SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Aleksandar Bulj

DOKAZ CARLESONOVOG TEOREMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Fourierovi redovi predstavljaju jedan od osnovnih alata matematičke analize korišten u gotovo svim područjima matematike, ali i puno šire — u elektrotehnici, obradi signala i slika, akustici, kvantnoj fizici, optici, ekonometriji, itd. Jedno od osnovnih pitanja vezanih za njih jest pitanje raznih tipova konvergencije u ovisnosti o svojstvima funkcije. Već se sam Fourier početkom 19. stoljeća pitao konvergira li Fourierov red neprekidne funkcije k njoj samoj u svakoj točki. Najprije je Dirichlet dokazao da Fourierov red funkcije klase C^1 konvergira k njoj samoj u svakoj točki. Nakon tog rezultata mnogi su eksperti vjerovali da slutnja vrijedi i za neprekidne funkcije sve dok 1876. Paul du Bois-Reymond nije našao primjer neprekidne funkcije čiji Fourierov red ne konvergira u jednoj točki i time opovrgnuo slutnju. Danas je poznato da Fourierov red funkcije ograničene varijacije konvergira k funkciji u točkama neprekidnosti (dokaz se može naći npr. u [2]), čime je Fourierovo pitanje dobilo pozitivan odgovor za široku klasu funkcija.

S druge strane, paralelno s razvojem Lebesguove mjere i L^p prostora pojavila su se nova pitanja o konvergenciji Fourierovog reda. Naime, iz činjenice da familija prikladnih trigonometrijskih funkcija čini bazu za prostor L^2 funkcija na torusu slijedi da Fourierov red L^2 funkcije konvergira k njoj u L^2 normi. Odatle slijedi da postoji podniz niza parcijalnih suma koji konvergira k polaznoj funkciji gotovo svuda. Međutim, N. Lužin je 1915. godine prvi naslutio da za L^2 funkciju njen Fourierov red konvergira k njoj samoj u gotovo svakoj točki. Slutnja se pokazala vrlo teškom za dokazati i prvi značajan pomak u shvaćanju g.s. konvergencije L^p funkcija napravio je A. Kolmogorov, koji je 1922. godine dao primjer L^1 funkcije čiji Fourierov red divergira u gotovo svakoj točki i time dokazao da analogna tvrdnja ne vrijedi za L^1 funkcije. Zbog toga se vjerovalo da Lužinova slutnja ne vrijedi sve dok je L. Carleson nije dokazao 1966. godine. Dvije godine kasnije, 1968. R. Hunt je poopćio rezultat na L^p funkcije, gdje je $1 < p < \infty$ te se od tada tvrdnja da Fourierov red L^p funkcije konvergira k njoj samoj u gotovo svakoj točki naziva Carleson-Huntov teorem. Carlesonov prvi dokaz vrlo je dugačak i tehnički složen, a prvi konceptualno drugačiji i kraći dokaz našao je C. Fefferman 1973. godine u [1]. Nakon njega su M. Lacey i C. Thiele 2000., koristeći tehniku koja se danas naziva “wave packet analysis”, našli vrlo kratak dokaz Carlesonovog teorema [5]. Cilj ovoga rada je detaljno izložiti dokaz M. Laceyja i C. Thielea.

Primijetimo konačno da Carlesonov teorem daje drugačiji parcijalan odgovor na početno Fourierovo pitanje. Naime, svaka neprekidna funkcija na torusu je u L^2 pa, iako njen Fourierov red ne mora konvergirati u svakoj točki, znamo ipak da je skup na kojem ne konvergira vrlo mali, tj. mjere 0.

Dokaz Carlesonovog teorema podijelit ćemo u 2 dijela. U prvom ćemo poglavlju najprije izložiti osnovne pojmove harmonijske analize koje ćemo koristiti u radu, a zatim pokazati kako ocjena Carlesonovog operatora povlači konvergenciju gotovo svuda. Drugo poglavlje posvećeno je dokazu ocjene Carlesonovog operatora prateći [5, 4]. U prvom odjeljku pokazujemo kako ocjenu Carlesonovog operatora svesti na ocjenu bolje lokaliziranog operatora, a zatim u drugom odjeljku dokazujemo ocjenu tog operatora uz pretpostavku triju propozicija. Konačno, u posljednja tri odjeljka drugog poglavlja dokazujemo te tri propozicije i time kompletiramo dokaz Carlesonovog teorema.

Htio bih se još zahvaliti najprije svojim roditeljima zbog kojih sam razvio ljubav prema matematici i koji su mi tijekom cijeloga života pružali bezuvjetnu podršku na putu koji sam izabrao. Posebno se želim zahvaliti i mentoru, izv. prof. dr. sc. Vjekoslavu Kovaču, na nebrojenim korisnim savjetima i razgovorima u kojima mi je prenio veliku količinu znanja tijekom svih godina studiranja.

Poglavlje 1

Uvodne redukcije

1.1 Kratki uvod u harmonijsku analizu

Harmonijska analiza u najširem smislu predstavlja matematičku disciplinu koja se bavi kvantitativnim proučavanjem oscilacija i transformacija funkcija. S obzirom da ćemo u radu koristiti razne pojmove harmonijske analize, u ovom odjeljku definirat ćemo one koje koristimo i uputiti čitatelja na dodatnu literaturu.

Notacija

U cijelom radu pod mjerom podrazumijevamo Lebesgueovu mjeru, a za izmjeriv skup $E \subset \mathbb{R}$, sa $|E|$ označavamo njegovu Lebesgueovu mjeru. Pod pojmom integrala podrazumijevamo Lebesgueov integral. Za izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i realan broj $1 \le p < \infty$ sa $\|f\|_p$ označavat ćemo njenu p-normu, definiranu kao

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

dok ćemo sa $\|f\|_\infty$ označavati njenu normu-beskonačno, koja se definira kao:

$$\|f\|_\infty = \inf \Big\{ a \ge 0 : \Big| \{x : |f(x)| > a\} \Big| = 0 \Big\}.$$

Sa L^p označavat ćemo $L^p(\mathbb{R})$, odnosno prostor svih izmjerivih funkcija kojima je p-norma konačna. Pritom identificiramo funkcije koje su g.s. jednake. Ukoliko promatramo p-normu restrikcije funkcije na izmjeriv podskup E od $\mathbb{R}$, to ćemo označavati sa $\|\cdot\|_{L^p(E)}$.

Nadalje, za izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $1 \le p < \infty$, sa $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ označavat ćemo slabu p-normu funkcije, koju definiramo kao:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{\lambda>0} \left(\lambda^p |\{x : f(x) > \lambda\}|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

U radu koristimo sljedeću notaciju za operatore translacije, modulacije, dilatacije i refleksije:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_y f(x) &:= f(x-y),\\
\mathrm{M}_\nu f(x) &:= e^{2\pi i \nu x} f(x),\\
\mathrm{D}^p_\lambda f(x) &:= \lambda^{-\frac{1}{p}} f(\lambda^{-1}x), \quad 1 \le p \le \infty,\ \lambda > 0,\\
\widetilde{f}(x) &:= f(-x).
\end{aligned}$$

Lako se vidi da operatori translacije i modulacije čuvaju svaku L^p normu za $1 \le p \le \infty$, dok operator dilatacije D^p_λ čuva L^p normu funkcije. Za linearan operator $T : L^p \to L^q$, kažemo da je (p, q) ograničen ako postoji konstanta $C > 0$, takva da za svaku funkciju $f \in L^p$ vrijedi

$$\|Tf\|_q \le C\|f\|_p.$$

Tada ćemo sa $\|T\|_{L^p \to L^q}$ označavati njegovu normu.

S druge strane za linearan operator $T : L^p \to L^{q,\infty}$ kažemo da je slabo (p, q)-ograničen ako postoji konstanta $C > 0$, takva da za svaku funkciju $f \in L^p$ vrijedi

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \le C\|f\|_p.$$

U nastavku rada koristit ćemo također i notaciju implicitnih konstanti u ocjenama pa tako $A \lesssim B$, gdje su A i B izrazi, znači da postoji konstanta $C > 0$ koja ne ovisi ni o kojem parametru u izrazu i vrijedi $A \le C \cdot B$. U slučaju da konstanta C ovisi o nekom parametru izraza, na primjer p, to označavamo sa $A \lesssim_p B$, ali u slučaju da je taj parametar fiksan tijekom cijelog rada, indeks ćemo ipak izostaviti. Pisat ćemo $A \sim B$ ako vrijedi $A \lesssim B$ i $B \lesssim A$ i analogno sa parametrom u indeksu u slučaju kad konstante ovise o nekom od parametara u izrazu.

Fourierovi redovi i Fourierova transformacija

Zbog široke primjene Fourierovih redova i Fourierove transformaicije, koriste se različite normalizacije u definiciji istih pa ćemo ovdje istaknuti definicije koje ćemo koristiti u radu.

Za 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, takvu da je $f|_{[0,1]} \in L^1([0,1])$ i $k \in \mathbb{Z}$ definiramo k-ti Fourierov koeficijent sa:

$$\widehat{f}(k) := \int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi ikx}dx.$$

Fourierovim redom nazivamo formalni red $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$, a sa $\mathcal{S}_n f(x)$ označavat ćemo operator koji funkciji pridružuje n-tu parcijalnu sumu Fourierovog reda:

$$\mathcal{S}_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}.$$

Prirodnija definicija Fourierovog reda bila bi za L^1 funkcije na jednodimenzionalnom torusu, ali s obzirom na to da možemo poistovijetiti 1-periodičke funkcije na $\mathbb{R}$ i funkcije na jednodimenzionalnom torusu, zbog tehnika koje koristimo u dokazu Carlesonovog teorema, odabrali smo prethodnu definiciju.

Uz definiciju $e_k(x) := e^{2\pi ikx}$, poznata je činjenica da familija funkcija $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ čini ortonormiranu bazu za Hilbertov prostor $L^2([0,1])$ pa kako tada Fourierov koeficijent $\widehat{f}(k)$ možemo zapisati kao $\langle f, e_k\rangle$, iz Besselove nejednakosti slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{S}_n$ ograničen operator na $L^2([0,1])$. Također, iz činjenice da je $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormirana baza prostora $L^2([0,1])$, slijedi $\mathcal{S}_n f \xrightarrow{L^2} f$, a time možemo pridati smisao i formalnom Fourierovom redu za L^2 funkcije.

Nadalje, za $f \in L^1(\mathbb{R})$ Fourierovu transformaciju funkcije definiramo sa:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,$$

a za operator Fourierove transformacije koristimo također i oznaku $\mathcal{F}$. Za funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$, Fourierovu transformaciju definiramo kao jedinstveni operator koji proširuje gornji operator $f \mapsto \widehat{f}$ definiran na gustom potprostoru $L^1 \cap L^2$ prostora L^2, kao što je to napravljeno u [2]. Za tako definiran operator Fourierove transformacije na $L^2(\mathbb{R})$ vrijedi poznati teorem

Teorem 1.1.1 (Plancherelov identitet)**.** *Operator Fourierove transformacije* $\mathcal{F}\colon L^2 \to L^2$ *je unitaran operator.*

Gornjim postupkom proširili smo operator Fourierove transformacije sa L^1 na $L^1 + L^2$. Taj prošireni operator označavat ćemo također s $\widehat{\cdot}$ ili $\mathcal{F}$.

Na nekoliko mjesta u radu koristit ćemo sljedeći poznati teorem za Fourierovu transformaciju.

Teorem 1.1.2 (Riemann-Lebesgueova lema za Fourierovu transformaciju)**.** *Za* $f \in L^1$ *vrijedi*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Također ćemo koristiti i analogni teorem za Fourierove redove.

Teorem 1.1.3 (Riemann-Lebesgueova lema za Fourierov red)**.** *Za periodičnu funkciju* f*, takvu da je* $f|_{[0,1]} \in L^1([0,1])$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Dokaz obje leme može se naći u [2].

Primijetimo još da su operatori translacije, modulacije i dilatacije povezani pomoću operatora Fourierove transformacije $\mathcal{F}$ na način:

$$\mathcal{F}\mathrm{T}_y = \mathrm{M}_{-y}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{M}_\xi = \mathrm{T}_\xi\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{D}^2_\lambda = \mathrm{D}^2_{\lambda^{-1}}\mathcal{F}$$

i prethodne činjenice (čiji se dokazi mogu naći u [2]) koristit ćemo bez eksplicitnog pozivanja na njih.

Dualnost

Vrlo korisna tehnika kod dokazivanja ocjena za p-norme i slabe p-norme je tehnika dualizacije. U radu ćemo pod dualizacijom podrazumijevati sljedeća dva teorema. Dokazi oba teorema mogu se naći u [3]. Za $p, p' \in [1,\infty]$ kažemo da su konjugirani eksponenti ako vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorem 1.1.4. *Za izmjerivu funkciju* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *i* $1 \leq p < \infty$ *vrijedi*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx\right| : \|g\|_{p'} = 1\right\},$$

gdje je p' *konjugirani eksponent eksponenta* p*.*

Dalekosežna posljedica gornjeg teorema je činjenica da je za $1 \leq p < \infty$ dual prostora $L^p(\mathbb{R})$ upravo prostor $L^{p'}(\mathbb{R})$ i to je korisno imati na umu pri razmišljanju o L^p prostorima, ali u radu to ne koristimo pa nećemo ulaziti u detalje.

Teorem 1.1.5. *Za svaku funkciju* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *i* $1 < p < \infty$ *vrijedi*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \sim_p \sup\left\{|E|^{-\frac{1}{p'}}\left|\int_E f(x)dx\right| : 0 < |E| < \infty\right\},$$

gdje je p' *konjugirani eksponent eksponenta* p*.*

Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija

Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija vrlo je važan objekt u harmonijskoj analizi. Za $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (što je oznaka za funkciju koja je integrabilna na svakom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}$) definiramo Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju $Mf(x)$ na sljedeći način:

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{[x-r,x+r]} |f(y)| dy.$$

U radu ćemo koristiti i sljedeći poznati teorem, čiji se dokaz može naći u [2, 3].

