SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lorena Balošić

DEHN - HADWIGEROV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Na Drugom međunarodnom kongresu matematičara u Parizu, 1900. godine, njemački matematičar David Hilbert [1] održao je predavanje s nazivom „Matematički problemi“. U tom predavanju Hilbert je iznio 23 matematička problema kojima je postavio smjer razvoja matematike dvadesetog stoljeća.

Popis Hilbertovih problema [6]

1. Cantorov problem kardinalnog broja kontinuuma.

2. Neproturječnost aritmetičkih aksioma.

3. Problem jednakosastavljivosti poliedara (naći dva tetraedra jednakih baza i jednakih visina koji se ne mogu rastaviti na kongruentne tetraedre ili koji se ne mogu kombinirati s kongruentnim poliedrima kako bi dobili dva poliedra koji se mogu rastaviti na kongruentne poliedre).

4. Problem dužine kao najkraće udaljenosti između dvije točke (ispitati vrijedi li teorem o dužini kao najkraćoj udaljenosti između dvije točke i u neeuklidskoj geometriji).

5. Liev pojam neprekidne grupe transformacija bez pretpostavke diferencijabilnosti funkcija koje čine grupu.

6. Matematičko ispitivanje aksioma fizike (aksiomatski ispitati one grane fizike u kojima matematika ima važnu ulogu, a posebno teoriju vjerojatnosti i mehaniku).

7. Iracionalnost i transcendentnost određenih brojeva (dokazati: ako je u jednakokračnom trokutu omjer kuta uz osnovicu i kuta nasuprot osnovice algebarski, ali ne i racionalan, onda je odnos osnovice i kraka uvijek transcendentan; dokazati da je α^β , za algebarski broj α i iracionalni broj β, uvijek transcendentan ili bar iracionalan broj.

[1] David Hilbert (1862. - 1943.), njemački matematičar

8. Problemi koji se tiču prostih brojeva (dokazati da, izuzevši poznate negativne cjelobrojne realne nule, sve nule funkcije $\zeta(s)$ definirane pomoću reda $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$ imaju realni dio $\frac{1}{2}$ (Riemannova hipoteza); utvrditi da razlika između broja prostih brojeva manjih od nekog broja x i cjelobrojnog logaritma od x postaje beskonačna reda ne većeg od $\frac{1}{2}$ u x; utvrditi da li povremeno zgušnjavanje prostih brojeva, koje je uočeno njihovim prebrojavanjem, zaista nastaje zbog onih članova Riemannove formule koji ovise o prvoj kompleksnoj nuli funkcije $\zeta(s)$; riješiti Goldbachov problem, to jest može li se svaki cijeli broj izraziti kao suma dva pozitivna prosta broja; riješiti problem postoji li beskonačno mnogo parova prostih brojeva čija je razlika broj 2; riješiti problem ima li diofantska jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima $ax + by + c = 0$ rješenja u prostim brojevima; primijeniti rezultate koji se tiču distribucije racionalnih prostih brojeva na teoriju distribucije savršenih prostih brojeva u danom polju brojeva).

9. Dokaz najopćenitijeg zakona reciprociteta u proizvoljnom polju brojeva (za proizvoljno polje brojeva, dokazati zakon reciprociteta za reziduale l-tog stupnja, gdje je l neki neparan prost broj, potencija od 2, ili potencija nekog neparnog prostog broja).

10. Određivanje rješivosti neke diofantske jednadžbe.

11. Kvadratne forme s proizvoljnim algebarskim koeficijentima (naći rješenja neke dane kvadratne jednadžbe s algebarskim numeričkim koeficijentima i proizvoljnim brojem varijabli u skupu cijelih brojeva ili u odgovarajućem algebarskom proširenju).

12. Proširenje Kroneckerovog teorema o abelovskim poljima na proizvoljno algebarsko proširenje.

13. Nemogućnost rješenja opće jednadžbe sedmog stupnja pomoću funkcija sa samo dva argumenta (dokazati da se jednadžba sedmog stupnja $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ ne može riješiti pomoću neprekidnih funkcija sa samo dva argumenta).

14. Dokaz konačnosti određenih sustava funkcija (pronaći konačan sustav relativno cjelobrojnih funkcija pomoću kojih se može racionalno i cjelobrojno predstaviti svaka relativno cjelobrojna funkcija).

15. Rigorozno zasnivanje Schubertovog enumerativnog računa.

16. Problem topologije algebarskih krivulja i algebarskih površina (ispitati odnose grana algebarskih krivulja kada je njihov broj maksimalan i analogno tome ispitati broj, oblik i položaj slojeva algebarskih površina u prostoru).

17. Predstavljanje definitnih formi pomoću kvadrata.

18. Građenje prostora od kongruentnih poliedara (ima li u n - dimenzionalnom euklidskom prostoru samo konačno mnogo bitno različitih grupa gibanja?).

19. Jesu li rješenja regularnih problema u računu varijacija nužno analitička? Ima li svaka Lagrangeova parcijalna diferencijalna jednadžba regularnog varijacijskog problema isključivo analitička rješenja?

20. Opći problem graničnih vrijednosti (ima li svaki regularni varijacijski problem rješenje, pod uvjetom da su zadovoljene neke pretpostavke koje se tiču graničnih uvjeta, npr. funkcije s danim graničnim uvjetima su neprekidne i imaju prvu derivaciju ili derivaciju višeg reda.

21. Dokaz postojanja linearnih diferencijalnih jednadžbi sa zadanom monodromskom grupom.

22. Uniformizacija analitičkih relacija pomoću automorfnih funkcija (riješiti probleme koji se javljaju u vezi s Poincaréovim dokazom mogućnosti uniformizacije proizvoljnih analitičkih relacija s dvije varijable; riješiti problem uniformizacije algebarskih i drugih analitičkih relacija s tri ili više varijabli).

23. Razvijanje metoda računa varijacija.

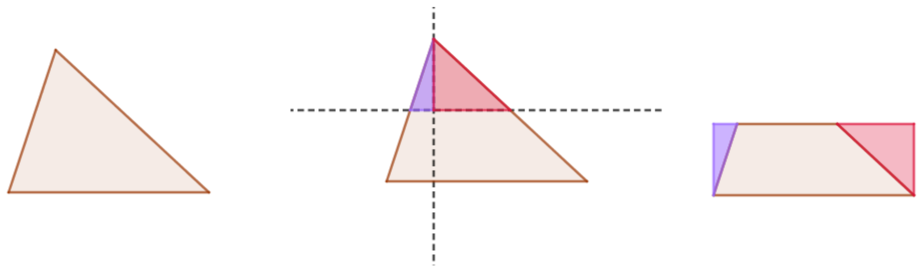
Upravo je treći Hilbertov problem s ovog popisa, problem kojeg je dokazao njegov student Max Dehn, a kasnije i Hugo Hadwiger. U ovom radu ću iskazati i dokazati Dehn-Hadwigerov teorem te riješiti treći Hilbertov problem.

Poglavlje 1

Jednakosastavljivost u ravnini

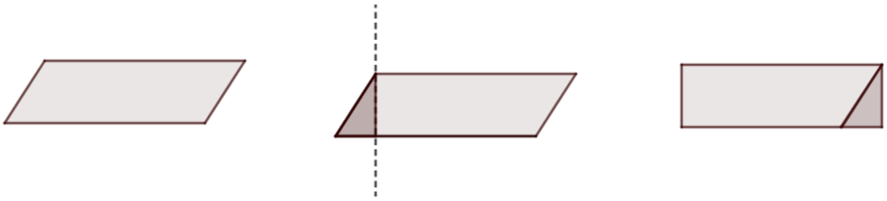
1.1 Jednakosastavljivost poligona

Kad računamo površinu nekog poligona, često nam je lakše taj poligon rastaviti na manje dijelove i "prekrojiti" ga kako bi dobili poligon čiju nam je površinu lakše izračunati. Pogledajmo sliku 1.1. Dani trokut možemo "prekrojiti" kako bismo dobili pravokutnik. Odnosno, konstruiramo trokutu srednjicu, povučemo okomicu iz vrha trokuta na tu srednjicu i time smo dani trokut podijelili na dva manja trokuta i trapez, kao na slici. Preslagivanjem i postavljanjem tih dvaju trokuta na odgovarajuće stranice trapeza, dobivamo pravokutnik. Na slici 1.2. prikazan je paralelogram kojeg smo "prekrojili" kako bismo

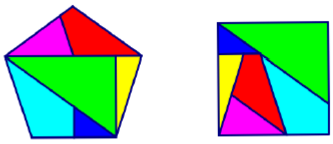


Slika 1.1. Jednakosastavljivost trokuta i pravokutnika

dobili pravokutnik [4]. Danom paralelogramu ucrtamo jednu njegovu visinu. Tom visinom podijelili smo paralelogram na trokut i trapez kao na slici. Preslagivanjem i postavljanjem dobivenog trokuta na odgovarajuću stranicu trapeza, dobivamo pravokutnik kao što je prikazano na slici. Na slici 1.3. prikazan je peterokut koji je rastavljen na dijelove označene različitim bojama, a koji su presloženi u kvadrat. Pomoću ovih primjera intuitivno nam je



Slika 1.2. Jednakosastavljivost paralelograma i pravokutnika

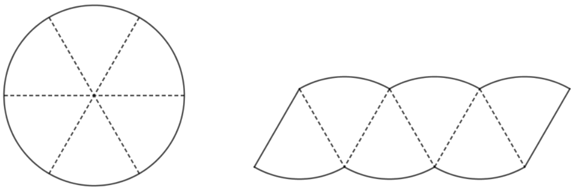


Slika 1.3. Jednakosastavljivost peterokuta i kvadrata[5]

jasan pojam jednakosastavljivosti pa možemo reći da su dva poligona jednakosastavljiva ako ”prekrojavanjem” jednog poligona dobijemo drugi.

Definicija 1.1.1. *[7] Označimo poligone s π i π'. Kažemo da su oni jednakosastavljivi (ili rastavno jednaki) i pišemo $\pi \equiv \pi'$ ako postoje poligoni $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n$ i $\pi_1', \pi_2', \pi_3', \ldots, \pi_n'$, takvi da je $\pi_1 \cong \pi_1', \pi_2 \cong \pi_2', \pi_3 \cong \pi_3' \ldots, \pi_n \cong \pi_n'$ (u parovima kongruentni ili izometrični) i $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_n$ i $\pi' = \pi_1' + \pi_2' + \pi_3' + \ldots + \pi_n'$, pri čemu su π_i i π_j, $i \neq j$, međusobno disjunktni.*

Ovu definiciju je moguće proširiti i na općenitije izmjerive skupove točaka (figure) u ravnini. Primjer jednakosastavljivih fugura vidimo na slici 1.4.



Slika 1.4. Jednakosastavljive figure

1.2 Wallace - Bolyai - Gerwienov teorem

Očito je problem jednakosastavljivosti poligona povezan s pojmom njegove površine. Prisjetimo se aksioma kojima je definiran pojam površine.

Neka je P skup svih poligona u ravnini uključujući i $\emptyset$. Površina p na skupu P je funkcija $p : P \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvima:

1. $p(\pi) \geq 0, \forall \pi \in P$,
2. Ako su π_1 i π_2 poligoni čije unutrašnjosti su disjunktni skupovi, tada je $p(\pi_1 \cup \pi_2) = p(\pi_1) + p(\pi_2)$,
3. Ako je $\pi_1 \cong \pi_2$, onda je $p(\pi_1) = p(\pi_2), \forall \pi_1, \pi_2 \in P$,
4. Postoji bar jedan kvadrat K sa stranicom duljine 1 takav da je $p(K) = 1$.

