omega)$  tako da za sve  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in V_N(\omega)$ ,  $q \in H^1(\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}; L^2(\omega))$  vrijedi

$$\begin{aligned} & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & \quad + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi \left( [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \right. \\ & \quad \left. - z_3 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) \sqrt{a} dz_3 dz_1 dz_2 = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+ + \tilde{\mathcal{P}}_-) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \partial_t \pi q \sqrt{a} dz + \frac{k}{\eta} \int_{\Omega} \partial_3 \pi \partial_3 q \sqrt{a} dz \\ & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \int_{\Omega} \partial_t \left( [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \right. \\ & \quad \left. - z_3 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) q \sqrt{a} dz_3 dz_1 dz_2 = \mp \int_{\Sigma_{\pm}} V q \sqrt{a} ds. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Prva dva sumanda u (1.1) služe za opisivanje elastičnih svojstava ljuske (vidjeti [8]). Tenzori elastičnosti  $\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_f : M_{3,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,2}(\mathbb{R})$  dani su s

$$\mathcal{C}_m \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{I} \cdot \mathbf{D}) + 4\mu \mathbf{A}_c \mathbf{C} \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{D} + \mathcal{B}_m \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{C}_f \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = a \mathcal{A} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D} + a \mathcal{B}_f \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}, \quad (1.4)$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{C}, \mathbf{D} \in M_2(\mathbb{R}), \quad \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2,$$

a  $\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_f \in M_2(\mathbb{R})$  su pozitivno definitne matrice. Tenzor elastičnosti  $\mathcal{A}$  dan je s

$$\mathcal{A} \mathbf{D} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{D}) \mathbf{A}^c + 4\mu \mathbf{A}^c \mathbf{D} \mathbf{A}^c, \quad \mathbf{D} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Za  $\mathbf{E}, \mathbf{D} \in \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$  tada imamo

$$\mathcal{A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{E}) \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{D} + 4\mu \mathbf{A}^c \mathbf{E} \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{D}. \quad (1.5)$$



oznaka	opis
$h$	debljina ljuske
$\lambda, \mu$	Lameéovi koeficijenti
$\alpha$	efektivni koeficijent naprezanja $\in (0, 1)$
$\beta_G$	inverz Biotovog modula
$k$	permeabilnost
$\eta$	dinamička viskoznost

Tablica 1.1: Oznake i njihovi opisi

Za  $\mathcal{B}_m$  iz klasičnog modela Naghdijeve tipa možemo uzeti da ima vrijednost  $\mu \mathbf{A}^c$  (vidi [6]). Matricu  $\mathcal{B}_f$  postavili smo na jediničnu matricu. Više o njenoj ulozi može se naći u [7].

Konstante  $\lambda, \mu$  nazivaju se Lameéovi koeficijenti i ovise o materijalu. Vezani su uz Poissonov broj  $\nu$  i Youngov modul elastičnosti  $E$  relacijama

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Funkcije na desnim stranama jednadžbi sustava ( $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}$  i  $V$ ) označavaju redom zadanu kontaktnu silu i zadanu normalnu komponentu protoka fluida kroz najveće strane ljuske  $\mathbf{r}(\Sigma_{\pm})$ . Pretpostavljamo  $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm} \in H^1(0, T; L^2(\omega; \mathbb{R}^3))$  i  $V \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ . Ostale konstante dane su u Tablici 1.1.

**Napomena 1.2.1.** *Sav račun u ovom radu bit će napravljen direktno za ovakvu zadaću, no on će vrijediti i za zadaće u kojima je na svim mjestima umjesto  $V_N$  stoji  $V_F$  ili  $V_K$ .*

### 1.3 Osnovna svojstva

Uvedimo pokrate:

$$\begin{aligned} a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) = & \\ h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 & \\ + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, & \end{aligned}$$

$$F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] - z_3 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}},$$

$$\tilde{\beta} = \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{k}{\eta},$$

$$\langle P, (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \rangle = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+ + \tilde{\mathcal{P}}_-) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2,$$

$$\begin{aligned}\langle V, q \rangle &= \mp \int_{\Sigma_{\pm}} V q \sqrt{a} ds, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu}.\end{aligned}$$

Skraćeno, sada problem glasi:

$$a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \pi \sqrt{a} dz = \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \rangle, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in V_N(\omega), \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{\beta} \partial_t \pi q \sqrt{a} dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3 \pi \partial_3 q \sqrt{a} dz + \\ \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) q \sqrt{a} dz = \langle V, q \rangle, \quad q \in H^1\left(\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}; L^2(\omega)\right).\end{aligned} \quad (1.7)$$

**Lema 1.3.1.** *Postoji pozitivan realan broj  $\alpha_E$  takav da vrijedi sljedeća ocjena:*

$$a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) \geq \alpha_E \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 \sqrt{a} dz. \quad (1.8)$$

*Dokaz.* Koristeći jednakost

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x - ty)^2 dt = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^2 + t^2 y^2) dt = hx^2 + \frac{h^3}{12}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 \sqrt{a} dz = \\ h \int_{\omega} \left( [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \right)^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} a \left( \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right)^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2.\end{aligned} \quad (1.9)$$

Plan je prvi sumand desne strane u (1.9) ograničiti s prvim sumandom u definiciji forme  $a_E$ , te analogno drugi sumand u (1.9) ograničiti s drugim u  $a_E$ .

Prema [8], tenzor  $\mathcal{C}_m$  je koercitivan, pa postoji konstanta  $c_1 > 0$  takva da za sve vektore  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbb{R}^3$  vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}\mathcal{C}_m(\mathbf{Q}^T [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2]) \cdot [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] &\geq c_1 \left\| \mathbf{Q}^T [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] \right\|_F^2 \\ &= c_1 \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{g}_j)^2 \right) \geq c_1 \left( (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{g}_1)^2 + (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{g}_2)^2 \right) \geq \\ &\frac{1}{2} c_1 \left( \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{g}_2 \right)^2 = \frac{1}{2} c_1 \left( [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] \right)^2.\end{aligned} \quad (1.10)$$

Nadalje, tenzor  $\mathcal{A}$ , preko kojeg je tenzor  $\mathcal{C}_f$  definiran je također pozitivno definitan. To ćemo također iskoristiti, a prije toga se sjetimo definicije tenzora  $\mathcal{C}_f$ :

$$\mathcal{C}_f \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}} = a\mathcal{A} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} + a\mathcal{B}_f \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \geq a\mathcal{A} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C},$$

gdje smo koristili zapis

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da upravo imamo sličnu situaciju:

$$\hat{\mathbf{C}}_0 := \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega} \implies \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega}.$$

Koristimo pozitivnu definitnost tenzora  $\mathcal{A}$ : postoji  $c_2 > 0$  takav da je

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f(\mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega}) \cdot (\mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega}) &= \mathcal{C}_f \hat{\mathbf{C}}_0 \cdot \hat{\mathbf{C}}_0 \geq a\mathcal{A} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_0 \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_0 \geq \\ &c_2 a \left\| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}_0 \right\|_F^2 \geq c_2 a \frac{1}{\|\mathbf{A}^c\|_F^2} \left\| \mathbf{A}^c \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega} \right\|_F^2. \end{aligned}$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je Frobeniusova norma submultiplikativna. Kao u [8], pretpostavljamo da je  $\text{ess inf}_{y \in \omega} \sigma(\mathbf{A}_c(y)) > 0$ , pa imajući još na umu da je  $(\mathbf{A}^c)^{-1} = \mathbf{A}_c$  zaključujemo da postoji konstanta  $A > 0$  takva da je

$$\|\mathbf{A}^c(y)\|_F < A, \quad \forall y \in \omega.$$

Tako dobivamo novu ogradu:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f(\mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega}) \cdot (\mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega}) &\geq c_2 a \frac{1}{A} \left\| \mathbf{A}^c \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega} \right\|_F^2 \geq \\ &\frac{c_2 a}{2} \frac{1}{A} \left( \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega} \right)^2, \end{aligned}$$

gdje smo na kraju iskoristili sličan trik kao u (1.10). Uvrštavajući

$$[\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] = [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\omega}],$$

te spajajući dobivene ocjene (primjenjujemo i integral po  $\omega$ ), dobivamo

$$\begin{aligned}
& a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) = \\
& h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
& \quad + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathcal{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \geq \\
& \quad \frac{h}{2} c_1 \int_{\omega} ([\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}])^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
& \quad + \frac{h^3}{12} \frac{c_2}{2A} \int_{\omega} a \left( \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right)^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2 \geq \\
& \quad \alpha_E \left( h \int_{\omega} ([\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}])^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} a \left( \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right)^2 \sqrt{a} dz_1 dz_2 \right) \geq \alpha_E \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 \sqrt{a} dz, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili i (1.9), te definirali

$$\alpha_E = \min \left\{ \frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2A} \right\}.$$

□

**Napomena 1.3.2.** Gornju lemu moguće je bilo i lakše izvesti koristeći koercitivnost forme  $a_E$  i ograničenost forme

$$((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) \mapsto \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \sqrt{a} dz.$$

Ipak, za neke numeričke metode koje ćemo koristiti u budućnosti (a temeljit će se na dokazu egzistencije rješenja sustava) točna i što manja konstanta  $\alpha_E$  bit će od koristi.

**Napomena 1.3.3.** Gornju lemu najčešće ćemo primjenjivati u verziji:

$$a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) \geq \nu \alpha_E \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 \sqrt{a} dz + (1 - \nu) a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})), \quad (1.12)$$

za neki  $\nu \in (0, 1)$ .

## 1.4 Dokaz jedinstvenosti rješenja

**Teorem 1.4.1.** Postoji najviše jedno rješenje  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi)$ ,  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in H^1(0, T; V_N(\omega))$ ,  $\pi \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , uz  $\partial_{z_3} \pi \in L^2((0, T) \times \Omega)$  za sustav (1.6), (1.7).

