SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Bartolec

UČENIČKE POTEŠKOĆE PRI POVEZIVANJU MATEMATIČKIH I FIZIKALNIH KONCEPATA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji i prijateljima, koji su me cijeli život podržavali i bili oslonac u svim mojim životnim tegobama te dijelili samnom svaki trenutak sreće, te mojoj bivšoj razrednici u srednjoj školi, Željki Frković, jer je u meni usadila ljubav prema matematici i fizici te zbog nje sam upravo danas i ja nastavnik. Posebno se želim zahvaliti svojoj baki, Mariji Bartolec, koja je u meni usadila sve potrebne moralne vrijednosti da bi danas bio čovjek kakav jesam. Hvala mojoj dragoj majci, Jasminki Bartolec, koja je bila moj najčvršći oslonac, što financijski što psihički, kroz sve ove divne godine. Hvala mom ocu, Nini Bartolecu, što je usprkos svojem temperamentu trpio moje fakultetske uspjehe i neuspjehe te uvijek bio tu za sve što mi je u životu trebalo. Da nije bilo njega danas ne bi bio ovakav karakter kakav jesam. Hvala i mojem dragom prijatelju, Antoniju Toliću, što je dijelio samnom sve moje studenske frustracije te ih u potpunosti razumio i bio potpora u svim koracima studiranja. Hvala i mom dugogodišnjem prijatelju, Damiru Kovačeviću, koji prati moje obrazovanje još od osnovne škole te kroz sve ove godine pokazao da uvijek ima pametnu i dobru ideju za opuštanje nakon svakog napisanog kolokvija ili položenog ispita. Hvala i mojoj prijateljici, Ivani Topić, u čijim riječima i zagrljaju sam uvijek nalazio utjehu i snagu ma kakva god teška situacija bila. Posebno zahvaljujem mentorici, Sanji Varošanec, koja je omogućila da se moja ideja oko teme diplomskog rada realizira. Hvala vam na svim satima i danima koje ste izdvojili da biste pomogli ostvariti moj uspješni završetak fakulteta. Uvijek ćete biti moj uzor i inspiracija u budućem radu i karijeri.

Sadržaj

Uvod

Kada sam trebao izabrati temu za svoj diplomski rad, malo sam razmišljao o tome u kojem pravcu želim da moja buduća karijera krene. Još u osnovnoj školi shvatio sam da smjer u kojem želim da se moj profesionalni život kreće je upravo nastava i način poučavanja. Upisom na fakultet otkrio sam brojne metode i načine poučavanja te sam želio da u tom tonu bude i ovaj diplomski rad. Kao student matematike i fizike uočio sam da brojni kolege imaju problema s povezivanjem matematičkih i fizikalnih koncepata. Kada sam se zaposlio u srednjoj školi, sve više i više sam uviđao da se i moji učenici bore s tim istim problemom. U razgovoru s mentoricom te nekim kolegama iz nastave i ravnateljima škola shvatio sam da bi bilo dobro malo istražiti taj problem. Na internetu naišao sam na razna američka istraživanja koja su se bavila problemom očitavanja grafova u kinematici. Sva ta istraživanja imala su jednak zaključak, učenici imaju problema s razumijevanjem grafova u fizici. Zanimalo me kako stoje naši učenici u razumijevanju grafova u fizici i grafova u matematici. Grafovi u matematici često su usko povezani s razumijevanjem funkcija. U današnjem suvremenom dobu, kada naše hrvatsko školstvo prolazi niz reformi i promjena, te kada se govori o tome da naši učenici ne posjeduju kompentencije potrebne za moderan život, shvatio sam da je zapravo sada pravo vrijeme da provedem istraživanje i u našim školama. Pretpostavka mog istraživanja je da učenici zapravo pojmove u matematici ne povezuju s analizom grafova u fizici. Također, proveo sam istraživanje i među studentima pete godine nastavničkog smjera na Matematičkom odsjeku. Usporedit ćemo rezultate istraživanja te vidjeti je li je početna pretpostavka valjana. Diplomski rad podijeljen je u tri poglavlja. Prvo poglavlje obrađuje funkcije u matematičkom smislu te prisjeća nas što sve naši učenici u 4. razredu srednje škole trebaju znati o funkcijama u matematici. Drugo poglavlje nam govori o fizikalnim konceptima kojima su učenici trebali ovladati na kraju četvrtog razreda srednje škole a koji su usko povezani s razumijevanjem grafova funkcija u matematici. Treće poglavlje nam predstavlja rezultate istraživanja.

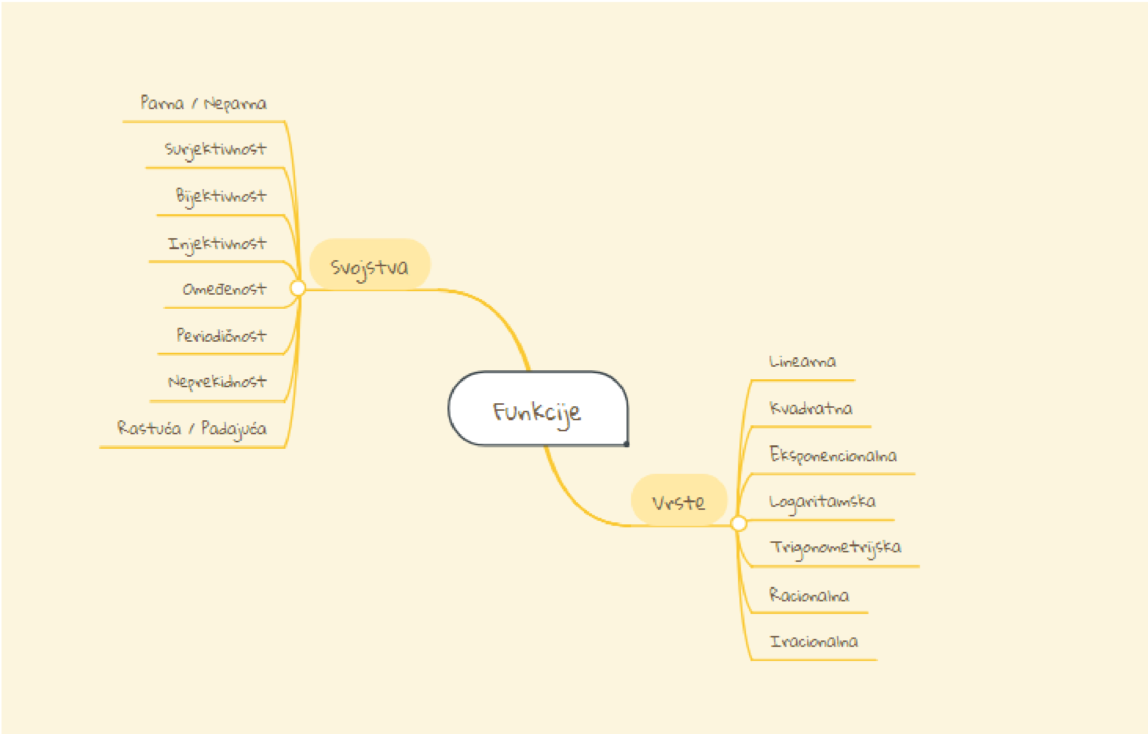
Poglavlje 1

Funkcije u matematici

1.1 Funkcije

Pojam funkcije, pridruživanja ili preslikavanja susrećemo ne samo u matematici već i u svakodnevnom životu, tako na primjer svakom automobilu pripada njegov registracijski broj, svakoj državi njen glavni grad, svakoj kući pripada kućni broj, svaki čovjek ima ime. Isto tako možemo navesti i neke primjere iz matematike; svakom prirodnom broju pridružuje se njegov kvadrat, svakoj kružnici u ravnini pridružuje se njezino središte, svakom trokutu pridruuje se njegov opseg, svakoj dužini pridružuje se njezin mjerni broj. Primijetimo da kada smo svakom automobilu pridruživali njegovu registracijsku oznaku da je ta oznaka bila točno jedna, dakle imamo dva neka skupa, skup automobila i skup registracijskih oznaka te određenim postupkom, zakonom pridruživali smo svakom elementu prvog skupa jedan i samo jedan element drugog skupa. Takvo pridruživanje mi nazivamo funkcijom. S pojmom funkcija susrećemo se poprilično rano, u sedmom razredu osnovne škole, a onda kroz cijelu srednju školu spominjemo i bavimo se funkcijama. Tako smo na primjer proučavali linearnu funkciju, kvadratnu funkciju, logaritamsku, eksponencijalnu, trigonometrijske funkcije i mnoge druge.
Nacionalni okvirni kurikulum (NOK) je važeći dokument koji nam daje neki okvirni pogled na to što i kada učenici uče tokom svojeg osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja. Slijedi ulomak iz NOK-a:
[14] *NOK donosi okvir za stjecanje temeljnih i stručnih kompetencija. On je osnova za restrukturiranje prvenstveno nastavnih planova, a potom i predmetnih kurikuluma na razini osnovnoškolskog i srednjoškolskog odgoja i obrazovanja, vodeći računa o optimalnome opterećenju učenika u školi i kod kuće. NOK je osnova za definiranje očekivanih postignuća učenika kroz nastavne predmete, te polazište za uređivanje predmetne strukture – odgojno-obrazovne jezgre, izbornih i fakultativnih nastavnih predmeta. NOK je osnova za sustavnu primjenu međupredmetnih tema koje obvezuju sve nositelje odgojno-obrazovnoga*

i nastavnoga rada.
Nacionalni okvirni kurikulum određuje četiri odgojno-obrazovna ciklusa za stjecanje temeljnih kompetencija. Prvi ciklus čine I., II., III. i IV. razred osnovne škole, drugi ciklus koji čine V. i VI. razred osnovne škole, treći ciklus čine VII. i VIII. razred osnovne škole. Četvrti ciklus odnosi se na I. i II. razred srednjih strukovnih i umjetničkih škola, dok u gimnazijama obuhvaća sva četiri razreda. Treba imati na umu da se u srednjim strukovnim i umjetničkim školama općeobrazovni sadržaji mogu poučavati i u završnim razredima, ovisno o profilu i potrebama škole, odnosno učenika. Četvrti se ciklus ujedno odnosi i na stjecanje najniže razine strukovne kvalifikacije, što znači da učenik može steći prvu kvalifikaciju u dobi od 16 godina. NOK je također podijeljen po područjima znanosti što prirodoslovnih što jezičnih, a nas zanima matematičko područje. U matematičkom području opisani su i svakom ciklusu pridruženi razni matematički procesi i koncepti.
Matematički procesi su prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko razmišljanje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije.
Matematički koncepti su brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje, podaci i infitenzimalni račun.
S obzirom na temu ovog rada, proučavat ćemo matematičke koncepte vezane uz algebru i funkcije. Već u drugom ciklusu učenici proučavaju brojevni pravac te rješavaju jednostavne linearne jednadžbe. Iako oni još nisu formalno upoznali se s pojmom linearne funkcije, ipak tada se počinje razmišljati o pojmu pridruživanja. U trećem ciklusu učenici spominju po prvi puta pojam funkcije i obrađuju neke osnovne linearne i kvadratne funkcije.
U četvrtom ciklusu učenici, ovisno o vrsti školskog programa, upoznaju većinu elementarnih funkcija, u 1. razredu gimnazije učenici detaljnije proučavaju linearnu funkciju, te se upoznaju s pojmovima kao što su rast i pad funkcije, nultočke funkcije. U drugom razredu upoznaju se s kvadratnom, eksponencionalnom i logaritamskom funkcijom. Tada se svojstva funkcija proširuju novim svojstvima: parnošću funkcije i ekstremnim vrijednostima funkcija. U trećem razredu učenici upoznaju trigonometrijske funkcije te svojstva periodičnosti pojedinih funkcija. U četvrtom razredu ponavljaju i proširuju svo stečeno znanje o funkcijama i svojstvima pojedinih funkcija. Također učenici se upoznaju i s diferencijalnim računom. Ovo sve navedeno vrijedi za gimnazije.



Slika 1.1: O funkcijama

Definirajmo sada općenito funkciju:

Definicija 1.1.1. *Neka su D i K dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu skupa D pridružuje točno jedan element skupa K nazivamo preslikavanje ili funkcija sa D u K i pišemo:*

$$f : D \longrightarrow K.$$

Skup D nazivamo domenom funkcije a skup K kodomenom funkcije.
Mogu li domena i kodomena biti isti skupovi? Naravno da mogu, najčešće to upravo i jest. Tako, na primjer, kod funkcija u geometriji; translaciji, rotaciji, simetriji... imamo preslikavanje ravnine u ravninu, dok su algebarske funkcije redovno funkcije sa skupa realnih brojeva u skup realnih brojeva.