Teorem 1.1.6 (Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem)**.** *Za izmjerivu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *i* $1 < p \leq \infty$ *vrijedi*

$$\|Mf\|_p \lesssim_p \|f\|_p,$$

dok za $p = 1$ *vrijedi*

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_1.$$

Slično prethodnoj funkciji, možemo definirati i necentriranu maksimalnu funkciju na sljedeći način:

$$M_{\text{nc}}f(x) := \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy,$$

gdje se supremum uzima po svim intervalima I u $\mathbb{R}$ koji sadrže x.

Tada se lako provjeri da vrijedi

$$Mf(x) \leq M_{\text{nc}}f(x) \leq 2Mf(x).$$

Više o maksimalnim operatorima i funkcijama može se naći u [3].

Vremensko-frekvencijska analiza

Vremensko-frekvencijska analiza bavi se dekompozicijom funkcija i operatora u dijelove koji imaju dobru lokaliziranost po vremenu i frekvenciji. Idealno, pod pojmom lokaliziranosti funkcije u prostoru htjeli bismo podrazumijevati da funkcija ima kompaktan nosač na željenom intervalu, dok bismo pod pojmom frekvencijske lokaliziranosti htjeli shvaćati funkcije kojima Fourierove transformacije imaju kompaktan nosač u željenom intervalu. Međutim, poznato je da ne postoji funkcija s kompaktnim nosačem kojoj i Fourierova transformacija ima kompaktan nosač. Dokaz se može vidjeti u [2, 3]. Zbog toga se pojam lokaliziranosti oslabljuje samo na lokaliziranost s obzirom na neku funkciju koja dovoljno brzo trne u beskonačnosti i kojoj Fourierova transformacija trne dovoljno brzo u beskončanosti. U radu ćemo za to koristiti Schwartzovu funkciju ϕ, koju ćemo kasnije definirati. Tada ćemo reći da je ϕ dobro lokalizirana na nekom proizvoljnom pravokutniku $I \times \omega$, a za dilatiranu, translatiranu i moduliranu funkciju, $\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_\lambda\phi$ kažemo da je dobro lokalizirana na pravokutniku $(\lambda I + y) \times (\lambda^{-1}\omega + \eta)$. Ravninu u kojoj skiciramo pravokutnike na kojima su funkcije i njihove Fourierove transformacije lokalizirane nazivat ćemo vremensko-frekvencijskom ravninom.

Ideja dekompozicija funkcija i operatora u dobro lokalizirane dijelove toliko je važna da se dokaz ocjene Carlesonovog operatora temelji upravo na njoj. Operator raspišemo kao sumu dobro lokaliziranih dijelova, grupiramo dijelove sume na pogodan način i zatim svaki dio zasebno ocjenjujemo.

1.2 Svođenje na maksimalni operator

Kao što smo u uvodu napisali, cilj diplomskog rada je u potpunosti dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.2.1 (Carlesonov teorem)**.** *Za $f \in L^2([0,1])$ vrijedi:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n f(x) \quad g.s.$$

Iako je moguće direktno dokazati slabu ograničenost operatora $\mathcal{S}_n$, kao što je to napravio C. Fefferman u [1], mi ćemo u ovome radu, zbog tehnika koje se koriste u [5], dokazati najprije analogni teorem za Fourierovu transformaciju te zatim pokazati kako iz njega slijedi gore navedeni teorem. Zbog srodnosti problema, i sljedeći teorem se u literaturi naziva Carlesonovim teoremom.

Teorem 1.2.2 (Carlesonov teorem za Fourierovu transformaciju)**.** *Za $f \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi formula inverzije:*

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad g.s.$$

Ukoliko imamo zadanu familiju (slabo) ograničenih operatora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na L^p prostoru, standardan pristup dokazivanja konvergencije gotovo svuda oblika $\lim_{n\to\infty} A_n f(\cdot)$ jest dokazivanje konvergencije na nekom gustom skupu koji ima pogodnija svojstva od samog L^p prostora i zatim slabo ograničavanje maksimalnog operatora $A^\star f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n f|$. S obzirom da ćemo u svrhu potpunosti rada primijeniti navedenu tehniku u specijalnom slučaju, nećemo detaljnije ulaziti u iskaz ovog teorema već nam on služi samo kao motivacija za sljedeće definicije i teoreme. Detaljnije o napisanom principu može se naći u [3].

Prirodno pridružena familija operatora problemu dokazivanja formule inverzije jest sljedeća familija operatora koja ima istu ulogu kao i familija operatora n-tih parcijalnih suma Fourierovog reda.

Definicija 1.2.3. *Za $f \in L^2$ definirajmo familiju operatora $(\mathcal{C}_r)_{r\in\mathbb{R}}$ na sljedeći način:*

$$\mathcal{C}_r f(x) = \int_{-r}^{r} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Lema 1.2.4. *Familija operatora $\mathcal{C}_r$ je uniformno ograničena familija operatora sa L^2 u $L^{2,\infty}$.*

Dokaz. Iz Plancherelovog teorema i parnosti funkcije D_r slijedi

$$\mathcal{C}_r f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{[-r,r]}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \langle \widehat{f}, M_{-x} \mathbb{1}_{[-r,r]} \rangle = \langle f, T_x D_r \rangle = D_r * f(x), \quad (1.1)$$

gdje smo sa D_r označili funkciju

$$D_r(x) := \frac{\sin(2\pi r x)}{\pi x}.$$

Ponekad se u literaturi ova funkcija naziva Dirichletovom jezgrom, iako je uobičajeno taj naziv rezerviran za jezgru operatora $\mathcal{S}_n$. Da bismo dokazali slabu L^2 ograničenost, koristimo teorem 1.1.5. Neka je $E \subset \mathbb{R}$ takav da je $|E| < \infty$. Tada po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti vrijedi:

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}} |f(x-y) D_r(y)| \mathbb{1}_E(x) dx dy \\ &\qquad \le \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)|^2 \mathbb{1}_E(x) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |D_r(y)|^2 \mathbb{1}_E(x) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad = |E| \|f\|_2 \|D_r\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Zbog toga smijemo primijeniti Fubinijev teorem kod računanja sljedećih integrala:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} (f * D_r)(x) \mathbb{1}_E(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} D_r(y) \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathbb{1}_E(x) dx dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_E * \widetilde{f})(y) D_r(y) dy \right| \\ &= |\langle \widehat{\mathbb{1}_E} \widehat{\widetilde{f}}, \widehat{D_r} \rangle| \\ &= |\langle \widehat{\widetilde{f}} \mathbb{1}_{[-r,r]}, \overline{\widehat{\mathbb{1}_E}} \rangle| \\ &\le \left\| \widehat{\widetilde{f}} \mathbb{1}_{[-r,r]} \right\|_2 \left\| \overline{\widehat{\mathbb{1}_E}} \right\|_2 \\ &\le |E|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili Fubinijev teorem, u trećem retku Plancherelov identitet, u četvrtom svojstvo $\widehat{D_r} = \mathbb{1}_{[-r,r]}$, u petom Cauchy-Schwarzovu nejednakost i u šestom opet Plancherelov identitet. Kako gornja nejednakost vrijedi za proizvoljan skup E konačne mjere, iz teorema 1.1.5 slijedi

$$\|\mathcal{C}_r f\|_{L^{2,\infty}} \leq \|f\|_2.$$

Dakle, familija operatora $\mathcal{C}_r$ je uniformno ograničena familija operatora sa L^2 u $L^{2,\infty}$. □

Kao što smo spomenuli prije leme, standardna tehnika dokazivanja konvergencije gotovo svuda zahtijevat će ograničavanje maksimalnog operatora pridruženog navedenoj familiji pa definirajmo i taj operator.

Definicija 1.2.5. *Za $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiramo simetrizirani Carlesonov operator na način:*

$$\mathcal{C}_{sym} f(x) := \sup_{N\in\mathbb{R}} \left| \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right|.$$

Cilj nam je dokazati slabu ograničenost gornjeg operatora. Međutim, razlog zbog kojeg gornji operator nismo nazvali jednostavno Carlesonovim operatorom jest taj što se u tehnikama koje ćemo koristiti u nastavku praktičnijim pokazuje sljedeći operator, kojeg ćemo onda zvati Carlesonovim operatorom.

Definicija 1.2.6. *Za Schwartzovu funkciju f Carlesonov operator definiramo kao:*

$$\mathcal{C} f(x) = \sup_{N\in\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right|.$$

Provjerimo da je definicija prethodnih operatora dobra. Dokazat ćemo za Carlesonov operator, a za simetrizirani Carlesonov operator dokaz je potpuno analogan. Za Schwartzovu funkciju $\widehat{f}$ je opet Schwartzova funkcija, a time u L^1 pa je funkcija

$$N \mapsto \int_{-\infty}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

neprekidna po N i x. Zbog neprekidnosti po N vrijedi

$$\mathcal{C} f(x) = \sup_{N\in\mathbb{Q}} \left| \int_{-\infty}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right|,$$

a tako definirana funkcija je očito izmjeriva kao supremum prebrojivo izmjerivih (čak i neprekidnih) funkcija. U sljedećem poglavlju dokazat ćemo sljedeći teorem, koji predstavlja centralni teorem ovog rada.

Teorem 1.2.7 (ocjena Carlesonovog operatora)**.** *Neka je $\mathcal{C}$ Carlesonov operator i f Schwartzova funkcija. Tada vrijedi*

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|f\|_2.$$

Dokažimo da prethodni teorem uz lemu 1.2.4 povlači slabu $(2,2)$ ograničenost simetriziranog Carlesonovog operatora. Dokaz je adaptiran iz [3].

Korolar 1.2.8. *Za simetrizirani Carlesonov operator $\mathcal{C}_{sym}$ i za funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi*

$$\|\mathcal{C}_{sym}f\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|f\|_2.$$

Dokaz. Zbog toga što za svaku Schwartzovu funkciju f vrijedi $\mathcal{C}_{sym}f(x) \leq 2\mathcal{C}f(x)$, gornja ocjena za Schwartzove funkcije slijedi direktno iz prethodnog teorema.

Neka je sada $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljna enumeracija racionalnih brojeva. Tada po neprekidnosti integrala L^2 funkcije na kompaktnim skupovima zaključujemo da vrijedi:

$$\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_{q_n}f(x)| = \lim_{N\to\infty} \max_{1\leq n\leq N} |A_{q_n}f(x)|.$$

Dakle, dovoljno je dokazati slabu ograničenost operatora $\max_{1\leq n\leq N} |A_{q_n}f(x)|$ za N fiksan, s konstantom neovisnom o N. Tada će ograničenost simetriziranog operatora slijediti naprosto iz Fatouove leme. Neka je sada $f \in L^2$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Odaberimo tada Schwartzovu funkciju g tako da je $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. Koristeći jednostavnu činjenicu da za izmjerive funkcije $(f_k)_{k=1}^n$ vrijedi

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_{L^{2,\infty}}^2 \leq n^2 \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^{2,\infty}}^2$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
\left\|\max_{1\leq n\leq N} |A_{q_n}f|\right\|_{L^{2,\infty}}^2 &\lesssim \left\|\max_{1\leq n\leq N} |A_{q_n}g|\right\|_{L^{2,\infty}}^2 + \left\|\max_{1\leq n\leq N} |A_{q_n}(f-g)|\right\|_{L^{2,\infty}}^2 \\
&\lesssim \|g\|_2^2 + \left\|\sum_{n=1}^{N} |A_{q_n}(f-g)|\right\|_{L^{2,\infty}}^2 \\
&\lesssim \|g\|_2^2 + N^2 \sum_{n=1}^{N} \|A_{q_n}(f-g)\|_{L^{2,\infty}}^2 \\
&\lesssim \|g\|_2^2 + N^3 \|f-g\|_2^2 \\
&\leq (\|f\|_2 + \varepsilon)^2 + N^3\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom retku koristili svojstvo da je $L^{2,\infty}$ kvazinorma, u drugom retku maksimalnu ocjenu iz 1.2.7, u trećem retku još jednom svojstvo kvazinorme, a u četvrtom retku lemu 1.2.4.

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, puštanjem $\varepsilon \to 0$ slijedi da je

$$\left\| \max_{1\le n\le N} |A_{q_n} f| \right\|_{L^{2,\infty}}^2 \lesssim \|f\|_2$$

s konstantom neovisnom o N i time je dokazana tvrdnja korolara. □

U nastavku poglavlja dokazujemo da prethodni teorem povlači Carlesonov teorem. U tu svrhu dokazat ćemo najprije analogni teorem za Fourierovu transformaciju.

Dokaz teorema 1.2.2. Iz (1.1) slijedi da je desna strana jednaka $D_N * f$, uz notaciju kao i prije.

Sada tvrdnja teorema slijedi za Schwartzove funkcije g iz činjenice da je

$$\int_{\mathbb{R}} D_N(x)dx = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{N\to\infty} \int_{|x|\ge\delta} D_N(x) = 0.$$

Naime, zbog toga što je $g \in C^\infty$, za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $|y| < \delta$ vrijedi $\left|\frac{g(x-y)-g(x)}{y}\right| \lesssim 1$. Odatle slijedi:

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} |D_N * g(x) - g(x)| \le &\limsup_{N\to\infty} \left| \int_{|y|\le\delta} \frac{g(x-y)-g(x)}{\pi y} \sin(2\pi N y) dy \right| \\ &+ \limsup_{N\to\infty} \left| \int_{|y|\ge\delta} (g(x-y)-g(x)) D_N(y) dy \right| = 0,\end{aligned}$$

gdje prvi član ide u 0 po Riemann-Lebesgueovoj lemi, a drugi po svojstvu jezgre D_N i L^∞ ograničenosti od g.

Za $f \in L^2(\mathbb{R})$ dokažimo da je:

$$L_f(x) := \limsup_{N\to\infty} \left| f(x) - \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right| = 0 \quad \text{g.s.}$$

Za to je dovoljno dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $|\{L_f > \varepsilon\}| \lesssim \varepsilon$. Neka je $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, tako da je $\|f-g\|_{L^2} \le \varepsilon^{3/2}$. Kako formula inverzije vrijedi za g, zaključujemo da vrijedi $L_f \le \mathcal{C}_{sym}(f-g) + |f-g|$. Dakle, sad po korolaru 1.2.8 vrijedi:

$$|\{L_f > \varepsilon\}| \le |\{C_{sym}(f-g) > \varepsilon/2\}| + |\{|f-g| > \varepsilon/2\}| \lesssim \varepsilon^{-2} ||f-g||_{L^2}^2 \lesssim \varepsilon$$

i time je tvrdnja dokazana. □

Da bismo dokazali Carlesonov teorem, treba nam još jedan poznati teorem vezan za Fourierove redove.