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoje dva rješenja sustava. Tada njihova razlika rješava homogen sustav s homogenim početnim uvjetom. U jednadžbu (1.6) uvrstimo  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) = \partial_t(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})$ , u jednadžbu (1.7) za test funkciju uvrštavamo  $q = \pi$ , zbrojimo i integriramo po vremenskoj skali  $[0, t]$ . Na obje lijeve strane se zadnji integral krati, a ono što ostaje je

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) d\tau + \frac{\tilde{\beta}}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \pi^2 \sqrt{a} dz d\tau + \kappa \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_3 \pi)^2 \sqrt{a} dz d\tau = 0. \quad (1.13)$$

Koristeći Newton-Leibnizovo pravilo na prva dva sumanda dobivamo

$$\frac{1}{2} a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) d\tau + \frac{\tilde{\beta}}{2} \int_{\Omega} \pi^2 \sqrt{a} dz d\tau + \kappa \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_3 \pi)^2 \sqrt{a} dz d\tau dt = 0.$$

Svaki od pribrojnika s lijeve strane je nenegativan, suma im je jednaka nuli, pa je posebno i svaki od njih jednak nuli. To ćemo posebno iskoristiti za prva dva člana. Prema [8], forma  $a_E$  je koercitivna s nekom konstantnom  $c_1 > 0$ . Zato imamo

$$0 = \int_0^T a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) d\tau \geq c_1 \int_0^T \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})\|_{V_N}^2 d\tau = \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})\|_{L^2(0,T;V_N)}^2,$$

odakle je  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = (0, 0)$ . Slično,

$$0 = \frac{\tilde{\beta}}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \pi^2 \sqrt{a} dz d\tau = \frac{\tilde{\beta}}{2} \|\pi\|_{L^2(0,T;\Omega)}^2 \implies \pi = 0.$$

□

**Napomena 1.4.2.** *U dokazu smo načinili jedan naoko nedozvoljen korak. Naime, da bismo dobili jednadžbu (1.13), za test funkcije uvrstili smo neke  $L^2$  funkcije evaluirane u točki. Ovako izvedeno, dokaz nije u potpunosti točan. Popravak postoji, no kako ćemo ga izvoditi u kompliciranijem slučaju za dokaz egzistencije rješenja (vidjeti Napomenu 2.4.3), ovdje ćemo preskočiti detalje dokaza.*

## Poglavlje 2

# Dokaz egzistencije rješenja

U ovom poglavlju dokazat ćemo egzistenciju rješenja sustava za poroelastičnu ljusku predstavljenog u prošlom poglavlju. Dokaz će se temeljiti na iterativnoj konstrukciji niza aproksimacija rješenja po uzoru na numeričku metodu za Biotov sustav jednadžbi opisanoj u [4]. Dokaz se sastoji od konstrukcije niza i dokazivanja njegovih osnovnih svojstava, a zatim i dokaza da taj niz konvergira prema rješenju. U dokazu će se javljati još podosta tehničkih poteškoća kako bismo precizno opravdali sve korake. Zato dodajemo još dva potpoglavlja, jedno na početku i jedno na kraju, u kojem izdvojeno od dokaza opravdavamo detaljno sve korake u glavnom dokazu.

### 2.1 Tehnički rezultati

**Lema 2.1.1.** *Neka je  $V$  unitaran prostor,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simetrična bilinearna neprekidna semidefinitna forma. Neka za sve funkcije  $u \in H^1([0, T]; V)$  takve da je  $a(u(0), u(0)) = 0$  i  $\partial_t u(\tau) \in V$ ,  $\forall \tau \in [0, T]$  vrijedi*

$$\int_0^T a(\partial_t u(\tau), \partial_t u(\tau)) \, d\tau \leq \varepsilon.$$

*Tada je  $a(u(t), u(t)) \leq 4t\varepsilon$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .*

*Dokaz.* Za fiksnu funkciju  $u$  iz teksta leme, definiramo funkciju  $f(t) := a(u(t), u(t))$ . Očito je  $f(0) = 0$  i  $f(t) \geq 0$ ,  $\forall t$ . Tada, koristeći verziju CSB (koja jest valjana i za semidefinitne

forme) imamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f'(\tau) \, d\tau = 2 \int_0^t a(\partial_t u(\tau), u(\tau)) \, d\tau \leq \\ &2 \left( \int_0^t a(\partial_t u(\tau), \partial_t u(\tau)) \, d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^t a(u(\tau), u(\tau)) \, d\tau \right)^{1/2} \leq \\ &2\varepsilon^{1/2} \left( \int_0^t f(\tau) \, d\tau \right)^{1/2} \leq 2\varepsilon^{1/2} \left( t \sup_{\tau \in [0, t]} (f(\tau)) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Gornja nejednakost vrijedi za sve  $\tau$  umjesto  $t$  na lijevoj strani koji su iz intervala  $[0, t]$ , za fiksiranu desnu stranu, pa imamo:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [0, t]} (f(\tau)) &\leq 2\varepsilon^{1/2} t^{1/2} \left( \sup_{\tau \in [0, t]} (f(\tau)) \right)^{1/2} \\ \implies f(t) &\leq \sup_{\tau \in [0, t]} (f(\tau)) \leq 4\varepsilon t. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.1.2.** *Neka je dan neprekidan operator  $A : X \rightarrow Y$  na Banachovim prostorima, te  $[a, b]$  interval u  $\mathbb{R}$ . Za  $f \in H^k(a, b; X)$  definiramo*

$$(Af)(t) := A(f(t)).$$

*Tada vrijedi sljedeća implikacija*

$$f \in H^k(a, b; X) \implies Af \in H^k(a, b; Y).$$

*Dokaz.* Najprije primijetimo da je  $t \mapsto (Af)(t)$  izmjeriva funkcija jer je  $A$  neprekidna, a  $f$  izmjeriva. Po definiciji  $f \in H^k(a, b; X)$  znači da

$$\sum_{i=0}^k \|\partial_t^i f\|_{L^2(a, b; X)}^2 < \infty.$$

Kako je  $A$  neprekidan linearan operator, imamo

$$\sum_{i=0}^k \|\partial_t^i (Af)\|_{L^2(a, b; Y)}^2 = \sum_{i=0}^k \|A\partial_t^i f\|_{L^2(a, b; Y)}^2 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^2 \left( \sum_{i=0}^k \|\partial_t^i f\|_{L^2(a, b; X)}^2 \right) < \infty,$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili činjenicu da operator derivacije  $\partial_t$  i  $A$  komutiraju zbog neprekidnosti. □

**Lema 2.1.3.** *Neka je  $X$  separabilan Banachov prostor funkcija u  $\mathbb{R}$ . Tada je linearna ljuska funkcija oblika*

$$\{\varphi u : \varphi \in L^2([0, T]), u \in X\}$$

*gusta u  $L^2(0, T; X)$ .*

*Dokaz.* Neka su  $f \in L^2(0, T; X)$  i  $\varepsilon > 0$  proizvoljni. Prostor  $X$  je separabilan, pa postoji prebrojiv skup  $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$  takav da

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(u_k, \varepsilon) = X.$$

Induktivno definiramo skupove  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  kao

$$B_k = K(u_k, \varepsilon) \setminus \bigcup_{l \leq k-1} B_l.$$

Iz konstrukcije su oni u parovima diskjunktni i u uniji daju cijeli  $X$ , dakle čine particiju za  $X$ . Također, trivijalno je vidjeti da je  $B_k \subset K(u_k, \varepsilon)$ . Definirajmo izmjerive skupove  $A_k := f^{-1}(B_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Kako skupovi  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  čine particiju za  $X$ , tako  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  čine particiju za  $[0, T]$ .

Definirajmo sad funkciju  $g \in L^2(0, T; X)$  na sljedeći način:

$$g(t) = u_k, \text{ gdje je } k \text{ jedinstveni prirodan broj takav da je } t \in A_k.$$

Iz konstrukcije, za sve  $t \in [0, T]$  vrijedi da je  $\|f(t) - g(t)\|_X \leq \varepsilon$ , pa je

$$\|f - g\|_{L^2(0, T; X)} \leq \int_0^T \varepsilon = T\varepsilon.$$

Definirajmo niz funkcija  $(g_n)_n$  na sljedeći način:

$$g_n = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} u_k.$$

Primijećujemo da je

$$g_n(t) \rightarrow g(t),$$

jer kako skupovi  $A_k$  prekrivaju cijeli interval  $[0, T]$ , za svaki  $t$  postoji prirodan broj  $n_0(t)$  takav da za sve  $n < n_0(t)$  vrijedi  $g_n(t) = 0$  i da za sve  $n \geq n_0(t)$  vrijedi  $g_n(t) = g(t)$ . Zato možemo primijeniti Lebesgueov teorem o monotonij konvergenciji na funkcije

$$t \mapsto \|g_n(t)\|_X^2 \text{ i } t \mapsto \|g(t)\|_X^2$$

i tako dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|g_n(t)\|_X^2 dt = \int_0^T \|g(t)\|_X^2 dt.$$



Neka je  $h = g_n$  za  $n \in \mathbb{N}$  takav da je razlika gornjih integrala manja od  $\varepsilon$ . Tada imamo

$$\|h - g\|_{L^2(0,T;X)} = \int_{[0,T] \setminus \bigcup_{k \leq n} A_k} \|g(t)\|_X^2 dt = \int_0^T \|g(t)\|_X^2 dt - \int_0^T \|h(t)\|_X^2 dt \leq \varepsilon.$$

Dakle, funkcija  $h$  nalazi se u linearnoj ljusci funkcija traženog oblika i razlikuje se od tražene funkcije  $f$  za najviše  $(T + 1)\varepsilon$ , čime je dokaz gotov.  $\square$

Za potrebe glavnog dokaza uvest ćemo i prostor funkcija

$$W := \{(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi) : (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in H^1(0, T; V_N), \pi \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), \partial_3 \pi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\},$$

snabdjeven normom

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi)\|_W^2 := & \chi \kappa \tilde{\beta} \max_{0 \leq t \leq T} \|\partial_3 \pi\|_{L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)}^2 + (2\chi - 1) \tilde{\beta}^2 \|\partial_t \pi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2 + \\ & 2(1 - \nu) \left( \frac{\nu \alpha_E}{\tilde{\alpha}^2 \chi^2} + \frac{1}{\tilde{\beta} \chi} \right)^{-1} \int_0^T a_E(\partial_t(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), \partial_t(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) d\tau + \\ & \|\tilde{\beta} \partial_t \pi + \chi \tilde{\alpha} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2, \end{aligned}$$

gdje  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)}$  označava normu

$$f \mapsto \left( \int_{\Omega} |f|^2 \sqrt{a} dz \right)^{1/2},$$

a  $L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)$  je prostor izmjerivih funkcija kojima je gore opisana norma konačna. Ta je norma ekvivalentna uobičajenoj normi  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  na  $L^2(\Omega)$  zbog svojstava funkcije  $a$ . U definiciji norme  $\|\cdot\|_W$  broj  $\chi$  je u ovom trenutku samo parametar veći ili jednak  $\frac{1}{2}$ . Kako ćemo često umjesto norme elementa prostora  $W$  gledati udaljenost dva elementa tog prostora, prirodnije je baratati metrikom

$$d_W((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, q)) := \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi) - (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, q)\|_W.$$

Kako je ovo jedina metrika koju ćemo definirati u radu, u nastavku izostavljamo oznaku  $W$  u njenom zapisu. Prostor  $W$  iskoristit će nam kao prostor u kojem ćemo pronaći jedinstveno rješenje sustava. Zasad vrlo umjetan i neprirodan izbor norme u samome dokazu glavnog rezultata postat će jasniji.

**Lema 2.1.4.** *Poviše definiran prostor  $W$  je Banachov prostor.*

*Dokaz.* Prvo bismo trebali dokazati da je norma  $\|\cdot\|_W$  uistinu norma. Pokazat ćemo samo tvrdnju da ako je norma elementa iz  $W$  jednaka nuli, da je taj element nula. Ako je  $\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi)\|_W = 0$ , tada prema Lemi 2.1.1 imamo da je:

$$\|\pi\|_{L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}), (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\|\tilde{\beta}\pi + \chi\tilde{\alpha}F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\sqrt{a}\,dz))}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Prema koercitivnosti opisanoj u [8] imamo  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = 0$ . Iz prve jednadžbe imamo da je tlak jednak nuli.