Kada spominjemo funkcije onda uz njih vežemo još nekoliko pojmova. Tako na primjer, čestu pomutnju izazivaju pojmovi graf funkcije i slika funkcije jer se ta dva pojma često poistovjećuju, a oni nikako nisu isti. Definirajmo ih oboje:

Definicija 1.1.2. *Slika funkcije $f : D \longrightarrow K$ u oznaci $Im(f)$ jest $Im(f) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq K$.*

Definicija 1.1.3. *Graf funkcije $f : D \longrightarrow K$ u oznaci Γ_f jest skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq D \times K$.*

Primijetimo da je slika funkcije skup koji je podskup domene, a graf funkcije je skup uređenih parova koji je podskup $D \times K$.
Sigurno ste puno puta čuli izjavu da cijena goriva raste ili pada. Cijena goriva se može promatrati kao funkcija koja ovisi o vremenu. U svakodnevnom životu često govorimo o padu ili rastu cijene goriva. Ovaj se koncept prenosi na apstraktni pojam funkcije, tj. definira se na sljedeći način:

Definicija 1.1.4. *Za funkciju $f : D \longrightarrow K$ kažemo da je :*
1. strogo rastuća na skupu D ako

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \;\&\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

2. rastuća na skupu D ako

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \;\&\; x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

3. strogo padajuća na skupu D ako

$$\forall\, x_1, x_2 < D \;\&\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

4. padajuća na skupu D ako

$$\forall\, x_1, x_2 \in D \;\&\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Također možemo promatrati je li funkcija parna ili neparna. Definirajmo i ta svojstva funkcija:

Definicija 1.1.5. *Za funkciju $f : D \longrightarrow K$ kažemo da je :*
1. parna ako

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in D;$$

2. neparna ako

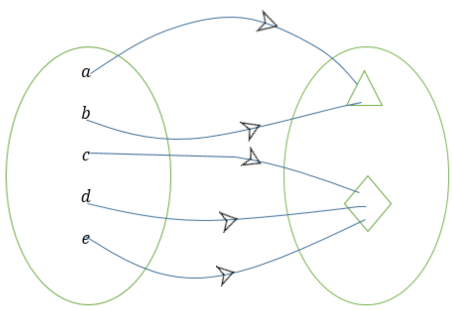
$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D.$$

Definicija 1.1.6. *Kažemo da je funkcija f periodična s peridom $\tau, \tau \neq 0$ ako vrijedi:*

$$f(x + \tau) = f(x), \forall x \in D.$$

Najmanji pozitivni period funkcije f, ako postoji, naziva se temeljni period.

Kada govorimo o načinu pridruživanja rekli smo da funkcija svakom elementu domene pridružuje točno jedan element kodomene. Naravno ne moraju uvijek svi elementi kodomene biti 'potrošeni'. Dva različita elementa a i b preslikali su se u isti element (trokutić). Također, različiti elementi c, d i e preslikali su se u drugi element (kvadratić). Funkcija kojoj se dogodilo da se neka dva različita elementa preslikaju u isti element nije injekcija. Definirajmo injekciju:

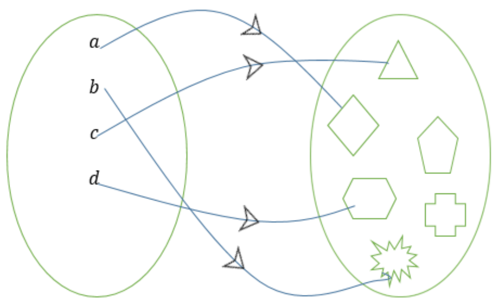


Slika 1.2: Funkcija koja nije injekcija

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je funkcija $f : D \longrightarrow K$ injekcija ako:*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \ \forall \ x_1, x_2 \in D.$$

Ako za svaki element kodomene možemo pronaćinjegov original, tj. element koji se preslikao u njega, tada funkciju nazivamo surjekcija.



Slika 1.3: Funkcija koja nije surjekcija

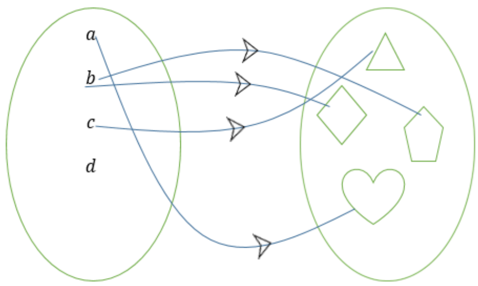
Definirajmo surjekciju:

Definicija 1.1.8. *Kažemo da je funkcija $f : D \longrightarrow K$ surjekcija ako:*

$$\forall\ y \in K,\ \exists\ x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

Ili drugim riječima, kažemo da je funkcija surjekcija ako $Im\,(f) = \mathrm{K}$

Ako se svaki element domene preslika u točno jedan element kodomene pri čemu su potrošeni svi elementi kodomene onda takvu svojstvo nazivamo bijekcija.



Slika 1.4: Svojstvo bijekcije

Definirajmo bijekciju:

Definicija 1.1.9. *Kažemo da je funkcija $f : D \longrightarrow K$ bijekcija ako:*

$$\forall\ y \in K,\ \exists!\ x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

Ili drugim riječima; kažemo da je funkcija bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Iz svakodnevnog života, čuli smo za pojam kompozicije. Tako, na primjer, imamo glazbenu kompoziciju ili kompoziciju vlakova, kompoziciju slike itd. No što je ustvari kompozicija? Kompozicija općenito znači slaganje, sastav, način kako je nešto složeno, sastavljeno. Zato se taj naziv upotrebljava u različitim područjima. Kompozicija se u matematici javlja kod pojma funkcija. Naime, dvije funkcije mi možemo sastaviti tako da dobijemo novu, složenu funkciju ili kompoziciju funkcija.

Definicija 1.1.10. *Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$ dvije funkcije. Kažemo da su te dvije funkcije jednake i pišemo $f = g$ ako i samo ako vrijedi: $A = C$, $B = D$ i $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in A$ (odnosno C).*

Definicija 1.1.11. *Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$ dvije funkcije i to takve da je Im(f) $\subseteq$ C. Tada funkciju $h : A \longrightarrow D$ definiramo formulom:*

$$h(x)=g(f(x)),\ x \in A$$

označavamo s $g \circ f$ i zovemo kompozicija funkcija f i g.

Teorem 1.1.12. *Slaganje funkcija nije komutativno.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno odnosno da je kompozicija funkcija komutativna. Neka je $f(x) = x+2$ i neka je $g(x) = x^2$. Komutativnost znači da je $g \circ f = f \circ g$. Neka je $h = g \circ f$, a $z = f \circ g$. Sada imamo:
$h(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2 = x^2+4x+4$.
Također:
$z(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+2$
No sada smo dobili da je $h \neq z$. To onda znači da kompozicija nije komutativna čime je tvrdnja dokazana. □

Još od pamtivijeka ljudi su se suočavali s problemom polaganja tangenata na krivulju, te se taj problem riješio tek u 17. stoljeću zahvaljujući velikom matematičaru i fizičaru, sir Isaac Newtonu. Newton je razvio i usavršio područje matematike koje se naziva diferencijalni i integralni račun. Diferencijalni račun je najjače oružje kojem su matematičari obogatili znanost. Riječ je o području matematike u kojem se na djelotvoran način iskorištava ideja o beskonačno malim veličinama, koja je dvije tisuće godina zaokupljala velikane ljudske misli. Ogromna je važnost diferencijalnog računa u tome što s pomoću njega opisujemo fizikalne zakone na kojima se temelji naš svijet. No što je to točno derivacija?

Definicija 1.1.13. *Neka je $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija pri čemu je I neki interval skupa realnih brojeva, $x_o \in I$. Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ako ovaj limes postoji.

Definicija 1.1.14. *Za funkciju f kažemo da je derivabilna u točki x_0 ako postoji $f'(x_0)$.*

Pad ili rast neke funkcije možemo provjeriti pomoću derivacije funkcije.

Teorem 1.1.15. *Neka je $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija pri čemu je I interval skupa realnih brojeva i neka je funkcija f diferencijabilna.*

1. *Ako je $f'(x) > 0$ u danom intervalu, onda je funkcija f strogo rastuća;*

2. *Ako je* $f'(x < 0)$ *u danom intervalu onda je funkcija f strogo padajuća;*

3. *Ako je* $f'(x) = 0$ *na danom intervalu onda je funkcija f konstantna.*

Funkcija može biti zadana formulom, riječima, tablicom, grafom i/ili dijagramom. Promotrimo sada neke elementarne funkcije.

1.2 Linearna funkcija

Definicija 1.2.1. *Neka su a, b bilo koja dva realna broja. Funkciju f,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, oblika f(x) = ax+b nazivamo linearnom funkcijom. Broj a se naziva linearni koeficijent, a b slobodni koeficijent.*

Linearna funkcija zadana je ako su zadani parametri a i b. Linearna funkcija $f(x) = ax{+}b$ određuje skup uređenih parova *(x,f(x))* koje možemo prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Odgovarajuće točke koje tako dobijemo pripadaju istom pravcu koji se zove graf linearne funkcije i zadan je jednadžbom $y{=}ax{+}b$. Budući da je pravac određen s dvije točke dovoljno je odrediti dva uređena para *(x,y)* tog pravca. Parametar a određuje smjer (nagib pravca) i zove se koeficijent smjera pravca.

Teorem 1.2.2. *Neka je f(x)=ax+b linearna funkcija pri čemu su a,b* $\in \mathbb{R}$*. Funkcija f je rastuća ako je a>0. Funkcija je padajuća ako je a<0. Ako je a=0, funkcija f je konstantna.*

Dokaz. Znamo da je $a \in \mathbb{R}$. Funkcija je oblika $f(x) = ax + b$. Promotrimo prvu derivaciju dane linearne funkcije *f*.

$$f'(x) = a$$

Vidimo da ako je $a > 0$, tada je prva derivacija uvijek veća od nule pa po $Teoremu$ 1.1.15 funkcija je rastuća. Analogno zaključujemo i za $a < 0$. □

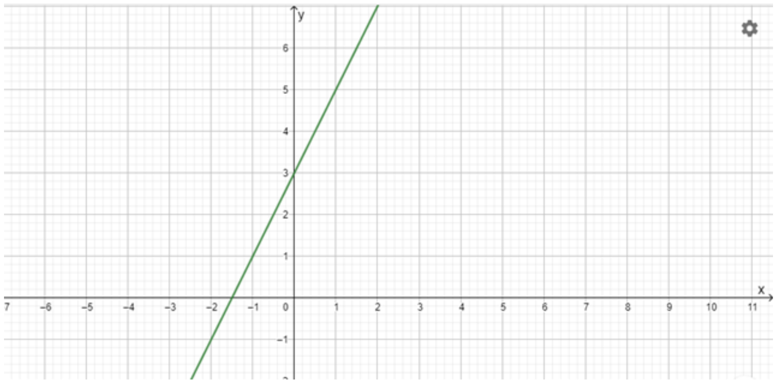
Ako je $a \neq 0$ očito je da linearna funkcija ima jednu nultočku i ona je upravo

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

Na donjoj slici se nalazi graf neke linearne funkcije.

Često se uz pojam linearne funkcije veže i pojam afine funkcije. Kada pričamo o pojmu linearne funkcije trebamo uzeti u obzir da to nije jednoznačna određena jedna klasa objekata. U pojedinoj literaturi linearnom funkcijom se naziva svaka funkcija oblika:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$$



Slika 1.5: Graf linearne funkcije

dok u nekoj drugoj literaturi možemo naići na ovakvu definiciju:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

pri čemu se i tu javljaju varijante:ili je koeficijent a izričito različit od nule ili se dozvoljava i mogućnost da bude jednak 0. Ako se linearnom funkcijom smatra funkcija oblika $f(x) = ax$, tada funkciju $f(x) = ax + b$ nazivamo afinom funkcijom.
Druga mogućnost jest da se linearnom funkcijom smatra funkcija oblika:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}.$$

Ovdje se radi o polinomu jedne varijable stupnja manjeg ili jednakog od 1. Razlog za ovakvo imenovanje jest taj što je graf funkcije pravac ili linea (linea-lat. crta).
Treća mogućnost koja je i najčešća u hrvatskoj literaturi jest da se linearnom funkcijom smatra svaka funkcija oblika:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

ili drugim riječima, pojam linearna funkcije istovjetan je pojmu polinoma jedna varijable prvog stupnja. Generalizacija tako definirane funkcije je polinom varijable n-tog stupnja. Više o terminološkim problemima oko pojma linearne funkcije može se pročitati u [15]

1.3 Kvadratna funkcija

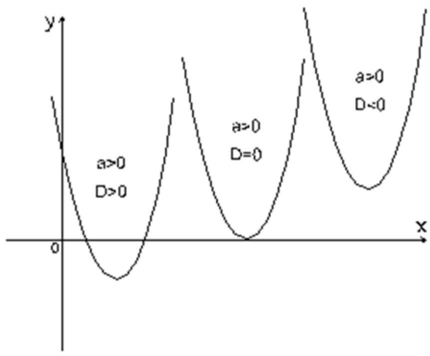
Iako se učenici upoznaju s kvadratnom funkcijom i njenim grafom već 8. razredu osnovne škole, detaljnije je proučavaju u drugom razredu srednje škole. Nacionalni okvirni kurikulom predviđa sljedeće ishode vezane uz kvadratnu funkciju; učenik će moći uvrstiti konkretne vrijednosti u formulu (osobito u funkciju zadanu formulom), izračunati vrijednost preostale veličine te u formuli izraziti jednu veličinu pomoću ostalih, prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva.

Definicija 1.3.1. *Neka su a,b i c realni brojevi pri čemu je $a \neq 0$. Kvadratna funkcija ili polinom drugog stupnja jest funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$. Broj a nazivamo vodeći koeficijent ili kvadratni koeficijent, b linearni, a c slobodni koeficijent.*

Graf kvadratne funkcije jest parabola. Nultočke kvadratne funkcije su sjecišta funkcije sa osi apscisa, gdje je $y = 0$, pa ih izračunamo iz kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe dana su formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Primjetimo da kvadratna funkcija ima najviše dvije realne nultočke, jednu dvostruku realnu nultočku ili dvije kompleksne nultočke. Izraz pod korijenom $b^2 - 4ac$ nazivamo diskriminanta i označavamo sa D, pa imamo $D = b^2 - 4ac$.
Iz svega slijedi da oblik grafa kvadratne funkcije određuju parametar a i diskriminanta D. Na donjim slikama možemo lijepo grafički prikazati tu danu ovisnost.



