Asimptota i asimptotsko ponašanje - didaktička transpozicija objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj

Katalenić, Ana

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ana Katalenić

Asimptota i asimptotsko ponašanje – didaktička transpozicija objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

Faculty of Science

Department of Mathematics

Ana Katalenić

Asymptote and asymptotic behavior – didactic transposition in general secondary education in Croatia

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2017

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Matematički odsjek

Ana Katalenić

Asimptota i asimptotsko ponašanje – didaktička transpozicija objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj

DOKTORSKI RAD

Mentorice:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

Faculty of Science
Department of Mathematics

Ana Katalenić

Asymptote and asymptotic behavior – didactic transposition in general secondary education in Croatia

DOCTORAL THESIS

Supervisors:
Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija
Prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2017

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Ana Katalenić, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom: *Asimptota i asimptotsko ponašanje – didaktička transpozicija objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj*, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, 15. ožujka 2017.

Potpis

To be able to understand which mathematics is done at school it is necessary to know the mathematics that motivates and justifies its teaching as well as how this mathematics is being interpreted in the different teaching institutions.

Bosch i Gascon (2006)

ZAHVALE

Zahvaljujem se profesoricama Aleksandri Čižmešiji i Željki Milin Šipuš, koje su bile istinske mentorice. Hvala što ste me usmjerile i pustile, što ste mi zadavale posla i pomagale, što ste me opteretile, ali imale razumijevanja.

Napravile smo ogroman, vrijedan i dobar posao!

Hvala studentima i znanstvenicima koji su sudjelovali u istraživanju te članovima Povjerenstva za prihvat teme i ocjenu disertacije, profesorici Ljiljani Arambašić i profesoru Zvonimiru Šikiću.

Hvala profesoricama Zdenki Kolar-Begović i Ružici Kolar-Šuper na uvijek konstruktivnim savjetima te profesoru Mirku Poloniju koji je uvijek tu negdje.

Hvala obiteljima Perić i Katalenić, posebno mom suprugu Mati i svekrvi Jasminki, koji su požrtvovno dijelili teret mog poslijediplomskog studija i doktorskog istraživanja.

Hvala Kristini, Josipu i Ivi na tehničkoj i dostavnoj potpori.

I ovaj put, hvala mojoj Heleni. Uspjele smo!

Hvala na podršci, kolegama i kolegicama s Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti i drugih institucija, a posebno Ljerki i Dubravki.

Na kraju, ovaj rad je pisan u sjećanju na ženu, majku, baku, učiteljicu, matematičarku, znanstvenicu, aktivisticu, moju mentoricu, profesoricu Margitu Pavleković.

Vječno sam zahvalna!

SAŽETAK

Asimptota i asimptotsko ponašanje objekti su matematičkog znanja prisutni u različitim područjima matematike. Asimptotsko ponašanje istaknuto je svojstvo nekih funkcija i krivulja te važan alat za opisivanje i rješavanje raznovrsnih matematičkih i izvanmatematičkih problema. Različitost pristupa kojima se ostvaruje te širok spektar sadržaja i područja nastave matematike s kojima se može povezati, odnosno u kojima je relevantan objekt znanja, asimptotu čine zanimljivim objektom istraživanja.

U ovom doktorskom radu istražena je i opisana didaktička transpozicija tog objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj. Teorijski okvir unutar kojega je provedeno ovo istraživanje jest antropološka teorija didaktike (ATD), koju je razvio francuski matematičar Yves Chevallard početkom 1980-tih godina za potrebe istraživanja matematičkog obrazovanja.

Pregled relevantne svjetske znanstvene literature ukazuje na to da su malobrojna istraživanja fokusirana na opisivanje asimptote kao objekta znanja. Osobito nedostaje onih u kojima se sagledavaju različiti aspekti tog matematičkog pojma te njihov međusobni utjecaj, odnosno različiti konteksti u kojima je taj pojam relevantan. Osim toga, ovo je prvo istraživanje u Republici Hrvatskoj kojim se tema iz gimnazijskog matematičkog obrazovanja teorijski utemeljeno adresira i povezuje s inicijalnim sveučilišnim obrazovanjem nastavnika matematike.

Istraživanje je provedeno u skladu s odabranim teorijskim okvirom i obuhvaća tri faze: analizu udžbenika, upitnike sa studentima nastavničkog smjera matematike i intervju sa znanstvenicima. Izgrađen je referentni epistemološki model za objekt znanja asimptote koji je usklađen sa zahtjevima znanja za poučavanje te podržan akademskim znanjem i saznanjima epistemoloških istraživanja.

Ključne riječi: asimptota, asimptotsko ponašanje, gimnazijsko obrazovanje, matematičko obrazovanje, didaktička transpozicija, antropološka teorija didaktike (ATD), referentni epistemološki model (REM).

ABSTRACT

Introduction

Asymptote and asymptotic behaviour are bodies of knowledge that have an important role in many traditional and modern mathematical disciplines and are supported by a rich and well-established abstract theory. Asymptotic behaviour is a significant property of some functions and curves and a tool for describing and solving various problems in theoretical and applied mathematics. Some basic aspects of these concepts must be utilized already in elementary mathematics as powerful tools in graphing and analyzing behaviour of elementary functions at infinity and near singularities and in graphing simple plane curves such as hyperbola. Therefore, this body of knowledge is a common part of upper secondary mathematics curricula worldwide. The notion of an asymptote appears as a theoretical concept, a part of a procedure or as a self-sufficient task in different contexts and different educational cycles. Hence, connection with a wide range of teaching contents and mathematical bodies of knowledge makes it an interesting object of research.