Uzmimo sada proizvoljan Cauchyjev niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  u  $W$ . Dakle, za neki fiksni  $\varepsilon > 0$  postoji prirodan  $n_0$  takav da za sve  $m, n \geq n_0$  vrijedi

$$d((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n), (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m, \pi^m))^2 \leq \varepsilon.$$

Prema Lemi 2.1.1 također dobivamo

$$2(1-\nu) \left( \frac{\nu\alpha_E}{\tilde{\alpha}^2\chi^2} + \frac{1}{\tilde{\beta}\chi} \right)^{-1} \int_0^T a_E(\partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)), \partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m))) dt \leq \varepsilon$$

$$\implies 2(1-\nu) \left( \frac{\nu\alpha_E}{\tilde{\alpha}^2\chi^2} + \frac{1}{\tilde{\beta}\chi} \right)^{-1} \int_0^T a_E((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m), (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)) dt \leq 4T\varepsilon.$$

Opet koristimo koercitivnost forme  $a_E$  (s konstantom  $c_1$ ) kako bismo dobili

$$\|(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)\|_{H^1(0,T;V_N)}^2 =$$

$$\int_0^T \|(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)\|_{V_N}^2 dt + \int_0^T \|\partial_t(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)\|_{V_N}^2 dt \leq$$

$$\frac{1}{c_1} \left( \int_0^T a_E(\partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)), \partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m))) dt + \right.$$

$$\left. \int_0^T a_E((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m), (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m)) dt \right) \leq C\varepsilon$$

Odavde zaključujemo da je niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjev u potpunom prostoru  $H^1(0, T; V_N)$ , je i konvergentan s limesom  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})$ .

Slično radimo i s tlakom, opet prema Lemi 2.1.1 dobivamo

$$\|\tilde{\beta}(\partial_t\pi^n - \partial_t\pi^m) + \chi\tilde{\alpha}(\partial_tF(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - \partial_tF(\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m))\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\sqrt{a}\,dz))}^2 \leq \varepsilon$$

$$\implies \|\tilde{\beta}(\pi^n - \pi^m) + \chi\tilde{\alpha}(F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) - F(\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m))\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\sqrt{a}\,dz))}^2 \leq 4T\varepsilon$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned}
 \|\pi^n - \pi^m\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \|\pi^n - \pi^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_t \pi^n - \partial_t \pi^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \\
 &\frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left( \|\tilde{\beta}(\pi^n - \pi^m) + \chi \tilde{\alpha}(F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) - F(\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\omega}^m))\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2 + \right. \\
 &\quad \left. \|\chi \tilde{\alpha}(F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) - F(\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\omega}^m))\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2 \right) \\
 &\leq \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left( \|\tilde{\beta}(\pi^n - \pi^m) + \chi \tilde{\alpha}(F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) - F(\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\omega}^m))\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2 + \right. \\
 &\quad \left. \chi \tilde{\alpha} M \|(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\omega}^m)\|_{H^1(0,T;V_N)}^2 \right) \leq C\varepsilon,
 \end{aligned}$$

gdje smo s  $M$  označili normu ograničenog funkcionala  $F \in \mathcal{L}(V_N)$ . Zaključujemo tako da je  $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjev niz u potpunom prostoru  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , pa je i konvergentan s limesom  $\pi$ .

Opet iz Cauchyjevosti niza  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dobivamo posebno i da je

$$\chi \kappa \tilde{\beta} \max_{0 \leq t \leq T} \|\partial_3 \pi^n - \partial_3 \pi^m\|_{L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)}^2 \leq \varepsilon.$$

Zato je niz  $(\partial_3 \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjev u potpunom prostoru  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , pa je i konvergentan i konvergira ka nekom  $p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Uzmimo neku test funkciju  $\psi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$ . Iz jakih konvergencija nizova  $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(\partial_3 \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  slijede i slabe konvergencije tih nizova, pa imamo

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_\Omega p \psi \, dz dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \partial_3 \pi^n \psi \, dz dt = \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \pi^n \partial_3 \psi \, dz dt = - \int_0^T \int_\Omega \pi \partial_3 \psi \, dz dt.
 \end{aligned}$$

Po definiciji, funkcija  $\pi$  ima slabu derivaciju u smislu distribucija:

$$\partial_3 \pi = p.$$

Kako je  $p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , isto imamo i za  $\partial_3 \pi$ , te je time dokaz gotov.  $\square$

**Napomena 2.1.5.** *Primijetimo da smo u gornjem dokazu iskoristili samo tri sumanda u definiciji norme  $\|\cdot\|_W$ , iako ih imamo četiri na raspolaganju. To nam pokazuje da sumand koji nismo iskoristili*

$$(2\chi - 1) \tilde{\beta}^2 \|\partial_t \pi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}^2$$

*nam nije niti potreban, dakle, parametar  $\chi$  ustinu može biti jednak  $\frac{1}{2}$ . Jasno je da manji od te vrijednosti ipak ne može biti (jer potencijalno u definiciji norme vidimo da kvadrat norme može biti negativan).*

## 2.2 Definicija iteracija

Iteracije dolaze iz klase operator-splitting metoda u kojem je cilj operator sustava jednadžbi rastaviti na zbroj dva operatora koji su u praksi jednostavniji za riješiti, te se oni rješavaju u dva potkoraka. Češće se koriste za numeričko rješavanje sustava, no mi ćemo ih ovdje iskoristiti kao alat za dokaz egzistencije rješenja.

Ideja u „undrained split metodi” (posebnoj vrsti operator-splitting metodi) je razdvojiti jednadžbe sustave (1.1) i (1.2) koristeći pretpostavku da je (parametrizirana) masa fluida

$$m = \tilde{\beta}\pi + \chi\tilde{\alpha}F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})$$

prilikom deformacije ljuske konstantna (eng. undrained znači bez drenaže, bez odvođenja fluida). Ta pretpostavka ne znači da ćemo u naš model uvesti dodatnu pretpostavku, nego ćemo se tom vezom riješiti jedne nepoznanice (konkretno  $\pi$ ) u jednoj od jednadžbi, te ćemo jednadžbe razdvojiti. Točno rješenje dobit ćemo na limesu iteracija. U gornjoj definiciji mase fluida  $\chi$  je zasada parametar koji ćemo odrediti na kraju dokaza, i poklapa se s parametrom  $\chi$  uvedenim u normi i metrici prostora  $W$ .

Zapišimo detaljnije opisane iteracije. Na početku postavljamo  $(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^0, \pi^0) = (0, 0, 0)$ . Sljedeći korak dijelimo na dva potkoraka. U prvom potkoraku deformaciju  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1/2})$  računamo iz jednadžbe (1.6), dok vrijednost tlaka  $\pi^{n+1/2}$  računamo s pretpostavkom da se masa fluida nije promijenila ( $m^{n+1/2} = m^n$ ). Dakle, rješavamo sustav

$$\begin{cases} a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1/2}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \pi^{n+1/2} \sqrt{a} dz = \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \rangle, \\ m^{n+1/2} = \tilde{\beta}\pi^{n+1/2} + \chi\tilde{\alpha}F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1/2}) = \tilde{\beta}\pi^n + \chi\tilde{\alpha}F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = m^n. \end{cases} \quad (2.1)$$

U drugom potkoraku deformaciju  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$  ostavljamo istu kao u prošlom potkoraku, dok tlak  $\pi^{n+1}$  tražimo iz jednadžbe (1.7):

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}) = (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1/2}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1/2}), \\ \int_{\Omega} \tilde{\beta}\partial_t\pi^{n+1}q\sqrt{a}dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3\pi^{n+1}\partial_3q\sqrt{a}dz = \langle V, q \rangle - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})q\sqrt{a}dz. \end{cases} \quad (2.2)$$

U gornja dva sustava imamo četiri jednadžbe od kojih su samo dvije diferencijalne, dok su druge dvije algebarske. Njih se lako možemo riješiti, "preskočiti" polovični korak i napisati iteracije kraće. Uz poznatu iteraciju  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)$  sljedeću tražimo rješavajući redom

$$\begin{aligned} a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) + \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz = \\ \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \rangle + \tilde{\alpha} \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \pi^n \sqrt{a} dz + \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\beta}\partial_t\pi^{n+1}q\sqrt{a}dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3\pi^{n+1}\partial_3q\sqrt{a}dz = \langle V, q \rangle - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})q\sqrt{a}dz. \quad (2.4)$$

Ove iteracije ponavljamo do željene točnosti.

**Napomena 2.2.1.** Koristeći definiciju mase  $m^n$ , jednadžbu (2.3) možemo zapisati i na ovaj način:

$$a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega})) + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \chi F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega}) \sqrt{ad}z = \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega}) \rangle + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega}) m^n \sqrt{ad}z. \quad (2.5)$$

**Lema 2.2.2.** Niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadan iterativno relacijama (2.3), (2.4) i početnom iteracijom  $(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\omega}^0, \pi^0) = (0, 0, 0)$  nalazi se u prostoru  $W$ .

*Dokaz.* Induktivno razmatrajući, možemo zaključiti da je dovoljno pokazati implikaciju

$$(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n, \pi^n) \in W \implies (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}, \pi^{n+1}) \in W.$$

Varijacijska zadaća (2.3) je eliptička za  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1})$ , po varijablama  $(z_1, z_2)$  uz parametar  $t$ . Sastoji se od dvije bilinearne forme. Prva ( $a_E$ ) je koercitivna prema [8], dok je druga trivijalno nenegativna. Također, obje su i ograničene (za prvu koristimo isti argument, dok za drugu možemo iskoristiti Lemu 1.3.1. Lax-Milgramov teorem nam daje da postoji jedinstveno rješenje zadaće  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(t), \tilde{\omega}^{n+1}(t))$  za svako vrijeme  $t \in [0, T]$  (2.3) u prostoru  $V_N$ . Neka je na trenutak  $\pi^n = 0, (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) = (0, 0)$ . Kako je  $P \in H^1(0, T; L^2(\omega; \mathbb{R}^3))$ , primijenjujući Lemu 2.1.2 na operator rješenja

$$P \mapsto (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1})$$

dobivamo da je u tom slučaju  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) \in H^1(0, T; V_N)$ . Slično možemo argumentirati i kada na tren stavimo  $P = 0, (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) = (0, 0)$  i  $P = 0, \pi = 0$ . Kako je zadaća linearna, zbroj ta tri rješenja je rješenje za (2.3) i nalazi se u prostoru  $H^1(0, T; V_N)$ .