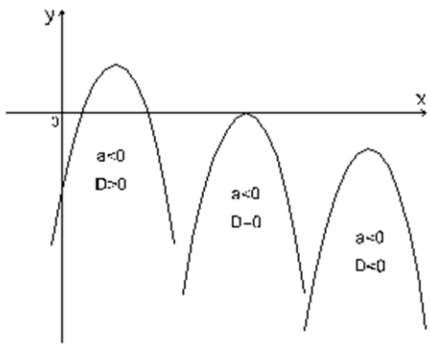
Slika 1.6: Kvadratna funkcija u ovisnosti o paramteru a i diskriminanti D

Teorem 1.3.2. *Za kvadratnu funkciju f vrijedi:*

1. *Ako je $D > 0$ tada kvadratna funkcija ima dvije realne nultočke.*

2. *Ako je $D = O$ tada kvadratna funkcija ima jednu realnu nultočku.*

3. *Ako je $D < 0$ tada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka.*



Slika 1.7: Kvadratna funkcija u ovisnosti o paramteru a i diskriminanti D

Dokaz ovog teorema je očit iz formule za rješenja kvadratne jednadžbe.
Kvadratna funkcija ima intervale gdje je monotono rastuća i gdje je monotono padajuća.
Točka T naziva se tjemenom parabole i njene koordinate su:

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right).$$

Tjeme je točka u kojoj funkcija doseže ekstremne vrijednosti. Ako je $a > 0$, tjeme je minimum, a ako je $a < 0$, tjeme je maksimum.

1.4 Racionalne funkcije

Da bismo definirali racionalne funkcije potrebno je prvo definirati polinome.

Definicija 1.4.1. *Funkciju* $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *oblika:*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

gdje su $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, *nazivamo polinomom n-tog stupnja.*

Definicija 1.4.2. *Neka su* p_n *i* q_m *dva polinoma,* $D \subset \mathbb{R}$.
Funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *oblika* $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ *naziva se racionalna funkcija.*

Drugim riječima, mogli bismo reći da je racionalna funkcija kvocijent dva polinoma. Ovdje je važno uočiti da u domeni racionalne funkcije treba pripaziti na nultočke polinoma q_m, u razlomku nazivnik mora biti različit od 0. Stoga u domeni treba navesti da ona sadrži realne brojeve osim nultočaka danog polinoma q_m. Drugim riječima možemo pisati

$$f : \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Upravo u tim racionalnim nultočkama funkcija ima obostrane vertikalne asimptote ili uklonjiv prekid.
Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost.

Definicija 1.4.3. *Neka je f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija.*

1. *Pravac $x = x_0$ je vertikalna asimptota funkcije f u točki x_o s lijeve strane ako je* $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = +\infty$ *ili* $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = -\infty$

2. *Pravac $x = x_0$ je vertikalna asimptota funkcije f u točki x_o s desne strane ako je* $\lim\limits_{\Delta x \to x_0^{+0}} = +\infty$ *ili* $\lim\limits_{\Delta x \to x_0^{+0}} = -\infty$

Definicija 1.4.4. *Neka je f: $D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana u nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, osim možda u samoj točki x_0. Funkcija f ima uklonjiv prekid u točki x_0 ako je*

$$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

pri čemu f nije definirana u točki x_0 ili je $f(x_0) \neq a$.

Prekid se ukloni tako što se definira $f(x_0) = a$.
Nultočke racionalne funkcije su upravo točke u kojima je $p_n(x) = 0$ odnosno u nultočkama brojnika.

1.5 Trigonometrijske funkcije

Proučavanju trigonometrijskih funkcija posvećen je velik dio srednjoškolske nastave matematike. Prema trenutno važećem nastavnom programu učenici se s trigonometrijskim funkcijama prvi put susreću u 2. razredu srednje škole (osim u trgovačkim i sličnim strukovnim škola, u njihovom programu se trigonometrija uopće ne pojavljuje) u cjelini *Trigonometrija pravokutnog trokuta*. Po završetku cjeline od njih se očekuje da znaju definirati trigonometrijske funkcije šiljastoga kuta pomoću omjera odgovarajućih stranica pravokutnoga trokuta, odrediti njihove vrijednosti za kutove veličine $30°, 45°, 60°$ te ih primijeniti u planimetriji. Ukoliko se u školi nastava matematike odvija i u trećem razredu, ona je najvećim dijelom posvećena upravo trigonometrijskim funkcijama. Konkretno, učenici gimnazijskih programa definiraju trigonometrijske funkcije pomoću brojevne kružnice, uočavaju i koriste trigonometrijska svojstva i identitete, skiciraju i analiziraju grafove trigonometrijskih funkcija, primjenjuju poučke o sinusu i kosinusu te rješavaju trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe. Prema Prijedlogu kurikuluma, trigonometrija pravokutnoga trokuta trebala bi se ubuduće proučavati u 1. razredu, u 2. razredu učenici bi primjenjivali poučak o sinusu i poučak o kosinusu u planimetriji, dok bi se preostali dio trigonometrije i dalje radio u 3. razredu.

Neka je dana kružnica polumjera 1 smještena u koordinatnoj ravnini tako da joj je središte u ishodištu koordinatnog sustava. Uočimo brojevni pravac p paralelan s y osi, tako da je točka $A(1, 0)$ zapravo točka u kojoj brojevni pravac dodiruje brojevnu kružnicu i to je ujedno ishodište točaka tog brojevnog pravca. Zamislimo da se pravac p namata oko kružnice tako da se dio pravca na kojem su smješteni negativni realni brojevi namata oko kružnice u smjeru gibanja kazaljke na satu, a dio pravca na kojem su smješteni pozitivni realni brojevi namata u obrnutm smjeru od gibanja kazaljke na satu. Sada je očito duljina intervala $[-\pi, \pi]$ jednaka 2π što je opseg dane kružnice pa će se spomenuti interval preslikati na čitavu kružnicu. Na taj način će se svaki realni broj t s brojevnog pravca preslikati u jednu točku $E(t)$ na danoj kružnici. Takva kružnica naziva se brojevna ili trigonometrijska kružnica. Funkcije sinus i kosinus definiramo na brojevnoj kružnici.

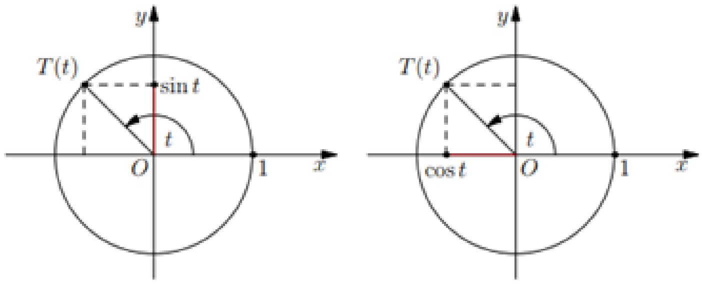
Definicija 1.5.1. *Neka je t po volji odabrani realan broj, a E(t) njemu pridružena točka brojevne kružnice s koordinatama (x,y).*
Apscisa točke E(t) naziva se kosinus broja t i označava se sa $\cos t$
Ordinata točke E(t) naziva se sinus broja t i označava se sa $\sin t$.

Uočimo da $\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) = 0$ za $k \in \mathbb{Z}$, te $\cos(k\pi) = 0$.
Pomoću funkcija sinus i kosinus definiraju se funkcije tangens i kotangens.

Definicija 1.5.2. *Funkcije tangens (u oznaci* tg *) i kotangens (u oznaci* ctg*) definiramo:*

$$\mathrm{tg} : \{t \in \mathbb{R} | \cos t \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t},$$
$$\mathrm{ctg} : \{t \in \mathbb{R} | \sin t \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Primjetimo da su zapravo funkcije tangens i kotangens nastale kao kvocijent dviju drugih funkcija.



Slika 1.8: Definicija trigonometrijskih funkcija pomoću brojevne kružnice

Teorem 1.5.3. *Funkcija kosinus je parna dok su funkcije sinus, tangens i kotangens neparne.*

Dokaz. Želimo dokazati da vrijedi

$$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x, \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(-x) = -ctgx, \forall x \in \mathbb{R}$$

Točka O je ishodište koordinatnog sustav dok točka A ima koordinate $(1, 0)$. Točka $E(x)$ je točka na kružnici čije koordinate su upravo kosinus i sinus. Također, istaknimo točku $E(-x)$. Po S-K-S teoremu $\triangle OBE(x) \cong \triangle OBE(-x)$. to onda znači da su apsice točaka $E(x)$ i $E(-x)$ jednake a to onda znači da je $\cos(-x) = \cos(x)$ dok su ordinate suprotno tj. $\sin(-x) = -\sin(x)$.
Sada po definiciji tangensa imamo:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)$$

Analogno se pokaže i za kotangens funkciju. $\square$

Teorem 1.5.4. *Trigonometrijske funkcije su periodične funkcije. Funkcije sinus i kosinus imaju temeljni period 2π dok za funkcije tangens i kotangens temeljni period je π.*

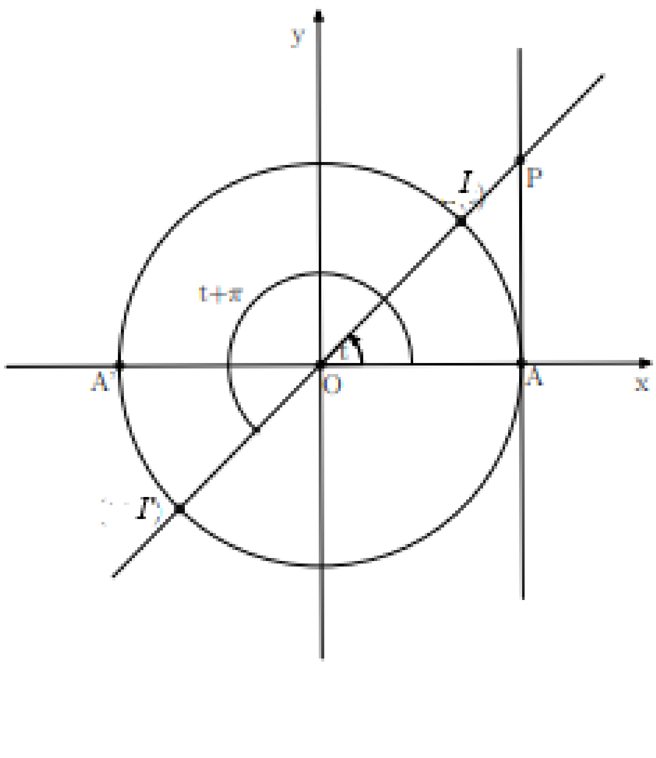
Dokaz. Periodičnost funkcija sinus i kosinus jasna je iz njihove definicije. Dokažimo da je 2π temeljni period. Neka je $\tau > 0$ temeljni period funkcije sinus. Uvrstimo li $x = \frac{\pi}{2}$ u definiciju periodičnosti funkcije dobivamo

$$\sin(\tau + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2}.$$

No znamo da je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, to znači da je ordinata točke $E(x + \frac{\pi}{2})$ jednaka 1. Na brojevnoj kružnici jedina točka kojoj je ordinata jednaka 1 je točke $(0, 1)$, a njoj su pridruženi brojevi $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$ Dakle, $\tau \in \{0, -2\pi, 2\pi, -4\pi, ...\}$, a najmanji pozitivni element tog skupa je 2π što znači da je upravo on temeljni period. Analogno se pokaže i za funkciju sinus.
Pogledajmo sada što je s funkcijom tangens. Kako je tangens periodična funkcija znamo da vrijedi

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \tau), \forall x \in D_{tg}.$$

Ako u taj izraz uvrstimo $x = 0$ dobivamo $\operatorname{tg}\tau = 0$. Točke za koje je $tgx = 0$ su one čija spojnica s ishodištem O presijeca pravac p u točkama I i I'. Točki I pridruženi su brojevi oblika $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a točki I' brojevi $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dakle $\tau \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a najmanji pozitivni element tog skupa je π te je upravo on temeljni period tangensa. Analogno se pokaže i za funkciju kotangens. □



Slika 1.9: Parnost funkcije tangens

1.6 Eksponencionalne i logaritamske funkcije

Do 2. razreda srednje škole učenici se upoznaju s više funkcija. Nekima od njih, primjerice polinomima prvog i drugog stupnja, vrijednosti možemo izračunati pomoću četiri osnovne računske operacije te potenciranjem i korjenovanjem. Takve se funkcije zovu algebarske. U 2. razredu javljaju se eksponencijalna i logaritamska funkcija, čije se vrijednosti ne mogu izračunati na opisani način. Takve se funkcije nazivaju transcedentne. Eksponencijalna i logaritamska funkcija značajne su pri analizi i opisivanju nekih važnih prirodnih i društvenih pojava i fenomena. Kako se ove nastavne jedinice rade u 2. razredu srednje škole, ishodi koji su povezani s njima su ti da će učenik moći primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu.

Definicija 1.6.1. *Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realan broj x naziva se eksponencijalna funkcija.*

U nastavi napominjemo da se do pojma a^x dolazi prije izricanja ove definicije proširivanjem pojma potencije s prirodnim eksponentom. Proučimo sada neka svojstva eksponencionalne funkcije;

1. Funkcija je definirana za svaki realan broj x;
2. Sve su vrijednosti funkcije pozitivni brojevi i svaki je pozitivan realan broj vrijednost funkcije za neki realni broj x;
3. $a^0 = 1$, a to znači da graf svake eksponencionalne funkcije siječe os y u točki $(0, 1)$;
4. Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$, tj. funkcija je rastuća;
5. Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$, tj. funkcija je padajuća;
6. Grafovi eksponencionalnih funkcija, čije su baze recipročni brojevi, simetrični su s obzirom na os y.