This doctoral thesis investigates and elaborates the didactic transposition of asymptote as a body of knowledge in general secondary education in Croatia. The research is conducted within the theoretical framework of the anthropological theory of the didactic (ATD), developed by a French mathematician Y. Chevallard especially for research in mathematics education.

Scientific literature review shows that studies focused on describing the body of knowledge asymptote are scarce within ATD and other theoretical frameworks. Corpus of scientific research especially lacks those that consider various aspects of this body of knowledge, their mutual influences and connections or various contexts in which this body of knowledge is relevant. Further, research conducted within this thesis pioneers in mathematics education research in Croatia since it addresses and connects, in a theoretically founded manner, initial university education of mathematics teachers and general secondary education.

The main idea of ATD is to determine the relation $R_I(p, O)$ between a body of knowledge O and a person that occupies position p in a institution I. For this purpose mathematical knowledge and activities are described in terms of a *praxeology* $[T, \tau, \theta, \Theta]$, where its practical component is represented with *task* T and *technique* τ and discursive or theoretical component with *technology* θ and *theory* Θ. ATD enables a researcher to develop a working model for a body of knowledge, that is reference epistemological model (REM). REM is a coherent structure consisted of complete and mutually connected praxeologies. It

should be compliant, questioned and evaluated with respect to curricular and cultural demands, as well as academic and epistemological knowledge.

Methodology

The comprehensive research conducted for this thesis is founded on a REM for the body of knowledge asymptote, *A*. Asymptote is a body of knowledge consisted of a set of praxeologies for which it is a component of practical or theoretical block. Hence, the developed REM included praxeologies of different range and complexity that exist or can be constructed within curriculum and textbook themes connected to the notion of an asymptote.

The relations $R_B(p,A)$, $R_S(p,A)$ and $R_M(p,A)$ are analyzed and compared, where institutions considered are: *B* for the two Croatian mathematical gymnasium textbooks, *S* for the cohort of 40 the final, fifth year mathematics education students at the largest mathematical department in Croatia and *M* for the institution of academic mathematicians. The methodology of the implemented research provided information from all steps of the didactical transposition of the body of knowledge asymptote. It included (1) a praxeological analysis of the textbooks as representatives of the *knowledge to be taught*, (2) three questionnaires with open-ended questions for the prospective mathematics teachers to provide an insight in related *knowledge available* to students as a *potential taught knowledge* and (3) a semi-structured interview with two academics who represent *scholarly knowledge*.

Results

Based on the results gained from three phases of the research, the proposed REM for the body of knowledge asymptote is verified and improved in order to develop an asymptote as a body of knowledge and to make suggestions for the teaching practice especially within the ongoing curricular reform in Croatia.

In general, textbook organization is incoherent and contains mainly practical blocks, praxeologies are not connected, and available discourses are either not relevant or not connected to practical activities, except for algebraic manipulation with formulae and equations. Knowledge available to prospective math teachers is loaded with components of the secondary knowledge to be taught, techniques students chose are not the most efficient for the task in question and they do not utilize discursive components. For knowledge to be taught and knowledge available to students asymptote and asymptotic behaviour are available but not fully utilized as *praxis* or *logos* in relevant praxeologies. Even though praxeological organization of textbooks and students' praxeological equipment do not fully correspond to the proposed REM, we find that the implementation of such REM is possible with a proper support of the *noosphere*, i.e. the institutions responsible for the mathematics education.

Considering this, it is our suggestion for the teaching practice especially within the ongoing curricular reform in Croatia that: all relevant properties of an object (e.g. asymptote, function, curve) should be emphasized and implemented in practical, applied and formal context; common properties of the object should be interrelated and diversely represented; simple, isolated and incomplete praxeologies should be organized into more coherent and complex praxeologies; and asymptotic behaviour should be more emphasized, adequately graphically represented and described by formal and informal mathematical discourse.

Key words: Asymptote, asymptotic behaviour, secondary education, mathematical education, didactical transposition, anthropological theory of the didactics (ATD), reference epistemological model (REM).

SADRŽAJ

UVOD

Asimptota i asimptotsko ponašanje objekti su matematičkog znanja prisutni u različitim kontekstima u područjima matematičke analize, geometrije, primijenjene, numeričke i diskretne matematike te računarstva. Asimptotsko ponašanje istaknuto je svojstvo nekih funkcija i krivulja te važan alat za opisivanje i rješavanje raznovrsnih matematičkih i izvanmatematičkih problema. Zbog svoje relevantnosti, pojam asimptote zastupljen je i u srednjoškolskom matematičkom obrazovanju, i to već od njegovog početka. U gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj kontinuirano se pojavljuje u više razreda i u različitim nastavnim sadržajima predmeta matematike, u kojima ima različite uloge: teorijskog koncepta, tehnike ili zasebnog zadatka. Usko je vezan uz objekte znanja limesa i tangente, ovisno o promatranom kontekstu.