Iz navedenih aksioma lako je zaključiti da jednakosastavljivi poligoni imaju jednake površine. Međutim, ono što ne možemo tako lako zaključiti je vrijedi li obrat, odnosno jesu li poligoni koji imaju jednake površine jednakosastavljivi. Tim problemom bavili su se William Wallace [1], Farkas Bolyai [2] i Paul Gerwien [3].

Teorem 1.2.1 (Wallace - Bolyai - Gerwienov teorem[7]). *Ako dva konveksna mnogokuta imaju jednaku površinu, onda su oni jednakosastavljivi.*

Za dokaz ovog teorema potrebno je najprije definirati triangulaciju poligona te iskazati nekoliko lema i teorema koje koristimo u samom dokazu.

Definicija 1.2.2. *Triangulacija poligona π je svaka familija trokuta $K = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ čija je unija π, a presjek svaka dva trokuta je ili $\emptyset$ ili zajednički vrh ili zajednička stranica.*

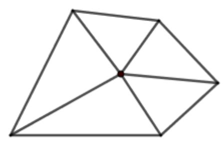
Posebna vrsta triangulacije je zvjezdasta triangulacija, koju dobijemo tako da odaberemo točku iz unutrašnjosti poligona i spojimo je s vrhovima tog poligona, kao na slici 1.5.

Definicija 1.2.3. *Ako su $K = \{T_1, ..., T_n\}$ i $K' = \{T_{1'}, ..., T_{m'}\}$ dvije triangulacije nekog poligona, onda kažemo da je K' subdivizija od K, ako je svaki $T_i' \in K'$ sadržan u $T_j \in K$.*

Dokazi sljedećih lemi i teorema mogu se pronaći u knjizi [7].

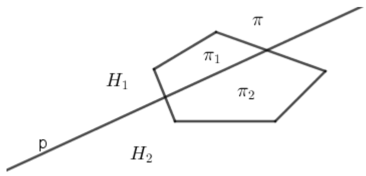
Lema 1.2.4. *Neka je π konveksan poligon, a p bilo koji pravac koji siječe unutrašnjost od π. Tada p rastavlja π u dva konveksna poligona.*

[1] William Wallace (1768.-1843.), škotski matematičar
[2] Farkas Bolyai (1775.- 1856.), mađarski matematičar
[3] Paul Gerwien, njemački matematičar



Slika 1.5. Zvjezdasta triangulacija poligona

Dokaz. Neka pravac p dijeli ravninu na dvije poluravnine H_1 i H_2. S $\overline{H_1}$ i $\overline{H_2}$ označimo pripadne poluravnine, pri čemu je $\overline{H_1} = H_1 \cup p$ i $\overline{H_2} = H_2 \cup p$. Neka su $\pi_1 = \pi \cap \overline{H_1}$, a

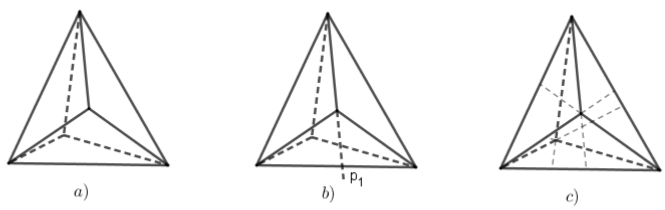


Slika 1.6

$\pi_2 = \pi \cap \overline{H_2}$. Tada su π_1 i π_2 konveksni poligoni takvi da je $\pi = \pi_1 + \pi_2$. □

Lema 1.2.5. *Svake dvije triangulacije nekog poligona imaju zajedničku subdiviziju.*

Dokaz. Označimo s K i K' dvije triangulacije poligona π. Zatim označimo s $p_1, ..., p_n$ sve



Slika 1.7

pravce na kojima leže sve stranice tih triangulacija. Na slici 1.7 a) vidimo primjer dviju triangulacija trokuta. Za taj trokut postoji 9 opisanih pravaca. Prema Lemi 1.2.4, ako pravac p_1 siječe unutrašnjost nekog od trokuta T_j iz K i T_k iz K', onda pravac p_1 rastavlja svaki trokut T_j iz K i svaki trokut T_k iz K' na dva konveksna poligona. Induktivno možemo zaključiti da svi pravci p_i rastavljaju poligon π u konačno mnogo poligona $C_1, ..., C_m$. Očito je da svaki od tih poligona leži u nekom trokutu T_j iz K i nekom trokutu T_k iz K'. Sad svaki od tih poligona rastavimo na trokute tako da dobijemo zvjezdastu triangulaciju. Svi tako dobiveni trokuti čine zajedničku subdiviziju K'' od K i K'. □

Lema 1.2.6. *Jednakosastavljivost $\equiv$ je relacija ekvivalencije.*

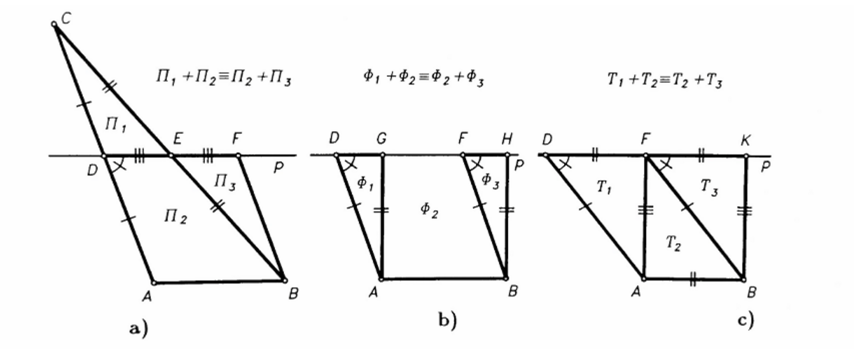
Dokaz. Kako bi dokazali da je jednakosastavljivost $\equiv$ relacija ekvivalencije, moramo pokazati da je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna. Za poligon π očito vrijedi $\pi \equiv \pi$, također je očito da iz $\pi \equiv \pi'$ slijedi da je $\pi' \equiv \pi$, gdje su π i π' poligoni. Preostaje još pokazati da za poligone π, π' i π'' vrijedi:

$$\pi \equiv \pi', \pi' \equiv \pi'' \Rightarrow \pi \equiv \pi''.$$

Neka su $K = \{T_1, ..., T_n\}$ i $K' = \left\{T_1', ..., T_n'\right\}$ triangulacije poligona π i π' redom te neka vrijedi $T_i \cong T_i'$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Također, neka su K_1' i K'' triangulacije poligona π' i π'', takve da je $\pi' \equiv \pi''$. Prema Lemi 1.2.5 postoji zajednička subdivizija triangulacija K' i K_1' poligona π. Za $T_i \in K$ postoji odgovarajući trokut $T_i' \in K'$ koji je subdivizijom L' trianguliran na neki način. Budući da vrijedi $T_i \cong T_i'$, ta triangulacija se može "prenijeti" na T_i. To napravimo na svakom T_i i na taj način smo dobili subdiviziju L od triangulacije K. Na sličan način dobivamo i subdiviziju L'' triangulacije K''. Dobivene triangulacije L i L'' daju nam traženu jednakosastavljivost $\pi \equiv \pi''$. Budući da je jednakosastavljivost refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija, zaključujemo da je to relacija ekvivalencije. □

Lema 1.2.7. *Svaki trokut je jednakosastavljiv s pridruženim pravokutnikom.*

Dokaz. Ovu lemu najlakše je dokazati preko slika. Uočimo na slici 1.8 a) da je $\pi_1 \cong \pi_3$



Slika 1.8. [7]

pa je $\Delta ABC \equiv ABFD$. Ako pokažemo da je $ABFD \equiv ABHG$, onda je lema dokazana.

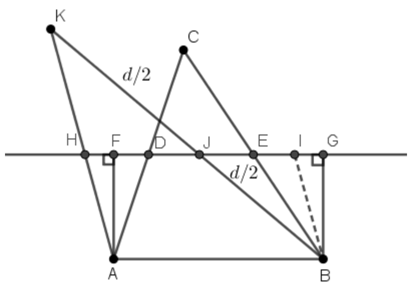
Neka točka G leži na $\overline{DF}$ kao na slici b). Budući da je $\Delta AGD \cong \Delta BHF$ slijedi tražena ekvivalencija. Ako točka G ne leži na $\overline{DF}$, onda se dokaz svodi na slučaj prikazan na slici c). □

Lema 1.2.8. *Ako dva trokuta imaju istu bazu i istu površinu, onda su ti trokuti jednakosastavljivi.*

Dokaz. Neka su T_1 i T_2 dva trokuta s istom bazom i istom površinom i neka su P_1 i P_2 pravokutnici pridruženi tim trokutima. Tada i P_1 i P_2 imaju istu bazu. Budući da je $p(P_1) = p(T_1) = p(T_2) = p(P_2)$, slijedi da P_1 i P_2 imaju istu visinu. Odnosno, radi se o dva sukladna pravokutnika. Stoga su oni jednakosastavljivi, tj. $P_1 \equiv P_2$. Primjenom Leme 1.2.7 dobivamo: $T_1 \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv T_2$, a to zbog Leme1.2.6 povlači $T_1 \equiv T_2$. □

Teorem 1.2.9 (Bolyai). *Ako dva trokuta imaju jednaku površinu, onda su oni jednakosastavljivi.*

Dokaz. Neka su T_1 i T_2 dva trokuta s istom površinom, tj. $p(T_1) = p(T_2)$. Na slici 1.9 trokut ΔABC je trokut T_1. Ako je duljina neke stranice trokuta T_1 jednaka duljini neke



Slika 1.9

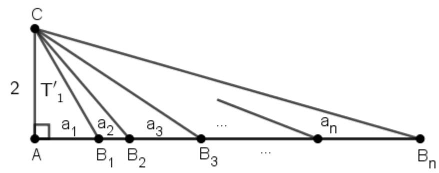
stranice trokuta T_2, onda odmah prema Lemi 1.2.8 zaključujemo da su ti trokuti jednakosastavljivi. Pretpostavimo sada da trokut T_2 ima stranicu duljine $d > |BC|$. Označimo s p pravac na kojem leži srednjica $\overline{DE}$ trokuta ΔABC. Neka je točka J točka na pravcu p takva da je $|BJ| = \frac{d}{2}$, a točka $K \neq B$ neka leži na pravcu BJ i neka vrijedi da je $|JK| = \frac{d}{2}$. Označimo s T_3 trokut ΔABK, a s P pravokutnik $ABGF$ pridružen trokutu ΔABC.

Vrijedi da je $T_3 \equiv P$. To možemo pokazati na sljedeći način: Označimo s H presjek pravca p i dužine $|AK|$. Konstruiramo paralelu s AK kroz točku B i označimo s I presjek te paralele s pravcem p. Uočimo da je četverokut $ABIH$ paralelogram. Stoga vrijedi da je $|AH| = |BI|$. Također je $|AF| = |BG|$ jer su to nasuprotne stranice pravokutnika. Zbog paralelnosti odgovarajućih pravaca, odgovarajući kutovi u trokutima ΔAFH i ΔBGI su

sukladni. Pa su ta dva trokuta prema SKS poučku o sukladnosti trokuta sukladni. Također su i trokuti ΔKHJ i ΔBIJ sukladni prema KSK poučku o sukladnosti trokuta ($\angle KJH = \angle BJI$, jer su to vršni kutovi s vrhom u J, $\angle KHJ = \angle BIJ$, jer su to kutovi s paralelnim kracima i vrijedi $|KJ| = |BJ|$.
Iz tih sukladnosti i budući da četverokut $ABJF$ pripada i trokutu T_3 i pravokutniku $ABGF$, slijedi $T_3 \equiv P$ po definiciji jednakosastavljivosti poligona. Prema Lemi 1.2.8 je $T_2 \equiv T_3$, a budući da je relacija $\equiv$ tranzitivna, onda vrijedi $T_2 \equiv P$. Prema Lemi 1.2.7, slijedi da je $P \equiv T_1$ pa ponovno zbog tranzitivnosti relacije $\equiv$ slijedi $T_1 \equiv T_2$, što je i trebalo pokazati. □

Teorem 1.2.10. *U euklidskoj ravnini je svaki poligon jednakosastavljiv s nekim trokutom.*

Dokaz. Neka je π poligon s triangulacijom $K = \{T_1, ..., T_n\}$. Površinu pojedinog trokuta T_i, $i \in \{1, ..., n\}$, $p(T_i)$, označimo s a_i. Konstruirajmo pravokutni trokut ΔCAB_n kao na slici 1.10. Taj trokut dobiven je kao zbroj trokuta T_i', pri čemu je u svakom od tih trokuta



Slika 1.10

jedna stranica duljine a_i. Uočimo da je duljina visine svakog pojedinog trokuta T_i' jednaka 2 pa je $p(T_i') = \frac{2a_i}{2} = a_i = p(T_i)$. Tada je, prema teoremu 1.2.9 $T_i' \equiv T_i$, za svaki i pa je $\pi \equiv T_1' + ... + T_n' \equiv \Delta CAB_n$, čime je teorem dokazan. □

Sad konačno možemo dokazati Wallace - Bolyai - Gerwienov teorem 1.2.1.