Teorem 1.2.9 (Riemannov princip lokalizacije)**.** *Za 1-periodičnu funkciju f, takvu da je $f|_{[0,1]} \in L^1([0,1])$ i $x \in [0,1]$ limes*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n f(x)$$

postoji ako i samo ako za neke $a, b \in \mathbb{R}$, takve da je $a < 0 < b$ postoji limes:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} f(x-y)dy$$

i u tom slučaju su jednaki.

Iako je rezultat poznat u literaturi, obično je iskazan za simetričan interval oko x pa ćemo navesti dokaz radi potpunosti.

Dokaz. Primijetimo najprije da vrijedi:

$$\mathcal{S}_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \int_{[0,1]} f(y)e^{-2\pi iky}dy e^{2\pi ikx} = \int_{[0,1]} f(y)\mathcal{D}_n(x-y)dy$$

gdje smo sa $\mathcal{D}_n$ označili Dirichletovu jezgru:

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin(\pi x)}.$$

Nadalje, zbog periodičnosti funkcije f, primijetimo da je gornji izraz nadalje jednak:

$$\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} f(x-y)\mathcal{D}_n(y)dy. \tag{1.2}$$

Neka je sada $0 < \delta < \frac{1}{2}$ neki dovoljno mali broj, tako da vrijedi $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$. Tada iz (1.2) i prethodne oznake za D_N vrijedi:

$$\begin{aligned} \left| S_n f(x) - \int_{[a,b]} \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} f(x-y)dy \right| \leq & \left| \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y)(\mathcal{D}_n(y) - D_{n+\frac{1}{2}}(y))dy \right| \\ & + \left| \int_{\delta<|y|\leq\frac{1}{2}} f(x-y)\mathcal{D}_n(y)dy \right| \\ & + \left| \int_{y\in(a,b):|y|\geq\delta} f(x-y)D_{n+\frac{1}{2}}(y) \right|. \end{aligned}$$

Prvi je integral jednak

$$\left| \int_{[-\delta,\delta]} f(x-y)h(y)\sin((2n+1)\pi y)\ dy \right|,$$

gdje je $h(y) := \frac{\pi y - \sin(\pi y)}{\pi y \sin(\pi y)}$. Zbog toga što je $h(y)$ ograničena na $[-\delta,\delta] \setminus \{0\}$, to je $f(x-y)h(y)$ u $L^1([-\delta,\delta])$ pa integral po Riemann-Lebesgueovoj lemi konvergira u 0 za $n \to \infty$. Nadalje zbog toga što su funkcije $\frac{1}{y} \cdot \mathbb{1}_{|y-x|>\delta}$ i $\frac{1}{\sin(\pi y)} \cdot \mathbb{1}_{|y-x|>\delta}$ u L^∞, njihov produkt sa $f(x-y)$ je u L^1 na intervalima integracije pa drugi i treći integral također po Riemann-Lebesgueovoj lemi konvergiraju u 0 za $n \to \infty$ i time je teorem dokazan. $\square$

Konačno, dokažimo da teorem 1.2.2 povlači Carlesonov teorem.

Dokaz teorema 1.2.1. Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodična funkcija, takva da je $f|_{[0,1]} \in L^2([0,1])$. Definirajmo tada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa $g := f \cdot \mathbb{1}_{[-1,2]}$. Očito je tada $g \in L^2(\mathbb{R})$. Po Carlesonovom teoremu za Fourierovu transformaciju postoji $E \subset \mathbb{R}$ mjere 0 tako da za svaki $x \in E^c$ vrijedi $\lim_{n\to\infty}(D_{2n+1} * g)(x) = g(x)$. Posebno, ako je $x \in [0,1] \cap E^c$, prethodna jednakost može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty}(D_{2n+1} * g)(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (f \cdot \mathbb{1}_{[-1,2]})(x-y) \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[x-2,x+1]} f(x-y) \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y} dy. \end{aligned}$$

Međutim, tada iz prethodnog teorema slijedi $\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n f(x) = f(x)$ i time je Carlesonov teorem dokazan. $\square$

Poglavlje 2

Ocjena Carlesonovog operatora

U ovom poglavlju prezentirat ćemo dokaz teorema 1.2.7 prateći dokaz iz [5] s nekim nadopunama iz [4]. Kao što smo rekli u uvodu, ideja dokaza ocjene Carlesonovog teorema može se sažeti u 2 koraka — svođenje ocjene na ocjenu sume dobro lokaliziranih operatora i zatim grupiranje i ograničavanje sume po dijelovima. Prvi odjeljak posvećen je prvom koraku, dok su sljedeća tri odjeljka posvećena drugom koraku.

U nastavku pod *interval* podrazumijevamo poluotvoreni interval $[x, y)$. Sa $c(I)$ označavat ćemo središte intervala I a za $\alpha > 0$ sa αI označavat ćemo interval s istim središtem, ali duljinom $\alpha|I|$. Definirajmo i težinske funkcije:

$$w(x) := (1 + |x|)^{-\nu}, \quad \text{i} \quad w_I(x) := T_{c(I)} D^1_{|I|} w,$$

gdje je ν neki po volji velik prirodan broj čija točna vrijednost nije važna te može biti različit na različitim mjestima. Bitno je samo da koristimo konačno različitih vrijednosti za ν jer su tada ocjene koje ovise o tom parametru i dalje ograničene konstantom, a to jest slučaj u nastavku dokaza.

2.1 Dekompozicija operatora

Neka je ϕ Schwartzova funkcija, takva da je $\mathbb{1}_{[-0.09,0.09]} \leq \widehat{\phi} \leq \mathbb{1}_{[-0.1,0.1]}$. Za pravokutnik $P = I_P \times \omega_P$ površine 1 definiramo:

$$\phi_P := M_{c(\omega_{1P})} T_{c(I_P)} D^2_{|I_P|} \phi,$$

gdje smo sa ω_{1P} označili donju polovicu, tj. $\omega_P \cap (-\infty, c(\omega_P))$ intervala ω_P. Slično, sa ω_{2P} označavat ćemo gornju polovicu, $\omega_P \setminus \omega_{1P}$, intervala ω_P. Primijetimo da je nosač od $\widehat{\phi}_P$ sadržan u $\frac{1}{2}\omega_{1P}$ i da vrijedi:

$$|\phi_P(x)| \lesssim_{\phi,\nu} |I_P|^{\frac{1}{2}} w_P(x),$$

gdje smo sa w_P označili w_{I_P}. Time smo definirali funkciju koja je dobro lokalizirana u vremensko-frekvencijskoj ravnini na pravokutniku P i nazivamo je *valni paket*. Pokazat ćemo da su svojstva ovakve familije vrlo povoljna u smislu da "skoro" čine ortonormiranu bazu. Naime, valni paketi koji imaju disjunktne frekvencijske intervale bit će ortogonalni dok će valni paketi koji su jako razmaknuti ili jako različito skalirani biti "skoro ortogonalni". Preciznu tvrdnju iskazat ćemo u sljedećoj lemi. Napomenimo samo da to što konstanta ovisi o Schwartzovoj funkciji ne pravi problem u dokazu ograničenosti operatora budući da smo funkciju odabrali na početku i ne mijenja se tijekom dokaza. Zbog toga ćemo u nastavku izostavljati pisanje ovisnosti konstanti o ϕ, kao što smo i napomenuli u uvodu.

Dijadski interval je interval oblika $[n2^k, (n+1)2^k)$, za $k, n \in \mathbb{Z}$. Sa $\overline{\boldsymbol{P}}$ označit ćemo skup svih pravokutnika $I \times \omega$, gdje su I i ω dijadski intervali, takvi da je $|I||\omega| = 1$, a elemente od $\overline{\boldsymbol{P}}$ nazivat ćemo *pločicama*. Za pločice P i P' ćemo reći da su jednako skalirane ukoliko je $|I_P| = |I_{P'}|$. Na skupu pločica uvodimo parcijalni uređaj $<$ na sljedeći način. Kažemo da je $P < P'$ ako je $I_P \subset I_{P'}$ i $\omega_{P'} \subset \omega_P$. Važno svojstvo dijadskih intervala koje ćemo učestalo koristiti bez referenciranja je svojstvo da su dva dijadska intervala ili disjunktna ili je jedan podskup drugoga. Ono nam omogućava da realni pravac diskretiziramo i razlog je vrlo široke primjene dijadskih intervala u modernoj harmonijskoj analizi.

Lema 2.1.1. *Neka su ϕ_P i $\phi_{P'}$ valni paketi pridruženi pločicama $P, P' \in \overline{\boldsymbol{P}}$ i neka je $|I_{P'}| \leq |I_P|$. Tada vrijedi*

$$|\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle| \lesssim |I_P|^{\frac{1}{2}} |I_{P'}|^{-\frac{1}{2}} \|w_P \mathbb{1}_{P'}\|_1$$

Dokaz. Koristeći ocjenu na ϕ_P pomoću w_P vrijedi:

$$|\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle| \leq |I_P|^{\frac{1}{2}} |I_{P'}|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} w_P(x) w_{P'}(x) dx.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $c(I_{P'}) > c(I_P)$. Translacijom za $c(I_{P'})$ i dilatacijom za $|I_{P'}|$, u slučaju $|I_P| > |I_{P'}|$ problem svodimo na dokazivanje da je

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{D}^1_{2^n} w(x) w(x) dx \lesssim \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{D}^1_{2^n} w(x) dx,$$

za brojeve $n, N \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 1$. Primijetimo da je zbog definicije funkcije w vrijednost integrala funkcije na lijevoj strani po području $(-\infty, -N - 1/2]$ manja nego po području $[-N - 1/2, \infty)$ pa je dovoljno ograničiti integral po drugom području. Rastavimo drugo područje na $[-N - 1/2, 1/2) \cup [1/2, \infty)$.

Rastavljanjem nadalje $[1/2, \infty)$ na $\bigcup_{k\geq 0}[1/2+k, 3/2+k)$ i korištenjem L^∞ ograde funkcije w na pojedinom intervalu te činjenice da je funkcija $\mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)$ padajuća na $[1/2, \infty)$, slijedi:

$$\begin{aligned}\int_{[\frac{1}{2},\infty)} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)w(x)dx &\leq \sum_{k\geq 0}\left(k+\frac{3}{2}\right)^{-\nu}\int_{[\frac{1}{2}+k,\frac{3}{2}+k)} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)dx \\ &\lesssim \int_{[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)dx.\end{aligned}$$

Analogno, rastavljanjem $[-N-1/2, 1/2)$ na $\bigcup_{k=0}^{N}[-1/2-k, 1/2-k)$ i korištenjem L^∞ ograde funkcije w na pojedinom intervalu slijedi

$$\begin{aligned}&\int_{[-N-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)w(x)dx \\ &\leq \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)dx + \sum_{k=1}^{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-\nu}\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N+k-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x)dx.\end{aligned}$$

Dakle, dovoljno je dokazati da za $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-\nu}\mathrm{T}_{-N+k-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x) \lesssim \mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x).$$

Međutim, lako se provjeri da uz

$$c(k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\nu} & \text{za } k \leq \frac{N}{2}, \\ \left(\frac{N+\frac{1}{2}-k}{2}\right)^{-\nu} & \text{za } k > \frac{N}{2} \end{cases}$$

vrijedi:

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-\nu}\mathrm{T}_{-N+k-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x) \leq c(k)\mathrm{T}_{-N-\frac{1}{2}}\mathrm{D}^1_{2^n}w(x) \quad \text{za } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Konačno, kako je $\sum_{k=1}^{N} c(k) \lesssim 1$, tvrdnja je dokazana za $|I_P| > |I_{P'}|$.

U slučaju kad je $|I_P| = |I_{P'}|$ problem se uz napisanu translaciju i dilataciju svodi na dokazivanje:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_{-N}w(x)w(x)dx \lesssim \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \mathrm{T}_{-N}w(x)dx$$

za $N \in \mathbb{N}$ te postupamo potpuno analogno kao i u prethodnom slučaju.

□

Kako bismo koristili kombinatoriku vremensko-frekvencijske ravnine, trebamo zapisati Carlesonov operator u obliku koji će nam omogućiti korištenje valnih paketa. Primijetimo najprije da Carlesonov operator možemo zapisati pomoću operatora $\mathcal{F}_- f(x) = \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$ na način:

$$\mathcal{C}f = \sup_{N\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}_-(\mathrm{M}_N f)|.$$

Navedimo sljedeću korisnu propoziciju koja će nam služiti za karakterizaciju operatora $\mathcal{F}_-$.

Propozicija 2.1.2. *Za svaki ograničeni operator T na $L^2(\mathbb{R})$ koji komutira s translacijama postoji $m \in L^\infty$ takva da vrijedi:*

$$Tf = (m\widehat{f})^\vee.$$

Dodatno, vrijedi i $\|m\|_\infty = \|T\|_{L^2\to L^2}$.