Iz svojstva pada i rasta funkcije slijedi da ako je $a^{x_1} > a^{x_2}$ onda je i $x_1 \neq x_2$ ili drugim riječima eksponencionalna funkcija je injekcija. Svojstvo injektivnosti se može lako i grafički odrediti; funkcija je injektivna ako pravac paralelan s x-osi siječe njezin graf u najviše jednoj točki.
Neka je, na primjer, zadana eksponencionalna funkcija $f(x) = 2^x$. Za neke zadane brojeve x lako možemo izračunati vrijednost $f(x)$, no koliki je primjerice x ako je $2^x = 6$? Na ovo pitanje ne možemo tako lako odgovoriti stoga je potrebno definirati logaritam broja te u konačnici i logaritamsku funkciju.

Definicija 1.6.2. *Neka je a realan broj te neka je $f(x) = a^x$ eksponencionalna funkcija i neka je y pozitivan broj. Broj x za koji je $a^x = y$ zove se logaritam broja y.*

Možemo to reći i simbolima:

$$a^x = y \Longleftrightarrow x = \log_a y.$$

Drugim riječima, logaritam pozitivnog broja y jest eksponent kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio y:

$$a^{\log_a y} = y.$$

Definicija 1.6.3. *Logaritamska funkcija po bazi a je pridruživanje $x \longmapsto \log_a x$, kojim se pozitivnom realnom broju x pridružuje njegov logaritam. Pišemo:*

$$f(x) = \log_a x.$$

Proučimo sada neka svojstva logaritamske funkcije;

1. Funkcija je definirana za svaki pozitivan realan broj x;
2. Svaki je realan broj vrijednost funkcije za neki pozitivan realni broj x;
3. $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$ a to znači da graf svake logaritamske funkcije prolazi os x u točki $(1, 0)$;
4. Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 < \log_a x_2$, tj. funkcija je rastuća;
5. Ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 > \log_a x_2$, tj. funkcija je padajuća;
6. Grafovi logaritamskih funkcija, čije su baze recipročni brojevi, simetrični su s obzirom na os x.

Eksponencionalna i logaritamska funkcija su međusobno inverzne funkcije.
Važno je napomenuti da ove dvije funkcije imaju veliku primjenu u svim znanstvenim disciplinama. Naime, mnogi problemi iz fizike, kemije, ekonomije, seizmologije i drugih znanosti povezani su s eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom. Osim toga, logaritamska ljestvica nam često pomaže u prikazivanju podataka koji istovremeno obuhvaćaju i izrazito malene i velike brojeve. One su model za praćenje prirasta stanovništva, rasta kamata kod složenog ukamaćivanja, računanje radioaktivnosti tvari, odnosa magnitude potresa i količine energije, računanje jakosti zvuka, količine različitih iona u otopinama i slično. Osim toga, rješavajući zadatke ovakvoga tipa, učenici će matematiku moći povezati i s ostalim nastavnim predmetima kao što su fizika, geografija ili kemija. Učenicima to može biti neobično jer su uglavnom navikli na linearnu povezanost veličina i to im je

najčešće prirodno. Stoga, kod njih treba razvijati osjećaj i za druge različite oblike povezanosti veličina. Svakako, dobra motivacija za rad mogu biti jednostavni i korisni primjeri iz svakodnevnog života u kojima će moći spoznati da matematika zbilja služi za probleme na koje nailaze u svojoj svakodnevici.

Poglavlje 2

Fizika i matematika

2.1 Fizika i matematika

Fizika, kao znanost, prolazila je različite faze razvitka, teorije su se mijenjale, pogledi na probleme i njihovo rješavanje su se usavršavali i mijenjali svoj opseg. Naša civilizacija, kultura i tehnologija usko je povezana s različitim prirodnim znanostima. Znanost je izmijenila naše društvo i način života. Plodovi znanstvenog rada uvukli su se u svaku poru našeg života: domaćinstvo, poljoprivredu, proizvodnju, medicinu... U svemu tome, fizika je kao znanost odigrala vrlo važnu ulogu. No fizika je zahtjevna znanstvena disciplina. Nastava fizike ima specifična obilježja, ciljeve, zadatke, te svaki profesor treba učenike dovesti do spoznaje da fizika i ostale znanosti čine osnovu svake suvremene tehnologije i kulture. Učenici bi trebali uočiti pojave koje se događaju oko njih, shvatiti te pojave i zakonitosti. Poznavanje tih zakona, omogućava nam da ovladamo prirodom i upoznamo ljepotu u njoj. Nastava fizike je specifična po svojoj strukturi no, ona, baš kao i svaki drugi predmet, mora prolaziti kroz sve faze o kojima govori opća didaktika. Važno je da se ona mora organizirati na način da omogući da učenici mogu što samostalnije doći do fizikalnog znanja i da usvoje metode pomoću kojih se dolazi do tog znanja. Jedna od ključnih metoda pri razumijevanju fizike je rad s podacima prikazanim pomoću grafova. Ta metoda usko je povezana sa razumijevanjem funkcija u matematici, zapravo ta metoda je najbliža veza primjene matematičkog znanja u konkretnim problemima koji nas okružuju. S obzirom na ankete koje su provedene, u sklopu ovog diplomskog rada, u sljedećih nekoliko stranica matematički ćemo opisati dobro poznate fizikalne pojave te ih povezati s matematikom i gore navedenim elementarnim funkcijama.

2.2 Slobodan pad

Za početak možemo provesti jedan jednostavan pokus. Uzmimo dva predmeta, na primjer, u jednu ruku uzmemo pernicu, a u drugu ruku gumicu za brisanje. Stavimo ruke na jednaku visinu i u istom trenutku pustimo oba predmeta. Što mislite koji predmet će prije pasti? Mnogi bi rekli da će pernica pasti prije jer je očito veće mase nego gumica za brisanje. Ako provedemo ovaj jednostavan pokus vidjet ćemo da će zapravo u isto vrijeme pasti i gumica za brisanje i pernica. Ovo razmatranje slobodnog pada tijela započelo je još u 4. stoljeću prije Krista grčkim matematičarom i fizičarom Aristotelom. Aristotel je tvrdio da će tijela većih masa pasti prije nego tijela manje mase. Tek 19 stoljeća kasnije je Galileo Galilej ustvrdio da na sva tijela djeluje jednaka akceleracija i da ona ne ovisi o masi tijela. Netko bi sada mogao reći: a što ako uzmemo pero i kilu željeza? Pero će očito pasti kasnije. Da, to je istina, međutim otpor zraka pera je veći nego željeza te zbog toga ono sporije pada. Kada bi se oba tijela nalazila u vakuumu ona bi padala jednako brzo. Ubrzano gibanje po pravcu, kao nastavna cjelina, radi se već u 7. razredu osnovne škole te se u 8. razredu nadograđuje, međutim više konceptualno nego računski. U 1. razredu srednje škole učenici se ponovno upoznaju sa pojmom slobodnog pada te tada malo ozbiljnije pristupaju tom problemu. Slobodan pad je nastavna jedinica koja prpada u cjelinu $'Mehanika'$. Obrazovni ishodi koji se spominju u kontekstu mehanike su:

1. opisati pravocrtna gibanja pomoću osnovnih kinematičkih veličina;
2. kinematički i dinamički opisati jednoliko kružno gibanje;
3. primjeniti prvi, drugi i treći Newtonov zakon;
4. primjeniti zakon očuvanja energije i zakon očuvanja količine gibanja;
5. analizirati složena gibanja;
6. primjeniti opći zakon gravitacije;
7. primjeniti osnovne pojmove mehanike fluida.

Ono što se podrazumijeva pod pojedinim obrazovnim ishodom je na primjer da učenik može analizirati gibanja na temelju nekog grafa te napraviti drugi prikaz bilo pomoću tablice ili pomoću formule. Ujedno, učenik će moći objasniti i primjeniti pojmove sile teže, težine i slobodnog pada.
Na tijela blizu Zemlje djeluje Zemljina sila teža. To znači da Zemlja privlači svako tijelo prema svojemu središtu silom koja je proporcionalna masi tijela, a njezin se iznos računa formulom:

$$F = m \cdot a$$

pri čemu je F oznaka za silu, m oznaka za masu, a a oznaka za akceleraciju ili ubrzanje. Zemljino ubrzanje iznosi $9.81m/s^2$ i oznaka za ovakvo ubrzanje jest g. Put koje neko tijelo pri slobodnom padu prijeđe dano je izrazom:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

pri čemu je s prijeđeni put, g akceleracija slobodnog pada a t vrijeme. Kako je g konstanta očito je riječ o kvadratnoj funkciji oblika $f(x) = ax^2$ pri čemu je a neki realan broj odnosno konstanta. Dakako, mi možemo promatrati put koje neke tijelo prolazi od nekog trenutka nakon što je padalo ili ako je izbačeno nekom početnom brzinom. U tom slučaju naš izraz postaje:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

pri čemu je v_0 početna brzina.
Dakle proučimo sada našu kvadratnu funkciju $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Domena ove funkcije su svi realni brojevi veći ili jednaki od nule, jer vrijeme ne može imati negativni predznak. Kodomena naše funkcije su svi pozitivni realni brojevi veći ili jednaki od nule.

2.3 Električna sila

Riječ elektricitet dolazi od grčke riječi elektron što znači jantar. Jantar je skrutnuta biljna smola. Prije 2 500 godina grčki filozof Tales Milećanin otkrio da komad jantara natrljan suhom krpom privlači lagane predmete koji su mu u blizini, kao suho lišće i perje. U 16. st Wiliam Gilbert te je otkrio da ista svojstva pokazuju i druge tvari kada se natrljaju, kao na primjer, staklo i dijamant. Takve se tvari, prema jantaru, nazivaju električnim. Pokusima je ustanovljeno da postoje dvije vrste električnog naboja koji se nazivaju pozitivni i negativni naboj. Nositelj negativnog naboja je elektron koji se giba u elektronskom omotaču, a nositelj pozitivnog naboja je proton koji se nalazi u atomskoj jezgri. U atomu, broj protona jednak je broju elektrona, pa je atom električki neutralan. Pri trljanju tijela dolazi do prelaska elektrona s jednog tijela na drugo. Kada tijelo ima višak elektrona u odnosu na broj protona ono je negativno naelektrizirano. Kada ima manjak elektrona u odnosu na broj protona, onda je pozitivno naelektrizirano. Ako plastični štap trljamo vunenom krpom on postaje negativan, a krpa pozitivna, a kada stakleni štap trljamo vunenom krpom on postaje pozitivan a krpa negativna.
Elektromagnetizam je područje fizike o kojem učenici saznaju u 8. razredu osnovne škole te se nakon toga detaljnije obrađuje u drugom razredu srednje škole. Obrazovni ishodi koji se javljaju pri obrađivanju nastavne cjeline elektromagnetizam su:

1. opisati osnovne pojmove u elektrostatici;

2. primjeniti osnovne pojmove i zakone elektrostatike;
3. opisati i primijeniti osnovne pojmove vezane uz strujne krugove;
4. analizirati krugove istosmjerne struje;
5. opisati i primjeniti osnovne pojmove vezane uz magnetske i elektromagnetske pojave;
6. analizirati krugove izmjenične struje.

Ono što se podrazumijeva pod pojedinim obrazovnim ishodom je na primjer da učenik može navesti vrste električnog naboja i nositelje elementarnog naboja, primjeniti zakon očuvanja naboja te navesti i primjeniti Coulombov zakon u vakuumu i u sredstvu.
Elektriziranost se utvrđuje elektroskopom. Elektroskop je naprava kojom možemo dokazati je li neko tijelo naelektrizirano. Također, elektroskopom možemo pokazati da postoje dvije vrste električnog naboja. Elektroskop se sastoji od metalne šipke koja na gornjem kraju ima kuglicu a na donjem dijelu lagani aluminijski listić poput kazaljke. Kada kuglicu dotaknemo negativno naelektriziranim tijelom, kao što je plastični štap nakon trljanja vunenom krpom, elektroni s tijela prelaze na kuglicu i preko šipke na listić koji postaje negativno nabijen, kao šipka, te između njih djeluje odbojna sila - pa se listić odmiče od šipke. Ako na listić prijeđe veći naboj, otklon je veći. Istoimeni naboji se odbijaju a raznoimeni privlače. Električni naboj označava se sa Q, a mjerna jedinica je kulon - oznaka C. Najmanja količina naboja u prirodi je naboj jednog elektrona, odnosno protona i iznosi $1.6 \cdot 10^{-19} C$. Taj naboj naziva se elementarni naboj i označava sa e.
Točkastim nabojima podrazumijevamo naboje čije dimenzije možemo zanemariti s obzirom prema njihovim međusobnim udaljenostima. Pokusima je utvrđeno da je elektrostatska sila kojom se naboji privlače ili odbijaju direktno proporcionalna s količinama naboja dva točkasta naboja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti r. Dakle, sila je opisana izrazom

$$F = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Ovaj izraz nazivamo Coulombovim zakonom. Konstanta proporcionalnosti k ovisi o sustavu jedinica i mediju koji okružuje naboje. Za vakuum je $k = k_0 = 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$. Coulombov zakon vrijedi u golemom rasponu udaljenosti od atomskih do svemirskih veličina. Ako promatramo silu između dva naboja tako da ih približavamo ili udaljavamo zapravo govorimo o funkciji koja ovisi upravo o udaljenosti ta dva naboja, dakle u našoj formuli svi izrazi su konstante osim udaljenosti ta dva naboja. Dakako, ovdje je riječ o racionalnoj funkciji oblika $f(x) = \frac{a}{x^2}$ pri čemu je a neki realan broj ili u našem slučaju konkretno:

$$F(r) = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Domena ove naše funkcije su svi pozitivni realni brojevi i nula. Oko fizikalnog smisla da je udaljenost između dva naboja nula nećemo sada diskutirati. Kodomena naše funkcije su svi realni brojevi, budući da naboji mogu biti pozitivni i negativni, predznak vrijednosti naše funkcije zapravo govori o prirodi naše sile, je li je ona privlačna ili odbojna.