Različitost pristupa kojima se ostvaruje te širok spektar sadržaja i područja nastave matematike s kojima se može povezati, odnosno u kojima je relevantan objekt znanja, asimptotu čine zanimljivim objektom istraživanja. U ovom doktorskom radu je detaljno i sveobuhvatno istražena i opisana didaktička transpozicija ovog objekta znanja u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj. Teorijski okvir unutar kojeg je provedeno ovo istraživanje jest antropološka teorija didaktike (ATD). Njega je francuski matematičar Yves Chevallard razvio početkom 1980-tih godina specijalno za potrebe istraživanja matematičkog obrazovanja, iako se danas uspješno primjenjuje i u mnogim drugim područjima. ATD je neovisna o pedagogiji, koja je usmjerena unapređivanju nastavne prakse i psihologiji, koja je usmjerena na osobine pojedinca (Chevallard, 1981, 1992, 2007). Istraživanja matematičkog obrazovanja usmjerena su na objekt matematičkog znanja – kako on određuje proces poučavanja i učenja te kako zahtjevi obrazovnog sustava određuju realizaciju objekta znanja. ATD proširuje didaktički trokut nastavnika, učenika i poučavanog sadržaja kao osnovu svakog obrazovnog sustava. Uspjeh učenika ne ovisi samo o njegovim sposobnostima, nastavnom procesu kojim upravlja nastavnik ili njihovom međuodnosu, nego sadržaju koji se poučava i uči te brojnim vanjskim činiteljima.

U prvom poglavlju, sukladno zahtjevima odabranog teorijskog okvira, usustavljena su i opisana formalna matematička znanja o asimptoti koja su značajna za postavljena istraživačka pitanja. Slijedi drugo poglavlje u kojemu su navedeni rezultati prethodno provedenih znanstvenih istraživanja matematičkog obrazovanja koja se bave objektom znanja asimptota ili njoj bliskim matematičkim pojmovima tangente i limesa. Obilježja, pojmovi i metodološki alati ATD-a, kao odabranog teorijskog okvira, te rezultati tematski bliskih znanstvenih istraživanja provedenih unutar istog teorijskog okvira, također su dijelom drugog poglavlja teksta.

U narednim poglavljima postavljaju se ciljevi i hipoteze istraživanja te opisuje metodologija i predstavljaju rezultati znanstvenog istraživanja. Četvrto poglavlje sadrži metodologiju, dok peto poglavlje sadrži rezultate analize udžbenika, upitnika sa studentima nastavničkih studija matematike i intervjua sa znanstvenicima. U šestom poglavlju su interpretirani rezultati provedenih istraživanja s obzirom na postavljena istraživačka pitanja. Posljednje poglavlje sadrži zaključak i prijedlog intervencija u poučavanju i učenju matematike u kontekstu objekta znanja asimptote.

1. ASIMPTOTA KAO OBJEKT MATEMATIČKOG ZNANJA

1.1. Asimptota krivulje

Pojam asimptote polazi od starogrčkog matematičara Apolonija iz Pergama koji je izučavao presjeke konika (Smith, 1958). Asimptota odnosno nestižnica ima etimologiju u grčkoj riječi *asymptōtos* koja se prevodi „ne padaju zajedno“ (Anić & Goldstein, 2007), jer je u starogrčkoj matematici asimptota interpretirana kao pravac koji se (nikad) ne podudara s krivuljom. Asimptota se različito definira u pojedinim područjima matematike, primjerice kako je dano u Definiciji 1.1 (Algèbre et trigonométrie, 1964).

Definicija 1.1: Asimptota krivulje

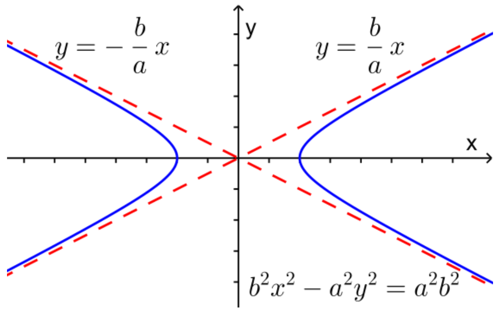
Pravac je asimptota krivulje ako udaljenost točke krivulje do pravca teži k 0 kada se točka udaljava po krivulji u beskonačnost.

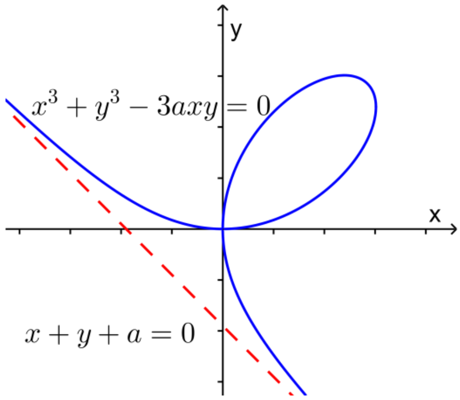
Pojam \`krivulja´ se intuitivno, kao „zakrivljena crta“, javlja već u prvom razredu matematičkog obrazovanja. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja od krivulja se spominju pravac, kružnica, druge konike (elipsa, hiperbola i parabola) te grafovi elementarnih funkcija (linearna, kvadratna, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija, polinomi i trigonometrijske funkcije) u kontekstu euklidske i analitičke geometrije. Ovdje su krivulje zadane kao skupovi točaka koje zadovoljavaju neko geometrijsko svojstvo i mogu se odrediti elementarnim konstrukcijama u ravnini ili kao skupovi točaka koordinatne ravnine koje zadovoljavaju određenu jednadžbu.