Zadaća (2.4) je parabolička zadaća za  $\pi^{n+1}$  po varijablama  $(t, z_3)$  uz parametre  $(z_1, z_2)$ . Opet lako zaključujemo da za svaki  $(z_1, z_2)$  postoji jedinstveno rješenje. Također, teorija regularnosti za paraboličke zadaće (iz [2]) nam kaže da za to rješenje i za skoro svaki  $(z_1, z_2) \in \omega$

$$\begin{aligned} \pi^{n+1}(z_1, z_2) &\in L^2(0, T; H^2(-h/2, h/2)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(-h/2, h/2)), \\ \partial_t \pi^{n+1}(z_1, z_2) &\in L^2(0, T; L^2(-h/2, h/2)). \end{aligned}$$

Posebno to znači

$$\pi^{n+1}(z_1, z_2) \in H^1(0, T; L^2(-h/2, h/2)), \quad \partial_3 \pi^{n+1}(z_1, z_2) \in L^\infty(0, T; L^2(-h/2, h/2)).$$

Slično argumentiranje kao za  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1})$ , koristeći i da je  $V \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ , daje nam navedena svojstva i po  $(z_1, z_2)$ .  $\square$

### 2.3 Dokaz konvergencije iteracija

Dokažimo sada glavni rezultat:

**Teorem 2.3.1.** *Niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadan iterativno relacijama (2.3), (2.4) i početnom iteracijom  $(\tilde{\mathbf{u}}^0, \tilde{\omega}^0, \pi^0) = (0, 0, 0)$  stvara konvergentan niz u prostoru  $W$ , čiji je limes rješenje sustava (1.1), (1.2).*

*Dokaz.* Jednadžbu (2.5) zadovoljavaju  $n$ -ta i  $(n + 1)$ -ta iteracija. Oduzmimo ih. Mnogo toga se krati. Preostalo ćemo lakše zapisati uvodeći pokrate

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})^n &:= (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n) - (\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}, \tilde{\omega}^{n-1}), \\ \delta m^n &:= m^n - m^{n-1}, \\ \delta \pi^n &:= \pi^n - \pi^{n-1}, \\ \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^n &:= \partial_t \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})^n, \quad \delta m_t^n := \partial_t \delta m^n, \quad \delta \pi_t^n := \partial_t \delta \pi^n. \end{aligned}$$

Rezultat oduzetih jednadžbi je

$$a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})^{n+1}, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) + \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})^{n+1}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz = \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \delta m^n \sqrt{a} dz. \quad (2.6)$$

Derivirajmo gornju jednaždbu po  $t$ :

$$a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) + \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz = \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \delta m_t^n \sqrt{a} dz. \quad (2.7)$$

Za test funkciju u gornjoj relaciji biramo  $\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}$  i dobivamo

$$\begin{aligned} a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}) + \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}))^2 \sqrt{a} dz = \\ \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}) \delta m_t^n \sqrt{a} dz. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Koristeći Lemu 1.3.1 s lijeve strane jednadžbe (2.8) i težinsku  $A$ - $G$  nejednakost s desne dobivamo

$$\begin{aligned} (1 - \nu) a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}) + \left( \nu \alpha_E + \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \right) \int_{\Omega} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}))^2 \sqrt{a} dz \leq \\ \frac{\varepsilon \tilde{\alpha}^2}{2 \tilde{\beta}} \chi \int_{\Omega} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}))^2 \sqrt{a} dz + \frac{1}{2 \tilde{\beta} \varepsilon \chi} \int_{\Omega} (\delta m_t^n)^2 \sqrt{a} dz. \end{aligned}$$

Uz optimalan odabir za gornju ogradu

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}^2 \chi} \left( \nu \alpha_E + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \chi \right)$$

dobivamo prvu bitnu nejednakost

$$2(1 - \nu) \left( \nu \alpha_E + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \chi \right)^{-1} a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) + \int_{\Omega} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}))^2 \leq \left( \tilde{\alpha} \chi + \frac{\nu \alpha_E \tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \right)^{-2} \int_{\Omega} (\delta m_t^n)^2 \sqrt{a} dz. \quad (2.9)$$

Pozabavimo se sad jednadžbom (2.4)

$$\int_{\Omega} \tilde{\beta} \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial t} q \sqrt{a} dz + \kappa \int_{\Omega} \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z_3} \frac{\partial q}{\partial z_3} \sqrt{a} dz = \langle V, q \rangle - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}) q \sqrt{a} dz.$$

Oduzmimo jednadžbe za  $n$ -tu i  $(n+1)$ -tu iteraciju:

$$\int_{\Omega} \tilde{\beta} \delta \pi_t^{n+1} q \sqrt{a} dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3 \delta \pi^{n+1} \partial_3 q \sqrt{a} dz = -\tilde{\alpha} \int_{\Omega} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) q \sqrt{a} dz. \quad (2.10)$$

Za test funkciju uvrstimo  $\delta \pi_t^{n+1}$  i integrirajmo po vremenu od 0 to  $t$ . Uvažavamo i to da je  $\delta \pi^{n+1}|_{t=0} = 0$ .

$$\tilde{\beta} \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \pi_t^{n+1})^2 \sqrt{a} dz d\tau + \tilde{\alpha} \int_0^t \int_{\Omega} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) \delta \pi_t^{n+1} \sqrt{a} dz d\tau + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} |\partial_3 \delta \pi^{n+1}|^2 \sqrt{a} dz = 0. \quad (2.11)$$

Sada kombiniramo (ne)jednakosti (2.9) i (2.11). Primijetimo da se na lijevim strana pojavljuju elementi kvadrata binoma definicije mase  $m$ :

$$m^2 = (\tilde{\beta} \pi + \chi \tilde{\alpha} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}))^2 = \tilde{\beta}^2 \pi^2 + 2\chi \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \pi F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \chi^2 \tilde{\alpha}^2 F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})^2.$$

Zato nejednakost (2.9) (koju smo prethodno integrirali po vremenu) množimo s  $\chi^2 \tilde{\alpha}^2$ , jednakost (2.11) s  $2\chi \tilde{\beta}$ , te dobiveno zbrojimo. Odmah prešutno koristimo i gornju relaciju kvadrata binoma. Dobivamo

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\delta m_t^{n+1})^2 \sqrt{a} dz d\tau + (2\chi - 1) \tilde{\beta}^2 \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \pi_t^{n+1})^2 \sqrt{a} dz d\tau + \chi \tilde{\beta} \kappa \int_{\Omega} |\partial_3 \delta \pi^{n+1}|^2 \sqrt{a} dz + 2(1 - \nu) \left( \frac{\nu \alpha_E}{\tilde{\alpha}^2 \chi^2} + \frac{1}{\tilde{\beta} \chi} \right)^{-1} \int_0^t a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) d\tau \leq \left( 1 + \frac{\nu \alpha_E \tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}^2 \chi} \right)^{-2} \int_0^t \int_{\Omega} (\delta m_t^n)^2 \sqrt{a} dz d\tau. \quad (2.12)$$

Gornja relacija nam pokazuje zašto je norma  $\|\cdot\|_W$ , odnosno metrika  $d$  definirana na način na koji smo je definirali. Uvažavajući ogradu (2.12) za vrijeme  $t = T$ , dobivamo

$$d((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}, \pi^{n+1}), (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)) \leq \gamma d((\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n), (\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n-1}, \pi^{n-1})),$$

gdje je

$$\gamma = \left(1 + \frac{\nu\alpha_E\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}^2\chi}\right)^{-1}.$$

Kako je  $\gamma < 1$ , niz je konvergentan. Dapače,  $\gamma$  je najmanji kad je  $\chi$  najmanji. Kako mora biti  $\chi \geq \frac{1}{2}$ , optimalni je  $\chi = \frac{1}{2}$ . I time je dokaz gotov.  $\square$

## 2.4 Dodatna pojašnjenja

Ovo potpoglavlje služi kako bi sve korake u dokazu do kraja formalno opravdali.

**Napomena 2.4.1.** *Dokaz smo završili zaključkom da ako je  $\gamma < 1$  da je niz konvergentan. Za dokaz toga ćemo simulirati korake iz Banachovog teorema o fiksnoj točki. Za prirodne  $m, n \in \mathbb{N}$  uvedimo pokratu*

$$d(m, n) := d((\tilde{\mathbf{u}}^m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^m, \pi^m), (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)).$$

Teleskopiranjem se možemo uvjeriti da vrijedi

$$d(n+1, n) \leq \gamma d(n, n-1) \leq \gamma^2 d(n-1, n-2) \leq \dots \leq \gamma^n d(1, 0), \quad i$$

$$\begin{aligned} d(n+k, n) &\leq d(n+k, n+k-1) + d(n+k-2, n+k-2) + \dots + d(n+1, n) \leq \\ &(\gamma^{n+k-1} + \gamma^{n+k-2} + \dots + \gamma^n) d(1, 0) \leq \gamma^n \frac{1}{1-\gamma} d(1, 0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Neka je sad zadan  $n_0 \in \mathbb{N}$ , te  $m, n \geq n_0$ . Tada je

$$d(m, n) \leq \gamma^{\min(m, n)} \frac{1}{1-\gamma} d(1, 0) \leq \gamma^{n_0} \frac{1}{1-\gamma} d(1, 0).$$

Dakle, niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  je Cauchyjev u potpunom prostoru  $W$ , pa je i konvergentan s limesom  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi)$ . Također, primijetimo da kada u nejednakosti (2.13) pustimo  $k \rightarrow \infty$ , dobijemo

$$d(\infty, n) \leq \gamma^n \frac{1}{1-\gamma} d(1, 0),$$

gdje smo uveli pokratu

$$d(\infty, n) := d((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \pi), (\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \pi^n)).$$



Koristeći gornju ogradu, vidimo da za neku toleranciju  $\varepsilon$  možemo lako odrediti najmanji  $n = n_\varepsilon$  za koji je  $d(\infty, n) \leq \varepsilon$ . Također, kako je funkcija

$$\gamma \mapsto \gamma^n \frac{1}{1-\gamma}$$

rastuća, također zaključujemo da što je  $\gamma$  manji, da je i  $n_\varepsilon$  manji. Za potrebe ovog dokaza, imamo samo uvjet na parametar  $\chi$  da bude veći ili jednak  $1/2$ . No, u slučaju da netko želi razviti numeričku metodu na temelju ovog dokaza, zbog gornjeg objašnjenja iskoristit će  $\chi = 1/2$ , jer je tada  $\gamma$  najmanji, a time i  $n_\varepsilon$  i očekivano vrijeme izvođenja.