2.4 Harmonijsko titranje

Titranje (oscilatorno gibanje) je jedno od najčešćih gibanja u prirodi. To je gibanje pri kojemu materijalna čestica (oscilator) prevaljuje određeni put između dvaju krajnjih položaja, vraća se istim putem, nakon čega se to gibanje periodički ponavlja. Titrati može materijalna točka, kruto tijelo, pa i tekućina u posudi. Primjeri titranja su, na primjer, njihanje male kuglice na dugoj nerastezljivoj niti, njihanje tijela bilo kojeg oblika obješenog izvan težišta ili titranje utega obješenog na rastegnutu ili stisnutu oprugu. U širem smislu, titranjem možemo nazvati i svako periodičko gibanje po zatvorenoj stazi, primjerice gibanje čestice po kružnici. Pri tome se ne samo položaj čestice, nego i njezina brzina i akceleracija periodički ponavljaju u određenim vremenskim razmacima. Takvo periodičko gibanje izvode planeti gibajući se po elipsama oko Sunca.
O titranju, valovima i optici uči se već u 8. razredu osnovne škole dok se detaljnije obrađuje u trećem razredu srednje škole. Neki od obrazovnih ishoda koji se ističu u toj nastavnoj cjelini su:

1. opisati i primjeniti osnovne pojmove vezane uz harmoničko titranje;
2. opisati mehaničko i električno titranje;
3. opisati postanak i širenje mahaničkog i elektromagnetskog vala;
4. primjeniti zakone geometrijske optike;
5. primjeniti zakone valne optike.

Ono što se podrazumijeva pod pojedinim obrazovnim ishodom je na primjer da učenik može opisati periodičko gibanje i mehaničko titranje, kvalitativno objasniti uzorke titranja, opisati i primjeniti pojmove ravnotežnog položaja, elongacije, amplitude, titranja, perioda, faze, frekvencije i razlike u fazi.
Kao što smo već rekli, titranje je periodično gibanje oko ravnotežnog položaja. Periodično gibanje je gibanje koje se ponavalja nakon određenog vremenskog intervala, tzv. perioda. Vrijednost funkcije se ponavlja nakon nekog perioda T:

$$f(x) = f(x + T).$$

Veličine kojima opisujemo titranje su period T (vrijeme jednog titraja), frekvencija f (broj titraja u sekundi), elongacija $x(t)$ (pomak iz položaja ravnoteže u trenutku t) te amplituda A (najveća elnogacija). Postoje dvije vrste titranja; harmonijsko i neharmonijsko titranje. Razlika je u tome što se u harmonijskom titranju promjena elongacije može opisati sinusnom funkcijom dok se neharmonijskim titranjem promjena opisuje periodičnom funkcijom koja nije sinusna. Česticu koja harmonički titra nazivamo harmonički oscilator. Kao primjer, zamislimo uteg mase m obješen na stisnutu ili rastegnutu oprugu konstante k. Gibanju harmoničkog oscilatora uzrok je elastična (harmonička) sila. Ona uteg nastoji vratiti u položaj ravnoteže, a opruzi vratiti ravnotežni oblik. Elastična sila je povratna sila, uvijek usmjerena suprotno od smjera pomaka čestice iz ravnotežnog položaja. Ovisnost elongacije y o vremenu t dana je izrazom

$$y = y_0 \sin(\omega t + \theta)$$

pri čemu je ω kutna brzina ili često zvana kružna frekvencija, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a kut θ je početna faza u trenutku $t = 0$.
Izraz koji opisuje elongaciju u ovisnosti o vremenu je očito trigonometrijska funkcija. Domena kao i kodomena dane funkcije su svi realni brojevi.

Poglavlje 3

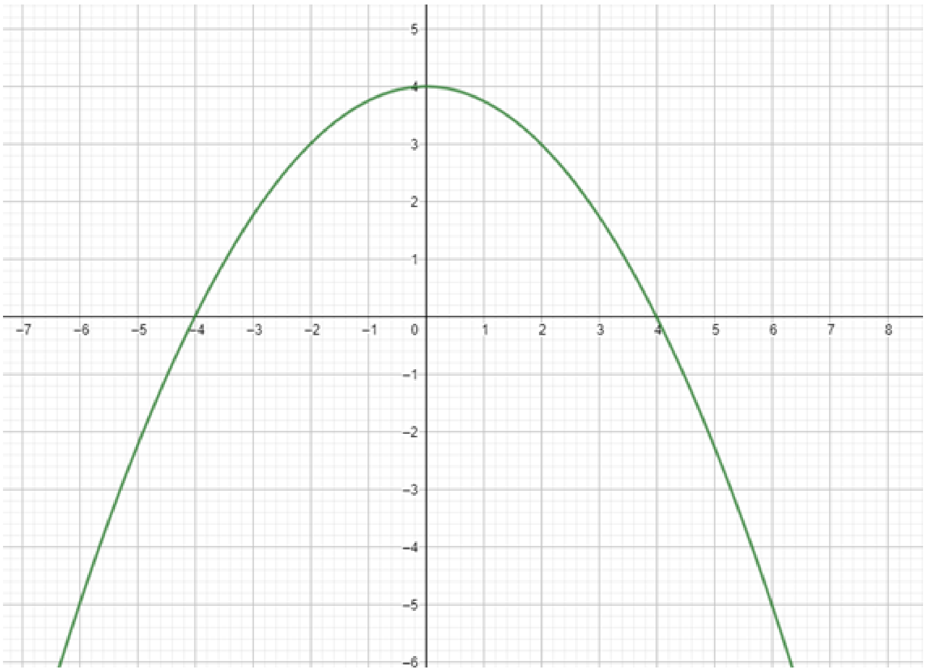
Istraživanje

U ovom poglavlju ćemo opisati istaživanje provedeno nad učenicima i studentima. Nakon toga čemo prikazati kako izgledaju provedene ankete te čemo obraditi rezultate tih istih. Prvo ćemo uspoređivati kako su zadatke riješili učenici srednjih škola, a nakon toga kako su ankete riješili studenti. Istraživanje je provedeno u tri zagrebačke srednje škole; III. gimnazija, X. gimnazija te privatna gimnazija i ekonomsko tehnička škola Futura. Koncipirano je kao anonimna anketa. Istraživanje je također provedeno na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu sa studentima 2 godine diplomskih studija nastavničkih smjerova matematike, matematike i informatike, te 5 godine integriranog preddiplomskog i diplomskog studija matematike i fizike, nastavnički smjer. Ankete su bile konstruirane tako da su se u prvom dijelu nalazili matematički zadaci, a u drugom dijelu fizikalni. Matematičke funkcije koje su se proučavale bile su kvadratne funkcije, racionalne funkcije te trigonometrijske funkcije. Fizikalni koncepti koji su se promatrali bili su slobodan pad, električna sila te titranja. Zadaci su bili tako sastavljeni da je zadatak 1 analogan zadatku 4, zadatak 2 je analogan zadatku 6 dok je zadatak 3 analogan zadatku 5. Hipoteza našeg istraživanja je bila sljedeća: Učenici ne povezuju matematičke koncepte u fizici te ne primjenjuju uvijek naučena matematička znanja u fizikalnim zadacima.

3.1 Primjer provedene ankete

Slijedi primjer provedenih anketa. Navedena su sva pitanja na koje su i učenici srednjih škola kao i studenti prirodoslovno matematičkog fakulteta odgovarali. Nakon primjera ankete slijede rezultati provedene ankete.

Zadatak 1
Na sljedećoj slici se nalazi graf neke kvadratne funkcije.



Slika 3.1: graf kvadratne funkcije

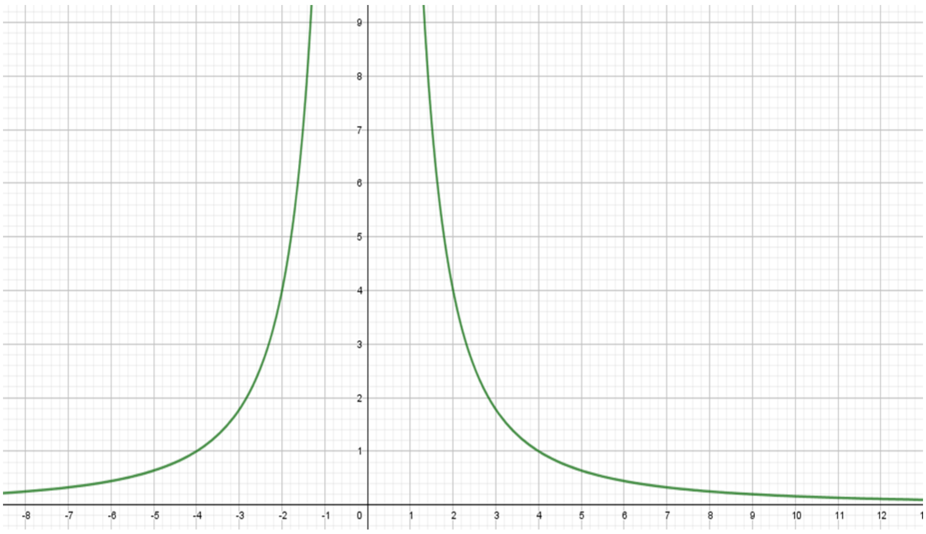
Odgovori na sljedeća pitanja:

a) Nul-točke ove funkcije su $x_1 =$_____ i $x_2 =$_____ .

b) Za $x = 1$ vrijednost ove funkcije jest _____ .

c) Za koji x ova funkcija ima najveću vrijednost? $x =$_____ .

Zadatak 2
Na sljedećoj slici se nalazi graf neke funkcije.



Slika 3.2: graf funkcije

Odgovori na sljedeća pitanja:
a) Za koji brojeve je vrijednost funkcije 4? Vrijednost funkcije je 4 za _______________.

b) Kolika je vrijednost funkcije za brojeve x koji su jako blizu nuli? (Zaokruži točan odgovor)
1) Jako mala;

2) 0;

3) Jako velika.

c) Kakva je vrijednost funkcije f kada je x jako velik? (Zaokruži točan odgovor)
1) Jako velika;

2) Skor,o nula;

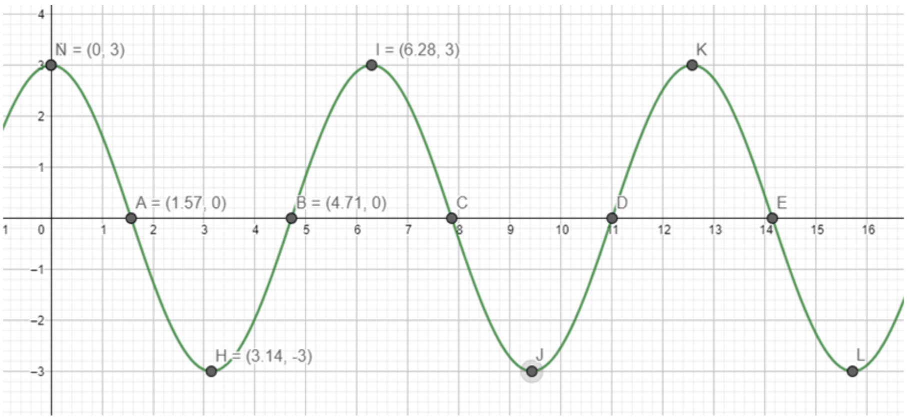
3) Nula

d) Ova funkcija je oblika: (zaokruži točan odgovor)
1) $f(x) = \frac{a}{x^2}, a < 0,$;

2) $f(x) = \frac{a}{x^2}, a = 0,$;

3) $f(x) = \frac{a}{x^2}, a > 0,$.

Zadatak 3
Na sljedećoj slici prikazan je graf neke funkcije.



Slika 3.3: graf neke funkcije

Odgovori na sljedeća pitanja:

a) Početna vrijednost dane funkcije iznosi _____.

b) Na intervalu $[0, 6]$ funkcija postiže svoj maksimum u točki _____ i on iznosi _____.

c) Na intervalu $[0, 6]$ funkcija postiže svoj minimum u točki _____ i on iznosi _____.

d) U koliko točaka na intervalu $[0, 6]$ funkcija postiže vrijednost 0? (Zaokruži točan odgovor)
1) U jednoj točki;

2) U dvije točke;

3) U tri točke;

4) U beskonačno mnogo točaka.

e) U točkama H i L postižu se ekstremi i to su (zaokruži točan odgovor):
1) Lokalni minimumi;

2) Lokalni maksimumi.