Dokaz. Prema teoremu 1.2.10 su poligoni π i π' jednakosastavljivi s trokutima T i T' redom, to jest $\pi \equiv T$ i $\pi' \equiv T'$. Za jednakosastavljive poligone znamo da imaju jednake površine, $p(T) = p(\pi)$ i $p(T') = p(\pi')$. Iz pretpostavke teorema da je $p(\pi) = p(\pi')$, slijedi da je i $p(T) = p(T')$. Koristeći Bolyaijev 1.2.9 teorem dobivamo da je $T \equiv T'$. Konačno, budući da je jednakosastavljivost relacija ekvivalencije, zbog tranzitivnosti slijedi da je $\pi \equiv \pi'$. □

Poglavlje 2

Jednakosastavljivost u prostoru

2.1 Jednakosastavljivost poliedara

U prostoru se također javlja problem jednakosastavljivosti poliedara, odnosno pitamo se možemo li jedan od poliedara rastaviti na manje dijelove i od njih sastaviti drugi poliedar. Definicija jednakosastavljivosti poliedara je analogna onoj u ravnini. Prije izricanja definicije jednakosastavljivosti poliedara, definirajmo poliedar.

Definicija 2.1.1. *Poliedar je tijelo čiji je interior povezan, a rub mu je povezan skup koji se sastoji od konačno mnogo (ravninskih jednostavnih) poligona, pri čemu se svaka dva od tih poligona ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednu zajedničku stranicu, a svaka stranica nekog od tih poligona je zajednička stranica točno dvaju od tih poligona.*

Definicija 2.1.2. *Dva poliedra P i Q su jednakosastavljiva i pišemo $P \equiv Q$, ako postoje poliedri P_1, P_2, P_3, ..., P_n i Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n, takvi da je $P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2$, $P_3 \cong Q_3$, ..., $P_n \cong Q_n$ (u parovima su kongruentni) i $P = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n$, pri čemu su P_i i P_j te Q_i i Q_j, gdje je $i \neq j$, međusobno disjunktni.*

Prisjetimo se definicije volumena na skupu P svih poliedara u prostoru.

Definicija 2.1.3. *Neka je P skup svih poliedara u prostoru uključujući $\emptyset$. Volumen je funkcija $v : P \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

1. $v(P) \geq 0$, $\forall P \in P$,
2. *ako su P_1 i P_2 poliedri čije unutrašnjosti su disjunktni skupovi, tada je* $v(P_1 \cup P_2) = v(P_1) + v(P_2)$,
3. $P_1 \cong P_2 \Longrightarrow v(P_1) = v(P_2), \forall P_1, P_2 \in P$,

4. *∃ kocka K s bridom duljine* 1*, takva da je* $v(K) = 1$.

Zbog navedenih svojstava volumena očito je da jednakosastavljivost poliedara povlači jednakost volumena tih poliedara, odnosno $P \equiv Q \Longrightarrow v(P) = v(Q)$. Zanima nas vrijedi li obrat, to jest vrijedi li treći Hilbertov problem. Kao što je već spomenuto u uvodu, David Hilbert je na Internacionalnom kongresu matematičara u Parizu 1900. godine iznio 23 matematička problema, među kojima je treći problem upravo problem vezan uz temu jednakosastavljivosti u prostoru. Treći Hilbertov problem glasi: "Pronaći dva tetraedra jednakih baza i jednakih visina koji se ni na koji način ne mogu rastaviti na kongruentne tetraedre i koji se ne mogu kombinirati s kongruentnim tetraedrima kako bi dobili dva poliedra koji se ne mogu rastaviti na kongruentne tetraedre". Taj problem se pojavio u dvama pismima Carla Friedricha Gaussa [1] iz 1844. godine: "Ako se tetraedri jednakih volumena mogu rastaviti na kongruentne dijelove, onda bi to bio elementarni dokaz Euklidovog teorema o piramidama, to jest da piramide jednakih baza i jednakih visina imaju jednake volumene". Iz Hilbertove formulacije problema, možemo naslutiti da je Hilbert očekivao da obrat gore navedenog teorema ne vrijedi, odnosno da jednakost volumena poliedara ne povlači jednakosastavljivost tih poliedara. Na taj problem Hilbert je naišao kada je od njemačkog ministarstva prosvjete dobio naputak da napiše udžbenik iz stereometrije za srednju školu. Hilbert je znao da trokut može presložiti u pravokutnik pa je pokušao i tetraedar rastaviti i presložiti u kvadar, što bi bio jednostavan način za otkrivanje formule za volumen tetraedra. Međutim, to mu nije uspjelo. Hilbertu je tada bio poznat Wallace - Bolyai - Gerwienov teorem pa je postavio i formulirao analogni problem za prostor. Tako se taj problem našao među spomenutih 23 problema, među kojima neki još uvijek nisu riješeni. Upravo je treći Hilbertov problem, nakon što je iznesen na kongresu u Parizu, prvi riješen. Prvi ga je riješio Hilbertov student Max Dehn [2] u dva dijela. U prvom, 1900. godine, pokazao je postojanje dvaju tetraedara jednakih baza i visina koji nisu jednakosastavljivi. Budući da je Dehnov dokaz teško shvatiti, neki tadašnji matematičari su pokušavali doći do elegantnijeg i jednostavnijeg dokaza. Tako su se pojavila i druga rješenja kao što su Bricardov [3] dokaz, dokaz Meschkowskog [4] i ostalih, koja su nažalost bila netočna. Kasnije su proizašle točne, pojednostavljene i sređene verzije tog dokaza, a dali su ih Kagan [5], Hadwiger [6] i Boltjanski [7]. Veniamin Fedorovich Kagan je 1903. godine preradio Dehnov dokaz te ga objavio u čitljivijoj formi. Puno zanimljivih rezultata na temu jednakosastavljivosti proizašlo je 1950 - ih godina od švicarskog matematičara Huga Hadwigera i njegovih studenata. Nji-

[1] Carl Friedrich Gauss (1777. - 1855.), njemački matematičar
[2] Max Dehn (1872. - 1952.), njemački matematičar
[3] Raoul Bricard (1870. - 1943.), francuski matematičar
[4] Herbert Meschkowski (1909. - 1990.), njemački matematičar
[5] Veniamin Fedorovich Kagan (1869. - 1953.), ruski matematičar
[6] Hugo Hadwiger (1908. - 1981.), švicarski matematičar
[7] Vladimir Grigorjevič Boltjanski (1925. -), ruski matematičar

hovi radovi su omogućili novi pogled i moderni pristup Dehnovom dokazu. Međutim, i u njihovim dokazima postojali su nedostaci, koje je ispravio Vladimir G. Boltjanski u svojoj sređenoj verziji Hadwigerovog dokaza.

2.2 Dehnova invarijanta

Prije iskaza Dehn-Hadwigerovog teorema, potrebno je definirati nekoliko pojmova.

Definicija 2.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neki skup. Za brojeve $x_1, x_2, ..., x_k \in S$ kažemo da su zavisni ako postoje $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki nuli tako da vrijedi*

$$n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k = 0. \tag{2.1}$$

Svaku takvu relaciju nazivamo zavisnost. Ako (2.1) *povlači $n_1 = n_2 = ... = n_k = 0$, onda kažemo da su brojevi $x_1, x_2, ..., x_k$ nezavisni.*

Definicija 2.2.2. *Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je aditivna na skupu S ako za svaku zavisnost* (2.2) *među elementima iz S vrijedi*

$$n_1 f(x_1) + n_2 f(x_2) + ... + n_k f(x_k) = 0 \tag{2.2}$$

Propozicija 2.2.3. *Neka su f i g dvije aditivne funkcije definirane na istom skupu S.*
(i) Funkcija $f + g$ je aditivna funkcija.
(ii) Za svaki skalar k, funkcija kf je aditivna.
(iii) Ako je $0 \in S$, onda je $f(0) = 0$.

Dokaz. (i) Trebamo pokazati da za svaku zavisnost (2.1) vrijedi

$$n_1(f + g)(x_1) + ... + n_k(f + g)(x_k) = 0.$$

Znamo da vrijedi

$$(f + g)(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k) = f(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k) + g(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k),$$

a budući da su f i g aditivne funkcije, prethodna jednakost jednaka je

$$[n_1 f(x_1) + n_2 f(x_2) + ... + n_k f(x_k)] + [n_1 g(x_1) + n_2 g(x_2) + ... + n_k g(x_k)] = 0 + 0 = 0.$$

Dakle, $f + g$ je aditivna funkcija.

(ii) Budući da je f aditivna funkcija, onda vrijedi

$$kf(n_1x_1+n_2x_2+...+n_kx_k) = k(f(n_1x_1+n_2x_2+...+n_kx_k) = k(n_1 f(x_1)+n_2 f(x_2)+...+n_k f(x_k)) = k\cdot 0 = 0,$$

što je i trebalo pokazati.

(iii) Napišimo $0 = 0 + 0$ i djelujmo na ovu jednakost s aditivnom funkcijom f. Dobivamo $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, tj. $f(0) = 0$. □

Napomenimo da se bez smanjenja općenitosti može uzeti da za aditivnu funkciju vrijedi $f(\pi)$=0. Napomenimo i da se broj π može mijenjati, ali radi potreba u daljnjim rezultatima radit ćemo s π. Pretpostavimo da je f aditivna funkcija na S i da je $f(\pi) = P$. Definiramo novu funkciju g ovako:

$$g(x) = f(x) - \frac{P}{\pi}x.$$

Prema prethodnoj propoziciji, g je aditivna jer je zbroj dviju aditivnih funkcija. Ujedno vrijedi $g(\pi) = 0$.

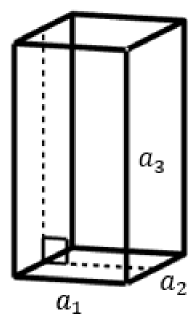
Definicija 2.2.4. *Neka je P bilo koji poliedar s bridovima duljine a_i, $i \in 1, 2, ..., p$ i diedrima veličina α_i, $i \in 1, 2, ..., p$ (kutovima između dviju strana poliedra koje imaju zajedničku stranicu duljine a_i). Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup koji sadrži brojeve α_i, $i \in 1, 2, ..., p$ i π, a f bilo koja aditivna funkcija na S. Tada se broj*

$$f(P) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_p f(\alpha_p)$$

zove ***Dehnova invarijanta*** *poliedra P (ili* ***bridna zakrivljenost*** *od P).*

Odredimo iznos Dehnove invarijante nekih poliedara.