**Napomena 2.4.2.** Objasnimo još zašto dobiveni niz konvergira upravo ka rješenju. Neka niz  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\omega}^n, \pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira ka  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}, \pi)$  u metrici  $d$ . Kako je naš prostor  $W$  zatvoren, limes je dobro definiran i nalazi se u istom tom skupu kao i niz trojki. Dokažimo još da limes zadovoljava jednadžbe (1.6) i (1.7). Znamo da niz zadovoljava jednadžbe (2.4) i (2.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\beta} \partial_t \pi^{n+1} q \sqrt{a} dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3 \pi^{n+1} \partial_3 q \sqrt{a} dz &= \langle V, q \rangle - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) q \sqrt{a} dz, \\ a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz &= \\ &= \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \rangle + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) m^n \sqrt{a} dz. \end{aligned}$$

Mi ćemo dokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\beta} \partial_t \pi q \sqrt{a} dz + \kappa \int_{\Omega} \partial_3 \pi \partial_3 q \sqrt{a} dz &= \langle V, q \rangle - \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}) q \sqrt{a} dz, \quad (2.14) \\ a_E((\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dz &= \langle P, (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \rangle + \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) m \sqrt{a} dz. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Fiksirajmo test funkciju  $q$ , uzmimo proizvoljnu test funkciju  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  i pomnožimo njome razliku prvih jednadžbi, i integrirajmo po  $\tau$ . Dokazat ćemo da to konvergira u nulu. Imamo:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{\beta} \partial_t (\pi^{n+1} - \pi) q \psi \sqrt{a} dz d\tau + \kappa \int_0^t \int_{\Omega} \partial_3 (\pi^{n+1} - \pi) \partial_3 q \psi \sqrt{a} dz d\tau + \right. \\ & \quad \left. \tilde{\alpha} \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t F((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})) q \psi \sqrt{a} dz d\tau \right| \leq \\ & \quad \tilde{\beta} \|\partial_t \pi^{n+1} - \partial_t \pi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))} \|q \psi\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \\ & \quad \kappa t^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \|\partial_3 \pi^{n+1} - \partial_3 \pi\|_{L^2(\Omega, \sqrt{a} dz)} \|\psi \partial_3 q\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))} + \\ & \quad \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_E} \left( \int_0^T a_E(\partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})), \partial_t((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}))) d\tau \right)^{1/2} \\ & \quad \cdot \|q \psi\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))}. \end{aligned}$$

Za fiksne  $q, \psi$  i kad  $n \rightarrow \infty$ , desna strana ide u nulu, pa imamo da  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}, \pi)$  zadovoljava

$$\int_0^t \int_{\Omega} \tilde{\beta} \partial_t \pi q \psi \sqrt{a} dz d\tau + \int_0^t \kappa \int_{\Omega} \partial_3 \pi \partial_3 q \psi \sqrt{a} dz d\tau = \int_0^t \langle V, q \rangle \psi d\tau - \int_0^t \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \partial_t F(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}) q \psi \sqrt{a} dz d\tau.$$

Zbog proizvoljnosti test funkcija  $\psi$  dobivamo (2.14). Slično radimo i s parom drugih jednadžbi:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) \psi d\tau + \right. \\ & \quad \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})) F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \psi \sqrt{a} dz d\tau \\ & \quad \left. - \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) (m^n - m) \psi \sqrt{a} dz d\tau \right| \leq \\ & \quad \left( \int_0^t a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}), ((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}))) d\tau \right. \\ & \quad \left. \cdot \int_0^t a_E((\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}), (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) \psi^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & \quad \left( \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta} \alpha_E} \int_0^t a_E((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}), ((\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\omega}^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega}))) d\tau \right. \\ & \quad \left. \cdot \int_0^t \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})^2 \psi^2 \sqrt{a} dz d\tau \right)^{1/2} + \|m^n - m\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega, \sqrt{a} dz))} \left( \int_0^t \int_{\Omega} F(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})^2 \psi^2 \sqrt{a} dz d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Kao i u slučaju s prošlim jednadžbama, desna strana ide u nulu, pa zbog proizvoljnosti test funkcija za  $\psi$  dobivamo (2.15), i dokaz prošlog teorema u potpunosti je gotov.

**Napomena 2.4.3.** Ako je čitatelj pažljivo pratio dokaz, može primijetiti da korak dobivanja jednakosti (2.8) iz (2.7), kao i (2.11) iz jednadžbe (2.10) traži dodatno pojašnjenje. Naime, u tom trenutku uvrštavamo posebnu test funkciju  $\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}(t) \in V_N$ . No, funkcija  $\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}$  nalazi se u prostoru  $L^2(0, T; V_N)$  i zato ne možemo uzeti vrijednost te funkcije u svakom vremenu  $t \in [0, T]$ . Preciznije bi dokaz trebao ići ovako: uzmimo jednadžbu (2.7), pomnožimo je test dovoljno glatkom funkcijom  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  i integrirajmo po vremenu. Dobivamo

$$\int_0^T a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}, \psi(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\omega})_t^{n+1}) F(\psi(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) \sqrt{a} dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\psi(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})) \delta m_t^n \sqrt{a} dz d\tau.$$

Gornja relacija vrijedi za sve umnoške  $\psi(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})$ . Također, vrijedi i za sve linearne kombinacije tih funkcija, a po gustoći i prema Lemi 2.1.3 vrijedi i za svaku funkciju iz  $L^2(0, T; V_N)$ .

Jedna takva funkcija je  $\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}$ , pa je možemo uvrstiti i dobiti

$$\int_0^T a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1})d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} \chi \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}))^2 \sqrt{ad}zd\tau = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) \delta m_t^n \sqrt{ad}zd\tau. \quad (2.16)$$

Dobivena jednačba (2.16) skoro odgovara željenoj jednačbi (2.8). Da bismo do kraja opravdali račun, sad ćemo primijeniti sve ograde na jednačbu (2.16) kao što smo to radili na (2.8) i dobiti analogon relacije (2.9)

$$2(1 - \nu) \left( \nu\alpha_E + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \chi \right)^{-1} \int_0^T a_E(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}, \delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1})d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}))^2 d\tau \leq \left( \tilde{\alpha}\chi + \frac{\nu\alpha_E\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \right)^{-2} \int_0^T \int_{\Omega} (\delta m_t^n)^2 \sqrt{ad}zd\tau. \quad (2.17)$$

Nju ćemo sada iskoristiti da bismo dobili jednačbu (2.12).

Slično, opravdavamo i korake kojima smo dobili jednačbu (2.11). Množimo (2.10) s test funkcijom  $\psi$  i integriramo po vremenu:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\beta} \delta \pi_t^{n+1} \psi q \sqrt{ad}zd\tau + \kappa \int_0^T \int_{\Omega} \partial_3 \delta \pi_t^{n+1} \psi \partial_3 q \sqrt{ad}zd\tau = - \tilde{\alpha} \int_0^T \int_{\Omega} F(\delta(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})_t^{n+1}) \psi q \sqrt{ad}zd\tau.$$

Gornja relacija vrijedi za sve test funkcije  $\psi$  i za sve  $q \in H^1(\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}; L^2(\omega))$ . Ponovno prema Lemi 2.1.3 imamo da vrijedi i za sve  $q \in L^2(H^1(\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}; L^2(\omega)))$ , ili preglednije

$$q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \partial_3 q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Upravo u tom skupu leži funkcija  $\delta \pi_t^{n+1}$  (jer je za skupove  $X$  konačne mjere vrijedi  $L^\infty(X) \subset L^2(X)$ ), pa dobivamo relaciju (2.11).

Poglavlje završavamo s još dvije dodatne napomene.

**Napomena 2.4.4.** Kada bismo imali nekonstantnu permeabilnost ili dinamičku viskoznost,  $\kappa$  ne bi bio konstantan. To tada bi jednakost (2.11) postala nejednakost uvođenjem

$$\kappa_{min} = \min_{\Omega} \kappa$$

umjesto  $\kappa$ . To ne utječe na račun koji slijedi nakon te (ne)jednakosti.

**Napomena 2.4.5.** Promatranjem konstante  $\gamma$  vidimo da je manja što je  $\nu$  veći. Ipak, kako vidimo u dokazu, nužno je da je  $\nu < 1$ , zbog  $a_E$  dijela u metrici  $d$ . Kako ne postoji najbolji, to jest najveći mogući dozvoljeni  $\nu$ , ne biramo nijednu vrijednost za  $\nu$ .

## Poglavlje 3

# Numerička aproksimacija

U ovom poglavlju pokazat ćemo neka rješenja početnog sustava (1.1), (1.2) dobivena numeričkim putem. Za to treba razviti neku numeričku metodu. Jednu takvu objašnjavamo u prvom potpoglavlju, implementiramo je u programskom paketu *FreeFem++* ([3]), te u drugom potpoglavlju pokazujemo rezultate na primjerima nekih ljuski.

Napomenimo da ćemo ovdje koristiti puni zapis sustava (kao u (1.1), (1.2)), a ne skraćeni zapis jednadžbi početnog sustava (kao u (1.6), (1.7)).

### 3.1 Opis metode

#### Diskretizacija po vremenu

Fiksirajmo vremenski korak  $\Delta t$  i označimo s  $n$  vrijednost svih funkcija u vremenu

$$t^n = n\Delta t.$$

Značenje ove oznake drugačije je u ovom poglavlju od oznake u prošlom poglavlju, gdje smo na taj način označavali različite iteracije funkcija. Sada koristimo Eulerovu implicitnu metodu za jednadžbe (1.1), (1.2) kako bismo dobili problem za nepoznate funkcije u vremenu

$t^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \\
 & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi^{n+1} dz_3 [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_3 \pi^{n+1} dz_3 \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} a dz_1 dz_2 \\
 & = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N, \\
 & \int_{\Omega} \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\Delta t} q \sqrt{a} dz + \frac{k}{\eta} \int_{\Omega} \partial_3 \pi^{n+1} \partial_3 q \sqrt{a} dz \\
 & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\Omega} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \\
 & \quad \cdot \left[ \frac{\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} + \mathbf{a}_1 \times \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n}{\Delta t} \quad \frac{\partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} + \mathbf{a}_2 \times \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n}{\Delta t} \right] q \sqrt{a} dz \quad (3.2) \\
 & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\Omega} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \frac{\nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n}{\Delta t} z_3 q a dz \\
 & = \mp \int_{\Sigma_{\pm}} V^{n+1} q \sqrt{a} ds, \quad q \in H^1(\Omega)
 \end{aligned}$$

### Diskretizacija po prostoru

Sada fiksiramo prostorni korak  $\Delta z$  u smjeru  $x_3$  osi (smjer okomit na srednju plohi ljuske). Njime ćemo podijeliti interval  $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  na  $n_h \in \mathbb{N}$  jednakih podintervala. To znači da imamo vezu

$$\Delta z = h/n_h.$$

Označimo točke

$$z_i = -\frac{h}{2} + i\Delta z, \quad i = 0, \dots, n_h.$$

Aproksimirajmo sada funkcije  $\pi^n$  s neprekidnim po dijelovima linearnim  $P_1$  funkcijama na mreži danom točkama  $\{z_i, i = 0, \dots, n_h\}$  u  $x_3$  smjeru. To znači da

$$\pi^n(x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_h} \pi_i^n(x_1, x_2) \varphi_i(x_3),$$

gdje su  $\varphi_i$  članovi baze, t.j. neprekidne po dijelovima linearne funkcije takve da je

$$\varphi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, n_h.$$

Ovo uvrštavamo u (3.2) uz  $q = \varphi_j \psi$ , gdje je  $\psi \in H^1(\omega)$ . Tada dobivamo sustav s nepoznicama

$$\boldsymbol{\pi}^n(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \pi_0^n(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \pi_{n_h}^n(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

zadan s

$$\begin{aligned} & \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M}(\boldsymbol{\pi}^{n+1} - \boldsymbol{\pi}^n) + \frac{k}{\eta} \Delta t \mathbf{K} \boldsymbol{\pi}^{n+1} \\ &= -\Delta t V^{n+1} \mathbf{r} + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\nabla \tilde{\omega}^{n+1} - \nabla \tilde{\omega}^n) \mathbf{m}^1 \\ & - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \\ & \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_1 \times (\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n) \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_2 \times (\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n)] \mathbf{m}^0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdje je