Formalno gledajući, pravac i konike su algebarske krivulje, a graf elementarne funkcije je glatka, implicitno zadana krivulja. Krivulje mogu biti zadane na različite načine, primjerice u implicitnom ili parametarskom obliku. Jedna vrsta implicitno zadanih krivulja su algebarske krivulje; to je takva krivulja koja je određena jednadžbom $F(x, y) = 0$, pri čemu je F polinom u varijablama x i y. Pod parametarski zadanom ravninskom krivuljom podrazumijevamo neprekidnu (glatku) funkciju $c : I \to \mathbb{R}^2$, gdje je I otvoreni interval. Parametarski zadane krivulje su objekt izučavanja u diferencijalnoj geometriji. Dva načina zadavanja krivulje, implicitno i parametarski su istovjetna, zapravo pod određenim uvjetima implicitno zadana krivulja se može lokalno parametrizirati i obratno.

Primjer 1.1: Asimptote krivulja

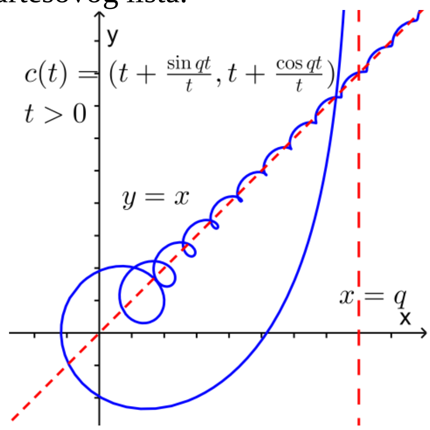
Hiperbola je algebarska krivulja zadana jednadžbom $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
Pravci $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole.





Descartesov list je algebarska krivulja zadana jednadžbom $x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ a \neq 0$.
Pravac $x + y + a = 0$ je asimptota Descartesovog lista.

Krivulja c je zadana u parametarskom obliku $c(t) = \left(t + \frac{\sin qt}{t}, t + \frac{\cos qt}{t}\right)$, $t > 0$ i $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Pravci $y = x$ i $x = q$ su asimptote krivulje c.



Zeng (2007) je napisao formalni oblik Definicije 1.1 za asimptote algebarske krivulje u realnoj ravnini kako je dano u Definiciji 1.2.

Definicija 1.2: Asimptota algebarske krivulje

Neka je C realna ravninska algebarska krivulja u realnoj ravnini $\mathbb{R}^2$ i B beskonačna grana krivulje C. Pravac l u $\mathbb{R}^2$ se zove asimptota od B, ako za svaki pozitivni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ postoji pozitivni $\Delta \in \mathbb{R}$ takav da $d(P,l) < \varepsilon$ za sve točke $P(a,b)$ na B takve da je $a^2 + b^2 > \Delta$. U tom slučaju, kaže se da je l asimptota od C.

Tehnike određivanja asimptote krivulje ovise o zadanoj krivulji. Kod eksplicitno zadanih krivulja jednadžbe asimptote se mogu odrediti izvrednjavanjem odgovarajućih limesa, dok se kod implicitno zadanih krivulja koriste druge tehnike (vidi Poglavlje 1.2, Primjer 1.2, Zeng (2007)). Tehnike koje je predložio Zeng (2007) zasnivaju se na određivanju realnih korijena stanovitih polinoma. Pojednostavljivanje ove tehnike do isključivog promatranja nultočaka homogenih polinoma najvećeg stupnja u implicitno zadanoj jednadžbi krivulje može dovesti do pogrešnih rezultata (vidi Zeng (2007, str. 681)).

Primjer 1.2: Određivanje asimptota algebarskih krivulja

Neka je P polinom $P(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $a \neq 0$.
Jednadžba asimptote algebarske krivulje $P(x,y) = 0$ računa se po formuli

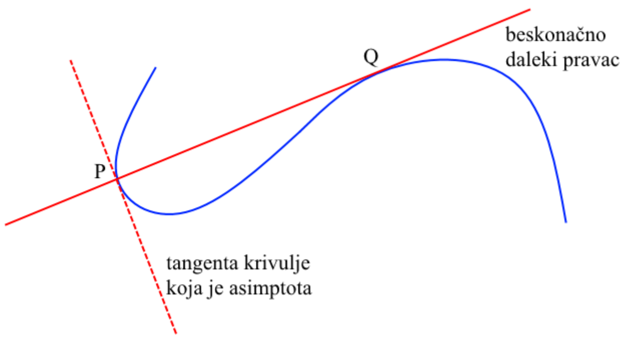
$$xQ'_x(\beta,\alpha) + yQ'_y(\beta,\alpha) + R(\beta,\alpha) = 0,$$

gdje $Q'_x(\beta,\alpha)$ i $Q'_y(\beta,\alpha)$ nisu oba nula te $P(x,y) = Q(x,y) + R(x,y) + S(x,y)$, $\mathrm{st}(Q) = \mathrm{st}(P)$, $\mathrm{st}(R) = \mathrm{st}(P) - 1$ i $\mathrm{st}(S) \leq \mathrm{st}(P) - 2$ te $Q(x,y) = (\alpha x - \beta y)Q_1(x,y)$, $\mathrm{st}(Q_1) = \mathrm{st}(Q) - 1$, odnosno (α,β) je nultočka polinoma Q.
Za krivulju $P(x,y) = 0$ je $Q(x,y) = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, $\alpha = 1, \beta = -1$, $R(x,y) = -3axy$ pa je traženi pravac $x + y + a = 0$.