Primjer 2.2.5. *Odredimo Dehnovu invarijantu kvadra P. Označimo duljine njegovih bri-*



Slika 2.1

dova sa a_1, a_2 i a_3. Svi njegovi diedri su veličina $\frac{\pi}{2}$. Neka je S skup svih njegovih diedara i π. Znamo da vrijedi zavisnost

$$\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,$$

pri čemu je $n_1 = 1$ *i* $n_2 = -2$. *Neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *aditivna funkcija. Djelujemo li s funkcijom* f *na prethodnu zavisnost, dobivamo*

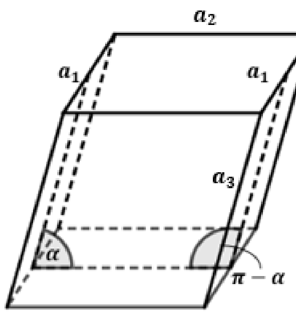
$$f(\pi) - 2f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Ako uzmemo da je $f(\pi) = 0$, *slijedi da je* $2f(\frac{\pi}{2}) = 0$, *to jest* $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. *Tada vrijedi*

$$f(P) = a_1 f(\frac{\pi}{2}) + a_1 f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

i to za svaki par bridova na istoj strani kvadra. Zaključujemo da je Dehnova invarijanta kvadra jednaka 0.

Primjer 2.2.6. *Odredimo Dehnovu invarijantu paralelepipeda P. Duljine bridova parale-*



Slika 2.2

lepipeda označimo s a_1, a_2 *i* a_3. *Zbog paralelnosti odgovarajućih pravaca (vidi sliku 2.2), veličine diedara paralelepipeda su* α *i* $\pi - \alpha$. *Neka je* S *skup koji sadrži njegove diedre (*α *i* $\pi - \alpha$*) i* π. *Vrijedi ova zavisnost*

$$-\pi + \alpha + (\pi - \alpha) = 0,$$

tj. $n_1 = -1$, $n_2 = 1$ *i* $n_3 = 1$.

Neka je f *aditivna funkcija na skupu* S. *Tada vrijedi*

$$-f(\pi) + f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = 0.$$

Neka je $f(\pi) = 0$. *Tada je*

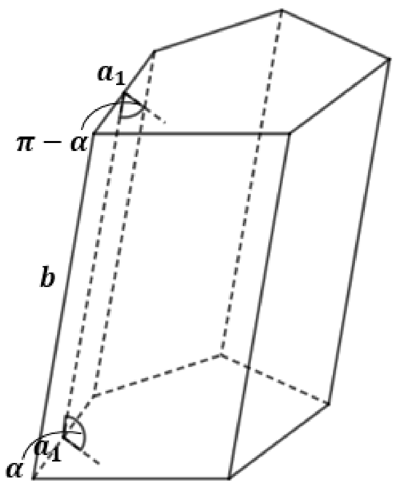
$$f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = 0$$

iz čega slijedi da je

$$a_1 f(\alpha) + a_1 f(\pi - \alpha) = 0.$$

Budući da posljednja jednakost vrijedi za svaki par bridova na istoj strani paralelepipeda, slijedi da je $f(P) = 0$, *odnosno Dehnova invarijanta paralelepipeda* P *iznosi 0.*

Primjer 2.2.7. *Odredimo Dehnovu invarijantu* n*-terostrane prizme* P. *Označimo duljine*



Slika 2.3

stranica baze te prizme s $a_1, a_2, ..., a_n$, *a duljinu pobočnog brida s* b. *Neka je* α *veličina jednog diedra prizme kojeg zatvaraju donja baza i pobočka kao što je označeno na slici 2.3. Zbog paralelnosti odgovarajućih pravaca, slijedi da je veličina diedra kojeg zatvaraju gornja baza prizme i ta ista pobočka* $\pi - \alpha$. *Definiramo li skup* $S = \{\alpha, \pi - \alpha, \pi\}$, *analogno prethodnom primjeru u konačnici dobivamo da je*

$$a_1 f(\alpha) + a_1 f(\pi - \alpha) = 0.$$

Posljednja jednakost vrijedi za svaki par bridova donje i gornje baze prizme. Preostaje nam još provjeriti za pobočne bridove duljine b. *Diedri koje sad promatramo su oni* *koje zatvaraju pobočke. Uočimo da su to upravo unutrašnji kutovi poligona kojeg dobivamo kada prizmu presiječemo ravninom okomitom na pobočne bridove. Označimo ih s* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$*. Tada je po definiciji Dehnove invarijante*

$$f(P) = bf(\alpha_1) + ... + bf(\alpha_n).$$

Znamo da je zbroj unutrašnjih kutova n-terokuta jednak $(n-2)\pi$ *pa vrijedi*

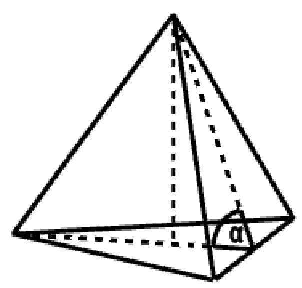
$$\alpha_1 + ... + \alpha_n - (n-2)\pi = 0.$$

Neka je $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \pi\}$*, a* f *bilo koja aditivna funkcija na* S*. Tada je*

$$f(\alpha_1) + ... + f(\alpha_n) - (n-2)f(\pi) = 0.$$

Ako uzmemo da je $f(\pi) = 0$*, onda je* $f(\alpha_1) + ... + f(\alpha_n) = 0$*, iz čega slijedi da je* $f(P) = 0$*. Zaključujemo da Dehnova invarijanta prizme iznosi 0.*

Primjer 2.2.8. *U posljednjem primjeru odredit ćemo Dehnovu invarijantu pravilnog tetraedra. Označimo s a duljinu njegovog brida i s* α *veličinu diedra tog tetraedra (svi diedri*



Slika 2.4

pravilnog tetraedra su sukladni i iznose $\arccos(\frac{1}{3})$*.) (Vidjeti dokaz teorema 2.4.2.) Neka je skup* $S = \{\alpha, \pi\}$ *i neka je funkcija* f *aditivna na tom skupu te neka vrijedi* $f(\pi) = 0$ *i* $f(\alpha) = 1$*. Po definiciji je Dehnova invarijanta tog tetraedra*

$$f(P) = 6af(\alpha) = 6a.$$

2.3 Dehn - Hadwigerov teorem

Prvi dokaz

Prije samog Dehn - Hadwigerovog teorema, iskažimo i dokažimo dvije leme koje ćemo koristiti u dokazu glavnog teorema. Ovaj se dokaz zasniva na rezultatima danim u [8].

Lema 2.3.1. *Neka je f aditivna funkcija na nekom skupu S, a $\gamma \in \mathbb{R} \setminus S$. Tada se f može proširiti do aditivne funkcije na skupu $S^* = S \cup \{\gamma\}$.*

Dokaz. Budući da je f aditivna funkcija na S, znamo da za svaku zavisnost oblika

$$n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k = 0$$

vrijedi

$$n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + ... + n_kf(x_k) = 0,$$

pri čemu su x_1, ..., $x_k \in S$. Trebamo pokazati da se ta funkcija može proširiti do aditivne funkcije na skupu $S^* = S \cup \gamma$. Razlikujemo dva slučaja.

1. Ne postoji zavisnost između elemenata iz S^* oblika

   $$n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k + n\gamma = 0,$$

   takva da je $n \neq 0$. Odnosno, element γ se ne nalazi ni u jednoj zavisnosti elemenata od S^*. Međutim, možemo definirati $f(\gamma) = a$, pri čemu je a bilo koji realan broj. Na taj smo način dobili proširenje funkcije f do aditivne funkcije na S^*.

2. Postoji zavisnost u S^* oblika

   $$n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k + n\gamma = 0, \tag{2.3}$$

   takva da je $n \neq 0$. Tada bi za aditivnu funkciju f na S^* moralo vrijediti

   $$n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + ... + n_kf(x_k) + nf(\gamma) = 0, \tag{2.4}$$

   gdje je $n \neq 0$. Podijelimo sada posljednju jednakost s $n \neq 0$ i izrazimo $f(\gamma)$.

   $$f(\gamma) = -\frac{n_1}{n}f(x_1) - \frac{n_2}{n}f(x_2) - ... - \frac{n_k}{n}f(x_k).$$

   Sad treba pokazati da je upravo $f(\gamma)$ proširenje funkcije f do aditivne funkcije na S^*. Neka je

   $$m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k + p_1y_1 + p_2y_2 + ... + p_ly_l + m\gamma = 0, \tag{2.5}$$

pri čemu su $m_1, m_2, ..., m_k \geq 0$, $p_1, p_2, ..., p_l \in \mathbb{N}$, a $y_1, y_2, ..., y_l \in S$ različiti od $x_1, x_2, ..., x_k$, neka zavisnost na skupu S^*. Trebamo pokazati da f zadovoljava jednadžbu

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_k f(x_k) + p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) + ... + p_l f(y_l) + m f(\gamma) = 0.$$

Ako u tu zavisnost ne ulazi γ, pretpostavljat ćemo da se on pojavljuje s koeficijentom 0, a isto tako pretpostavljamo i ako neki od elemenata $x_1, ..., x_k$ ne ulaze u tu zavisnost. Pomnožimo sada jednakost (2.5) s n :

$$m_1 n x_1 + m_2 n x_2 + ... + m_k n x_k + p_1 n y_1 + p_2 n y_2 + ... + p_l n y_l + m n \gamma = 0.$$

Zatim pomnožimo jednakost (2.3) s m :

$$m n_1 x_1 + m n_2 x_2 + ... + m n_k x_k + m n \gamma = 0.$$

Sad oduzmimo posljednje dvije jednadžbe

$$(m_1 n - m n_1) x_1 + ... + (m_k n - m n_k) x_k + p_1 n y_1 + ... + p_l n y_l = 0.$$

Budući da su $x_1, ..., x_k, y_1, y_2, ..., y_l \in S$, gornja jednakost predstavlja zavisnost među elementima skupa S. Iz pretpostavke leme znamo da je funkcija f aditivna na skupu S pa vrijedi

$$(m_1 n - m n_1) f(x_1) + ... + (m_k n - m n_k) f(x_k) + p_1 n f(y_1) + ... + p_l n f(y_l) = 0.$$

Sad pomnožimo jednadžbu (2.4) s m

$$m n_1 f(x_1) + m n_2 f(x_2) + ... + m n_k f(x_k) + m n f(\gamma) = 0$$

i dodamo je prethodnoj jednadžbi pa dobivamo

$$m_1 n f(x_1) + m_2 n f(x_2) + ... + m_k n f(x_k) + p_1 n f(y_1) + p_2 n f(y_2) + ... + p_l n f(y_l) + m n f(\gamma) = 0.$$

Podijelimo posljednju jednadžbu s $n \neq 0$

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_k f(x_k) + p_1 f(y_1) + p_2 f(y_2) + ... + p_l f(y_l) + m f(\gamma) = 0$$

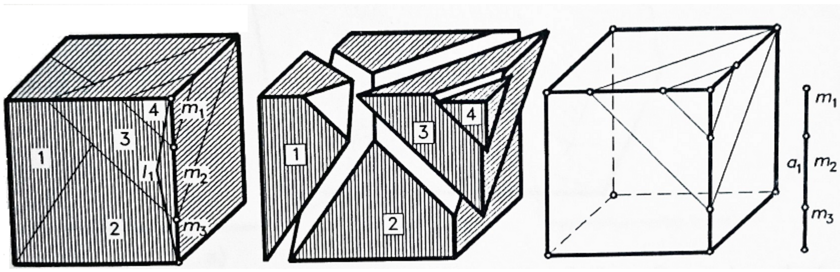
i dobivamo upravo ono što je i trebalo pokazati, odnosno funkcija f je aditivna funkcija na skupu S^*.