Dokaz. Ukoliko je T nuloperator, definiramo $m = 0$. U suprotnom, neka je $\psi(x) := e^{-\pi x^2}$. Tada je $\widehat{\psi} = \psi$ i vrijedi:

$$\begin{aligned} \psi \cdot (Tf)^\wedge &= (\psi * Tf)^\wedge = \Big(\langle Tf, \mathrm{T}_x\tilde{\psi}\rangle\Big)^\wedge = (\langle \mathrm{T}_{-x}Tf, \psi\rangle)^\wedge \\ &= (\langle T\mathrm{T}_{-x}f, \psi\rangle)^\wedge = (\langle \mathrm{T}_{-x}f, T^*\psi\rangle)^\wedge = \Big(\widetilde{\overline{T^*\psi}} * f\Big)^\wedge \\ &= \overline{\widehat{T^*\psi}}\widehat{f}, \end{aligned}$$

gdje smo sa T^* označili hermitski adjungirani operator operatoru T. Definirajmo sada $m(\xi) := \overline{\widehat{T^*\psi}}(\xi)\psi(\xi)^{-1}$. Za takvu funkciju m i za svaku $f \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$(Tf)^\wedge = m\widehat{f}.$$

Neka je $c > 1$, neka je $E := \{m > c\|T\|_{L^2\to L^2}\}$ i $F \subset E$ kompaktan skup mjere barem $\min\{1, |E|/2\}$. Tada za $f = (1_F)^\vee$ vrijedi:

$$|F|^{\frac{1}{2}}\|T\|_{L^2\to L^2} = \|f\|_2\|T\|_{L^2\to L^2} \geq \|Tf\|_2 = \|(Tf)^\wedge\|_2 = \|m\mathbb{1}_F\|_2 > c\|T\|_{L^2\to L^2}|F|^{\frac{1}{2}},$$

što je kontradikcija za $|F| \neq 0$. Dakle, zaključujemo da je $\|m\|_\infty < c\|T\|_{L^2\to L^2}$ za svaki $c > 1$. Odatle slijedi $\|m\|_\infty \leq \|T\|_{L^2\to L^2}$.

S druge strane, pretpostavimo da postoji $0 < c < 1$ takav da je $\|m\|_\infty = c \cdot \|T\|_{L^2\to L^2}$. Tada možemo izabrati $f \in L^2(\mathbb{R})$ tako da vrijedi $\|Tf\|_2 > c\|f\|_2$ pa imamo

$$c\|T\|_{L^2\to L^2}\|\widehat{f}\|_2 = \|m\|_\infty\|\widehat{f}\|_2 \geq \|m\widehat{f}\|_2 = \|(Tf)^\wedge\|_2 = \|Tf\|_2 > c\|T\|_{L^2\to L^2}\|f\|_2.$$

Međutim, to je kontradikcija zbog $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Dakle $\|m\|_\infty = \|T\|_{L^2\to L^2}$ i time je tvrdnja dokazana. □

Koristeći prethodnu propoziciju sada možemo dokazati karakterizaciju operatora $\mathcal{F}_-$ koju ćemo koristiti u nastavku.

Propozicija 2.1.3. *Do na umnožak konstantom, $\mathcal{F}_-$ je jedinstveni ograničeni operator na L^2 koji komutira s translacijama i dilatacijama, a jezgra mu sadrži sve funkcije kojima je nosač Fourierove transformacije sadržan u $(0, \infty)$.*

Dokaz. Neka je T ograničen operator na L^2 koji zadovoljava gornja tri svojstva. Iz prvog svojstva slijedi $\widehat{Tf} = m\widehat{f}$ za neku $m \in L^\infty$. Drugi uvjet povlači da je $m(\xi) = m(\xi/|\xi|)$ za $\xi \neq 0$. I konačno, $f \in \operatorname{Ker} T$ akko je $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \cap \operatorname{supp}(m) = \emptyset$. Dakle, m je jednaka 0 na pozitivnom dijelu x osi i konstantna na negativnom. Zato vrijedi da je $T = c\mathcal{F}_-$. □

Primijetimo da nam je djelovanje operatora $\mathcal{F}_-$ poznato na valnim paketima koje smo prije definirali. Zbog toga za $f \in L^2$ i $\xi \in \mathbb{R}$ definirajmo operator:

$$A_\xi f := \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P,$$

gdje je poredak sumacije nevažan s obzirom na to da će iz dokaza slijediti da je konvergencija bezuvjetna, a konvergenciju, naravno, shvaćamo u L^2. Navedeni operator zapravo ima "skoro jednako" djelovanje kao i $\mathcal{F}_-$ na valne pakete ϕ_P. U idealnom slučaju kad bi sve funkcije ϕ_P bile ortogonalne , operator bi imao točno jednako djelovanje, ali to ne možemo očekivati zbog napisane nemogućnosti potpune lokalizacije funkcije u faznoj ravnini pa je zbog toga ovo najbolje što možemo. Prednost operatora A_ξ nad operatorom $\mathcal{F}_-$ je ta što je prikazan pomoću valnih paketa pa možemo koristiti jake alate koje imamo u faznoj ravnini za njegovu kontrolu.

Dokažimo najprije osnovna svojstva operatora A_ξ koja ćemo kasnije koristiti.

Propozicija 2.1.4. *Za svaki je $\xi \in \mathbb{R}$ operator A_ξ dobro definiran ograničen operator na L^2 s ogradom neovisnom o ξ. Nadalje, $\operatorname{Ker} A_\xi$ sadrži sve funkcije kojima je nosač Fourierove transformacije sadržan u $[\xi, \infty)$ i svaki A_ξ je pozitivno definitan. Nadalje, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi:*

$$A_\xi = D^2_{2^{-k}} A_{\xi 2^{-k}} D^2_{2^k}, \tag{2.1}$$

$$A_{\xi,k} T_{2^k} = T_{2^k} A_{\xi,k}, \tag{2.2}$$

gdje je $A_{\xi,k} = \sum_{\substack{P \in \overline{\boldsymbol{P}} \\ |I_P| \leq 2^k}} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P$.

Dokaz. Za fiksan $\xi \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$ neka je $\Omega_n = \{P \in \overline{\boldsymbol{P}} : \xi \in \omega_{2P} \text{ i } |I_P| = 2^n\}$ i neka je

$$A_\xi^{(n)} f = \sum_{P \in \Omega_n} \langle f, \phi_P \rangle \phi_P.$$

Primijetimo da su sve pločice za koje doprinose sumi u definiciji operatora A_ξ sadržane u $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\boldsymbol{P}}_n$.

$A_\xi^{(n)} f(x)$ dobro je definirano za svaki $x \in \mathbb{R}$ zbog činjenice da su funkcije ϕ_P brzotrnuće i da su dovoljno razmaknute:

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\Omega_n} |\langle f, \phi_P\rangle \phi_P(x)| &\leq \|f\|_2 \|\phi_P\|_2 \sum_{P\in\Omega_n} |\mathrm{T}_{c(I_P)} \mathrm{D}^2_{|I_P|}\phi(x)| \\ &\lesssim \|f\|_2 |I_P|^{-\frac{1}{2}} \sum_{P\in\Omega_n} (1 + |x - c(I_p)||I_P|^{-1})^{-\nu} \\ &\lesssim \|f\|_2 |I_P|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n)^{-\nu} \\ &\lesssim \|f\|_2 |I_P|^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dokazat ćemo da je svaki $A_\xi^{(n)}$ ograničen operator na L^2 s ogradom neovisnom o ξ. Operatori $A_\xi^{(m)}$ i $A_\xi^{(n)}$ razlikuju se do na kompoziciju s operatorima translacije i dilatacije koji čuvaju L^2 norme pa je dovoljno dokazati ograničenost operatora $A_\xi^{(0)}$.

Ocjenjivanjem manjeg od brojeva $|\langle f, \phi_P\rangle|$, $|\langle \phi_{P'}, f\rangle|$ većim i korištenjem simetrije te nakon toga korištenjem leme 2.1.1 imamo:

$$\begin{aligned}\|A_\xi^{(0)} f\|_2^2 &\leq \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} \sum_{P'\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle \langle \phi_P, \phi_{P'}\rangle \langle \phi_{P'}, f\rangle| \\ &\leq 2 \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle|^2 \sum_{P'\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle \phi_P, \phi_{P'}\rangle| \\ &\lesssim \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle|^2 \sum_{P'\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} \int_{\mathbb{R}} w_P(x) \mathbb{1}_{P'}(x) dx \\ &\leq \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle|^2 \|w_P\|_1 \\ &\lesssim \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle|^2.\end{aligned}$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti vrijedi $|\langle f, \phi_P\rangle|^2 \lesssim \int |f|^2 |\phi_P|$, pa zbog činjenice da su pločice u Ω_n udaljene za cjelobrojne vrijednosti, a funkcije ϕ_P brzotrnuće, vrijedi $|| \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} \phi ||_{L^\infty} \lesssim 1$. Odatle slijedi:

$$\sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} |\langle f, \phi_P\rangle|^2 \lesssim \int |f(x)|^2 \Big\| \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_0} \phi_P(x) \Big\|_{L^\infty} dx \lesssim \|f\|_2^2$$

i time je dokazana tvrdnja o ograničenosti uniformnom ogradom.

Za $m \neq n$ i $P \in \overline{\boldsymbol{P}}_m$, $P' \in \Omega_n$ vrijedi da su intervali ω_{1P} i $\omega_{1P'}$ disjunktni pa su ϕ_P i $\phi_{P'}$ ortogonalne funkcije. Odatle slijedi da su operatori $A_\xi^{(n)}$ međusobno ortogonalni s uniformnom ocjenom norme pa je za $f \in L^2$ dobro definiran L^2 limes

$$A_\xi f = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} A_\xi^{(n)} f.$$

i vrijedi da je operator A_ξ ograničen na L^2.

Zbog toga što Fourierova transformacija svih funkcija ϕ_P u definiciji operatora A_ξ ima nosač u $(-\infty, \xi)$, to je tvrdnja o jezgri operatora očita. Tvrdnja da je operator pozitivno semidefinitan vidi se iz:

$$\langle A_\xi f, f\rangle = \sum_{\substack{P\in\overline{\boldsymbol{P}}\\ \xi\in\omega_{2P}}} |\langle f, \phi_P\rangle|^2 \ge 0$$

Posebno, vrijedi $\langle A_\xi \phi_P, \phi_P\rangle > 0$ pa operator nije nuloperator. Konačno, dva napisana identiteta slijede direktno iz definicije. □

Definirajmo nadalje za Schwartzovu funkciju f sljedeći operator.

$$\Pi_\xi f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f dy d\eta d\kappa,$$

gdje je K_n rastući niz pravokutnika oblika $I_n \times \omega_n$ koji popunjava $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da iz definicije slijedi da je operator $\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta$ zapravo operator A_ξ na dijadskoj rešetci fazne ravnine koja je skalirana za $2^{-\kappa}$, tj. ima "osnovnu" pločicu $[0, 2^{-\kappa}) \times [0, 2^\kappa)$ i zatim translatirana za (y, η) pa gornji operator intuitivno predstavlja prosjek operatora A_ξ na neprekidno skaliranim i translatiranim dijadskim rešetkama. Dokažimo sada da je gornja definicija i formalno dobra.

Propozicija 2.1.5. *Za Schwartzovu funkciju f sljedeći red*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\le n} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)$$

konvergira apsolutno za sve $x \in \mathbb{R}$. Također, red konvergira k

$$\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)$$

uniformno po $x, \eta, y \in \mathbb{R}$, $\kappa \in [0,1]$ i $\xi \le \xi_0$, za proizvoljan $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Za $k < 0$ koristeći Plancherelov identitet u skalarnom produktu vrijedi:

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(k)}_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)}\mathrm{D}^2_{2^{\kappa}}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)| \\
&\quad\le \sum_{\substack{|\omega_P|=2^{-k}\\ 2^{-\kappa}(\eta+\xi)\in\omega_{2P}}} \left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)\mathrm{T}_{-\eta}\mathrm{M}_y\mathrm{D}^2_{2^\kappa}\widehat{\phi_P}(\zeta)d\zeta\right| \cdot \left|\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}\phi_P(x)\right| \\
&\quad\le \sum_{\substack{|\omega_P|=2^{-k}\\ 2^{-\kappa}(\eta+\xi)\in\omega_{2P}}} \left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)\mathbb{1}_{(-\infty,\xi-2^\kappa\frac{|\omega_P|}{8}]}(\zeta)d\zeta\right| \cdot \left|\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}_{2^{-\kappa}}\mathrm{T}_{c(I_P)}\mathrm{D}^\infty_{|I_P|}\phi(x)\right| \\
&\quad\lesssim \sum_{\substack{|\omega_P|=2^{-k}\\ 2^{-\kappa}(\eta+\xi)\in\omega_{2P}}} \left|\int_{\mathbb{R}} (1+|\zeta|)^{-\nu}\mathbb{1}_{(-\infty,\xi-2^\kappa\frac{|\omega_P|}{8}]}(\zeta)d\zeta\right| \cdot \left|\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}_{2^{-\kappa}}\mathrm{T}_{c(I_P)}\mathrm{D}^\infty_{|I_P|}\phi(x)\right|,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku koristili činjenicu da je

$$\left|\widehat{\phi_P}\right| \le |I_P|^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{[c(\omega_P)-\frac{3}{8}|\omega_P|,c(\omega_P)-\frac{1}{8}|\omega_P|]},$$

a u trećem svojstvo da je $\widehat{f}$ također Schwartzova funkcija. Konačno, za k dovoljno mali u odnosu na ξ, tako da je $2^{-k} > 16|\xi|$, vrijedi da je zadnji integral $\lesssim 2^{k\nu}$, a kako su funkcije ϕ brzotrnuće i $2^\kappa \sim 1$, to je kao i prije i zadnja suma ograničena sa $\lesssim 2^{k\nu}$.

U slučaju kad je $k > 0$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(k)}_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)}\mathrm{D}^2_{2^{\kappa}}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)| \\
&\quad\le \sum_{\substack{|\omega_P|=2^{-k}\\ 2^{-\kappa}(\eta+\xi)\in\omega_{2P}}} \|f\|_2\|\phi\|_2 \cdot \left|\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}\phi_P(x)\right| \\
&\quad\lesssim 2^{-\frac{k}{2}}\|f\|_2 \left\| \sum_{\substack{|\omega_P|=2^{-k}\\ 2^{-\kappa}(\eta+\xi)\in\omega_{2P}}} \left|\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}_{2^{-\kappa}}\mathrm{T}_{c(I_P)}\mathrm{D}^\infty_{|I_P|}\phi\right|\right\|_\infty \\
&\quad\lesssim 2^{-\frac{k}{2}}\|f\|_2,
\end{aligned}$$

gdje smo koristili Cauchy-Schwarzovu nejednakost i činjenicu da je $2^\kappa \sim 1$.