Proširenjem realne ravnine beskonačnim elementima dobiva se projektivna ravnina. Posebno, svi međusobno paralelni pravci imaju istu beskonačno daleku točku i sve beskonačno daleke točke leže na istom, beskonačno dalekom, pravcu. Realna ravnina se ulaže u projektivnu ravninu pomoću homogenih koordinata, što čini analitički model realne projektivne ravnine. Algebarske krivulje se mogu uložiti u projektivnu ravninu i pri tom se beskonačne grane algebarske krivulje interpretiraju odgovarajućim beskonačno dalekim točkama u projektivnoj ravnini. Posebno, ako beskonačna grana algebarske krivulje ima asimptotu, naslućujemo kako taj pravac i krivulja imaju zajedničku, beskonačno daleko, točku. Formalna definicija asimptote krivulje u projektivnoj ravnini dana je u Definiciji 1.3 (Rutter, 1935).

Definicija 1.3: Asimptota krivulje u projektivnoj ravnini

Asimptota ravninske krivulje Γ je takva tangenta na projektivnu krivulju kroz točku krivulje u beskonačnosti, koja nije beskonačni pravac.



Slika 1.1.1: Tangente krivulje u beskonačnosti (Rutter, 1935)

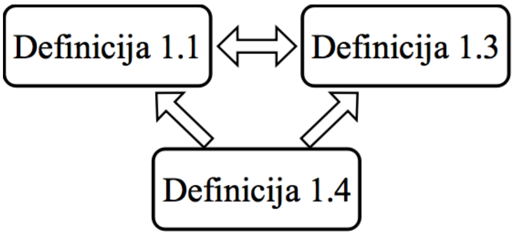
Konteksti u kojima su zadane dvije definicije asimptote krivulje (Definicije 1.1 i 1.3) su bitno različiti, ali same definicije su međusobno ekvivalentne. Pri ulaganju realne ravnine u projektivnu ravninu pravac koji je asimptota krivulje u smislu Definicije 1.1 je asimptota krivulje u projektivnoj ravnini u smislu Definicije 1.3 i obratno.

U literaturi se javlja još jedan pristup definiciji asimptote kao tangente, kako je dano u Definiciji 1.4 (Pavković i Veljan, 1995).

Definicija 1.4: Granični položaj tangente u beskonačnosti

Asimptota krivulje je granični položaj tangente kada se diralište po beskonačnoj grani krivulje giba prema beskonačnosti.

Giblin (1972) je dao pregled i odnos različitih ponašanja krivulje u beskonačnosti. U svojim rezultatima kao krivulju podrazumijeva svako preslikavanje $\gamma : D \to \mathbb{R}^2$, gdje je $D = \langle d, +\infty \rangle$ i $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, tako da u i v imaju neprekidne prve derivacije u' i v' na D, koje nisu istovremeno jednake nula. Odnosi različitih definicija asimptote krivulje prikazani su na Slici 1.1.2. Giblin (1972) je iznio mišljenje kako je Definicija 1.4 najbolji odabir za definiciju asimptote jer smatra kako je pojam asimptote vezan uz pojam tangente i kako je objekt graničnog položaja tangente lakše odrediti i koristiti.



Slika 1.1.2: Prikaz odnosa različitih ponašanja krivulje u beskonačnosti (Giblin, 1972)

Ako je pravac asimptota u smislu Definicije 1.4 onda je asimptota u smislu Definicije 1.1, što slijedi iz diferencijabilnosti krivulje i egzistencije limesa (Giblin, 1972). Obrat ne vrijedi, to jest pravac koji je asimptota u smislu Definicije 1.1 ne mora biti granični položaj tangente krivulje u beskonačnosti (vidi Primjer 1.4). Postoje različite vrste funkcija ili krivulja za koje su dvije definicije (Definicija 1.1 i 1.4) ekvivalentne, primjerice algebarske krivulje ili racionalne funkcije (vidi Primjer 1.3, Giblin (1972), Pavković i Veljan (1995)).

Asimptota krivulje se naziva „tangenta u beskonačnosti“. Važno je istaknuti kako se pod tim izrazom podrazumijeva pravac koji zadovoljava Definiciju 1.3. Posebno, „tangenta u beskonačnosti“ je takva tangenta krivulje za koju je diralište točka krivulje u beskonačnosti kad krivulju promatramo u projektivnom proširenju realne ravnine (i nije beskonačno daleki pravac). Nadalje, „tangenta u beskonačnosti“ ne mora biti pravac koji je tangenta kroz točku na krivulji ili grafu funkcije kad apscisa dirališta teži u beskonačnost.

Osim različitih definicija asimptota ima druga proširenja. Pojam asimptote, kao pravca, može se generalizirati na pojam asimptotske krivulje kako je dano u Definiciji 1.5 (*Algèbre et trigonométrie*, 1964).