$\square$

Lema 2.3.2 (**Dehnova lema**). *Neka je poliedar P prikazan kao zbroj* $P = P_1 + P_2 + ... + P_k$ *poliedara* $P_1, P_2, ..., P_k$. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *skup koji sadrži broj* π *i radijanske mjere svih diedara poliedara* $P, P_1, P_2, ..., P_k$ *te neka je f aditivna funkcija na S takva da je* $f(\pi) = 0$. *Tada za Dehnovu invarijantu ovih poliedara vrijedi*

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2) + ... + f(P_k). \tag{2.6}$$

Dokaz. Na svakom bridu poliedara $P, P_1, P_2, ..., P_k$ uočimo točke koje su krajnje točke tog brida i točke koje su vrhovi tih poliedara. Tim točkama je svaki brid podijeljen na manje dužine koje nazivamo **karikama**. Kao primjer uzmimo kocku duljine brida a_1 kao na slici 2.5. Taj brid je podijeljen na opisan način na karike duljina m_1, m_2 i m_3. Promotrimo neki



Slika 2.5

brid poliedra P i na njemu kariku duljine m. Označimo s α veličinu diedra poliedra P uz taj brid. Po pretpostavci leme je $\alpha \in S$ te postoji aditivna funkcija f na S za koju je $f(\pi) = 0$. Za kariku duljine m definiramo **težinu karike** kao produkt $m \cdot f(\alpha)$. Isto se definiraju težine karika u poliedrima $P_1, P_2, ..., P_k$. Odredimo sada zbroj težina svih karika na bridovima poliedra P. Za početak, uzmimo jedan brid duljine a_1 poliedra P. Označimo s α_1 veličinu diedra uz taj brid. Pretpostavimo da je taj brid podijeljen na tri karike duljina m_1, m_2 i m_3. Tada je zbroj težina tih karika jednak

$$m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = a_1 f(\alpha_1).$$

Nadalje, zbroj težina karika na bridu duljine a_2 iznosi $a_2 f(\alpha_2)$, pri čemu je α_2 veličina diedra uz taj brid. Analogno se pokaže i za ostale bridove poliedra P pa slijedi da je zbroj težina svih karika poliedra P jednak

$$a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_p f(\alpha_p) = f(P).$$

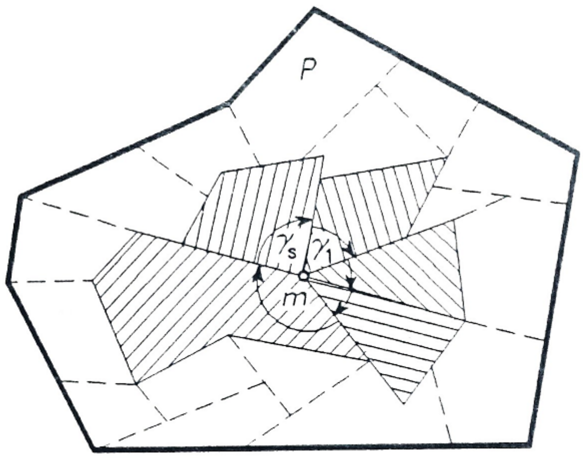
Na isti se način pokaže da je zbroj težina karika poliedra P_i jednak $f(P_i)$, gdje je $i \in 1, 2, ..., k$. Dakle, kako bismo odredili zbroj na desnoj strani jednakosti (2.6), moramo zbrojiti težine svih karika u svim poliedrima $P_1, ..., P_k$. Neka je m duljina bilo koje karike, pri čemu se ona može nalaziti na bridovima više poliedara i neka su $\gamma_1, ..., \gamma_s \in S$ veličine diedara pridruženih karici duljine m. Tada je, po definiciji, težina karike duljine m u poliedru s diedrom γ_j, $j \in 1, ..., s$, jednaka $mf(\gamma_j)$. Stoga je zbroj težina karike duljine m obzirom na sve poliedre $P_1, ..., P_k$ jednak

$$mf(\gamma_1) + ... + mf(\gamma_s).$$

Opisani skup svih karika možemo rastaviti na tri klase.

1. Prvu klasu čine sve karike unutar poliedra P, osim eventualno njihovih krajeva. Te karike mogu biti na bridovima nekih od poliedara $P_i, i \in 1, ..., k$ ili na strani jednog od tih poliedara. Stoga razlikujemo još dvije podklase karika.

   a) Karika duljine m nalazi se na bridovima nekih od poliedara $P_1, ..., P_k$. Presijecimo poliedre P i $P_1, ..., P_k$ ravninom okomitom na kariku duljine m kroz neku unutrašnju točku te karike (slika 2.6). Tada za diedre veličina $\gamma_1, ..., \gamma_s$ vrijedi



Slika 2.6

   da je

$$\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_s = 2\pi.$$

   Odnosno,

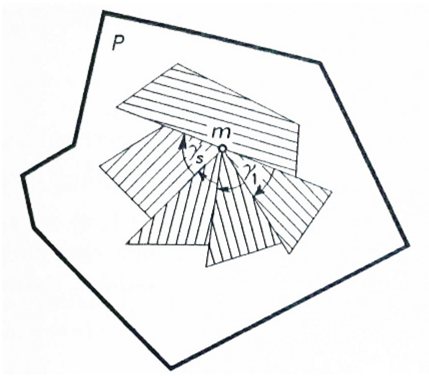
$$\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_s - 2\pi = 0.$$

   Budući da je f aditivna funkcija na S i $f(\pi) = 0$, vrijedi

$$f(\gamma_1) + ... + f(\gamma_s) = 0.$$

Budući da posljednja jednakost vrijedi za sve karike iz ove podklase, slijedi da je zbroj težina svih karika, s obzirom na poliedre P_i, $i \in 1, ..., k$, ove podklase jednak 0.

b) Karika duljine m nalazi se unutar poliedra P i na strani jednog od poliedara $P_i, i \in 1, ..., k$, a ne na bridu (slika 2.7). Tada je zbroj veličina diedara pri-



Slika 2.7

druženih toj karici jednak

$$\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_s = \pi$$

pa je

$$\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_s - \pi = 0.$$

Tada za aditivnu funkciju f vrijedi

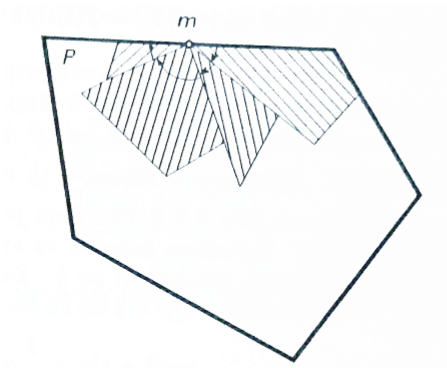
$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + ... + f(\gamma_s) = 0.$$

I u ovom slučaju se posljednja jednakost odnosi na cijelu podklasu karika pa je zbroj težina svih karika, s obzirom na poliedre P_i, $i \in 1, ..., k$, iz te podklase jednak 0.

Možemo zaključiti da je za klase karika iz prvog slučaja zbroj njihovih težina jednak 0, to jest vrijedi

$$mf(\gamma_1) + ... + mf(\gamma_s) = 0.$$

2. U ovoj klasi su sve karike koje se nalaze na nekoj strani poliedra P, ali ni na jednom od njegovih bridova. Uzmimo jednu takvu kariku i ponovno označimo njezinu duljinu s m. Presiječemo poliedar P i $P_1, ..., P_k$ s ravninom okomitom na kariku duljine m kroz neku unutrašnju točku od m (slika 2.8). Tada je zbroj veličina diedara



Slika 2.8

pridruženih toj karici jednak

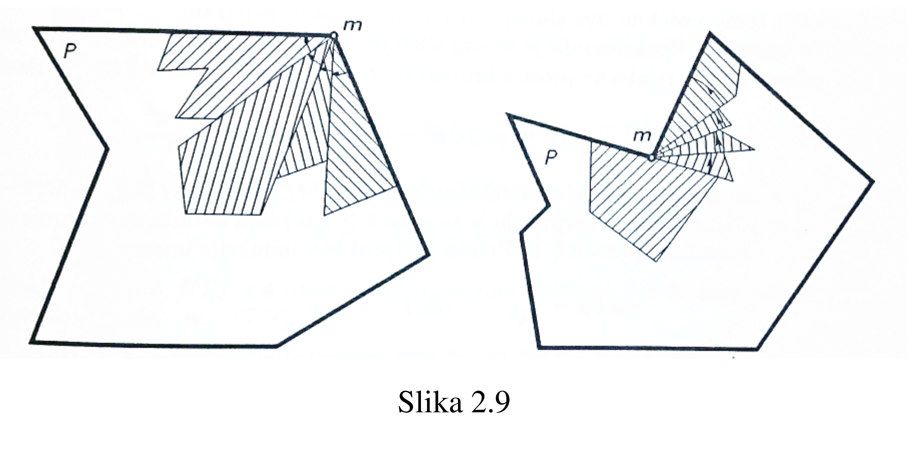
$$\gamma_1 + ... + \gamma_s = \pi$$

pa zaključujemo kao u slučaju 1.b) da je

$$mf(\gamma_1) + ... + mf(\gamma_s) = 0.$$

Odnosno, zbroj težina karika duljine m obzirom na poliedre $P_i, i \in 1, ..., k$ i iz ove klase jednak je 0.

3. U ovoj klasi su sve karike koje se nalaze na bridu poliedra P. Ponovno označimo duljinu karike iz ove klase s m. Neka je α veličina diedra u P pridruženog bridu na kojem se nalazi ta karika. Promotrimo oba slučaja u ovisnosti o veličini α (slika 2.9). Ako je α šiljasti kut, onda vrijedi



Slika 2.9

$$\gamma_1 + ... + \gamma_s = \alpha,$$

a ako je α tup kut, onda je

$$\gamma_1 + ... + \gamma_s = \alpha - \pi.$$

Budući da je $f(\pi) = 0$, u oba slučaja vrijedi

$$f(\gamma_1) + ... + f(\gamma_s) = f(\alpha)$$

pa je zbroj težina ove karike s obzirom na poliedre P_i, $i \in 1, ..., k$ jednak

$$mf(\gamma_1) + ... + mf(\gamma_s) = mf(\alpha).$$

Stoga karike iz ove klase na desnoj strani jednakosti (2.6) daju zbroj $a_1 f(\alpha_1) + ... + a_p f(\alpha_p)$, pri čemu su $a_1, ..., a_p$ duljine bridova poliedra P, a $\alpha_1, ..., \alpha_p$ veličine diedara uz odgovarajuće bridove poliedra P.

Pregledom svih klasa karika, dolazimo do zaključka da je zbroj na desnoj strani jednakosti (2.6) jednak zbroju težina svih karika u odnosu na poliedar P. A taj zbroj jednak je Dehnovoj invarijanti poliedra P. Odnosno, vrijedi

$$f(P_1) + f(P_2) + ... + f(P_k) = f(P),$$

što je i trebalo pokazati. □

Sljedeći iskaz i dokaz Dehn - Hadwigerovog teorema može se pronaći u knjizi [8].