Dakle, za velike i male k-ove, $A^{(k)}_\xi f(x)$ je po apsolutnoj vrijednosti ograničen geometrijskim redom pa odatle slijede tvrdnje propozicije. □

Kako je familija operatora A_ξ uniformno ograničena na L^2, to za Schwartzovu funkciju f i funkciju $g \in L^2$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} (\Pi_\xi f)(x) g(x) dx\right| \\
&\quad \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{\mathbb{R}} \int_{K_n \times [0,1]} |\mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f(x)||g(x)| dy d\eta d\kappa dx \\
&\quad \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n \times [0,1]} \left\|\mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\eta+\xi)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f\right\|_2 \|g\|_2 dy d\eta d\kappa \\
&\quad \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n \times [0,1]} \|f\|_2 \|g\|_2 dy d\eta d\kappa \\
&\quad = \|f\|_2 \|g\|_2,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom retku koristili nejednakost trokuta i Fatouovu lemu, u drugom Fubinijev teorem za nenegativne funkcije i Cauchy-Schwarzovu nejednakost i u trećem retku uniformnu ograničenost operatora i svojstvo da modulacije, translacije i dilatacije ne mijenjaju 2-normu. Odatle dualizacijom slijedi da je za svaki $\xi \in \mathbb{R}$

$$\|\Pi_\xi f\|_2 \lesssim \|f\|_2,$$

s implicitnom konstantom neovisnom o ξ. Dakle, svaki se operator Π_ξ na jedinstven način može proširiti do ograničenog operatora na L^2. Želimo konačno dovesti u vezu operatore Π_ξ s operatorima u Carlesonovom teoremu.

Propozicija 2.1.6. *Za Schwartzovu funkciju f vrijedi*

$$\Pi_\xi f(x) = \mathrm{M}_\xi \mathcal{F}_-(\mathrm{M}_{-\xi} f).$$

Posebno, odatle slijedi

$$\mathcal{C} f(x) = \sup_\xi |\Pi_\xi f(x)|.$$

Dokaz. Primijetimo da direktno iz definicije operatora Π_ξ vrijedi

$$\mathrm{M}_{-\xi} \Pi_\xi \mathrm{M}_\xi f = \Pi_0 f$$

Naime, zbog prethodne propozicije za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji N dovoljno velik, tako da se $\Pi_\xi f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ razlikuje od

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n \times [0,1]} \sum_{|k| \leq N} \mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}(\xi+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f(x) dy d\eta d\kappa$$

za manje od ε te analogna tvrdnja vrijedi za $\Pi_0 f(x)$. Nakon zamjene varijabli $\eta+\xi \mapsto \eta$, gornji izraz jednak je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{I_n\times(\xi+\omega_n)\times[0,1]} \sum_{|k|\le N} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}(\xi+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)dyd\eta d\kappa.$$

Primijetimo da je to, do na područje integracije, točno izraz koji aproksimira $\Pi_0 f(x)$ do na ε. Međutim, zbog toga što je za fiksne k i κ sumand u integrandu koji sadrži pločice sa $|\omega_P| = 2^k$ periodičan po η sa periodom $2^\kappa 2^k$, cijeli integrand je periodičan po η s periodom $2^\kappa 2^N$. Zbog toga za dovoljno velik n, prosjeci po pravokutnicima $I_n \times (\xi+\omega_n)$ i $I_n\times\omega_n$ razlikovat će se po volji malo i time je tvrdnja dokazana.

Dakle, za dokaz propozicije dovoljno je dokazati da je $\Pi_0 = \mathcal{F}_-$. U tu svrhu dovoljno je provjeriti da je Π_0 nenul operator koji zadovoljava uvjete propozicije 2.1.3. Ograničenost slijedi iz prethodnih razmatranja pa dokažimo komutiranje s translacijama.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada, kao i u prethodnom razmatranju, zbog uniformne konvergencije reda u integralu postoji dovoljno velik N tako da se $\Pi_0 f(x)$ razlikuje od

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \sum_{|k|\le N} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)dyd\eta d\kappa \tag{2.3}$$

za manje od ε, za svaki $x\in\mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\mathrm{T}_{-z}\Pi_0\mathrm{T}_z = \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \sum_{|k|\le N} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y-z}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_{y+z}\mathrm{M}_\eta f(x)dyd\eta d\kappa.$$

Zbog toga što je svaka funkcija u sumi unutar integrala za fiksan κ periodična s obzirom na y s periodom $2^{-\kappa}2^k$, vrijedi da je integrand periodična funkcija s obzirom na y s periodom $2^{-\kappa}2^N$. Prema tome, definicijski integral od $\Pi_0 f(x)$ sa odsječenom sumom razlikuje se od gornjega samo po području integracije, koje je u gore napisanom izrazu, uz zamjenu varijabli $y+z\mapsto y$ jednako $(I_n+z)\times\omega_n$. Koristeći periodičnost, puštanjem $n\to\infty$ zaključujemo da su integrali jednaki. Dakle, $|\mathrm{T}_{-z}\Pi_0\mathrm{T}_z f(x) - \Pi_0 f(x)| < 2\varepsilon$. Kako je $\varepsilon>0$ proizvoljan, puštanjem $\varepsilon\to 0$ zaključujemo da Π_0 komutira s translacijama.

Dokažimo komutiranje s dilatacijama. Neka je $\lambda > 0$ proizvoljan. Želimo dokazati $\mathrm{D}^2_\lambda\Pi_0\mathrm{D}^2_{\lambda^{-1}} = \Pi_0$. Lijeva strana je po definiciji jednaka

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \mathrm{D}^2_\lambda\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta \mathrm{D}^2_{\lambda^{-1}} f(x)dyd\eta d\kappa \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \mathrm{M}_{-\eta\lambda^{-1}}\mathrm{T}_{-\lambda y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}\lambda} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^\kappa\lambda^{-1}}\mathrm{T}_{\lambda y}\mathrm{M}_{\eta\lambda^{-1}} f(x)dyd\eta d\kappa.\end{aligned}$$

Nadalje, postoji $l \in \mathbb{Z}$ takav da je $\lambda \in [2^l, 2^{l+1})$ pa možemo zapisati $\lambda = 2^{l+\delta}$, gdje je $\delta \in [0,1)$. Koristeći (2.1) i zamjenu varijabli $(2^l y, 2^{-l}\eta) \mapsto (y, \eta)$, gornji izraz jednak je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K'_n|} \int_{K'_n \times [0,1]} \mathrm{M}_{-2^{-\delta}\eta} \mathrm{T}_{-2^{\delta}y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa+\delta}} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa-\delta}} \mathrm{T}_{2^{\delta}y} \mathrm{M}_{2^{-\delta}\eta} f(x) dy d\eta d\kappa,$$

gdje je $K'_n = 2^l I_n \times 2^{-l}\omega_n$. Rastavimo sada gornji integral na:

$$\int_{K'_n \times [0,\delta]} \mathrm{M}_{-2^{-\delta}\eta} \mathrm{T}_{-2^{\delta}y} \mathrm{D}^2_{2^{-(\kappa+1-\delta)}} \mathrm{D}^2_{2^1} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{-1}} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa+1-\delta}} \mathrm{T}_{2^{\delta}y} \mathrm{M}_{2^{-\delta}\eta} f(x) dy d\eta d\kappa$$
$$+ \int_{K'_n \times [\delta,1]} \mathrm{M}_{-2^{-\delta}\eta} \mathrm{T}_{-2^{\delta}y} \mathrm{D}^2_{2^{-(\kappa-\delta)}} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa-\delta}} \mathrm{T}_{2^{\delta}y} \mathrm{M}_{2^{-\delta}\eta} f(x) dy d\eta d\kappa.$$

Prvi integral korištenjem (2.1) i zamjenom varijabli $(2^{\delta}y, 2^{-\delta}\eta, \kappa + 1 - \delta) \mapsto (y, \eta, \kappa)$ prelazi u:

$$\int_{K''_n \times [1-\delta,1]} \mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa}} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f(x) dy d\eta d\kappa,$$

dok drugi integral zamjenom varijabli $(2^{\delta}y, 2^{-\delta}\eta, \kappa - \delta) \to (y, \eta, \kappa)$ prelazi u

$$\int_{K''_n \times [0,1-\delta]} \mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa}} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f(x) dy d\eta d\kappa,$$

gdje je $K''_n = \lambda I_n \times \lambda^{-1}\omega_n$. Odatle zbrajanjem, dijeljenjem sa $|K_n|$ i puštanjem limesa slijedi tražena tvrdnja.

Činjenica da jezgra od Π_0 sadrži sve funkcije kojima je nosač Fourierovre transformacije u $(0,\infty)$ je očita iz definicije. Naime, ako je $\mathrm{supp}\widehat{f} \subset (0,\infty)$ tada za sve η, y, κ i $P \in \overline{\boldsymbol{P}}$ zbog disjunktnosti nosača funkcija vrijedi

$$\langle \widehat{f}, \mathrm{T}_{-\eta} \mathrm{M}_y \mathrm{D}^2_{2^{\kappa}} \phi_P \rangle \mathbb{1}_{2^{-\kappa}\eta \in \omega_{2P}} = 0$$

pa preostaje dokazati samo da Π_0 nije nuloperator.

U tu svrhu dokazat ćemo da je $\langle \Pi_0 f, f \rangle > 0$ za $f := \mathrm{M}_{-0.1}\phi$. Iskoristimo opet da postoji dovoljno velik N tako da se $\Pi_0 f(x)$ razlikuje od (2.3) za manje od ε za svaki $x \in \mathbb{R}$. Koristeći već navedenu periodičnost integranda po y i η, postoji dovoljno velik n tako da se izraz (2.3) razlikuje od

$$\frac{1}{|K_n|} \int_{K_n \times [0,1]} \sum_{|k| \le N} \mathrm{M}_{-\eta} \mathrm{T}_{-y} \mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta} \mathrm{D}^2_{2^{\kappa}} \mathrm{T}_y \mathrm{M}_\eta f(x) dy d\eta d\kappa$$

za manje od ε za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zbog toga što je $f \in L^1$, to se $\langle \Pi_0 f, f\rangle$ razlikuje od

$$\frac{1}{|K_n|}\int_{\mathbb{R}}\int_{K_n\times[0,1]}\sum_{|k|\leq N}\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta}\mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)dyd\eta d\kappa f(x)dx$$

za manje od $2\varepsilon\|f\|_1$. Prema tome, ostaje dokazati pozitivnost gornjeg izraza. Tada puštanjem $\varepsilon \to 0$ zaključujemo traženu pozitivnost od $\langle \Pi_0 f, f\rangle$. U gornjem integralu Fubinijev teorem smijemo primijeniti jer se unutrašnji integrand razlikuje od f za manje od 2ε pa je zbog toga ograničen, a vrijedi i da je $f \in L^1$. Zbog toga je gornji integral jednak:

$$\frac{1}{|K_n|}\int_{K_n\times[0,1]}\Big\langle\sum_{|k|\leq N}\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta}\mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f, f\Big\rangle dyd\eta d\kappa.$$

Nadalje, zbog toga što operator $\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(k)}_{2^{-\kappa}\eta}\mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta$ predstavlja operator $A^{(k)}_0$ samo na dijadskoj rešetci koja je skalirana i translatirana, primijetimo iz geometrije nosača od ϕ da za svaki κ postoje intervali $I'_n \subset I_n$ i $\omega'_n \subset \omega_n$ takvi da je

$$\Big\langle\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}}A^{(0)}_{2^{-\kappa}\eta}\mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f, f\Big\rangle > 0$$

za $y \in I'_n$ i $\eta \in \omega'_n$. Naime, translatiramo i moduliramo pločicu $[0, 2^{-\kappa}) \times [0, 2^\kappa)$ u dijadskoj rešetci skaliranoj sa 2^κ i koristimo karakterizaciju od ϕ u frekvencijskom dijelu da im "poklopimo" nosače. Prema tome, cijeli integral je pozitivan i time smo dokazali da operator Π_0 nije nuloperator te time dokazali tvrdnju propozicije. □

Primijetimo da je operator Π_ξ zapravo integralni prosjek operatora $A_{2^{-\kappa}(\xi+\eta)}$. Zbog toga očekujemo da slaba ocjena maksimalnog operatora familije A_ξ povlači slabu ocjenu maksimalnog operatora familije Π_ξ. Precizno, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.1.7. *Neka je f Schwartzova funkcija. Pretpostavimo da je funkcija $\sup_\xi|A_\xi f|$ izmjeriva i da vrijedi*

$$\Big\|\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|A_\xi f|\Big\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|f\|_2, \tag{2.4}$$

tada vrijedi

$$\Big\|\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\Pi_\xi f|\Big\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|f\|_2.$$

Dokaz. Kao u dokazu izmjerivosti $\mathcal{C}f$ zaključujemo da je

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\Pi_\xi f(x)| = \sup_{\xi\in\mathbb{Q}}|\Pi_\xi f(x)|.$$

Neka je $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ enumeracija racionalnih brojeva. Tada za svaki $M \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\max_{m\le M} |\Pi_{q_m} f(x)| \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \max_{m\le M} \frac{1}{|K_n|} \left| \int_{K_n\times[0,1]} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}(q_m+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)\, dy d\eta d\kappa \right|.
\end{aligned}$$

Naime, za fiksan q_m, za svaki $x \in \mathbb{R}$ po točkovnoj konvergenciji vrijedi

$$\Pi_{q_m} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A^{(k)}_{2^{-\kappa}(q_m+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)\, dy d\eta d\kappa$$

pa je maksimum od konačnog broja limesa jednak limesu maksimuma. Odatle za $E \subset \mathbb{R}$ takav da je $|E| < \infty$ primjenom Fatouove leme i nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \max_{m\le M} |\Pi_{q_m} f(x)| \mathbb{1}_E dx \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \max_{m\le M} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} |\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(q_m+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)|\, dy d\eta d\kappa \mathbb{1}_E dx.
\end{aligned}$$

Međutim, sada je zadnji integral po pretpostavci manji ili jednak od

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\xi+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f(x)|\, dy d\eta d\kappa \mathbb{1}_E dx \\
&\lesssim \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} |E|^{\frac{1}{2}} \left\| \sup_{\xi} |\mathrm{M}_{-\eta}\mathrm{T}_{-y}\mathrm{D}^2_{2^{-\kappa}} A_{2^{-\kappa}(\xi+\eta)} \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f| \right\|_{L^{2,\infty}} dy d\eta d\kappa \\
&\lesssim \frac{1}{|K_n|} \int_{K_n\times[0,1]} |E|^{\frac{1}{2}} \left\| \mathrm{D}^2_{2^\kappa}\mathrm{T}_y\mathrm{M}_\eta f \right\|_2 dy d\eta d\kappa \\
&\lesssim \|f\|_2 |E|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku koristili dualnost slabe norme, a u trećem ogradu (2.4). Dualizacijom odatle slijedi

$$\left\| \max_{m\le M} |\Pi_{q_m} f| \right\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|f\|_2,$$

gdje implicitna konstanta ne ovisi o M. Sada zbog toga što je

$$\sup_{q_m} |\Pi_{q_m} f(x)| = \lim_{M\to\infty} \max_{m\le M} |\Pi_{q_m} f(x)|,$$

još jednom primjenom Fatouove leme slijedi da za $E \subset \mathbb{R}$ takav da je $|E| < \infty$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sup_{q_m} |\Pi_{q_m} f(x)| \mathbb{1}_E(x) dx &\leq \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \max_{m\leq M} |\Pi_{q_m} f| \mathbb{1}_E(x) dx \\ &\lesssim \lim_{M\to\infty} \left\| \max_{m\leq M} |\Pi_{q_m} f| \right\|_{L^{2,\infty}} |E|^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \lim_{M\to\infty} \|f\|_2 |E|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Odatle još jednom dualizacijom slijedi tvrdnja propozicije. □

Dakle, preostaje nam jedino dokazati ocjenu (2.4) i tome je posvećen ostatak rada. Međutim, trebamo još svesti ocjenu na pogodniji oblik.