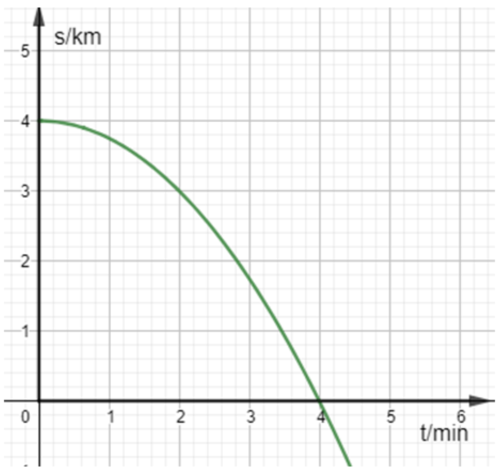
f) U točkama C,D,E vrijednost funkcije je _____.

g) Ova funkcija može se opisati izrazom (zaokruži točan odgovor)
1) $f(x) = A\sin(Bx)$;

2) $f(x) = A\sin(Bx + C)$;

3) $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$-

Zadatak 4
Marko je bacio kamen s litice visine 4 km. Ovisnost udaljenosti kamena od tla o vremenu dana je grafom na sljedećoj slici.



Slika 3.4: Putanja kamena

Odgovori na sljedeća pitanja:

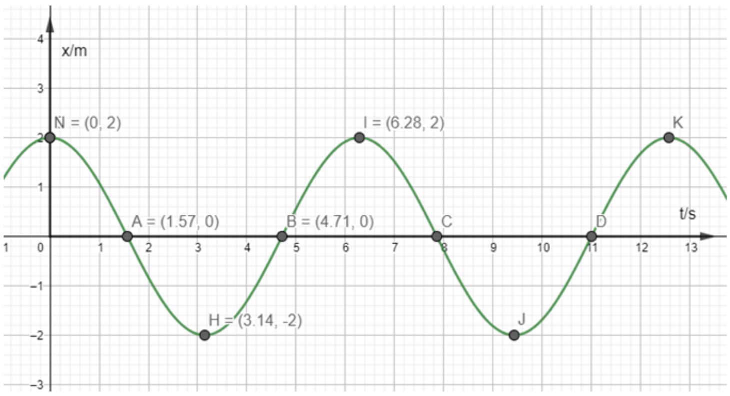
a) Nakon što je kamen padao 2 minute prešao je _____ km.

b) Nakon koliko minuta je kamen udario u tlo? Nakon _____ minute.

c) Za koji t je kamen najviše udaljen od tla? Za t = _____ minuta.

Zadatak 5

Sljedeća slika prikazuje položaj utega x (u metrima) od ravnotežnog položaja u ovisnosti o vremenu (u sekundama). Uteg na opruzi harmonično titra.



Slika 3.5: Uteg na opruzi

Na uteg smo djelovali nekom početnom silom te ga pustili da titra.
Odgovori na sljedeća pitanja:

a) Na početku uteg od ravnotežnog položaja smo otklonili za _____m.

b) Nakon koliko vremena se uteg prvi put vratio u početni položaj? Nakon _____s.

c) Nakon 3.14 s udaljenost utega od ravnotežnog položaja iznosi _____m.

d) Koliko puta se na intervalu $[0, 6]$ uteg vratio u ravnotežni položaj? (Zaokruži točan odgovor)

1) Jednom;

2) Dvaput;

3) Triput;

4) Više od tri puta.

e) U točki J udaljenost utega od ravnotežnog položaja jest (zaokruži točan odgovor):
1) Ista kao i u H;

2) Manja nego u H.

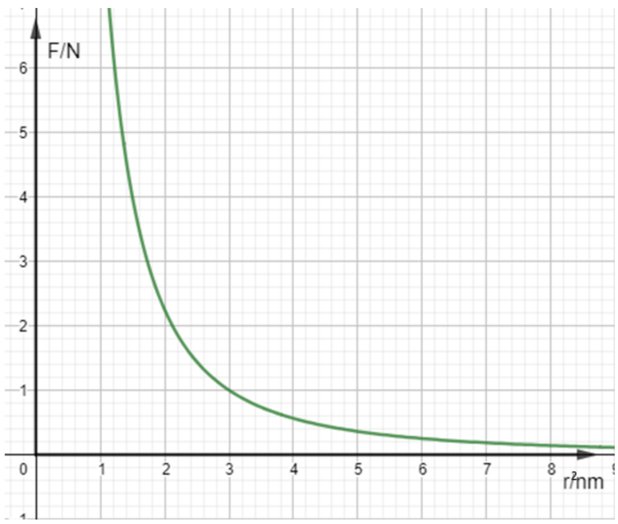
f) U točkama C i D utteg se nalazi u ______________________________.

g) Ovo titranje može se opisati izrazom (zaokruži točan odgovor):
1) $s(t) = A\sin(Bt)$;

2) $s(t) = A\sin(Bt + C)$;

3) $s(t) = A\sin(Bt + C) + D$;

Zadatak 6
Dva električna naboja nalaze se na nekoj udaljenosti r. Na sljedećoj slici prikazan je graf koji opisuje ovisnost električne sile F između ta dva naboja i kvadrata njihove udaljenosti r.



Slika 3.6: Električna sila

Odgovori na sljedeća pitanja:

a) Kada su dva naboja jako blizu jedan drugome, kakva je sila između njih? (Zaokruži točan odgovor)
1) Jako mala;

2) Nula;

3) Jako velika.

b) Kada su dva naboja jako udaljena, kakva je sila između njih? (Zaokruži točan odgovor)
1) Jako mala;

2) Nula;

3) Jako velika.

c) Kada je sila između dva naboja 1 N, kolika je udaljenost između ta dva naboja? Udaljenost između ta dva naboja je _____ nm.

d) Koja formula opisuje prikazanu ovisnost? (Zaokruži točan odgovor)
1) $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, k < 0$;

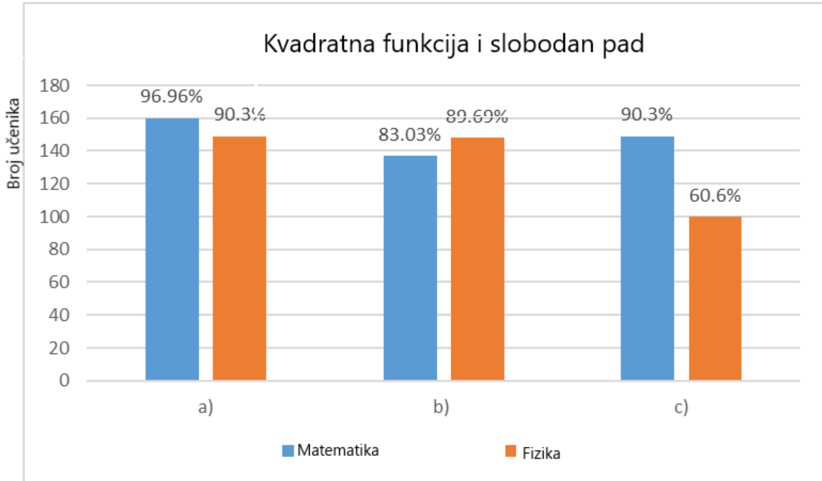
2) $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, k = 0$;

3) $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, k > 0$;

Anketu je ispunilo 165 učenika srednje škole. U X. gimnaziji anketi je pristupilo 87 učenika, u III. gimnaziji anketama je pristupilo 50 učenika dok je u privatnoj školi Futura anketi pristupilo 28 učenika.

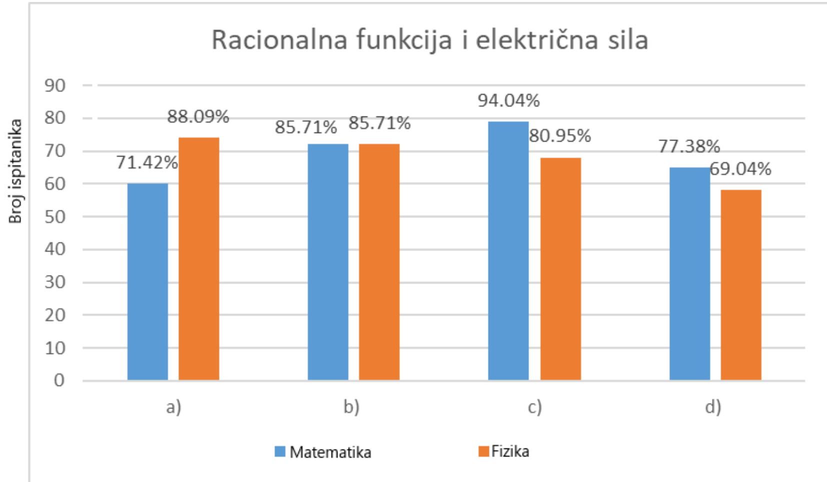
3.2 Rezultati ankete i obrada podataka

Sljedeći dijagram 1 pokazuje kako su učenici riješili zadatak s kvadratnom funkcijom i zadatak sa slobodnim padom:



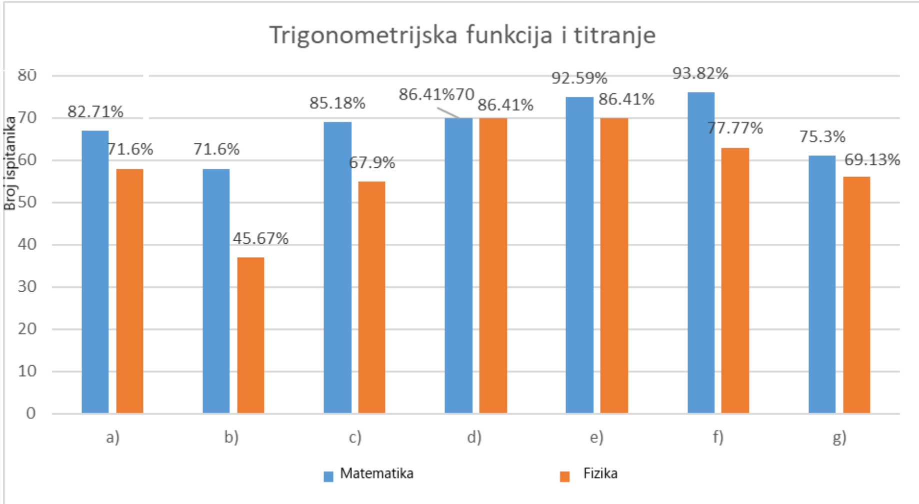
Slika 3.7: Dijagram 1: plavi stupac prikazuje koliki je postotak učenika točno riješio matematički zadatak (zadatak 1) dok narančasti stupac prikazuje koliki postotak učenika je točno riješio odgovarajući zadatak iz fizike (zadatak 4)

U svakom sljedećem dijagramu legenda je ista; Plavi stupac prikazuje koliki je postotak učenika točno riješio matematički zadatak dok narančasti stupac prikazuje koliki postotak učenika je točno riješio odgovarajući zadatak iz fizike. Kada govorimo o određivanju nultočaka funkcije, vidimo da je učenicima jasniji koncept matematike nego fizike. Iako je zadatak poprilično loše riješen ipak vidimo malo bolje razumijevanje matematičkog koncepta. U određivanju konkretne vrijednosti funkcije za neki konkretan broj, učenici su bolje riješili fizikalnu verziju zadatka. Očito učenici traženi podatak znaju očitati sa grafa ali ne povezuju to s konkretnom vrjednošću funkcije. U zadatku gdje je bila zadana vrijednost i traži se x za koji se ona postiže, učenici su bolje riješili matematički zadatak nego fizikalni i to znatno bolje. Mogli bi zaključiti da učenici imaju problem s razumijevanjem koncepta prijeđenog puta. Iako se lijepo vidi da je u konačnici matematički zadatak bolje riješen od fizikalnog, razlika je zapravo jako mala.
Sljedeći dijagram pokazuje kako su učenici riješili zadatak s racionalnom funkcijom i zadatak s električnom silom:



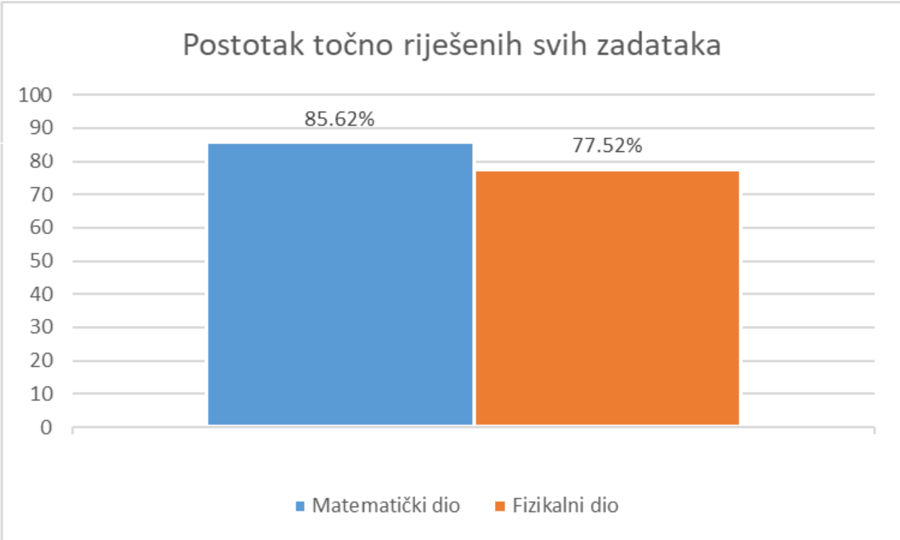
Slika 3.8: Dijagram 2; Prva dva stupca prikazuju rješenost zadatka 2.a) (plavi) i 6.c) (narančasti). Stupci pod b) prikazuju rješenost zadatka 2.b) i 6.a), stupci pod c) prikazuju rješivost 2.c) i 6.c), stupci pod d) prikazuju rješenost 2.d) i 6.d)