Definicija 1.5: Asimptotska krivulja

Krivulja a je asimptota krivulje c ako udaljenost točke krivulje c do točke krivulje a s istom apscisom teži k 0 kada apscisa teži u beskonačnost.

Primjer 1.3: Asimptote hiperbole

Dana je hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i pravci $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$.
Bez smanjenja općenitosti, za točku $T = (x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$ hiperbole odredi se udaljenost $d(T,p) = \frac{|bx - b\sqrt{x^2-a^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ do pravca p zadanog jednadžbom $y = \frac{b}{a}x$. Tada vrijedi $d(T,p) \to 0$ kada $x \to +\infty$.

Pravci $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole u smislu Definicije 1.1.

U projektivnoj ravnini P^2 hiperbola ima jednadžbu $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0$, gdje su (x, y, z) homogene koordinate. Beskonačno daleka točka hiperbole određena je s $z = 0$ odnosno ima homogene koordinate $(a, \pm b, 0)$.
Jednadžba tangente u nesingularnoj točki (α, β, γ) projektivne krivulje $F(x, y, z) = 0$ dana je, kao projektivni pravac, jednadžbom $xF_x(\alpha,\beta,\gamma) + yF_y(\alpha,\beta,\gamma) + zF_z(\alpha,\beta,\gamma) = 0$. Slijedi da tangenta hiperbole kroz beskonačno daleku točku hiperbole ima u projektivnoj ravnini jednadžbu $bx \mp ay = 0$. To su pravci $bx \mp ay = 0$ u realnoj ravnini.

Pravci $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole u smislu Definicije 1.3.

Bez smanjenja općenitosti, za granu hiperbole u prvom kvadrantu odredi se jednadžba tangente $y = \frac{bx_1}{a\sqrt{x_1^2-a^2}}x - \frac{ab}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$ u točki $T(x_1, y_1)$ hiperbole. Kad $x_1 \to \infty$ to postaje $y = \frac{b}{a}x$.

Pravci $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole u smislu Definicije 1.4.

Primjer 1.4: Asimptota parametarske krivulje

Dana je krivulja c u parametarskom obliku $c(t) = \left(t + \frac{\sin qt}{t}, t + \frac{\cos qt}{t}\right)$, $t > 0$, $q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i pravac $y = x$.
Za točku $T = \left(t + \frac{\sin qt}{t}, t + \frac{\cos qt}{t}\right)$ na krivulji c i pravac p zadan jednadžbom $y = x$ vrijedi $d(T,p) = \frac{|\sin qt - \cos qt|}{t\sqrt{2}} \to 0$ kad $t \to \infty$.

Pravac $y = x$ je asimptota krivulje c u smislu Definicije 1.1.

U projektivnoj ravnini P^2 krivulja c ima jednadžbu $C(t) = \left(1, \frac{t^2+\cos qt}{t^2+\sin qt}, \frac{t}{t^2+\sin qt}\right)$, $t > 0$.
Beskonačno daleka točka krivulje C, kad $t \to \infty$, je točka s homogenim koordinatama $(1,1,0)$.
Odrediti tangentu u beskonačno dalekoj točki krivulje C u P^2 je ekvivalentno odrediti tangentu u točki $(1,0)$ krivulje $F(t) = \left(\frac{t^2+\cos qt}{t^2+\sin qt}, \frac{t}{t^2+\sin qt}\right)$ u $\mathbb{R}^2$. Granični položaj sekanti krivulje F kroz točku $(1,0)$ kada $t \to \infty$ ima jednadžbu $y = 1$, što obratnim transformacijama prelazi u jednadžbu pravca $x - y = 0$ u $\mathbb{R}^2$.

Pravac $y = x$ je asimptota krivulje c u smislu Definicije 1.3.

Krivulja c ima tangentu u točki $(x(t), y(t))$ danu jednadžbom

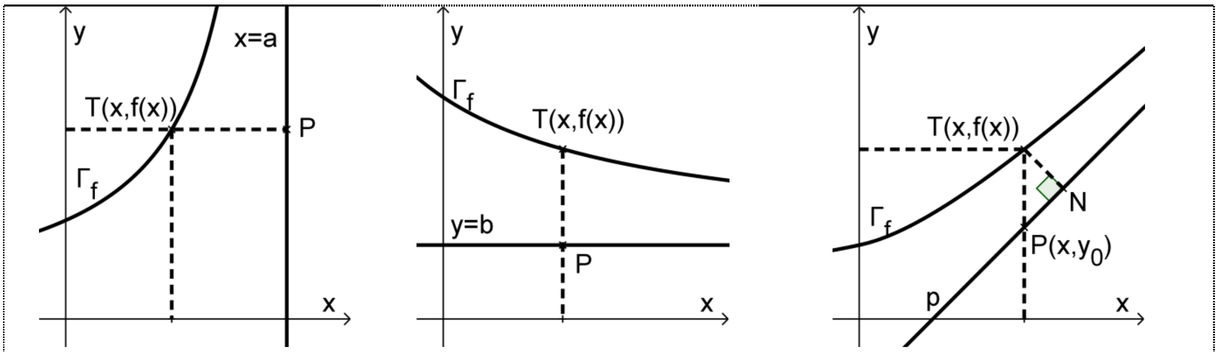
$$y = \frac{t^2 - qt\sin qt - \cos qt}{t^2 + qt\cos qt - \sin qt} \cdot x + \frac{qt^2(\sin qt + \cos qt) + 2t(\cos qt - \sin qt) + q}{t^2 + qt\cos qt - \sin qt}.$$

Kad $t \to \infty$, vodeći koeficijent jednadžbe pravca je 1, ali slobodni koeficijent nije definiran.