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{ij}, \quad \mathbf{K} = (K_{ij}), \quad \mathbf{m}^1 = (m_j^1)_j, \quad \mathbf{m}^0 = (m_j^0)_j, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

te za  $i, j \in \{0, \dots, n_h\}$  imamo

$$M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_i \varphi_j dx_3, \quad K_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi'_i \varphi'_j dx_3, \quad m_j^0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_j(x_3) dx_3, \quad m_j^1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \varphi_j(x_3) dx_3.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} m_0^0 &= m_{n_h}^0 = \frac{1}{2} \Delta z, \\ m_j^0 &= \Delta z, \quad j = 1, \dots, n_h - 1, \\ m_0^1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2} + \Delta z} x_3 \varphi_0 dx_3 = -\frac{h}{4} \Delta z + \frac{1}{6} (\Delta z)^2, \\ m_j^1 &= \int_{-\frac{h}{2} + (j-1)\Delta z}^{-\frac{h}{2} + j\Delta z} x_3 \varphi_j dx_3 = -\frac{h}{2} \Delta z + j(\Delta z)^2, \quad j = 1, \dots, n_h - 1, \\ m_{n_h}^1 &= \int_{\frac{h}{2} - \Delta z}^{\frac{h}{2}} x_3 \varphi_{n_h} dx_3 = \frac{h}{4} \Delta z - \frac{1}{6} (\Delta z)^2, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\mathbf{m}^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta z \\ \Delta z \\ \vdots \\ \Delta z \\ \frac{1}{2}\Delta z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{h}{4}\Delta z + \frac{1}{6}(\Delta z)^2 \\ -\frac{h}{2}\Delta z + (\Delta z)^2 \\ \vdots \\ -\frac{h}{2}\Delta z + j(\Delta z)^2 \\ \vdots \\ -\frac{h}{2}\Delta z + (n_h - 1)(\Delta z)^2 \\ \frac{h}{4}\Delta z - \frac{1}{6}(\Delta z)^2 \end{pmatrix}.$$

Također možemo izračunati

$$\mathbf{M} = \Delta z \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{\Delta z} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na taj način dobivamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^{n+1} = & \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} \boldsymbol{\pi}^n - \Delta t V^{n+1} \mathbf{r} \right. \\ & + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \mathbf{m}^1 \\ & - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \\ & \left. \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_2 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)] \mathbf{m}^0 \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdje je  $\mathbf{M}_{\mathbf{K}} = \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} + \frac{k}{\eta} \Delta t \mathbf{K}$ .

### Spajanje jednadžbi

Gornje aproksimacije uvrštavamo u (3.1). Moramo izračunati članove

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \pi^{n+1}(x_1, x_2, x_3) dx_3 &= \sum_{i=0}^{n_h} \pi_i^{n+1}(x_1, x_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \varphi_i dx_3 = \boldsymbol{\pi}^{n+1}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{m}^1, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi^{n+1}(x_1, x_2, x_3) dx_3 &= \sum_{i=0}^{n_h} \pi_i^{n+1}(x_1, x_2) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi_i dx_3 = \boldsymbol{\pi}^{n+1}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{m}^0. \end{aligned}$$

Dakle, jednadžbu (3.1) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
 & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \\
 & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 + \\
 & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} (\boldsymbol{\pi}^{n+1} \cdot \mathbf{m}^1) \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} a dz_1 dz_2 \\
 & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} (\boldsymbol{\pi}^{n+1} \cdot \mathbf{m}^0) [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N,
 \end{aligned}$$

to jest

$$\begin{aligned}
 & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \\
 & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\
 & + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \left\{ \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} \boldsymbol{\pi}^n - \Delta t V^{n+1} \mathbf{r} \right. \right. \\
 & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \mathbf{m}^1 \\
 & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \\
 & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_2 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)] \mathbf{m}^0 \left. \right) \\
 & \quad \cdot \mathbf{m}^1 \left. \right\} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} a dz_1 dz_2 \\
 & - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \left\{ \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} \boldsymbol{\pi}^n - \Delta t V^{n+1} \mathbf{r} \right. \right. \\
 & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \mathbf{m}^1 \\
 & \quad - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \\
 & \quad \cdot [\partial_1 (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) + \mathbf{a}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \quad \partial_2 (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n) + \mathbf{a}_2 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)] \mathbf{m}^0 \left. \right) \\
 & \quad \cdot \mathbf{m}^0 \left. \right\} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2
 \end{aligned}$$



$$= \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N, \quad (3.5)$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \\ & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} \boldsymbol{\pi}^n - \Delta t V^{n+1} \mathbf{r} \right. \\ & \quad + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \mathbf{m}^1 \\ & \quad \left. - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \right. \\ & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_1 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_2 \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)] \mathbf{m}^0 \Big) \\ & \quad \cdot \left( \mathbf{m}^1 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} - \right. \\ & \quad \left. \mathbf{m}^0 [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \right) \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N. \end{aligned} \quad (3.6)$$

To možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \\ & \quad \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & + \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{w}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & \quad + \left( \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \int_{\omega} \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \mathbf{m}^1 \right. \\ & \quad \left. - [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1}] \mathbf{m}^0 \right) \\ & \quad \cdot \left( \mathbf{m}^1 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} - \right. \\ & \quad \left. \mathbf{m}^0 [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \right) \sqrt{a} dz_1 dz_2 \\ & = \int_{\omega} (\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \sqrt{a} dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \int_{\omega} \mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1} \left( \left( \beta_G + \frac{\alpha^2}{\lambda + 2\mu} \right) \mathbf{M} \boldsymbol{\pi}^n - \Delta t V^{n+1} \mathbf{r} \right. \\
& - \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n \mathbf{m}^1 \\
& + \frac{2\mu\alpha}{\lambda + 2\mu} [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n] \mathbf{m}^0 \Big) \\
& \cdot \left( \mathbf{m}^1 \sqrt{a} \mathbf{A}^c \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\mathbf{w}} - \right. \\
& \left. \mathbf{m}^0 [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\mathbf{w}} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\mathbf{w}}] \right) \sqrt{a} dz_1 dz_2, \quad (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) \in V_N.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

### Algoritam

Koliko god se čini kompliciranom, jednačba (3.7) je eliptička jednačba po nepoznatim funkcijama  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$ , uz pretpostavku da su nam poznate funkcije u prethodnom (vremenskom) koraku  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$  i  $\boldsymbol{\pi}^n$ . Taj sustav znamo numerički riješiti metodom konačnih elemenata. Metoda se dakle sastoji od rješavanja jednačbe (3.7)  $n$  puta, svaki put kako bi se dobila vrijednost nepoznanica u vremenima  $t^1, t^2, \dots, t^{n+1}$ . Tlak  $\boldsymbol{\pi}^1, \dots, \boldsymbol{\pi}^{n+1}$  dobivamo iz algebarske jednačbe (3.4) (kao što smo rekli, aproksimiramo ga  $P_1$  funkcijom).

Zapišimo sada i detaljno algoritam:

- Zadaјmo parametre  $n_h$  i  $\Delta t$ . Izračunamo konstantne izraze  $\Delta z, \mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{m}^0, \mathbf{m}^1, \mathbf{M}_{\mathbf{K}}$ .
- Izračunamo inverz matrice  $\mathbf{M}_{\mathbf{K}}$ . Najstabilnije je naći neku dekompoziciju (primjerice  $LU$ ) te matrice, tako da prilikom primjene matrice  $\mathbf{M}_{\mathbf{K}}^{-1}$  se ustvari računaju dva linearna sustava. Kako će  $n_h$  biti malen ( $n_h \approx 10$ ), ovaj dio ne troši mnogo vremena, niti bi trebao biti izvor numeričkih nestabilnosti.
- Zadaјmo početne uvjete

$$\boldsymbol{\pi}^0 = \boldsymbol{\pi}|_{t=0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}^0 = \tilde{\mathbf{u}}|_{t=0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^0 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{t=0}.$$

- Iterativno ponavljati korake:
  - Izračunati  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$  iz jednačbe (3.7), koristeći vrijednosti  $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$  i  $\boldsymbol{\pi}^n$  izračunate u prethodnim koracima.
  - Izračunati  $\boldsymbol{\pi}^{n+1}$  iz jednačbe (3.4), koristeći izračunate vrijednosti  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$  i  $\boldsymbol{\pi}^n$  iz prethodnih koraka.

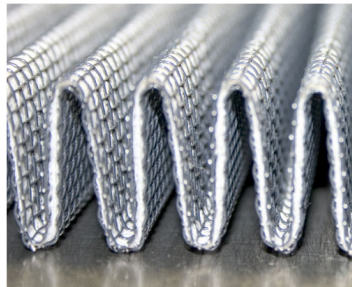
### Detalji implementacije

Kao što smo najavili, ovaj algoritam implementirali smo u programskom paketu *FreeFem++*. Primijetimo da prilikom implementacije neke stvari možemo još malo optimizirati. Primjerice, kako rješavamo više puta istu jednadžbu, mnogo numerički zahtjevnih integrala izračunali bi se više puta također. Umjesto toga, te integrale tretirat ćemo kao linearne ili bilinearne forme u varijablama  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$ ,  $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1})$ ,  $\pi^n$ , te  $V^{n+1}$  i  $(\tilde{\mathcal{P}}_+^{n+1} + \tilde{\mathcal{P}}_-^{n+1})$ , ukoliko te funkcije ovise o vremenu. Ako ih tako tretiramo, numerički to znači da ćemo izračunati matricne reprezentacije tih formi u bazi funkcija konačnih elemenata. Napomenimo još da smo za implementaciju odabrali trojku  $(P_3, P_3, P_3)$  elemenata za pomak  $\tilde{\mathbf{u}}$ , infinitezimalnu rotaciju  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  i za tlak  $\pi_i$  na svakoj razini poprečnog presjeka.

### 3.2 Primjeri i rezultati

Implementiranu numeričku metodu testirali smo na tri primjera geometrije ljuske. Jedan je bio sinusoidalnog oblika, drugi preklopljena ploča, a treći polucilindar.

Kao što je spomenuto u uvodu rada, jedna od primjena ovog modela je u filterima automobila. Filteri se sastoje mnogo preklopljenih slojeva približno sinusoidalnog oblika, složenih u niz ili kružno. To nam je motivacija da izoliramo jedan takav oblik i izložimo ga vanjskim utjecajima.



Slika 3.1: Primjeri filtera u automobilima.

S druge strane, ovaj model poroelastične ljuske, kao i model elastične ljuske na kojem on temelji svoja elastična svojstva, dopušta da parametrizacija ljuske  $\varphi$  ima prilično malu regularnost ( $\varphi \in W^{1,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ ). Jedan takav primjer je ploča koja je na svojoj polovici preklopljena.

Na kraju, kako je spomenuto u uvodu, ovaj model uzima u obzir i membranske i fleksijske efekte, za razliku od modela opisanog u [5] koji u obzir uzima samo fleksijske efekte. Djelujući

uniformnom kontaktnom silom na polucilindar (tj. polovicu plašta valjka) očekujemo da će se ljuska razvući i da ćemo dobro vidjeti spomenute membranske efekte.

U svim slučajevima koristimo iste konstante koje su popisane u Tablici 3.1.

oznaka	vrijednost
$h$	0.1 m
$\nu$	0.28
$E$	$10^5$ Pa
$\alpha$	0.9
$\beta_G$	$0.1 \text{ Pa}^{-1}$
$k$	$10^{-7} \text{ m}^2$
$\eta$	1 cP
$n_h$	6
$\Delta z$	0,16 m
$\Delta t$	0.1 s
$T$	1 s

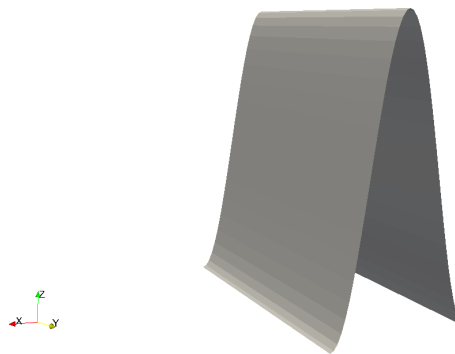
Tablica 3.1: Vrijednosti konstanti u primjerima

### Prvi primjer: filter automobila

U prvom primjeru ljosku smo parametrizirali s

$$\varphi : [0, 1] \times [0, 2], \quad \varphi(x, y) = (x, y, \sin(2\pi x - \pi/2)).$$

Primjer ljoske može se vidjeti na Slici 3.2.