Teorem 2.3.3 (Dehn - Hadwigerov teorem). *Neka je P poliedar s diedrima $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, Q poliedar s diedrima $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$, a $S \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji skup koji sadrži brojeve π, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$. Ako na S postoji aditivna funkcija f takva da je $f(\pi) = 0$ i $f(P) \neq f(Q)$, onda P i Q nisu jednakosastavljivi.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka su P i Q jednakosastavljivi poliedri takvi da je

$$P = P_1 + ... + P_k,$$

$$Q = Q_1 + ... + Q_k$$

i

$$P_1 \cong Q_1, ..., P_k \cong Q_k$$

. Definirajmo skup S^* kao uniju skupa S i diedara svih poliedara $P_1, ..., P_k$. Koristeći Lemu 2.3.1, zaključujemo da aditivnu funkciju f na skupu S možemo proširiti do aditivne funkcije na S^*. Budući da je f aditivna funkcija na skupu S^* koji sadrži π i mjere svih diedara poliedara $P_1, ..., P_k$, pri čemu je $f(\pi) = 0$, prema Lemi 2.3.2 za Dehnovu invarijantu poliedra P vrijedi

$$f(P) = f(P_1) + ... + f(P_k).$$

Zbog navedene kongruencije među poliedrima, vrijedi da su diedri poliedara $Q_1, ..., Q_k$ jednaki diedrima od $P_1, ..., P_k$ pa za Dehnovu invarijantu poliedra Q vrijedi

$$f(Q) = f(Q_1) + ... + f(Q_k).$$

Međutim, kako je $P_i \cong Q_i$, slijedi da je $f(P_i) = f(Q_i)$, za $i \in 1, ..., k$. Iz posljednje dvije jednakosti slijedi da je $f(P) = f(Q)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema da je $f(P) \neq f(Q)$. Budući da smo naišli na kontradikciju, slijedi da je početna pretpostavka bila kriva, odnosno poliedri P i Q nisu jednakosastavljivi. □

Drugi dokaz

Iskažimo i dokažimo Dehn - Hadwigerov teorem na drugi način [9].

Definicija 2.3.4. *Za skup $M = \{m_1, ..., m_k\} \subseteq \mathbb{R}$ definiramo*

$$V(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

skup svih linearnih kombinacija brojeva iz M s racionalnim koeficijentima.

Definicija 2.3.5. *Preslikavanje*

$$f : V(M) \to \mathbb{Q}$$

sa svojstvima

1. *$f(x) + f(y) = f(x + y)$, za sve $x, y \in V(M)$*

2. *$f(qx) = qf(x)$, za sve $x \in V(M)$, $q \in \mathbb{Q}$*

nazivamo linearna funkcija nad poljem $\mathbb{Q}$.

Uvedimo neke oznake. Neka je P poliedar, $l(e)$ duljina brida e poliedra P i $\Phi(e)$ diedar poliedra P pridružen bridu e (kut između dviju strana poliedra P koje se sastaju u bridu e). Neka je M_P skup čiji su elementi svi diedri poliedra P i π. Sad možemo iskazati sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.6. *Za linearnu funkciju $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ takvu da je $f(\pi) = 0$, definiramo Dehnovu invarijantu $f(P)$*

$$f(P) = \sum_{e \in P} l(e) f(\Phi(e)).$$

Koristeći ovakvu definiciju Dehnove invarijante, iskazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.7. *Neka je P poliedar koji se može rastaviti na konačno mnogo poliedara $P_1, ..., P_k$. Neka je $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ aditivna funkcija, pri čemu je M konačan skup i vrijedi*

$$M \supseteq M_{P_1} \cup M_{P_2} \cup ... \cup M_{P_k}.$$

Tada je

$$f(P) = \sum_{i=1}^{k} f(P_i).$$

Dokaz. Neka je S skup svih bridova. Za poliedar Q i dužinu s definirajmo diedar. Ako je dužina s dio brida e, onda je diedar pridružen toj dužini jednak diedru koji je pridružen bridu e. Ako dužina s leži na strani ili u unutrašnjosti, onda je mjera diedra pridruženog toj dužini jednaka π ili 2π redom. Inače, neka je 0. Označimo s $\Phi(s)$ i $\Phi_i(s)$ diedre pridružene dužini s poliedara P i P_i redom. Vrijedi da je

$$\Phi(s) = \sum_{i} \Phi_i(s), \tag{2.7}$$

za svaki $s \in S$, bez obzira na njezin položaj. Dehnovu invarijantu možemo izračunati preko svih bridova

$$\begin{aligned} f(Q) &= \sum_{e \in E(Q)} l(e) \cdot f(\Phi(e)) \\ &= \sum_{e \in E(Q)} f(\Phi(e)) \cdot \sum_{\substack{s \in S \\ s \subseteq e}} l(s) \\ &= \sum_{e \in E(Q)} \sum_{\substack{s \in S \\ s \subseteq e}} l(s) f(\Phi(s)) \\ &= \sum_{s \in S} l(s) f(\Phi(s)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tada je lako izračunati zbroj Dehnovih invarijanti poliedara P_i.

$$\begin{aligned}
\sum f(P_i) &= \sum_i \sum_{e \in E(P_i)} l(e) \cdot f(\Phi_i(e)) \\
&= \sum_i \sum_{s \in S} l(s) \cdot f(\Phi_i(s)) \qquad (prema (2.8)) \\
&= \sum_{s \in S} \sum_i l(s) \cdot f(\Phi_i(s)) \\
&= \sum_{s \in S} l(s) \cdot \sum_i f(\Phi_i(s)) \\
&= \sum_{s \in S} l(s) \cdot f(\sum_i \Phi_i(s)) \qquad (zbog\ aditivnosti\ f) \\
&= \sum_{s \in S} l(s)(\Phi(s)) \qquad (prema (2.7)) \\
&= f(P), \quad (prema (2.8))
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Korolar 2.3.8. *Neka su P i Q poliedri i neka je $M \subset \mathbb{R}$ konačan skup, takav da vrijedi $M \supseteq M_P \cup M_Q$. Ako je $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ bilo koja linearna funkcija, takva da je $f(\pi) = 0$ i $f(P) \neq f(Q)$, onda P i Q nisu jednakosastavljivi.*

Dokaz. Pretpostavimo da P i Q jesu jednakosastavljivi i da su nam M i f zadani. Neka je P sastavljen od poliedara $P_1, ..., P_k$, a Q od poliedara $Q_1, ..., Q_k$, pri čemu su P_i i Q_i kongruentni. Neka je $M' \supseteq M$ konačan skup koji sadrži sve diedre koji se pojavljuju. Proširimo funkciju f na funkciju $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$, tako što ćemo definirati vrijednosti od f' pomoću elemenata nove baze $V(M')$, a pri tome ćemo zadržati i one vrijednosti koje funkcija poprima na $V(M)$. Tada je

$$f(P) = f'(P) = \sum_{i=1}^{k} f'(P_i) = \sum_{i=1}^{k} f'(Q_i) = f'(Q) = f(Q),$$

što je kontradikcija s pretpostavkom korolara. Zaključujemo da je početna pretpostavka dokaza kriva, odnosno poliedri P i Q nisu jednakosastavljivi. □

Pokazat ćemo primjernu Dehn - Hadwigerovog teorema na primjeru dva tetraedra. Za to nam je najprije potrebna sljedeća lema.

Lema 2.3.9. *Broj* $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ *je iracionalan.*

Dokaz. Označimo s $\gamma = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je broj $\frac{\gamma}{\pi} = \frac{l}{m}$, $l, m \in \mathbb{N}$ i $m \geq 2$. Iz toga slijedi da je $m\gamma = l\pi$ pa je $\cos(m\gamma) = \pm 1$. Općenito, neka je

$a_n = cos(n\gamma)$ pa je za $n = m$:

$$a_m = cos(m\gamma) = \pm 1.$$

Dovoljno je pokazati da je $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{3}^n}$, za svaki $n \in N \cup \{0\}$, pri čemu b_n nije djeljiv s 3, jer to vodi do kontradikcije za $n = m$.
Dokaz ćemo provesti idukcijom po $n \in N \cup \{0\}$. Provjerimo vrijedi li tvrdnja za brojeve 0 i 1.
Za $n = 0$,

$$a_0 = \cos 0 = 1,$$

a za $n = 1$

$$a_1 = \cos\gamma = \cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da vrijedi $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{3}^n}$, pri čemu b_n nije djeljiv s brojem 3. Prisjetimo se trigonometrijske adicijske formule:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ako uvrstimo $\alpha = (n+1)\gamma$ i $\beta = (n-1)\gamma$, dobivamo

$$\cos(n+1)\gamma + \cos(n-1)\gamma = 2\cos n\gamma\cos\gamma.$$

Stoga je

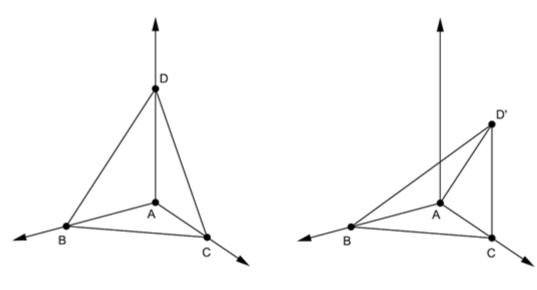
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(n+1)\gamma \\ &= 2\cos(n\gamma)\cos\gamma - \cos(n-1)\gamma \\ &= 2a_n a_1 - a_{n-1} \\ &= 2\frac{b_n}{\sqrt{3}^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{b_{n-1}}{\sqrt{3}^{n-1}} \\ &= \frac{2b_n - 3b_{n-1}}{\sqrt{3}^{n+1}}. \end{aligned}$$

Označimo s $b_{n+1} = 2b_n - 3b_{n-1}$ brojnik. Budući da b_n i b_{n-1} nisu djeljivi s 3, ni b_{n+1} nije djeljiv s 3. Budući da tvrdnja vrijedi za brojeve 0 i 1 i iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n slijedi da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $n + 1$, prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj. Za $n = m$ onda vrijedi

$$a_m = \cos(m\gamma) = \frac{b_m}{\sqrt{3}^m},$$

pri čemu b_m nije djeljiv s 3. Odnosno, dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom $a_m = \pm 1$, odnosno s pretpostavkom da je γ iracionalan broj. Stoga vrijedi da je ta pretpostavka kriva, odnosno, broj $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ je iracionalan. □

Primjer 2.3.10. ***Dokaz Hilbertovog trećeg problema.*** *Neka su* $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$ *i* $D' = (0, 1, 1)$ *točke u prostoru. Označimo s* T_1 *tetraedar* $ABCD$*, a s* T_2 *tetraedar* $ABCD'$*. Uočimo da ta dva tetraedra imaju baze jednakih površina*



Slika 2.10. Tetraedri T_1 i T_2 [2]

i visine jednakih duljina pa su im i volumeni jednaki. Tetraedar T_1 *je očigledno tetraedar u čijem se jednom vrhu* (A) *sastaju tri ortogonalna brida duljine* 1*. Koristeći vektore, znamo da je*

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (0, -1, 0) + (0, 0, 1) = (0, -1, 1)$$

pa njegova duljina iznosi:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

Analogno se pokaže i za $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{2}$*. Uočimo da tetraedar* T_1 *ima tri diedra jednaka* $\frac{\pi}{2}$ *i još tri diedra jednake veličine* α *koji možemo izračunati. Uzmimo dvije ravnine koje zatvaraju kut* α*, BCA i BCD i odredimo za svaku od njih vektor normale:*

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA},$$

pri čemu su $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$ *i* $\overrightarrow{BA} = (1, 0, 0)$*. Dobivamo:*

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{k},$$

odnosno $\overrightarrow{n_1} = (0, 0, -1)$*. Na sličan način dobivamo i vektor normale ravnine* BCD*. Odredimo vektore* $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$ *i* $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 1)$ *pa je vektor normale jednak:*

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

odnosno $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, -1)$. *Diedar* α *možemo odrediti na sljedeći način:*

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{(0)^2+(0)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Slijedi da je $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Označimo sa $M_{T_1} = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \alpha\right\}$. *Odredimo sad diedre tetraedra* $T_2 := ABCD'$. *Uočimo da tetraedar ima četiri strane pa ćemo morati odrediti četiri vektora normale ravnina koje sadrže te strane.*

Neka je $\overrightarrow{n_1}$ *vektor normale ravnine* ABD', $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{AD'} = (0, 1, 1)$. *Tada je:*

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1).$$

Neka je $\overrightarrow{n_2}$ *vektor normale ravnine* ACD', $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{AD'} = (0, 1, 1)$. *Tada je:*

$$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0).$$

Neka je $\overrightarrow{n_3}$ *vektor normale ravnine* BCD', $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BD'} = (-1, 1, 1)$. *Tada je:*

$$\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0).$$

Neka je $\overrightarrow{n_4}$ *vektor normale ravnine* ABC. *Već smo izračunali da je* $\overrightarrow{n_4} = (0, 0, -1)$.
Odredimo sad diedre $\alpha_1, ..., \alpha_6$:
1) Neka je α_1 *diedar između ravnina* ABD' *i* ACD'. *Tada je*

$$\cos\alpha_1 = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = 0.$$

pa je $\alpha_1 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

2) Neka je α_2 diedar između ravnina ABD' i BCD'. Tada je

$$\cos\alpha_2 = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_3}) = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_3}}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_3}|} = \frac{0-1+0}{\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}} = \frac{-1}{2}.$$

pa je $\alpha_2 = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

3) Neka je α_3 diedar između ravnina ABD' i ABC. Tada je

$$\cos\alpha_3 = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_4}) = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_4}}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_4}|} = \frac{0+0-1}{\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(0)^2+(0)^2+(-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

pa je $\alpha_2 = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4}$.