Pravac $y = x$ nije asimptota krivulje c u smislu Definicije 1.4.

1.2. Asimptota grafa glatke funkcije

Definicija 1.1 polazište je određivanju asimptota grafa funkcije. Pravac $x = a,\ a \in \mathbb{R}$ je vertikalna asimptota grafa funkcije *f* ako je $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. Pravac $y = kx + l$ je kosa, ili u posebnom slučaju horizontalna, asimptota grafa funkcije *f* ako je $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (kx + l) \right) = 0$ ili $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (kx + l) \right) = 0$. Na Slici 1.2.1 vidi se kako navedeni uvjeti slijede iz Definicije 1.1. Slično, prema Definiciji 1.5. krivulja *c* je asimptotska krivulja grafa funkcije *f* ako vrijedi $\lim\limits_{x \to \infty} \left| f(x) - y \right| = 0$, pri čemu je $T(x, y)$ točka krivulje *c*. Posebno, graf funkcije *f*, za koju vrijedi $f(x) = g(x) + \phi(x)$, pri čemu je $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = 0$, ima asimptotsku krivulju $y = g(x)$.



$d(\Gamma_f, p) = \left| x - a \right| \to 0,$ $f(x) \to \infty$	$x \to \infty,$ $d(\Gamma_f, p) = \left| f(x) - b \right| \to 0$	$d(\Gamma_f, p) = \left| TN \right| < \left| TP \right| = \left| f(x) - y_0 \right|$ $x \to \infty, \left| f(x) - y_0 \right| \to 0$
A: Vertikalna asimptota	**B:** Horizontalna asimptota	**C:** Kosa asimptota

Slika 1.2.1: Udaljenost grafa funkcije *f* do asimptote *p*

Dobbs (2010, 2011) je ponudio drugačiji pristup pojmu asimptote. Naime, pisao je o asimptotskim funkcijama, koristio je perspektivu infinitezimalnog računa i zadao dvije relacije \`biti asimptota´ za realne funkcije. Za realne funkcije *f* i *g*, čije područje definicije sadrži interval oblika $[a, \infty\rangle$ vrijedi:

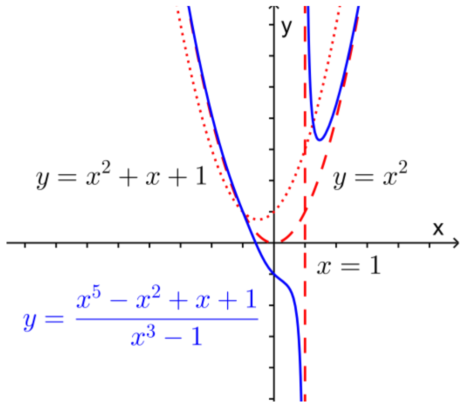
(1) *f* je asimptota funkcije *g* u geometrijskom smislu, $f \sim_1 g$, ako je $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - g(x) \right) = 0$;

(2) za *f* i *g* nenul funkcije, *f* je asimptota funkcije *g* u analitičkom smislu, $f \sim_2 g$, ako je $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Relacije $\sim_1$ i $\sim_2$ su relacije ekvivalencije. Očito, ako je $f \sim_1 g$ onda je graf funkcije *g* asimptotska krivulja grafa funkcije *f*. Asimptota u analitičkom smislu ne implicira asimptotu u geometrijskom smislu. S druge strane, ako je *f* asimptota funkcije *g* u geometrijskom smislu i funkcija *g* je za rastuću apscisu omeđena odozdo brojem različitim od nula, tada je *f* asimptota funkcije *g* i u analitičkom smislu (vidi Teorem 2.3. u Dobbs (2011)).

Primjer 1.4: Graf racionalne funkcije

Dana je racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x^5-x^2+x+1}{x^3-1}$.
Pravac $x=1$ je vertikalna asimptota funkcije f prema Definiciji 1.1, jer je $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)=\left(\frac{2}{\pm 0}\right)=\pm\infty$.
Funkcija f nema kosu niti horizontalnu asimptotu prema Definiciji 1.1, jer za bilo koji $k,l\in\mathbb{R}$ je $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(kx+l)\big)=\infty$.
Funkcija $g(x)=x^2$ je asimptotska krivulja funkcije f u smislu Definicije 1.5, jer je $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$.



Za racionalnu funkciju f, $m=5$ je stupanj polinoma u brojniku i $n=3$ je stupanj polinoma u nazivniku. Prema Dobbs (2011), jer je $m>n$, funkcija f ima jedinstvenu asimptotu u geometrijskom smislu i proizvoljno mnogo asimptota u analitičkom smislu.