Slika 3.2: Ljuska u prvom primjeru.

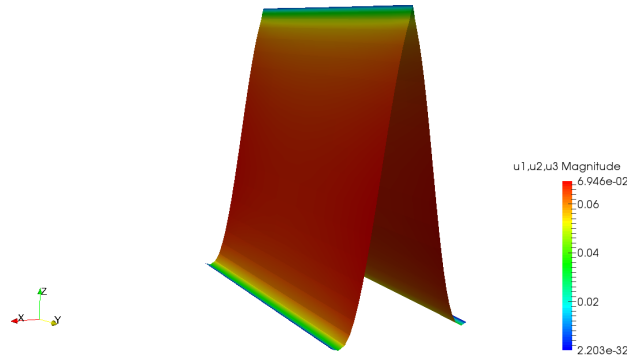
Na tu ljusku djelujemo s dva različita vanjska utjecaja. U jednom slučaju djelujemo konstantnom netrivialnom normalnom kontaktnom silom i trivijalnim protokom, u drugom slučaju djelujemo trivijalnom kontaktnom silom i netrivialnim konstantnim protokom.

Konkretno, u prvom slučaju imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}^{n+1} = -2 \cdot 10^{-1} \mathbf{a}_3 \text{ Pa}, \quad V = 0 \text{ ms}^{-1},$$

gdje je  $\mathbf{a}_3$ , kao u prvom poglavlju, treći vektor kovarijantne baze, koji je u svakoj točki okomit na tangencijalnu plohu ljuske, te mu je treća komponenta pozitivna.

Na Slici 3.3 možemo vidjeti konačni pomak ljuske. Vidimo da je pomak  $\tilde{\mathbf{u}}$  neovisan o varijabli  $z_2$ . Također, zanimljivo je to što iako se bavimo evolucijskim sustavom, stacionarno rješenje se postigne odmah u prvoj iteraciji.

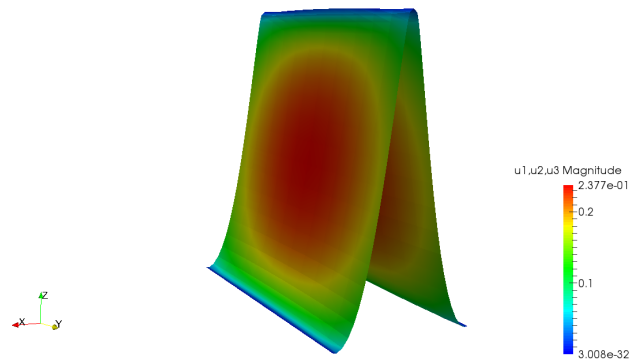


Slika 3.3: Ljuska iz prvog primjera pod utjecajem kontaktne sile.

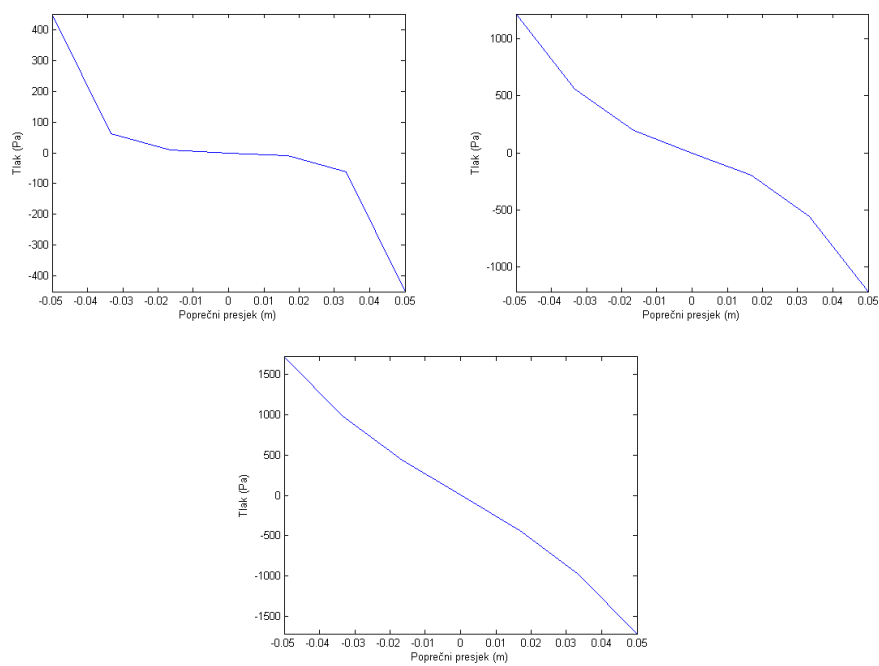
U drugom slučaju imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}^{n+1} = \mathbf{0} \text{ Pa}, \quad V = -5 \text{ ms}^{-1}.$$

Za razliku od prošlog slučaja, ovdje imamo klasično evolucijsko rješenje. Drugim riječima, rješenje se u svakoj iteraciji kvantitativno promijeni, no zadrži kvalitativno sličan oblik. Pomak  $\tilde{\mathbf{u}}$  krajnjeg rješenja u trenutku  $t = T$  prikazano je na Slici 3.4. Zanimljivo je kako najveći efekt na ljusku protok pokazuje na sredinama strana napuhujući ga prema van, dok na krajevima manje deformira ljusku. U ovom slučaju vrijednosti tlaka su neovisne o varijablama  $z_1$  i  $z_2$ , dakle ovise samo o vremenu  $t$  i razini poprečnog presjeka  $z_3$ . Na Slici 3.5 vidimo grafički prikaz tlakova po poprečnim presjecima za tri različita vremena. I tu vidimo jednu zanimljivu situaciju: na početku taj graf podsjeća na graf funkcije  $-x^3$ , dok s vremenom se graf ravni i pretvara se u linearnu funkciju. Ta situacija daje jedan dodatan argument zašto je dovoljno aproksimirati poprečne presjeke tlakova polinomima prvog stupnja.



Slika 3.4: Ljuska iz prvog primjera pod utjecajem protoka fluida.



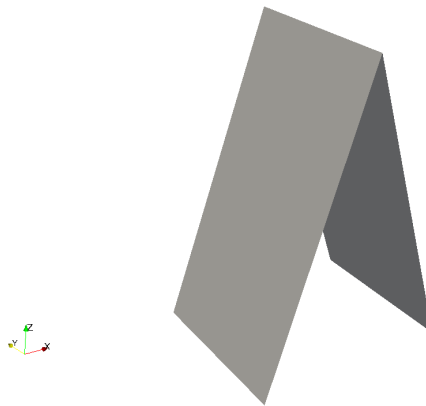
Slika 3.5: Ljuska iz prvog primjera pod utjecajem protoka fluida: grafovi tlakova po poprečnim presjecima ljuske u trenutcima  $t = 0.1, 0.5, 1$  s

**Drugi primjer: preklapljena ploča**

U ovom slučaju ljuska je parametrizirana

$$\varphi : [0, 6] \times [0, 5], \varphi(x, y) = (x, y, 3 - |3 - x|).$$

Možemo vidjeti da funkcija nema klasičnu parcijalnu derivaciju  $\partial_x$  u točkama oblika  $\{(3, y) : y \in [0, 5]\}$ . Takva ljuska prikazana je na Slici 3.6.



Slika 3.6: Ljuska iz drugog primjera.

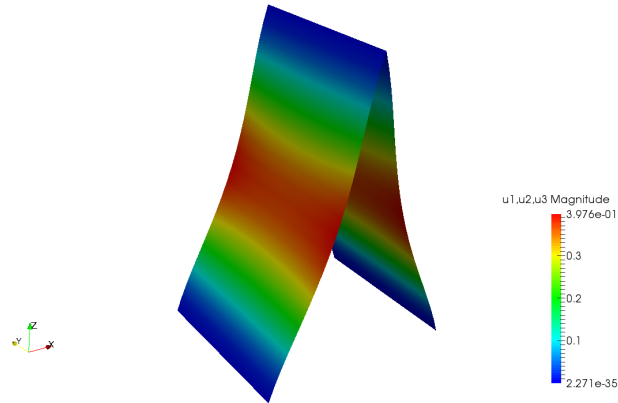
Na tu ljusku djelujemo s dva različita vanjska utjecaja, istim uvjetima kao i u prošlom primjeru: u jednom slučaju djelujemo konstantnom netrivialnom normalnom kontaktnom silom i trivijalnim protokom, a u drugom slučaju djelujemo trivijalnom kontaktnom silom i netrivialnim konstantnim protokom.

U prvom slučaju imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}^{n+1} = -5 \cdot 10^{-4} \mathbf{a}_3 \text{ Pa}, \quad V = 0 \text{ ms}^{-1},$$

gdje je opet  $\mathbf{a}_3$  član kovarijantne baze koji je okomit na ljusku i treća komponenta mu je ponovno pozitivna.

Kao i u prvom primjeru, odmah nakon prve iteracije dobivamo stacionarno rješenje. Takvo stacionarno rješenje možemo vidjeti na Slici 3.7. Također, kako su ljuske u oba primjera sličnog oblika, i rješenje  $\tilde{\mathbf{u}}$  je slično rješenju  $\tilde{\mathbf{u}}$  u prvom slučaju prvog primjera: vrh ploče ostao je gotovo fiksiran. Ipak, što više idemo prema učvršćenim krajevima ploče, utjecaj kontaktne sile se ipak bolje vidi nego u prvom primjeru.



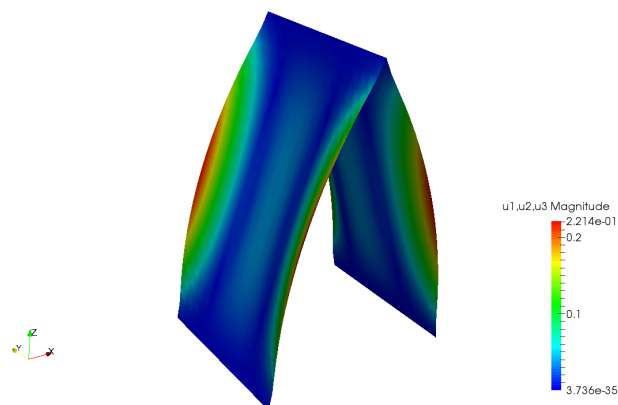
Slika 3.7: Ljuska iz drugog primjera pod utjecajem kontaktne sile.