Neka je $(\overline{\boldsymbol{P}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ familija konačnih podskupova od $\overline{\boldsymbol{P}}$, takvih da vrijedi:

1. Za svaki $P \in \overline{\boldsymbol{P}}_n$ vrijedi $2^{-n} \leq |I_P| \leq 2^n$,
2. $\overline{\boldsymbol{P}}_n \subset \overline{\boldsymbol{P}}_{n+1}$ za svaki $n \in N_0$,
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\boldsymbol{P}}_n = \overline{\boldsymbol{P}}$.

Po prethodnoj propoziciji o točkovnoj konvergenciji operatora A_ξ slijedi da za Schwartzovu funkciju f vrijedi

$$A_\xi f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_n} 1_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x).$$

Zbog toga, nadalje, vrijedi

$$\left\{x : \sup_\xi |A_\xi f(x)| > \lambda\right\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x : \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ k\leq n}} \Big| \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_k} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x) \Big| > \lambda\right\}$$

Promotrimo funkciju

$$\sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_k} 1_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x).$$

Iz konačnosti skupa P_k slijedi da je funkcija po dijelovima konstantna po ξ i jednaka 0 za $|\xi|$ dovoljno velik pa vidimo da je supremum na desnoj strani zapravo maksimum od konačno izmjerivih funkcija pa je zbog toga i funkcija $\sup_\xi |A_\xi f|$ izmjeriva. Nadalje, postoji izmjeriva funkcija $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}\\ k\leq n}} \Big| \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_k} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(\xi) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x) \Big| = \Big| \sum_{P\in\overline{\boldsymbol{P}}_n} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(N(x)) \langle f, \phi_P \rangle \phi_P(x) \Big|$$

Naime, zbog toga što je $\overline{\boldsymbol{P}}_n$ rastuća familija konačnih skupova, u točkama x u kojima se supremum postiže za neki $k < n$ broj $N(x)$ jednostavno definiramo kao neki dovoljno velik broj. Trik uvođenja funkcije koja točkama pridružuje vrijednost ξ za koje se supremum postiže naziva se "linearizacija supremuma" i prvi ga je uveo C. Fefferman u [1]. Dakle, preostaje dokazati da nejednakost

$$\left|\left\{x : \Big|\sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}_n} \mathbb{1}_{\omega_{2P}}(N(x))\langle f, \phi_P\rangle\phi_P(x)\Big| > \lambda\right\}\right| \lesssim \lambda^{-2}\|f\|_2^2 \tag{2.5}$$

vrijedi za proizvoljan $\lambda > 0$ jer će tada tražena slaba ocjena za $\sup_\xi |A_\xi f|$ slijediti po neprekidnosti mjere s obzirom na rastući niz događaja. Međutim, dualizacijom i primjenom nejednakosti trokuta, vidimo da je dovoljno dokazati

$$\sum_{P \in \boldsymbol{P}} |\langle f, \phi_P\rangle\langle\phi_P(\mathbb{1}_{\omega_{2P}} \circ N), \mathbb{1}_E\rangle| \lesssim \|f\|_2 |E|^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

za sve Schwartzove funkcije f, izmjerive funkcije N, izmjerive skupove E, takve da je $|E| < \infty$ i konačne podskupove $\boldsymbol{P}$ od $\overline{\boldsymbol{P}}$.

Kako je nejednakost homogena u f i invarijantna na prikladne simultane dilatacije f, N, E i $\boldsymbol{P}$ za faktor 2^n, $n \in \mathbb{Z}$, dovoljno je dokazati 2.6 uz pretpostavke $\|f\|_2 = 1$ i $\frac{1}{2} < |E| \leq 1$. Za fiksan E u nastavku dokaza definiramo:

$$E_P := E \cap \{x : N(x) \in \omega_P\}, \quad E_{2P} := E \cap \{x : N(x) \in \omega_{2P}\}.$$

2.2 Glavna ideja

Familiju pločica T zovemo *stablo* ako postoji pločica $P_T = I_T \times \omega_T$, koju nazivamo *vrh*, takva da je $P < P_T$ za svaku $P \in T$. Primijetimo da ne zahtijevamo da je vrh u stablu. Stablo sa vrhom $I_T \times \omega_T$ nazivamo j-stablom ako za svaki $P \in T$ vrijedi $\omega_{jT} \subset \omega_{jP}$, $j = 1, 2$.

Za sljedeće definicije prisjetimo se da je zadan skup $E \subset \mathbb{R}$, takav da je $|E| \leq 1$, Schwartzova funkcija f, takva da je $\|f\|_2 = 1$ i izmjeriva funkcija N. Za $\boldsymbol{P}$, konačan podskup od $\overline{\boldsymbol{P}}$ definirajmo:

$$\text{masa}(\boldsymbol{P}) := \sup_{P \in \boldsymbol{P}} \sup_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : P < P'} \int_{E'_P} w_{P'}(x)dx,$$

$$\text{energija}(\boldsymbol{P}) := \sup_T \left(|I_T|^{-1} \sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

gdje se sup u definiciji energije gleda po svim 2-stablima $T \subset \boldsymbol{P}$.

Tvrdnja ocjene (2.6) slijedit će iz sljedećih propozicija koje nam govore o dekompoziciji familija pločica s obzirom na masu.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $\boldsymbol{P}$ konačan skup pločica. Tada se $\boldsymbol{P}$ može napisati kao unija skupova $\boldsymbol{P}_{lagane}$ i $\boldsymbol{P}_{teške}$ tako da vrijedi:*

$$masa(\boldsymbol{P}_{lagane}) \leq 2^{-1} masa(\boldsymbol{P})$$

i $\boldsymbol{P}_{teške}$ je unija skupa stabala $\boldsymbol{T}$ takvih da je

$$\sum_{T \in \boldsymbol{T}} |I_T| \lesssim masa(\boldsymbol{P})^{-1}. \tag{2.7}$$

Propozicija 2.2.2. *Neka je $\boldsymbol{P}$ konačan skup pločica. Tada se $\boldsymbol{P}$ može napisati kao unija skupova $\boldsymbol{P}_{visoke}$ i $\boldsymbol{P}_{niske}$ tako da vrijedi:*

$$energija(\boldsymbol{P}_{niske}) \leq 2^{-1} masa(\boldsymbol{P})$$

i $\boldsymbol{P}_{visoke}$ je unija skupa $\boldsymbol{T}$ stabala takvih da je

$$\sum_{T \in \boldsymbol{T}} |I_T| \lesssim energija(\boldsymbol{P})^{-2}. \tag{2.8}$$

Propozicija 2.2.3. *Za stablo pločica T vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, \mathbb{1}_{E_{2P}} \rangle| \lesssim energija(T) masa(T) |I_T|. \tag{2.9}$$

Navedene propozicije dokazat ćemo u sljedeća 2 poglavlja, a u nastavku ovog poglavlja dokazat ćemo da one impliciraju ograničenost Carlesonovog operatora. Za danu konačnu kolekciju pločica $\boldsymbol{P}$ koristimo propozicije 2.2.1 i 2.2.2 za rastav skupa $\boldsymbol{P}$ u skupove $\boldsymbol{P}_n$, gdje n ide po nekom konačnom skupu cijelih brojeva, za koje vrijedi:

$$\text{masa}(\boldsymbol{P}_n) \leq 2^{2n} \quad , \quad \text{energija}(\boldsymbol{P}_n) \leq 2^n \tag{2.10}$$

i $\boldsymbol{P}_n$ je unija skupa stabala $\boldsymbol{T}_n$ za koji vrijedi

$$\sum_{T \in \boldsymbol{T}_n} |I_T| \lesssim 2^{-2n}. \tag{2.11}$$

Naime, inicijalno $\boldsymbol{P}$ zadovoljava ocjene (2.10) za neki n dovoljno velik. Ako je masa($\boldsymbol{P}$) veća od $2^{2(n-1)}$, primijenimo dva puta propoziciju 2.2.1 da rastavimo $\boldsymbol{P}$ na $\boldsymbol{P}_{\text{lagane}}$ i $\boldsymbol{P}_{\text{teške}}$. Dodajmo $\boldsymbol{P}_{\text{teške}}$ u $\boldsymbol{P}_n$ i zamijenimo $\boldsymbol{P}$ sa $\boldsymbol{P}_{lagane}$. Nadalje, ako je energija$(P) > 2^{n-1}$, rastavimo pomoću propozicije 2.2.2 $\boldsymbol{P}$ na $\boldsymbol{P}_{\text{visoke}}$ i $\boldsymbol{P}_{\text{niske}}$. Dodajmo $\boldsymbol{P}_{\text{visoke}}$ u $\boldsymbol{P}_n$ i zamijenimo $\boldsymbol{P}$ sa $\boldsymbol{P}_{\text{niske}}$. Tada $\boldsymbol{P}$ zadovoljava 2.10 sa $n-1$ umjesto n i nastavljamo postupak. Algoritam očito ima konačno koraka jer je $\boldsymbol{P}$ konačan.

Konačno, iz propozicije 2.2.3 i opservacije da je masa proizvoljne kolekcije pločica zbog 1-dilatacije težinske funkcije u definiciji ograničena univerzalnom konstantnom C slijedi

$$\sum_{T \in \boldsymbol{T}} \sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, \mathbb{1}_{E_{2P}} \rangle| \lesssim 2^n \min(C, 2^{2n}) 2^{-2n}.$$

Kako je desna strana sumabilna po $\mathbb{Z}$, vrijedi:

$$\sum_{P \in \boldsymbol{P}} |\langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, \mathbb{1}_{E_{2P}} \rangle| \lesssim 1.$$

Odatle, zbog pretpostavki $\|f\|_2 = 1$ i $|E| \sim 1$, slijedi (2.6) i time je dokazan teorem 1.2.1.

2.3 Dekompozicija po masi

U ovom odjeljku dokazat ćemo propoziciju 2.2.1 koju koristimo u prethodnom dokazu.

Dokaz propozicije 2.2.1. Neka je $\mu = \text{masa}(\boldsymbol{P})$ i neka je $\boldsymbol{P}_{\text{teške}}$ skup svih pločica $P \in \boldsymbol{P}$ takvih da je masa$(P) > 2^{-1}\mu$. Svakoj takvoj pločici možemo pridružiti pločicu $P'(P)$, takvu da je $P < P'(P)$ i vrijedi:

$$\int_{E_{P'(P)}} w_{P'(P)}(x)dx > 2^{-1}\mu$$

Neka je $\boldsymbol{P}'$ skup elemenata u $\{P'(P) : P \in \boldsymbol{P}_{\text{teške}}\}$ koji su maksimalni s obzirom na parcijalni uređaj $<$. Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\sum_{P' \in \boldsymbol{P}'} |I_{P'}| \lesssim \mu^{-1}$$

jer se sve pločice u $\boldsymbol{P}_{\text{teške}}$ mogu grupirati u stabla sa vrhovima u $\boldsymbol{P}'$.

Tvrdimo da postoji $c > 0$, neovisan o familiji $\boldsymbol{P}$, takav da za svaki $P \in \boldsymbol{P}'$ postoji $n \in \mathbb{N}_0$ tako da vrijedi

$$|E_P \cap 2^n I_P| \geq c 2^{2n} \mu |I_P|. \tag{2.12}$$

Naime, ako za $c > 0$ postoji $P \in \boldsymbol{P'}$ za koji ne vrijedi tvrdnja, iz ocjene na masu i gornje ograde funkcije w_P na intervalu $2^n I_p \setminus 2^{n-1} I_p$ vrijedi:

$$\begin{aligned} 2^{-1}\mu &< \int_{E_P \cap I_P} w_P(x)dx + \sum_{n\geq 1} \int w_P(x) \mathbb{1}_{E_P \cap 2^n I_p \setminus 2^{n-1} I_p} dx \\ &\leq c\mu + \sum_{n\geq 1} c\mu 2^{2n} (3/2 + 2^{n-1})^{-\nu}. \end{aligned}$$

Kako je za $\nu > 2$ desna strana sumabilna, iz gornjeg izraza slijedi donja ocjena na $c > 0$ za koje tvrdnja ne vrijedi. Dakle, tvrdnja vrijedi za neki dovoljno malen $c > 0$.