Vidimo da su učenici bolje riješili fizikalni zadatak kada je u pitanju odrediti za koji x se postigla dana vrijednost. Česta greška u ovom zadatku je bila ta što su učenici zaboravili nadopisati i drugi x za koji se ista vrijednost postizala. Kako se u fizikalnom zadatku postizala vrijednost samo za jedan x, učenici su taj zadatak bolje riješili. Mogli bi zaključiti da učenici ne razumiju u potpunosti pojam parnosti funkcije. Drugi dio tog zadatka je podjednako dobro riješen u oba slučaja jer se zapravo ispitivala vrijednost funkcije oko ishodišta koordinatnog sustava. Treći dio zadatka je bolje matematički riješen jer se u matematici više spominje pojam beskonačnosti i limesa dok u fizici to i nije toliko čest slučaj. U četvrtom dijelu zadatka je matematički dio ponovno bolje riješen jer učenici jasnije shvaćaju kocept aproksimacije oblika funkcije nego u fizici. Problem je u tome što učenici često imaju problem s proporcionalnim zaključivanjem. Valjalo bi učenicima naglasiti važnost proporcionalnog zaključivanja i matematičkih aproksimacija funkcija u fizici. Opet možemo zaključiti da učenici bolje razumiju matematičke od fizikalnih koncepata.
Sljedeći dijagram pokazuje kako su učenici riješili zadatak s trigonometrijskom funkcijom i zadatak s titranjem:



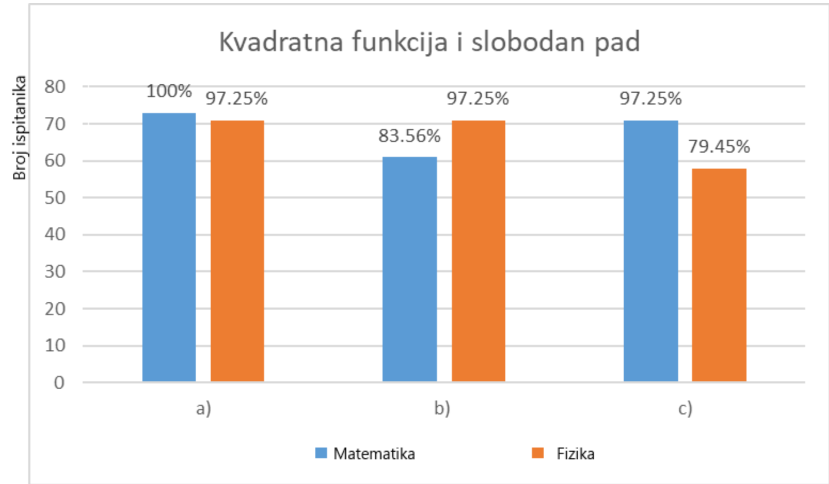
Slika 3.9: Dijagram 3; ovdje svaki par stupaca prikazuje 3. i 5. zadatak po redu

Već na prvi pogled možemo vidjeti da su učenici puno bolje riješili matematičke zadatke od fizikalnih. Glavni problem u fizikalnom zadatku je bio taj što su učenici smatrali da je početna vrijednost funkcije isto što i ishodište koordinatnog sustava a ne točka od koje promatramo titranje utega. U drugom dijelu zadatka zapravo još više dolazi do brkanja ravnotežnog položaja s točkom od koje počinjemo promatrati dano gibanje. Očito je učenicima puno jasniji matematički koncept nultočaka i vrijednosti funkcija. Zapravo problem je taj što učenici nisu osvijestili nultočku funkcije kao točku u kojoj je vrijednost funkcije nula. Isti taj problem se kroz sve ostale dijelove zadatka provlačio. U zadnjem dijelu zadatka se zapravo pokazao problem ne razumjevanja povezanosti funkcija sinus i kosinus.
Sljedeći dijagram zapravo pokazuje koliko je dobro riješen matematički a koliko fizikalni dio ispita:

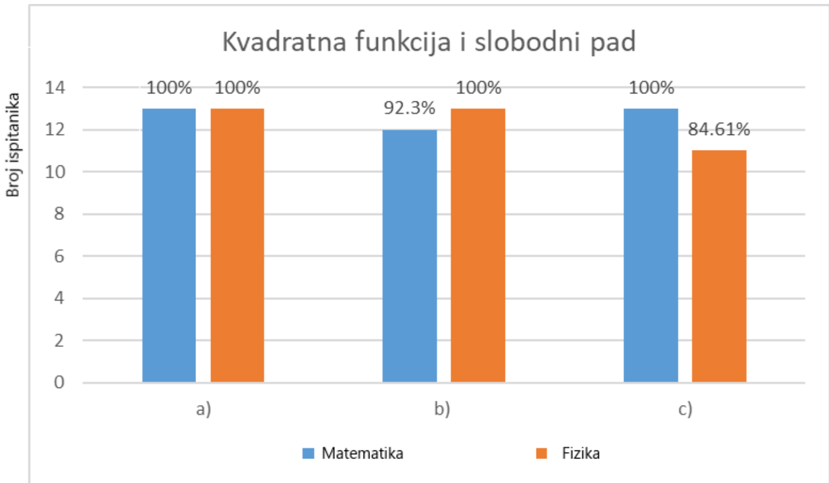


Slika 3.10: Dijagram 4

Zapravo po ovom istraživanju možemo zaključiti da je matematički dio bolje rješen nego fizikalni. To samo pokazuje da učenici, iako u matematičkom smislu razumiju koncepte vezane uz funkcije, ne razumiju kako ih primjeniti u nekom drugom kontekstu.
Ankete su se provele i među studentima, ukupno 73 studenta nastavničkog smjera matematike te nastavničkog smjera matematike i infnormatike te među 13 studenata nastavničkog smjera matematike i fizike.
Dijagram 5 prikazuje kako su na pitanja vezana sa kvadratnom funkcijom odgovorili studenti matematike i matematike i informatike dok dijagram 6 pokazuje kako su na ta ista pitanja odgovorili studenti matematike i fizike.

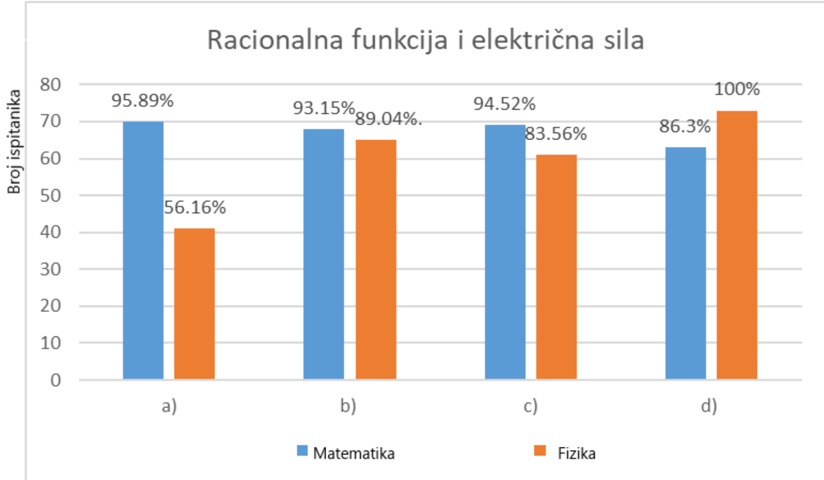


Slika 3.11: Dijagram 5; Ispitanici su studenti smjerova matematike i matematike i informatike. Plavi stupac prikazuje koliki je postotak učenika točno riješio matematički zadatak (zadatak 1) dok narančasti stupac prikazuje koliki postotak učenika je točno riješio odgovarajući zadatak iz fizike (zadatak 4)

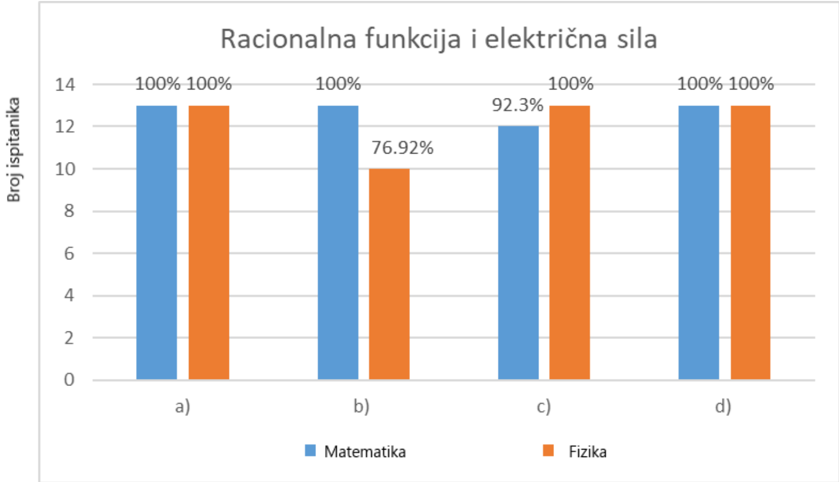


Slika 3.12: Dijagram 6; Ispitanicu su studenti smjera matematika i fizika. Plavi stupac prikazuje koliki je postotak učenika točno riješio matematički zadatak (zadatak 1) dok narančasti stupac prikazuje koliki postotak učenika je točno riješio odgovarajući zadatak iz fizike (zadatak 4)

Ono što možemo zaključiti iz danih dijagrama jest da je oblik dijagrama vrlo sličan i da nema neke prevlike razlike između te dvije grupe studenata, kada je u pitanju kvadratna funkcija. Dijagram 7 prikazuje kako su na pitanja vezana sa racionalnom funkcijom odgvorili studenti matematike i matematike i informatike dok dijagram 8 pokazuje kako su na ta ista pitanja odgovorili studenti matematike i fizike.

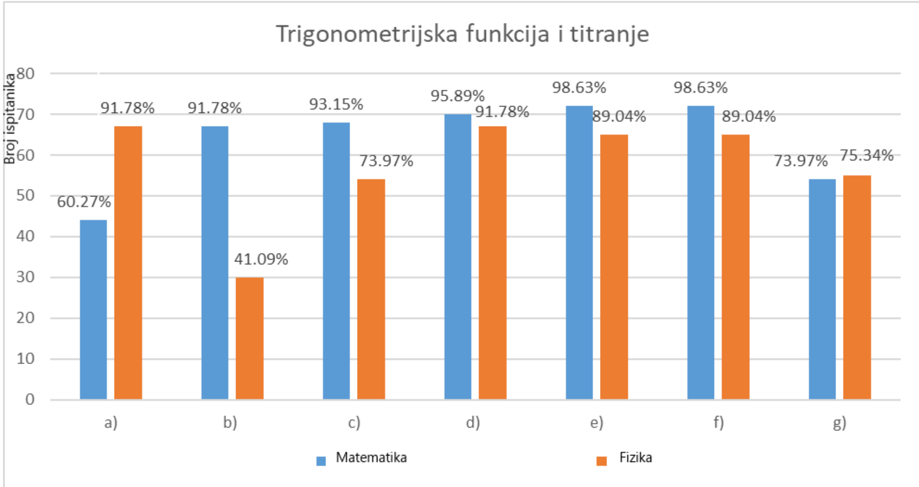


Slika 3.13: Dijagram 7; Ispitanici su studenti smjerova matematike te matematikae i informatike. Prva dva stupca prikazuju rješenost zadatka 2.a) (plavi) i 6.c) (narančasti). Stupci pod b) prikazuju rješenost zadatka 2.b) i 6.a), stupci pod c) prikazuju rješivost 2.c) i 6.c), stupci pod d) prikazuju rješenost 2.d) i 6.d)

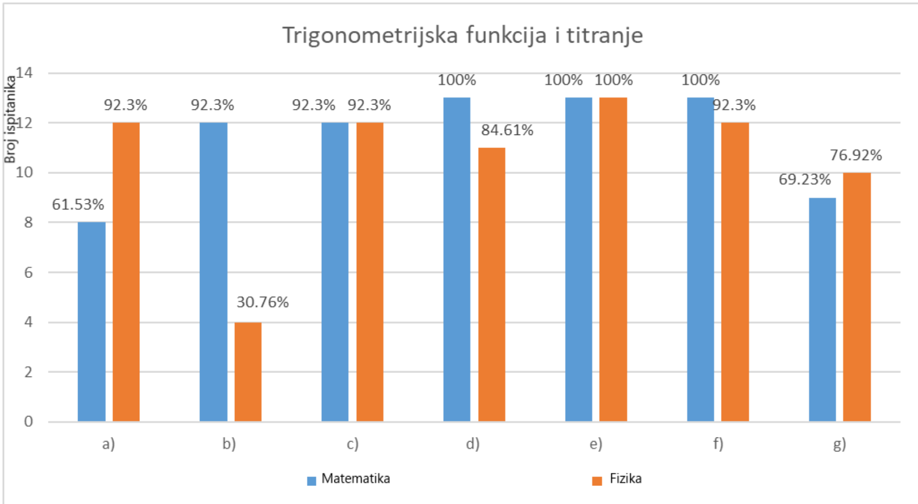


Slika 3.14: Dijagram 8; Ispitanicu su studenti smjera matematika i fizika. Prva dva stupca prikazuju riješenost zadatka 2.a) (plavi) i 6.c) (narančasti). Stupci pod b) prikazuju rješenost zadatka 2.b) i 6.a), stupci pod c) prikazuju rješivost 2.c) i 6.c), stupci pod d) prikazuju rješenost 2.d) i 6.d)

Iz dijagrama se vidi da su studenti fizike, očekivano, riješili bolje fizikalni dio zadatka od studenata matematičkog smjera, međutim zanimljivo je vidjeti da su studenti fizike i matematike bolje riješili matematičke zadatke od studenata matematike.
Dijagram 9 prikazuje kako su na pitanja vezana s racionalnom funkcijom odgovorili studenti matematike i matematike i informatike dok dijagram 10 pokazuje kako su na ta ista pitanja odgovorili studenti matematike i fizike.