4) Neka je α_4 diedar između ravnina ACD' i BCD'. Tada je

$$\cos\alpha_4 = \cos(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}) = \frac{\overrightarrow{n_2}\overrightarrow{n_3}}{|\overrightarrow{n_2}|\,|\overrightarrow{n_3}|} = \frac{1+0+0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

pa je $\alpha_2 = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

5) Neka je α_5 diedar između ravnina ACD' i ABC. Tada je

$$\cos\alpha_5 = \cos(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_4}) = \frac{\overrightarrow{n_2}\overrightarrow{n_4}}{|\overrightarrow{n_2}|\,|\overrightarrow{n_4}|} = 0.$$

pa je $\alpha_2 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

6) Neka je α_6 diedar između ravnina BCD' i ABC. Tada je

$$\cos\alpha_5 = \cos(\overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{n_4}) = \frac{\overrightarrow{n_3}\overrightarrow{n_4}}{|\overrightarrow{n_3}|\,|\overrightarrow{n_4}|} = 0.$$

pa je $\alpha_2 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.
Označimo s $M_{T_2} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. *Neka je*

$$M = M_{T_1} \cup M_{T_2} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \alpha\right\}.$$

Uvjerimo se da ne postoji zavisnost na $\mathbb{Q}$ oblika $n_1\pi + n_2\alpha = 0$, tako da su $n_1, n_2 \neq 0$. Kad bi postojala takva zavisnost, vrijedilo bi

$$\frac{\alpha}{\pi} = -\frac{n_1}{n_2},$$

što bi bila kontradikcija s Lemom 2.3.9. Neka je $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ linearna funkcija takva da je $f(\pi) = 0$ i $f(\alpha) = 1$. Zbog linearnosti od f i zbog $f(\pi) = 0$ slijedi da je $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) = 0$. Stoga je:

$$f(T_1) = 3\sqrt{2} f(\alpha) = 3\sqrt{2},$$

a

$$f(T_2) = 0.$$

Budući da ova dva tetraedra imaju različite Dehnove invarijante, prema teoremu 2.3.3 slijedi da ta dva tetraedra nisu jednakosastavljiva.

2.4 Problem jednakosastavljivosti kocke i pravilnog tetraedra

Ovaj problem dokazan je na dva različita načina. Prvi se svodi na primjenu Dehnovih invarijanti, a drugi na aproksimaciju realnih brojeva racionalnim brojevima. Za oba dokaza potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.4.1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, broj $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{n}$ je iracionalan broj.[8] [1]*

Dokaz. Označimo sa $\varphi = \arccos \frac{1}{n}$, to jest $\cos \varphi = \frac{1}{n}$. Pretpostavimo suprotno, neka je $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{n} = \frac{\varphi}{\pi}$ racionalan broj, odnosno neka je $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{k}{l}$, pri čemu su $k, l \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je $k\varphi = l\pi$ pa je

$$\cos k\varphi = \cos l\pi = \pm 1,$$

odnosno $\cos k\varphi$ je cijeli broj. Želimo doći do kontradikcije pa ćemo dokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}$, broj $\cos k\varphi$ nije cijeli broj. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po k. Najprije uočimo sljedeće: za $k = 1$, $\cos \varphi = \frac{1}{n}$. Prisjetimo se trigonometrijskog identiteta:

$$\cos \alpha + cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Uvrstimo li u taj identitet $\alpha = (k + 1)\varphi$ i $\beta = (k - 1)\varphi$, dobivamo

$$\cos(k + 1)\varphi + \cos(k - 1)\varphi = 2 \cos k\varphi \cos \varphi.$$

Uvrstimo li $\cos \varphi = \frac{1}{n}$ i prebacimo $\cos(k - 1)\varphi$ na drugu stranu jednakosti, dobivamo:

$$\cos(k + 1)\varphi = \frac{2}{n} \cos k\varphi - \cos(k - 1)\varphi. \tag{2.9}$$

Dokaz ćemo podijeliti na dva slučaja: kad je n neparan i kad je n paran.

1. Neka je n neparan. Pokazat ćemo da je u tom slučaju $\cos k\varphi$ broj s nazivnikom n^k i brojnikom koji je relativno prost s brojem n. Za $k = 1$, $cos\varphi = \frac{1}{n}$ ta tvrdnja vrijedi. Za $k = 2$ vrijedi:
$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{2}{n^2} - 1 = \frac{2 - n^2}{n^2},$$
pri čemu smo primijenili jedan od trigonometrijskih identiteta za kosinus dvostrukog kuta. Budući da je n neparan, slijedi da je najveća zajednička mjera $M(2, n) = 1$ pa je i $M(2 - n^2, n) = 1$, odnosno brojnik broja $\cos 2\varphi$ i broj n su međusobno relativno prosti. Time je dokazana baza indukcije. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ vrijedi tvrdnja za sve brojeve $1, 2, ..., k$, odnosno vrijedi
$$\cos k\varphi = \frac{a}{n^k},$$
$$cos(k - 1)\varphi = \frac{b}{n^{k-1}},$$
pri čemu su $a, b \in \mathbb{N}$ i $M(a, n) = M(b, n) = 1$. Uvrštavanjem u jednakost (2.9) dobivamo:
$$\cos(k + 1)\varphi = \frac{2}{n}\frac{a}{n^k} - \frac{b}{n^{k-1}} = \frac{2a - bn^2}{n^{k+1}}.$$
Budući da je $M(a, n) = M(2, n) = 1$, slijedi da je i $M(2a, n) = 1$. Zbog toga i zbog $M(b, n) = 1$ slijedi da je i $M(2a - bn^2, n) = 1$, što je i trebalo pokazati.
Trebamo još pokazati da lema vrijedi i za parne n.

2. n je paran. Neka je $n = 2m$, $m \geq 2$. Pokažimo da je u tom slučaju $\cos k\varphi$ razlomak s nazivnikom $2m^k$ i brojnikom koji je relativno prost s brojem m. Dokaz provodimo također matematičkom indukcijom po k. Za $k = 1$ i $k = 2$ tvrdnja vrijedi, jer: $\cos\varphi = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m}$ i kao u prethodnom slučaju
$$\cos 2\varphi = \frac{2 - n^2}{n^2} = \frac{2 - 4m^2}{4m^2} = \frac{1 - 2m^2}{2m^2}.$$
Budući da je $M(1, m) = 1$, slijedi da je i $M(1 - 2m^2, 2m) = 1$. Dakle, baza indukcije je dokazana. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tvrdnja vrijedi za sve brojeve $1, 2, ..., k$, odnosno neka vrijedi kao i u prethodnom slučaju:
$$\cos k\varphi = \frac{a}{2m^k},$$
$$cos(k - 1)\varphi = \frac{b}{2m^{k-1}},$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{N}$ i $M(a, m) = M(b, m) = 1$. Ponovno uvrštavanjem u jednadžbu (2.9), dobivamo:

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{2m}\frac{a}{2m^k} - \frac{b}{2m^{k-1}} = \frac{2a - 2bm^2}{4m^{k+1}} = \frac{a - 2bm^2}{2m^{k+1}}.$$

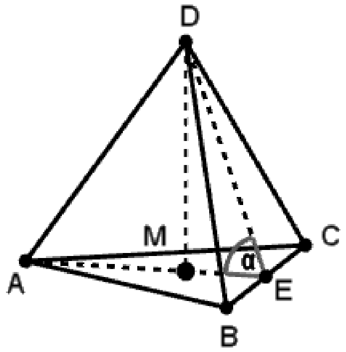
Kako je $M(a, m) = M(b, m) = 1$, slijedi da je $M(a - 2bm^2, m) = 1$, što je i trebalo pokazati.

Budući da tvrdnja "$\cos k\varphi$ nije cijeli broj" vrijedi za prirodan broj 1 i budući da iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k slijedi da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$, prema principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj.
Međutim, ta tvrdnja je u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je taj broj cijeli i da je broj $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{n}$ racionalan. Zbog toga zaključujemo da je početna tvrdnja kriva i da je broj $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{n}$ iracionalan. □

Teorem 2.4.2. *Pravilni tetraedar T nije jednakosastavljiv s kockom K istog obujma.*

Sljedeći dokaz tog teorema može se pronaći u knjigama [8] i [1].

Dokaz. Neka je T pravilni tetraedar kao na slici 2.11. Svi diedri pravilnog tetraedra su sukladni. Označimo veličinu tog diedra s α i izračunajmo je. Označimo s M ortogonalnu



Slika 2.11

projekciju točke D na ravninu ABC. Točka M je ujedno i težište trokuta ΔABC. Zbog toga točka M dijeli visinu $\overline{AE}$ trokuta ΔABC u omjeru $1 : 2$, to jest vrijedi da je $|ME| = \frac{1}{3}|AE|$. Budući da je $\overline{DE}$ visina jednakostraničnog trokuta ΔBCD, koji je sukladan trokutu ΔABC, slijedi da je $|DE| = |AE|$. Tada je $|ME| = \frac{1}{3}|DE|$. Iz pravokutnog trokuta ΔEDM slijedi da je $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ pa je $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Neka je K kocka istog volumena kao tetraedar T. Znamo da su svi diedri kocke sukladni, veličine $\frac{\pi}{2}$. Definiramo skup $S := \left\{\alpha, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ i neka je f funkcija na tom skupu zadana vrijednostima: $f(\pi) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ i $f(\alpha) = 1$. Pokažimo da je ta funkcija aditivna na skupu S. Neka je

$$n_1\pi + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\alpha = 0$$

neka zavisnost među elementima skupa S, a $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. Postoje dvije mogućnosti: $n_3 \neq 0$ ili $n_3 = 0$. Pretpostavimo da je $n_3 \neq 0$, tada je

$$n_3\alpha = -n_1\pi - n_2\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = -\frac{(2n_1 + n_2)\pi}{2n_3}.$$

Međutim, dobivamo da je broj

$$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3} = \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{2n_1 + n_2}{2n_3}$$

racionalan broj, što je kontradikcija s prethodnom lemom. Zaključujemo da je $n_3 = 0$. Zbog toga i zbog definicije funkcije f vrijedi sljedeća jednakost

$$n_1f(\pi) + n_2f(\frac{\pi}{2}) + n_3f(\alpha) = 0.$$

To znači da je f aditivna na skupu S. Dehnova invarijanta kocke brida duljine a_1 iznosi

$$f(K) = 12a_1f(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

a Dehnova invarijanta tetraedra T brida duljine a_2 iznosi

$$f(T) = 6a_2f(\alpha) = 6a_2 \neq 0.$$

Dakle, $f(K) \neq f(T)$ pa prema Dehn - Hadwigerovom teoremu pravilni tetraedar i kocka jednakog volumena nisu jednakosastavljivi poliedri. □

Lema 2.4.3. *[3] Neka su $a_1, ..., a_n$ realni brojevi. Za svaki $\varepsilon > 0$, brojeve $a_1, ..., a_n$ je moguće istovremeno aproksimirati racionalnim brojevima $\frac{p_1}{q}, ..., \frac{p_n}{q}$, odnosno vrijedi*

$$\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}, \tag{2.10}$$

za $i \in 1, ..., n$.
Odnosno, ako su svi a_i pozitivni, onda možemo izabrati p_i koji je pozitivan.