Za $k \geq 0$ sa $\boldsymbol{P}_k$ označimo skup svih pločica za koje nejednakost (2.12) vrijedi baš za $n = k$. Tada iz prethodne tvrdnje slijedi $\boldsymbol{P'} = \bigcup_{k\geq 0} \boldsymbol{P}_k$. Za svaki $P \in \boldsymbol{P}_k$ promotrimo prošireni pravokutnik $(2^k I_P) \times \omega_P$. Birajmo redom elemente iz $\boldsymbol{P}_k$ sa maksimalnim I_P koji imaju prošireni pravokutnik disjunktan sa proširenim pravokutnicima već odabranih pločica. U trenutku kada više ni jedan pravokutnik nije moguće izabrati, tada svaku pločicu $P' \in \boldsymbol{P}_k$ možemo pridružiti nekoj odabranoj pločici P tako da je $|I'_P| \leq |I_P|$ i da se prošireni pravokutnici od P i P' sijeku. Kako su pločice u $\boldsymbol{P}_k$ disjunktne (jer su u $\boldsymbol{P'}$ samo maksimalne pločice), vidimo da su intervali $I_{P'}$ pločica P' koje su pridružene istoj odabranoj pločici P disjunktni i sadržani u $2^{k+2} I_P$. Naime, frekvencijski intervali svih pločica pridruženih pločici P sadrže ω_P pa zbog toga što su pločice P' međusobno disjunktne, vrijedi da su intervali $I_{P'}$ disjunktni. Tvrdnja o sadržanosti u intervalu $2^{k+2} I_P$ slijedi iz činjenice da je $I_{P'} \leq I_P$. Odatle vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{P\in \boldsymbol{P}_k} |I_P| \leq 2^{k+2} \sum_{P \text{ odabrani}} |I_P| &\lesssim 2^{-k}\mu^{-1} \sum_{P \text{ odabrani}} |E_p \cap 2^k I_P| \\ &= 2^{-k}\mu^{-1} \left| E \cap \bigcup_{P \text{ odabrani}} (2^k I_p) \right| \leq 2^{-k}\mu^{-1} |E| \\ &\leq 2^{-k}\mu^{-1}. \end{aligned}$$

Sumiranjem po $k \geq 0$ dobivamo traženu ocjenu. □

2.4 Dekompozicija po energiji

U ovom odjeljku dokazujemo dekompoziciju pločica s obzirom na energiju.

Dokaz propozicije 2.2.2. Neka je $\varepsilon = \text{energija}(\boldsymbol{P})$. Za 2-stablo T označimo sa

$$\Delta(T) := \left(|I_T|^{-1} \sum_{P\in T} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

energiju 2-stabla T. Konstruirat ćemo induktivno kolekciju $\boldsymbol{T}$ čija će unija biti $\boldsymbol{P}_{\text{visoke}}$.

Ako postoji 2-stablo T takvo da je $\Delta(T) \geq 2^{-1}\varepsilon$, odaberimo ono koje ima $c(\omega_T)$ minimalan među svim takvima. Neka je T^1 maksimalno stablo (s obzirom na inkluziju) sa vrhom $I_T \times \omega_T$.

Dodajmo T^1 u $\boldsymbol{T}$ i dodajmo T u $\boldsymbol{T}_2$, kolekciju koju paralelno definiramo i koju ćemo koristiti kasnije radi boljih svojstava disjunktnosti od $\boldsymbol{T}$. Uklonimo T^1 iz $\boldsymbol{P}$ i ponavljamo korak dok god postoji 2-stablo sa $\Delta(T) \geq 2^{-1}\varepsilon$. Kad takvog stabla više nema, definiramo da je $\boldsymbol{P}_{\text{niske}} = \boldsymbol{P}$. Uočimo da je energija$(\boldsymbol{P}_{\text{niske}}) \leq 2^{-1}\varepsilon$ jer u $\boldsymbol{P}_{\text{niske}}$ ne postoji nijedno 2-stablo s energijom većom od $2^{-1}\varepsilon$.

Neka su T i T' različita stabla u $\boldsymbol{T}_2$ i neka je $P \in T$ i $P' \in T'$. Ako je $\omega_P \subset \omega_{1P'}$, tada je $I_{P'} \cap I_T = \emptyset$. Naime, primijetimo da je $c(\omega_T) < c(\omega_{T'})$ zbog toga što je $c(\omega_T)$ sadržano u $\omega_P \subset \omega_{1P'}$, a $c(\omega_{T'})$ je u $\omega_{2P'}$ pa znači da je stablo T izabirano prije stabla T'. Međutim, kad bi $I_{P'}$ bio podskup od I_T (ne može biti nadskup zbog toga što je $\omega_T \subset \omega_P \subset \omega_{1P'}$), tada bi I'_P bio odabran u T^1 pa ne bi mogao biti u T', što je suprotno pretpostavci.

Ostaje za dokazati da vrijedi:

$$\varepsilon^2 \sum_{T \in \boldsymbol{T}_2} |I_T| \lesssim 1.$$

Neka je $\overline{\boldsymbol{P}}$ unija svih 2-stabala T u $\boldsymbol{T}_2$. Tada iz činjenice da je energija svakog stabla T manja ili jednaka ε, vrijedi:

$$\varepsilon^2 \sum_{T \in \boldsymbol{T}_2} |I_T| \lesssim \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2. \tag{2.13}$$

Nadalje, iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti i pretpostavke $\|f\|_2 = 1$ vrijedi:

$$\sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 = \Big\langle \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} \langle f, \phi_P \rangle \phi_P, f \Big\rangle \leq \Big\| \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle| \phi_P \Big\|_2. \tag{2.14}$$

Primijetimo sada da je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$\Big\| \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle| \phi_P \Big\|_2^2 \lesssim \sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2. \tag{2.15}$$

Naime, kvadriranjem (2.14) i korištenjem prethodne ocjene slijedi da je tada desna strana u (2.13) ograničena konstantom. Odatle slijedi tražena ocjena.

Lijeva strana u (2.15) jednaka je:

$$\sum_{P, P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_P = \omega_{P'}} |\langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle \langle \phi_{P'}, f \rangle| \tag{2.16}$$

$$+ 2 \sum_{P, P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_P \subset \omega_{1P'}} |\langle f, \phi_P \rangle \langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle \langle \phi_{P'}, f \rangle|, \tag{2.17}$$

gdje smo koristili simetriju i činjenicu da je $\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle = 0$ kad god ω_{1P} i $\omega_{1P'}$ nisu sadržani jedan u drugome.

Ocijenimo manji od brojeva $|\langle f, \phi_P \rangle|$, $|\langle f, \phi_{P'} \rangle|$ većim pa korištenjem simetrije slijedi da je (2.16) manje od konstante pomnožene s:

$$\sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_{P'} = \omega_P} |\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle|,$$

što je, nadalje, zbog leme 2.1.1 manje ili jednako od

$$\sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_{P'} = \omega_P} \|w_P \mathbb{1}_{I_{P'}}\|_1.$$

Zbog toga što su intervali I_P i $I_{P'}$ za pločice sa $\omega_{P'} = \omega_P$ disjunktni, unutrašnju sumu možemo kao i u 2.1.4 ocijeniti sa $\|w_P\|_1 \lesssim 1$ i time je dokazana ocjena za (2.16).

Sumand (2.17) možemo koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost ocijeniti sa:

$$\begin{aligned} &\sum_{P \in \overline{\boldsymbol{P}}} |\langle f, \phi_P \rangle| \sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_P \subset \omega_{1P'}} |\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle \langle \phi_{P'}, f \rangle| \\ &\qquad \leq \sum_{T \in \boldsymbol{T_2}} \left(\sum_{P \in T} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} H(T)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \sum_{T \in \boldsymbol{T_2}} |I_T|^{\frac{1}{2}} H(T)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

gdje je:

$$H(T) := \sum_{P \in T} \left(\sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_P \subset \omega_{1P'}} |\langle \phi_P, \phi_{P'} \rangle \langle \phi_{P'}, f \rangle| \right)^2$$

Primijetimo da ako dokažemo da vrijedi $H(T) \lesssim \varepsilon^2 |I_T|$ za svako stablo $T \in \boldsymbol{T_2}$, to dokazuje propoziciju 2.2.2. Naime, u tom slučaju je (2.17) do na umnožak s konstantom ograničen s $\varepsilon^2 \sum_{T \in \boldsymbol{T_2}} |I_T|$, što još jednom primjenom ocjene (2.13) dokazuje (2.15) i time završava dokaz propozicije.

Međutim, iz leme 2.1.1 i ocjene na energiju za svaku pločicu P' u $\overline{\boldsymbol{P}}$ (koja je sama po sebi 2-stablo) vrijedi:

$$H(T) \lesssim \varepsilon^2 \sum_{P \in T} |I_P| \left(\sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}} : \omega_P \subset \omega_{1P'}} \|w_P \mathbb{1}_{I_{P'}}\|_1 \right)^2.$$

Za fiksni P, intervali $I_{P'}$ za koje vrijedi $\omega_P \subset \omega_{1P'}$ su disjunktni s I_T zbog iz komentara na početku dokaza, ali su i u parovima disjunktni. Naime, ako je su $P' \neq P''$ dvije pločice sa gornjim svojstvom u istom 2-stablu T', tada je $\omega_{P'} = \omega_{P''}$ jer im i gornja i donja polovica imaju presjek. Međutim, to znači da su im vremenski intervali disjunktni. S druge strane, ako su P' i P'' u različitim stablima, T' i T'', onda ako vrijedi $|\omega_{P'}| = |\omega_{P''}|$, tada opet vrijedi $\omega_{P'} = \omega_{P''}$ jer obje sadrže ω_P pa su im vremenski intervali disjunktni. U slučaju da je $|\omega_{P'}| < |\omega_{P''}|$, tada mora vrijediti $\omega_{P'} \subset \omega_{1P''}$ pa disjunktnost slijedi iz komentara na početku dokaza.

Iz prethodnog sada slijedi:

$$\sum_{P' \in \overline{\boldsymbol{P}}: \omega_P \subset \omega_{2P'}} \left\| w_P \mathbb{1}_{I_{P'}} \right\|_1 \leq \| w_P \mathbb{1}_{T^c} \|.$$

Nadalje, za svaki $x \in I_T$ postoji za fiksnu duljinu $|I_P|$ točno jedan $P \in T$ takav da je $x \in I_P$ (zbog toga što im se svima frekvencijski intervali sijeku) pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{P \in T} |I_P| \| w_P \mathbb{1}_{T^c} \|_1^2 \leq \sum_{P \in T} |I_P| \| w_P \mathbb{1}_{T^c} \|_1 \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{P \in T : |I_P| = 2^{-k} |I_T|} |I_P| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_T^c}(x) T_{c(I_P)} D^1_{2^{-k}|I_T|} w(x) dx \\
&= \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_T^c}(x) \sum_{P \in T : |I_P| = 2^{-k} |I_T|} |I_P| D^1_{|I_P|} w(x - c(I_P)) dx,
\end{aligned}$$

gdje prva nejednakost vrijedi zbog $\|w_P\|_1 < 1$. Nadalje, zbog toga što je funkcija w konveksna na $[0, \infty)$ i $(-\infty, 0]$ i $x \in I_T^c$, Jensenova nejednakost u integralnom obliku povlači da je zadnji izraz manji ili jednak od

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_T^c}(x) \sum_{P \in T : |I_P| = 2^{-k} |I_T|} \int_{I_P} D^1_{2^{-k}|I_T|} w(x - y) dy dx \\
&= \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_T^c}(x) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_T}(y) D^1_{2^{-k}|I_T|} w(x - y) dy dx.
\end{aligned}$$

Koristeći Fubinijev teorem posljednji izraz je jednak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 0} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_T}(x - y) D_{2^{-k}|I_T|} w(y) \mathbb{1}_{I_T}(x) dy dx \\
&= \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \left(y \mathbb{1}_{|y| \leq |I_T|} + |I_T| \mathbb{1}_{y > |I_T|} \right) D^1_{2^{-k}|I_T|} w(y) dy \\
&\lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{-k} |I_T| \lesssim |I_T|.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo traženu ogradu na $H(T)$ i time je završen dokaz propozicije 2.2.2.

□

2.5 Ocjena stabla

U ovom odjeljku dokazat ćemo ocjenu stabla i time dovršiti dokaz ocjene Carlesonovog operatora. Međutim, za to nam je potrebna sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.5.1. *Za $f \in L^1$ vrijedi*

$$\left|f * \mathrm{D}^1_\lambda w(x)\right| \lesssim M_\lambda f(x),$$

gdje je

$$M_\lambda f(x) := \sup_{r>\lambda} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy$$

"odsječena" Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija.

Dokaz. Fiksirajmo x i označimo $I := (x-\lambda, x+\lambda)$. Rastavljanjem domene na disjunktnu uniju, $\mathbb{R} = I \cup \bigcup_{k\geq 0}(2^{k+1}I \setminus 2^k I)$ i korištenjem L^∞ ocjena funkcije $D^1_\lambda w(x)$ na svakom dijelu imamo:

$$\begin{aligned}
\left|f * \mathrm{D}^1_\lambda w(x)\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\int_I |f(y)| dy + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda}(1+2^k)^{-\nu} \int_{2^{k+1}I\setminus 2^k I} |f(y)| dy \\
&\leq 2\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)| dy + \sum_{k\geq 0} 2^{k+2}(1+2^k)^{-\nu} \frac{1}{|2^{k+1}I|}\int_{2^{k+1}I} |f(y)| dy \\
&\lesssim M_\lambda f(x) + \sum_{k\geq 0} 2^{-k} M_\lambda f(x) \\
&\lesssim M_\lambda f(x).
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Konačno, spremni smo za dokazivanje ocjene stabla.

Dokaz ocjene (2.9). Označimo radi kraćeg zapisa $\varepsilon = \text{energija}(T)$ i $\mu = \text{masa}(T)$.

Neka je $\mathcal{J}$ kolekcija svih maksimalnih intervala takvih da $3J$ ne sadrži nijedan I_P za $P \in T$. Tada je $\mathcal{J}$ particija od $\mathbb{R}$. Naime, kako u stablu imamo konačno pločica, to postoji $\beta = \min_{P\in T} |I_P| > 0$. Ako je J dijadski interval veličine $2^{-2}\beta$, tada $3J$ ne sadrži ni jedan I_P. Prema tome, svaki se realan broj nalazi u nekom dijadskom intervalu koji ne sadrži ni jedan I_P pa se nalazi i u nekom maksimalnom takvom. Kako je familija maksimalnih dijadskih intervala disjunktna, $\mathcal{J}$ čini particiju od $\mathbb{R}$.