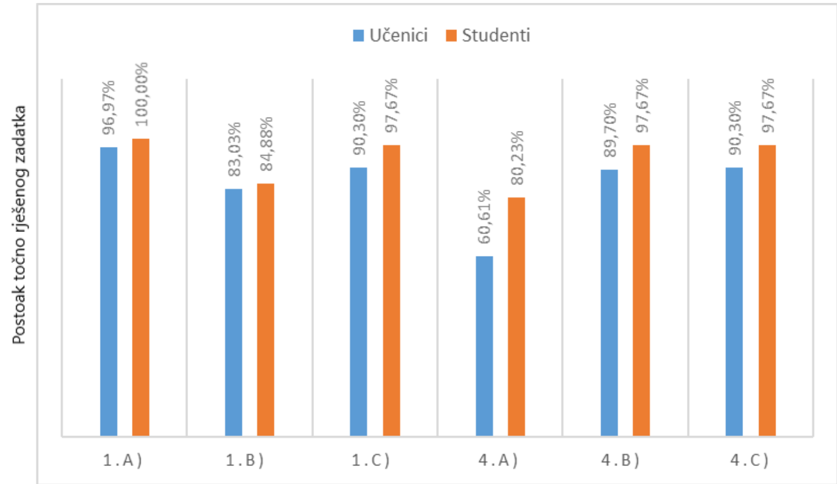


Slika 3.15: Dijagram 9; Ispitanici su studenti smjerova matematike te matematikae i informatike.



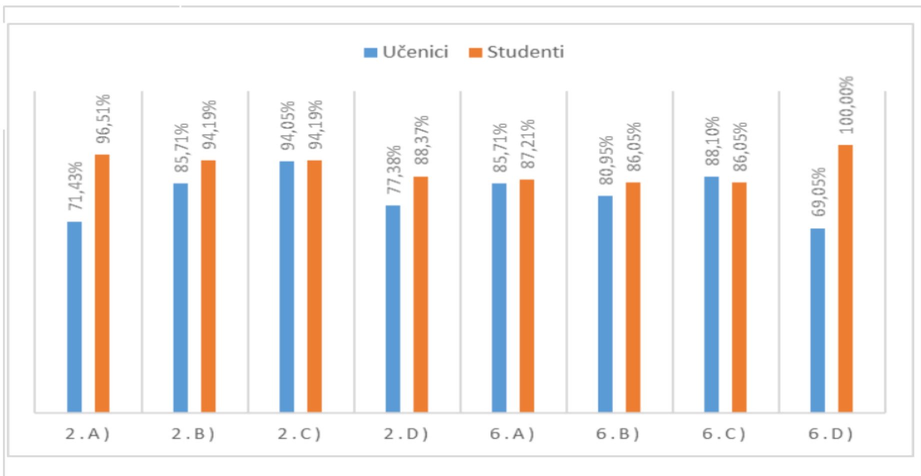
Slika 3.16: Dijagram 10; Ispitanicu su studenti smjera matematika i fizika.

Iz danih dijagrama možemo vidjeti da su studenti fizike bolje riješili fizikalni dio zadataka dok u matematičkom dijelu nije neko preveliko odstupanje u postotku rješivosti zadataka. Zanimljivo bi bilo vidjeti kako su zadatke riješili studenti u odnosu na učenike. Sljedeći dijagram 11 pokazuje kako su po pojedinom zadatku riješili u postotku učenici i studenti.

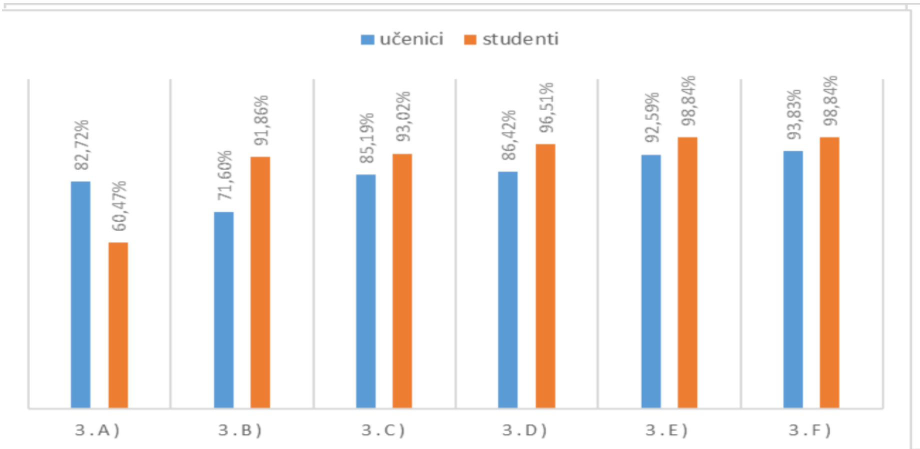


Slika 3.17: Dijagram 11; usporedba točnosti rješneja zadataka učenika i studenata

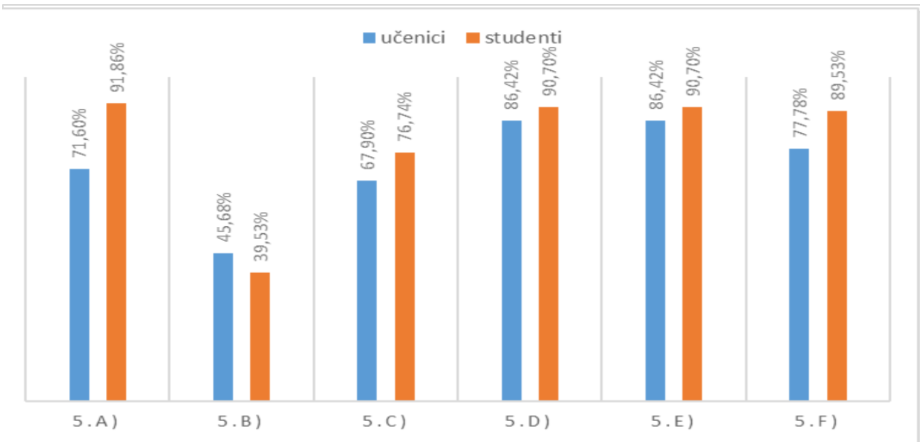
Očekivano, sve zadatke riješili su bolje studenti iako razlika nije prevelika. Pogledajmo sada i ostale dijagrame s ostalim zadacima. Slijede dijagram 12, dijagram 13 te dijagram 14.



Slika 3.18: Dijagram 12; usporedba točnosti rješneja zadataka učenika i studenata



Slika 3.19: Dijagram 13; usporedba točnosti rješneja zadataka učenika i studenata



Slika 3.20: Dijagram 14; usporedba točnosti rješneja zadataka učenika i studenata

Vidimo da su studenti bolje riješili zadatke nego učenici, što je očekivano. Iako postoji par zadatka koje su ipak učenici riješili bolje. Zapravo to su zadaci u kojima je riječ o aproksimaciji izraza koji matematički opisuje neku određenu pojavu.

3.3 Zaključak

Možemo na kraju zaključiti da je početna pretpostavka odnosno hipoteza istraživanja potvrđena, odnosno, da učenici ne razumiju sasvim kako primjeniti matematičke koncepte u fizikalnom smislu. Iako ako pogledamo globalno zadatke, većinom su zadaci dosta dobro rješeni, samo matematički zadaci su rješeni bolje nego fizikalni. Moguće je da učenici više rade matematiku nego fiziku jer imaju više sati nastave tjedno te je uvijek prisutan taj pritisak državne mature, matematika je obavezni predmet na maturi te samim time onda i učenici više uče matematiku nego fiziku. Smatram da bi bilo potrebno da nastavnici matematike tijekom svoje nastave što više prikazuju primjenu matematičkih sadržaja u ostalim područjima. Možda bi se tada ukupno znanje učenika poboljšalo. Ovo istraživanje je definitivno bilo uspješno jer sam se i ja kao nastavnik matematike i fizike zapitao trudim li se dovoljno približiti učenicima matematičke i fizikalne koncepte. Ovaj diplomski rad je zapravo samo početak moje želje da pronađem načine i metode kako pomoći učenicima da što uspješnije i bolje savladaju nastavno gradivo. Smatram da svatko tko odluči pročitati moj diplomski rad može izvući poruku iz njega i potruditi se još više prenijeti drugima svoje stečeno znanje.

Bibliografija

[1] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije (1.dio), Element, Zagreb, 2006.

[2] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije (2.dio), Element, Zagreb, 2006.

[3] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2, udzbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije (1.dio), Element, Zagreb, 2006.

[4] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije (2.dio), Element, Zagreb, 2006. .

[5] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za treći razred gimnazije (1.dio), Element, Zagreb, 2006.

[6] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za treći razred gimnazije (2.dio), Element, Zagreb, 2006.

[7] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za četvrti razred gimnazije (1.dio), Element, Zagreb, 2006.

[8] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za četvrti razred gimnazije (2.dio), Element, Zagreb, 2006.

[9] R. Krsnik, Suvremene ideje u metodici nastave fizike, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[10] Z. Kurnik, Metodika nastave matematike. Oblici matematičkog mišljenja, Element, Zagreb, 2013.

[11] Z. Kurnik, Metodika nastave matematike. Posebne metode rješavanja matematičkih problema, Element, Zagreb, 2013.

[12] Z. Kurnik, Metodika nastave matematike. Znanstveni okviri nastave matematike, Element, Zagreb, 2013.

[13] Sears and Zemansky's, University physics, twelfth edition, Pearson, San Francisco, 2008.

[14] Ministrastvo znanosti i obrazovanja. Nacionalni okvirni kurikulum (NOK), url: http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf

[15] S. Varošanec, Kaleidoskop - linearna funkcija i pravac url: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/linearna-kaleidoskop.pdf

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo glavne poteškoće koje se javljaju kod učenika pri povezivanju matematičkih i fizikalnih koncepata. Hipoteza koju želimo ispitati je da učenici ne povezuju uvijek matematičke koncepte s fizikalnim opisom pojava koje nas okružuju u svemiru. Ovaj rad podijeljen je u tri poglavlja pri čemu se u prvom poglavlju razmatraju matematička znanja učenika srednjih škola koje oni posjeduju pri kraju četvrtog razreda. U drugom poglavlju proučavamo fizikalne koncepte koje ćemo ispitati pomoću ankete koju provodimo nad učenicima srednje škole te studenata 2 godine nastavničkog smjera matematike i matematike i informatike, te studenata 5. godine integriranog preddiplomskog i diplomskog smjera matematike i fizike, smjer nastavnički, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. U trećem dijelu iznosimo podatke koji su prikupljeni te statistički obrađeni. Iznosimo zaključak temeljen na istraživanju.

Summary

The thesis studies main difficulties which emerge while students are connecting mathematical and physical concepts. The hypothesis we are trying to question is that students are not making connections between mathematical concepts and physical description of phenomena that surround us in space. The thesis is divided into three chapters – the first chapter deals with mathematical knowledge of high-school students at the end of the fourth grade. In the second chapter we are studying physical concepts which will be questioned with the help of a survey conducted on high-school students and students enrolled in the fifth year of the Faculty of Science. In the third part we present the collected and statistically-processed data. In the end of the thesis we state the conclusion based on our research.

Životopis

Moje ime je Ivan Bartolec i rođen sam 9. listopada 1991. godine u Zagrebu. Završio sam prirodoslovno matematičku gimnaziju; X. gimnaziju: „Ivan Supek“ u školskoj godini 2009./2010. Trenutno sam redovni student na Pridoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, integrirani preddiplomski i diplomski studiju matematike i fizike nastavničkog smjera. U 2015. godini položio sam Cambridge International Exam (CIE) ocjenom B što je dokaz poznavanja engleskog jezika te sposobnosti predavanja na engleskom jeziku. Od 2016. godine zaposlen sam u srednjoj školi; Privatna gimnazija i ekonomsko-informatička škola Futura s pravom javnosti, gdje radim kao nastavnik matematike i fizike. U sklopu škole sudjelujem i radim na projektima Europske unije vezane za edukaciju nastavnika novim nastavnim metodama te surađujem s nastavnicima koji su iz inozemstva uključeni u te projekte. Od 2012 godine do 2014 volontirao sam kao vanjski suradnik u X. gimnaziji „Ivan Supek“ gdje sam predavao dodatnu matematiku učenicima od 1. do 4. razreda općeg smjera kao i prirodoslovno matematičkog smjera. U 2015 godini volontirao sam kao asistent u nastavi fizike po dvojezičnom programu u X. gimnaziji „Ivan Supek“. Od 2008. godine radim kao trener taekwondoa s djecom u uzrastu od 4 do 18 godina. Volontirao sam 3 godine na danu otvorenih vrata PMF-a Fizičkog odsjeka u području srednjoškolske fizike. Kroz svoj dugogodišnji rad s djecom razvio sam određene vještine komunikacije, kritičkog mišljenja, kreativnog mišljenja, također razvio sam i predmetnu, psihološku i pedagoško-didaktičko-metodičku kompentenciju. Kao satničar razvio sam i kombinatorne vještine i sistematičnost pri izradi rasporeda sati i organizaciji vanškolskih aktivnosti. Poznajem rad u programima Microsoft officea, Latexu i Geogebri te svjesno primjenjujem tehnologije kao pomoć u nastavi.