Dokaz. Neka je M pozitivan cijeli broj takav da je $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Definirajmo $M^n + 1$ točaka jedinične kocke $C := [0,1]^n$ u $\mathbb{R}^n$:

$$Q_l := (\{la_1\}, \{la_2\}, ..., \{la_n\}), \qquad (l \in 1, ..., M^n),$$

gdje $\{x\}$ označava *razlomljeni dio (decimalni dio, mantisa)* od x. Kocku C možemo rastaviti na M^n manjih kongruentnih kocki bridova duljine $\frac{1}{M}$. Budući da je $M^n + 1$ točaka Q_l u kocki C, prema Dirichletovom principu, postoji manja kocka koja sadrži barem dvije od tih točaka. Neka su to Q_u i Q_v, $u \neq v$. Međutim, tada za $i \in 1, ..., n$ vrijedi

$$|\{ua_i\} - \{va_i\}| \leq \frac{1}{M}.$$

Zbog toga je i

$$|(u-v)a_i - pi| \leq \frac{1}{M}, \qquad i = 1, ..., n$$

za cijele brojeve p_i. Prethodnu nejednakost podijelimo s $|u - v| \neq 0$ (jer je $u \neq v$) i dobivamo

$$\left|\frac{(u-v)a_i - p_i}{u-v}\right| \leq \frac{1}{M\,|u-v|},$$

pri čemu smo iskoristili svojstvo apsolutne vrijednosti broja ($\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$, za neka dva broja a i $b \neq 0$). Označimo s $q := |u - v|$. Tada slijedi tvrdnja koju je trebalo dokazati, tj.

$$\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| \leq \frac{1}{Mq} < \varepsilon.$$

Ako su svi a_i pozitivni, onda pronađemo racionalne brojeve koji zadovoljavaju jednadžbu (2.10), pri čemu je $\varepsilon = min\{\varepsilon, a_1, ..., a_n.\}$ Očito u tom slučaju svi p_i moraju biti pozitivni. □

Sljedeći dokaz teorema 2.4.2 može se pronaći u [3].

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka su pravilni tetraedar T i kocka C jednakosastavljivi:

$$T = P_1 + ... + P_k \tag{2.11}$$

$$C = P_1' + ... + P_k', \tag{2.12}$$

gdje su P_i i P_i' kongruentni poliedri za svaki i.

Neka su $L_1, ..., L_n$ sve karike dobivene iz (2.11) i (2.12) i označimo s $l(L_i)$ duljinu od L_i. Prema Lemi 2.4.3 možemo pronaći pozitivne cijele brojeve $q, p_1, ..., p_n$, takve da vrijedi

$$\left|l(L_i) - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{2nq}, \qquad i = 1, ..., n.$$

Označimo težinu karike L_i s $m(L_i) := p_i$. Neka je

$$\sum_1 := \sum \sum m(L_i)\alpha_j,$$

pri čemu su α_j svi diedri pridruženi karici L_i. Prema Lemi 2.3.2, zbroj diedara pridruženih nekoj karici je ili 2π ili π ili α, gdje je α diedar poliedra. Znamo da je za pravilni tetraedar $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Stoga je

$$\sum_1 = m_1\alpha + p_1\pi,$$

za $m_1 \in \mathbb{N}$ i $p_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Na analogan način za (2.12) definiramo

$$\sum_2 := m_2\frac{\pi}{2} + p_2\pi,$$

tako da je $m_2 \in \mathbb{N}$ i $p_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Neka je e bilo koji brid poliedra P_i iz (2.11) i neka je α_j diedar poliedra P_i pridružen bridu e. Koeficijent tog kuta u sumi $\sum_1$ jednak je $\sum m(L_u)$, gdje su L_u sve karike pridružene bridu e. Neka je e' brid poliedra $P_i^{'}$ koji odgovara bridu e i neka je $\alpha_j^{'}$ diedar pridružen tom bridu, takav da je $\alpha_j = \alpha_j^{'}$. Tom diedru je u sumi $\sum_2$ pridružen koeficijent $\sum m(L(v))$, a L_v su sve karike pridružene bridu $e^{'}$. Iz

$$\sum l(L_u) = l(e) = l(e^{'}) = \sum l(L_v)$$

i (2.10) slijedi

$$\left|\sum m(L_v) - \sum m(L_u)\right| = q\left|\sum(\frac{m(L_v)}{q} - l(L_v)) - \sum(\frac{m(L_u)}{q} - l(L_u))\right| < 2nq\frac{1}{2nq} = 1,$$

iz čega slijedi da je $\sum m(L_u) = \sum m(L_v)$. Odnosno, koeficijenti odgovarajućih diedara u sumama $\sum_1$ i $\sum_2$ su sukladni. Stoga je $\sum_1 = \sum_2$, tj.

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m_2}{2m_1} + \frac{p_2}{2m_1} - \frac{p_1}{m_1}.$$

Iz posljednje jednakosti broj $\frac{\alpha}{\pi}$ je racionalan, a to znamo da nije istina zbog Leme 2.4.1. Zbog ove kontradikcije slijedi da je početna pretpostavka bila kriva, odnosno, pravilni tetraedar i kocka nisu jednakosastavljivi. □

Za kraj još dokažimo teorem kojeg je 1896. godine formulirao Richard Bricard. Richard Bricard je objavio dokaz tog teorema i time je tvrdio da je pokazao da pravilni tetraedar i kocka nisu jednakosastavljivi. Bricardov dokaz tog teorema nažalost nije bio točan kad ga je on objavio, međutim danas postoje točni dokazi tog teorema, a jedan od njih može se pronaći u literaturi [3].

Teorem 2.4.4 (Bricardov uvjet)**.** *Ako su poliedri A i $A^{'}$, s diedrima $\alpha_1, ..., \alpha_s$ i $\beta_1, ..., \beta_r$, jednakosastavljivi, onda postoje pozitivni cijeli brojevi m_i $(i = 1, ..., s)$ i n_j $(j = 1, ..., r)$ takvi da je*

$$m_1\alpha_1 + ... + m_s\alpha_s = n_1\beta_1 + ... + n_r\beta_r + p\pi,$$

gdje je p cijeli broj.

Dokaz. Pretpostavimo da su poliedri A i $A^{'}$ jednakosastavljivi:

$$A = P_1 + ... + P_k, \tag{2.13}$$

$$A^{'} = P_1^{'} + ... + P_k^{'}, \tag{2.14}$$

pri čemu su P_i i $P_i^{'}$ kongruentni poliedri za svaki i. Neka je $L_1, ..., L_n$ niz svih karika u (2.13) i (2.14). Prema Lemi 2.4.3 možemo pronaći pozitivne cijele brojeve $q, p_1, ..., p_n$, takve da vrijedi

$$\left| l(L_i) - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{2nq}, \qquad i = 1, ..., n.$$

Neka je

$$\sum\nolimits_1 := \sum \sum m(L_i)\alpha_j,$$

po svim karikama L_i u rastavu (2.13) i svim diedrima α_j koji su pridruženi karici L_i. (Kao i u prethodnom teoremu $m(L_i) := p_i$ označava težinu karike L_i.) Neka je s_i zbroj svih diedara pridruženih karici L_i. Definirajmo k_i tako da je $k_i = 1$ ako se L_i nalazi unutar strane poliedra P_i ili A, inače neka je $k_i = 0$. Primijetimo, ako L_i pripada bridu poliedra A, onda je s_i oblika $s_i = \alpha_l - k_i\pi$, a inače je oblika $s_i = 2\pi - k_i\pi$. Stoga, postoje prirodni brojevi $m_1, ..., m_s$ i cijeli broj p_1 takvi da je

$$\sum\nolimits_1 = m_1\alpha_1 + ... + m_s\alpha_s + p_1\pi.$$

Ako definiramo $\sum_2$ na sličan način za (2.14), tada dolazimo do istog argumenta:

$$\sum\nolimits_2 = n_1\beta_1 + ... + n_r\beta_r + p_2\pi,$$

gdje su $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$, a $p_2 \in \mathbb{Z}$. Analogno kao u prethodnom dokazu, slijedi da je $\sum_1 = \sum_2$, čime je ovaj teorem dokazan.

Bibliografija

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK, Third edition*, Springer - Verlag, 2004.

[2] R. Balka, A. Egri-Nagy, T. Juhasz, *History of Methematics via Problems*, https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_matematika_Richard_Balka_Attila_Egri-Nagy_Tibor_Juhasz-History_of_Mathematics_via_Problems/ch08s04.html

[3] D. Benko, *A New Approach to Hilbert's Third Problem*, (2007.), https://trungtuan.files.wordpress.com/2007/08/8-2007.pdf

[4] Lj. Blaži, *Jednakosastavljivost objekata u ravnini i prostoru*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2006.

[5] E. Elmanto, H. Chan, *Scissors congruence*, http://math.uchicago.edu/~zakh/reu2013/Scissors%20Congruence.pdf

[6] Ž. Mijajlović, Z. Marković, K. Došen, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, 1986., http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/593/HilbertoviProblemiILogika.pdf?sequence=1

[7] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[8] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[9] J. Yang, *Math 4990 Scissors congruence and Dehn invariants*, (2014.), https://www.mathcs.bethel.edu/yang/teaching/umn/4990.15f/dehn.pdf

Sažetak

Ukratko, na početku svog diplomskog rada opisala sam povijesne okolnosti u kojima je nastao problem jednakosastavljivosti poliedara. Zatim sam opisala problem jednakosastavljivosti u ravnini te sam iskazala i dokazala Wallace - Bolyai - Gerwienov teorem koji pokazuje kako su poligoni jednakih površina ujedno i jednakosastavljivi. Nadalje, opisala sam analogni problem u prostoru i postavila pitanje vrijedi li sličan teorem i za poliedre. Na to pitanje pronalazimo odgovor u Dehn - Hadwigerovom teoremu, koji je ujedno i glavna tema ovog rada. Dokaz tog teorema pronašla sam u nekoliko različitih izvora. Na kraju sam pokazala primjenu Dehn - Hadwigerovog teorema na primjeru pravilnog tetraedra i kocke istog volumena te na primjeru dva tetraedra jednakih volumena.

Summary

At the beginning of my thesis, I described historical circumstances in which the problem of equidecomposable polyhedra has emerged. Then I described the problem of equidecomposable polygons and I had shown and proved the Wallace - Bolyai - Gerwien theorem that states that if planar polygons have the same area then they are equidecomposable. Furthermore, I described an analogous problem in three dimensional space and I asked a question if there is a similar theorem for polyhedra. The answer to this question we can find in Dehn - Hadwiger theorem, which is the main theme of this thesis. The proof of this theorem I found in several different sources. Finally, I have applied Dehn - Hadwiger theorem on the example of the regular tetrahedron and cube of the same volume and example of two tetrahedra of the same volume.

Životopis

Rođena sam 10. srpnja 1992. u Zagrebu, a do početka studija živjela sam u Slavonskom Brodu. Tamo sam pohađala Osnovnu školu Hugo Badalić, nakon koje sam upisala Gimnaziju Matija Mesić, prirodoslovno - matematički smjer. Gimnaziju sam završila s odličnim uspjehom i upisala Sveučilišni preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2014. godine i upisala Diplomski sveučilišni studij matematike, također nastavnički smjer.