Neka su ϵ_P kompleksni brojevi modula 1 takvi da vrijedi

$$\sum_{P\in T} |\langle f, \phi_P\rangle\langle \phi_P, \mathbb{1}_{E_{2P}}\rangle| = \int_{\mathbb{R}} \sum_{P\in T} \epsilon_P \langle f, \phi_P\rangle \phi_P \mathbb{1}_{E_{2P}}.$$

Zbog toga što familija $\mathcal{J}$ čini particiju od $\mathbb{R}$, desnu stranu gornjeg izraza možemo ograničiti koristeći nejednakost trokuta sa

$$\sum_{J\in\mathcal{J}} \sum_{P\in T:|I_P|\leq|J|} \left\| \langle f, \phi_P\rangle \phi_P \mathbb{1}_{E_{2P}} \right\|_{L^1(J)} + \tag{2.18}$$

$$\sum_{J\in\mathcal{J}} \left\| \sum_{P\in T:|I_P|>|J|} \epsilon_P \langle f, \phi_P\rangle \phi_P \mathbb{1}_{E_{2P}} \right\|_{L^1(J)}. \tag{2.19}$$

Ograničimo prvo izraz (2.18). Za svaki $J \in \mathcal{J}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\| \langle f, \phi_P\rangle \phi_P \mathbb{1}_{E_{2P}} \right\|_{L^1(J)} &\leq \varepsilon |I_P|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\phi_P(x)| \mathbb{1}_{E_{2P}\cap J}(x) dx \\
&\lesssim \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{|x - c(I_P)|}{|I_P|}\right)^{-2\nu} \mathbb{1}_{E_{2P}\cap J}(x) dx \\
&\lesssim \varepsilon |I_P| (1 + \mathrm{dist}(I_P, J)|I_P|^{-1})^{-\nu} \int_{\mathbb{R}} w_P(x) \mathbb{1}_{E_P}(x) dx \\
&= \varepsilon\mu |I_P| (1 + \mathrm{dist}(I_P, J)|I_P|^{-1})^{-\nu},
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili ocjenu energije za pločicu P, u drugoj činjenicu da Schwartzova funkcija pada brže od bilo koje potencije polinoma i u trećem retku činjenicu da integriramo samo po skupu J koji je udaljen od I_P. Fiksirajmo cijeli broj k takav d je $2^k \leq |J|$ i promotrimo sve $P \in T$ takve da je $|I_P| = 2^k$. Tada su intervali I_P u parovima disjunktni (jer je $\omega_T \subset \omega_P$ za svaki $P \in T$), disjunktni s J po definiciji skupa J i sadržani u I_T pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in T:|I_P|=2^{-k}} |I_P| (1 + \mathrm{dist}(I_P, J)|I_P|^{-1})^{-\nu} &\lesssim \sum_{P\in T:|I_P|=2^{-k}} |I_P| (2 + \mathrm{dist}(I_P, J)|I_P|^{-1})^{-\nu} \\
&\lesssim \int_{I_T} \left(1 + \frac{\mathrm{dist}(x, J)}{|I_P|}\right)^{-\nu} dx \\
&\lesssim 2^k \left(1 + \mathrm{dist}(I_T, J)|I_T|^{-1}\right)^{-\nu'}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem po svim $2^k \leq |J|$ dobijemo da je (2.18) manje od:

$$2\varepsilon\mu \sum_{J\in\mathcal{J}} |J| \left(1 + \mathrm{dist}(I_T, J)|I_T|^{-1}\right)^{-\nu}.$$

Maksimalnost od J povlači da je $\mathrm{dist}(x, I_T) \sim |J|$ za $x \in J$ pa posljednji izraz možemo ocijeniti s:

$$C\varepsilon\mu \sum_{J\in\mathcal{J}} \int_J \left(1 + \mathrm{dist}(x, I_T)|I_T|^{-1}\right)^{-\nu} \lesssim \varepsilon\mu |I_T|$$

i time smo dokazali traženu ogradu za (2.18).

Ograničimo sada (2.19). Pretpostavljamo da sumiramo samo po onim $J \in \mathcal{J}$ za koje postoji P tako da je $|J| < |I_P|$ (u suprotnom je pribrojnik jednak 0). Tada vrijedi $J \subset 3I_T$ zbog maksimalnosti od J i $|J| < |I_T|$ za svaki J koji se pojavljuje u sumi.

Fiksirajmo $J \in \mathcal{J}$ i primijetimo da je

$$G_J := J \cap \bigcup_{P \in T : |I_P| > |J|} E_{2P}$$

mjere $\lesssim \mu|J|$, gdje implicitna konstanta ne ovisi o J. Naime, neka je J' dijadski roditelj od J. Po maksimalnosti od J, $3J'$ sadrži neki $P \in T$. Neka je P' pločica takva da je $I_{P'} = |J'|$ i $P < P' < I_T \times \omega_T$. Tada je očito $G_J \subset J \cap E_{P'}$ (jer $\omega_{P'}$ sadrži sve ω_P za P za koje je $|I_P| > |J|$), a kako je masa$(P) \leq \mu$ i $J \subset 3I_{P'}$, vrijedi:

$$\frac{|J \cap E_{P'}|}{|J|} = \frac{1}{|J|} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_J(x) \mathbb{1}_{E_{P'}}(x) dx \leq 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{\nu} \int_{\mathbb{R}} w_{P'}(x) \mathbb{1}_{E_{P'}}(x) dx \lesssim \mu.$$

Neka je T_2 2-stablo svih $P \in T$ takvih da je $\omega_{2T} \subset \omega_{2P}$ i neka je $T_1 = T \setminus T_2$. Definirajmo za $j = 1, 2$

$$F_{jJ} := \sum_{P \in T_j : |I_P| > |J|} \epsilon_P \langle f, \phi_P \rangle \mathbb{1}_{E_{2P}}.$$

Ako su P i P' u 1-stablu T_1 i različito su skalirani, tada su skupovi ω_{2P} i $\omega_{2P'}$ disjunktni pa su disjunktni i skupovi E_{2P} i $E_{2P'}$. Prema tome, promatrajući različito skalirane pločice odvojeno i koristeći ogradu na energiju svake pločice P, vrijedi $\|F_{1J}\|_{L^\infty} \lesssim \varepsilon$ pa zaključujemo:

$$\|F_{1J}\|_{L^1(J)} \lesssim \varepsilon |G_J| \lesssim \epsilon \mu |J|.$$

Sumirajući po disjunktnim intervalima $J \subset 3I_T$ dobijemo traženu ocjenu za T_1 dio od (2.19).

Fiksirajmo x i pretpostavimo da je $F_{2J}(x)$ različito od 0. Kako su intervali ω_{2P} za $P \in T_2$ ugniježđeni, znamo da postoji najveći i najmanji interval, ω_+ i ω_-, u ovisnosti o x oblika ω_P i ω_{2P}, respektivno, za neke $P \in T_2$ takve da je $x \in E_{2P}$ i $|I_P| > |J|$. Dakle, možemo $F_{2J}(x)$ zapisati pomoću sljedeće funkcije, koju bolje znamo kontrolirati:

$$\begin{aligned} F_{2J}(x) &= \sum_{P \in T_2 : |\omega_-| < \omega_P \leq |\omega_+|} \epsilon_P \langle f, \phi_P \rangle \phi_P \\ &= \sum_{P \in T_2} \epsilon_P \langle f, \phi_P \rangle \left(\phi_P * \left(M_{c(\omega_+)} D^1_{0.18|\omega_+|^{-1}} \phi - M_{c(\omega_-)} D^1_{0.18|\omega_-|^{-1}} \phi \right) \right)(x), \end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog $\mathbb{1}_{\omega_\pm} \leq T_{c(\omega_\pm)}\mathrm{D}^\infty_{0.18^{-1}|\omega_\pm|}\widehat{\phi} \leq \mathbb{1}_{1.1\omega\pm}$ i lokaliziranosti Fourierovih transformacija od ϕ_P

Primijetimo da vrijedi $|\omega_-|^{-1} > |\omega_+|^{-1} > |J|$ u svakoj točki od J. U slučaju kad je $0.18|J| < 0.18|\omega_+|^{-1} \leq |J|$, vrijedi $D^1_{0.18|\omega_+|^{-1}}\phi \lesssim D^1_{|J|}\phi$ pa koristeći 2.5.1 imamo:

$$\begin{aligned}\left|\Big(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\Big) * D^1_{0.18|\omega_+|^{-1}}\phi(x)\right| &\lesssim M_{|J|}\left(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\right)(x)\\ &\leq \sup_{I\supset J}\frac{1}{|I|}\int_I\Big|\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P(z)\Big|dz,\end{aligned}$$

dok u slučaju kad je $0.18|\omega_+|^{-1} > |J|$, koristeći lemu 2.5.1 imamo

$$\begin{aligned}\left|\Big(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\Big) * D^1_{0.18|\omega_+|^{-1}}\phi(x)\right| &\lesssim M_{0.18|\omega_+|^{-1}}\left(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\right)(x)\\ &\leq \sup_{I\supset J}\frac{1}{|I|}\int_I\Big|\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P(z)\Big|dz.\end{aligned}$$

Analogne nejednakosti vrijede za $0.18|\omega_-|^{-1}$ pa zaključujemo da je $F_{2J}(x)$ za svaki $x \in J$ ograničeno s

$$C\sup_{I\supset J}\frac{1}{|I|}\int_I\Big|\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P(z)\Big|dz,$$

što je konstanta na J.

Međutim F_{2J} ima nosač sadržan u G_J, što je skup mjere $\lesssim \mu|J|$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{J\in\mathcal{J}:J\subset 3I_T}\|F_{2J}\|_{L^1(J)} &\lesssim \sum_{J\in\mathcal{J}:J\subset 3I_T}\mu|J|\sup_{I\supset J}\frac{1}{|I|}\int_I\Big|\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P(z)\Big|dz\\ &\lesssim \mu\left\|M\left(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\right)\right\|_{L^1(3I_T)}\\ &\leq \mu\|\mathbb{1}_{3I_T}\|_2\left\|M\left(\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\right)\right\|_2\\ &\lesssim \mu|I_T|^{\frac{1}{2}}\left\|\sum_{P\in T_2}\epsilon_P\langle f,\phi_P\rangle\phi_P\right\|_2,\end{aligned}$$

gdje je M Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija. U gornjem nizu nejednakosti u prvom smo retku koristili prethodnu ocjenu, u drugom činjenicu iz uvoda da je necentrirana Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija ograničena Hardy-Littlewoodovom maksimalnom funkcijom. U trećem retku koristili smo Cauchy-Schwarzovu nejednakost, a u zadnjem retku Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem.

Primijetimo sad da su za različito skalirane P i P' intervali ω_{1P} i $\omega_{1P'}$ disjunktni pa su funkcije ϕ_P i $\phi_{P'}$ ortogonalne. Dakle, L^2 normu u posljednjem izrazu možemo kao i (2.16) ograničiti sa:

$$C \left(\sum_{P \in T_2} |\langle f, \phi_P \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim |I_T|^{\frac{1}{2}} \varepsilon,$$

gdje smo u zadnjoj nejednakosti još jednom iskoristili gradu na energiju. Uvrštavanjem ocjene u prethodni izraz dobivamo konačno da je i (2.19) ograničeno sa $C\varepsilon\mu|I_T|$ i time je dovršen dokaz propozicije. □

Dokazom prethodne propozicije kompletiran je dokaz Carlesonovog teorema.

Bibliografija

[1] C. Fefferman: *Pointwise convergence of Fourier series.* Ann. of Math. (2), 98:551–571, 1973.

[2] G. B. Folland: *Real analysis, Modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[3] V. Kovač: *Singularni integrali.* Neobjavljena skripta, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2014.

[4] M. Lacey: *Carleson's theorem: proof, complements, variations.* Publ. Mat., 48(2):251–307, 2004.

[5] M. Lacey i C. Thiele: *A proof of boundedness of the Carleson operator.* Math. Res. Lett., 7(4):361–370, 2000.

Sažetak

U ovom radu u potpunosti je iznesen dokaz jednog od fundamentalnih teorema harmonijske analize — Carlesonovog teorema o Fourierovom redu. U prvom dijelu koristeći standardne tehnike harmonijske analize teorem se svodi na dokaz slabe ocjene izvjesnog maksimalnog operatora, a zatim se u drugom dijelu dokazuje slaba ograničenost tog maksimalnog operatora prema radu M. Laceya i C. Thielea.

Summary

In this thesis, the proof of one of the fundamental theorems of harmonic analysis — Carleson's theorem on Fourier series — is fully presented. In the first part, using the standard techniques of harmonic analysis, the problem is reduced to the weak bound for a certain maximal operator. Then, in the second part, the weak boundedness of this maximal operator is proved following the article of M. Lacey and C. Thiele.

Životopis

Rođen sam 20. rujna 1994. u Rijeci, gdje završavam osnovnu školu i osnovnu glazbenu školu. Nakon toga upisujem Gimnaziju Andrije Mohorovičića u Rijeci. Tijekom osnovne i srednje škole osvojio sam nekoliko nagrada na državnim natjecanjima, a najveći uspjeh mi je sudjelovanje na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 2013. godine, gdje sam osvojio počasnu pohvalu. Iste godine upisujem preddiplomski inženjerski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom studiranja nastavio sam se natjecati na studentskim natjecanjima, a najveći uspjeh mi je prva nagrada na međunarodnom studentskom natjecanju iz matematike IMC 2014. godine. 2015. godine izdana je knjiga "Olympiad inequalities" izdavačke kuće GIL Publishing House, u kojoj sam sudjelovao kao koautor na poziv rumunjskog profesora Mircea Lascua. Diplomski studij teorijske matematike upisujem 2016. godine, tijekom kojeg se usmjeravam na učenje tehnika harmonijske analize, kojom se planiram baviti i u budućnosti.