U drugom slučaju imamo

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}^{n+1} = \mathbf{0} \text{ Pa}, \quad V = -10^{-1} \text{ ms}^{-1}.$$

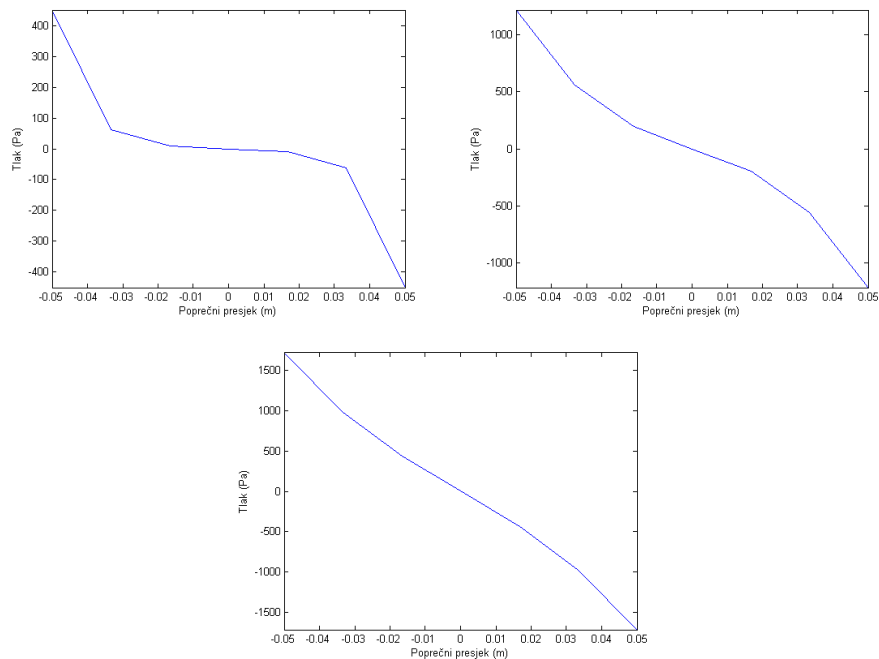
Kao i u prvom primjeru, rješenje nije stacionarno, te se približno proporcionalno mijenja kroz vrijeme (na Slici 3.8 vidimo rješenje za  $t = T$ ). Ipak, protok u ovom primjeru ima drugačiji efekt. Naime, kako je u prvom primjeru sa sinusoidalnom ljuskom protok najviše udubljivao točke u sredini, u ovom primjeru protok najviše izviđa točke na rubu prema van.

Tlakovi u ovom slučaju ponovno su konstantni u varijablama  $z_1, z_2$ , kao u analognom slučaju prvog primjera. Ponovno crtamo grafove tlakova po poprečnim presjecima i uočavamo isti efekt ravnanja grafa tlaka (vidjeti Sliku 3.9).



Slika 3.8: Ljuska iz drugog primjera pod utjecajem protoka fluida.





Slika 3.9: Ljuska iz drugog primjera pod utjecajem protoka fluida: grafovi tlakova po poprečnim presjecima ljuske u trenucima  $t = 0.1, 0.5, 1$  s

### Treći primjer: polucilindar

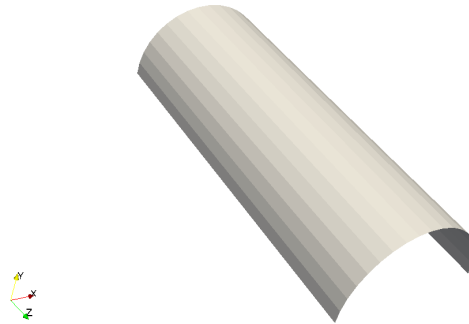
Ljuska je parametrizirana na sljedeći način:

$$\varphi : [0, \pi] \times [0, 5], \quad \varphi(x, y) = (\cos x, \sin x, y).$$

Takva ljuska prikazana je na Slici 3.10. Na nju smo djelovali konstantnom kontaktnom silom

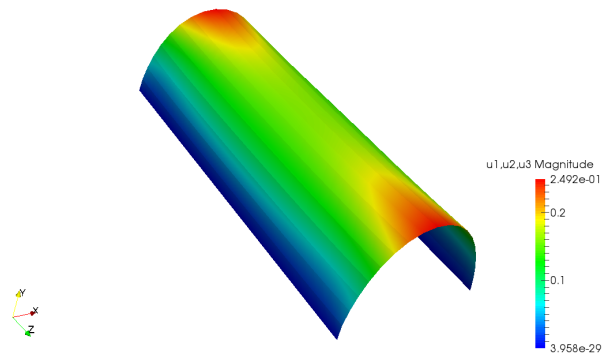
$$\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}^{n+1} = 10^3 \mathbf{a}_3 \text{ Pa}$$

i nismo primjenjivali protok. Vektor  $\mathbf{a}_3$  ima pozitivnu drugu komponentu.



Slika 3.10: Ljuska iz trećeg primjera.

Kao i u prošlim slučajevima rješenje je stacionarno. To stacionarno rješenje prikazano je na Slici 3.11. Ipak, iznenađujuće je što se ljuska nije uniformno raširila, nego se najviše raširila kod baza cilindra.



Slika 3.11: Ljuska iz trećeg primjera pod utjecajem kontaktne sile.

S jedne strane izražene membranske efekte vidjeli smo na Slici 3.11 jer se ljuska rastegnula. S druge strane to možemo potvrditi i Tablicom 3.2. U njoj su popisane membranske i fleksijske energije rješenja svih slučajeva u trenutku  $t = T$  koje se definiraju se na sljedeći

način:

$$E_m = h \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_m \mathbf{Q}^T [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\omega}] \cdot [\partial_1 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_1 \times \tilde{\omega} \quad \partial_2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_2 \times \tilde{\omega}] \sqrt{a} dz_1 dz_2,$$

$$E_f = \frac{h^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{Q}^T \nabla \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{\omega} \sqrt{a} dz_1 dz_2.$$

Prema toj tablici vidimo još jednu potvrdu membranskih efekata u zadnjem slučaju, jer membranska energija dva je reda veličine veća od fleksijske energije. S druge strane, u svim ostalim slučajevima ističe se fleksijska energija.

slučaj	membranska energija	fleksijska energija
filter automobila, kontaktna sila	$4.86 \cdot 10^{-3}$	$6.57 \cdot 10^{-2}$
filter automobila, protok	$5.43 \cdot 10^{-2}$	2.92
preklopljena ploča, kontaktna sila	$1.95 \cdot 10^{-7}$	$3.01 \cdot 10^{-3}$
preklopljena ploča, protok	$1.87 \cdot 10^{-6}$	$5.73 \cdot 10^{-3}$
polucilindar, kontaktna sila	$1.51 \cdot 10^3$	8.02

Tablica 3.2: Membranske i fleksijske energije u svim slučajevima izražene u džulima.

# Bibliografija

- [1] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, volume II: Theory of Plates*, Studies in mathematics and its applications, sv. 27, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1997.
- [2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, sv. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [3] F. Hecht, *New development in FreeFem++*, J. Numer. Math. **20** (2012), br. 3-4, 251–265, ISSN 1570-2820. MR 3043640
- [4] A. Mikelić i M. F. Wheeler, *Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics*, Computational Geosciences **17** (2012), br. 3, 455–461, ISSN 1573-1499, <http://dx.doi.org/10.1007/s10596-012-9318-y>.
- [5] A. Mikelić i J. Tambača, *Derivation of a Poroelastic Flexural Shell Model*, Multiscale Modeling & Simulation **14** (2016), br. 1, 364–397, <http://dx.doi.org/10.1137/15M1021556>.
- [6] P. M. Naghdi, *The Theory of Shells and Plates*, str. 425–640, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1973, ISBN 978-3-662-39776-3, [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_5).
- [7] M. Rogulj, *Numerička aproksimacija linearnog modela elastične ljuske*, diplomski rad, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2013.
- [8] J. Tambača, *A New Linear Shell Model for Shells with Little Regularity*, Journal of Elasticity **117** (2014), br. 2, 163–188, ISSN 1573-2681, <http://dx.doi.org/10.1007/s10659-014-9469-2>.
- [9] J. Tambača i Z. Tutek, *A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity*, prihvaćen za objavljivanje u Applied Mathematical Modelling, <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.

# Sažetak

U ovom radu uveli smo model poroelastične ljuske Naghdijeveg tipa, koji je najbliži modelu elastične ljuske opisanom u [9, 8]. Za razliku od modela poroelastične ljuske opisanom u [5] model opisan u radu uz fleksijske dopušta i membranske efekte.

Glavni rezultat u radu su dokaz egzistencije i jedinstvenosti sustava. Dokaz jedinstvenosti rješenja temelji se na metodi energija, dok se egzistencija temelji na iterativnom postupku sličnom numeričkoj metodi opisanoj u [4]. Na kraju smo i pokazali neke numeričke aproksimacije rješenja modela u dva slučaja zanimljiva u primjeni, poput filtera u automobilima.

Metoda dokaza egzistencije rješenja i numerička metoda kojom smo dobili rezultate u zadnjem poglavlju nisu ista metoda. Stoga je cilj daljnje istraživanje usmjeriti ka implementaciji prve numeričke metode i formalnom opravdanju druge.

# Summary

In this thesis we introduced the poroelastic shell model of Naghdi's type, which is the most similar to the elastic shell model described in [9, 8]. While the poroelastic shell model described in [5] captures only bending effects, the model introduced in this thesis captures membrane effects, as well.

The main result in this thesis is the proof of existence and uniqueness of the system of equations. The proof of uniqueness is based on the energy method, while the proof of existence is based on iterative procedure similar to the numerical method described in [4]. At the end, we showed numerical approximation of solutions of the model in two cases interesting in application, such as car filters.

The method which we used in the proof of existence of solutions and numerical method which we used to obtain numerical results are not the same method. Thus, our goal is to extend our research to implementation of the first method and justification of the second one.

# Životopis

Rođen sam 1992. godine u Zagrebu. Nakon završetka Osnovne škole Augusta Šenoa 2007. godine upisujem XV. gimnaziju. Od tada svake godine sudjelujem na državnim natjecanjima iz matematike, te osvajam prvo mjesto u drugom, trećem i četvrtom razredu. Sudjelovao sam i na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi 2008. godine (brončana medalja), te na Međunarodnim matematičkim olimpijadama 2009., 2010. i 2011. godine (jedna srebrna i dvije brončane medalje).

Nakon srednje škole 2011. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a potom 2014. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika gdje sve kolegije polažem s odličnim uspjehom. Tokom studija se nastavljam natjecati na međunarodnim natjecanjima. Na Međunarodnom natjecanju Vojtěch Jarník natječem se pet puta, osvajajući pritom četiri puta mjesto među najboljih 15 natjecatelja, a 2013. godine osvajam treće mjesto. Zbog tih rezultata smješten sam na listu najboljih natjecatelja u povijesti natjecanja. Na Međunarodnom matematičkom natjecanju (IMC) natjecao sam se od 2012. do 2014. godine, i osvojio dvije prve i jednu drugu nagradu.

Na trećoj godini preddiplomskog studija surađujem s kolegicom Mateom Galović i mentorom prof. dr. sc. Josipom Tambačom na radnji *Numerička aproksimacija kontaktnog modela ljuske i stenta*, za koju smo nagrađeni Rektorovom nagradom Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom svih pet godina studija aktivan sam mentor u udruzi Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić“.