Funkcija g je asimptota funkcije f u geometrijskom i analitičkom smislu, a funkcije oblika $h(x)=x^2+x+t,\, t\in\mathbb{R}$ su (neke) asimptote funkcije f u analitičkom smislu, to jest $f\sim_1 g$ i $f\sim_2 g$ te $f\sim_2 h$ i $f\not\sim_1 h$.

1.3. Asimptotsko ponašanje funkcija

Asimptotsko ponašanje obuhvaća različite vrste informacija o ponašanju funkcije. Asimptotika podrazumijeva određivanje algoritma kojim se jednostavnije izvrednjava neka vrijednost odnosno određivanje zadovoljavajuće aproksimacije zadane veličine (De Bruijn, 1958; Graham, Knuth, & Patashnik, 1988). De Bruijn (1958) je asimptotiku identificirao s tehnikama rješavanja određenih problema, traženjem asimptotske formule koja najčešće podrazumijeva funkciju asimptotski ekvivalentnu zadanoj funkciji kako je dano u Definiciji 1.6 (Bender, 1974; De Bruijn, 1958; Graham et al., 1988).

Definicija 1.6: Asimptotski ekvivalentne funkcije

Kaže se da su funkcije f i g asimptotski ekvivalentne, $f(x)\sim g(x)\ (x\to\infty)$, ako vrijedi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Značajan aspekt asimptotičkog pristupa rješavanju problema je procjenjivanje kojom „brzinom“ ili s kojom greškom dobivena aproksimacija postaje bliža stvarnoj vrijednosti. Graham i sur. (1988) funkcije koje se javljaju u praksi svrstavaju prema asimptotskim omjerima rasta u hijerarhiju danu u Jednadžbi 1.3.1. Za funkcije f i g vrijedi $f\prec g$ ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$.

$$1\prec\log\log n\prec\log n\prec n^{\epsilon}\prec n^{c}\prec n^{\log n}\prec c^{n}\prec n^{n}\prec c^{c^{n}},\ 0<\epsilon<1<c$$

Jednadžba 1.3.1

Funkcije f i g imaju *istu brzinu rasta*, $f(n) \asymp g(n)$, ako vrijedi $|f(n)| \le C|g(n)|$ i $|g(n)| \le C|f(n)|$ za neki C i dovoljno velike n (Graham et al., 1988). Pomoću O notacije se u asimptotskim formulama suptilnije i jednostavnije daju informacije o brzini konvergencije i greški asimptotske aproksimacije (vidi Primjer 1.5). Oznaka $O\big(g(n)\big)$ predstavlja skup svih funkcija $f(n)$ takvih da je $|f(n)| \le C|g(n)|$ za svaki n i za neku konstantu C. Bender (1974) je pojasnio kako notacija $f(n) = O\big(g(n)\big)$ znači da je $\frac{f(n)}{g(n)}$ omeđeno kad $n \to \infty$.

Primjer 1.5: O notacija

Zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva dan je s:

$$\square_n = \sum_n n^2 = \tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

Očito vrijedi $\square_n = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$. Slabiji rezultat je $\square_n - \frac{1}{3}n^3 \prec n^3$ i jači $\square_n - \frac{1}{3}n^3 \asymp n^2$.

Asimptotska aproksimacija ima apsolutnu grešku $O\big(g(n)\big)$ ako je oblika $f(n) + O\big(g(n)\big)$, gdje $f(n)$ ne sadrži O notaciju; aproksimacija ima relativnu grešku $O\big(g(n)\big)$ ako je oblika $f(n)\cdot\big(1+O\big(g(n)\big)\big)$, gdje $f(n)$ ne sadrži O notaciju.

Asimptotika se javlja kod iterativnih metoda računanja, rješavanja diferencijalnih jednadžbi, u analitičkoj teoriji brojeva, kombinatorici, numeričkoj matematici i drugim područjima matematike.

Primjer 1.6: Asimptotsko ponašanje funkcija

Promotra se odnos funkcija $f(x) = \sqrt{x+x^2}$ i $g(x) = x$ za $x \to \infty$.

- $f \sim g$, jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x} = 1$
- $f(x) = \sqrt{x+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x + O(1) = x\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, zbog Taylorovog razvoja $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 3\cdots(2n)}x^n + \cdots$, za $x \to \infty$.
- Funkcija f se aproksimira funkcijom g s apsolutnom greškom do na konstantu i relativnom greškom reda veličine $O\left(\frac{1}{x}\right)$.

x	$f(x)-g(x)$	$f(x)/g(x)$
10	0.498756	1.04881
100	0.498756	1.00499
1000	0.499875	1.0005
10000	0.4999988	1.00005

2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Do sada provedena istraživanja matematičkog obrazovanja fokusirana na objekt znanja asimptote naglasak stavljaju na izgradnju definicije horizontalne asimptote i pojma asimptota racionalnih funkcija (Kidron, 2011; Mok, 1999; Yerushalmy, 1997). U drugim se istraživanjima asimptota prepoznala kao objekt koji se realizira limesom funkcije (Barbé, Bosch, Espinoza i Gascón, 2005), objekt čije intuitivno razumijevanje doprinosi razvijanju (Swinyard i Larsen, 2012) ili određuje sliku koncepta limesa (Roh, 2008; Williams, 1991) te kao objekt značajan za grafičko prikazivanje funkcije (Zarhouti, Mouradi i Maroufi, 2014). Za asimptotu su važni koncepti tangenta i limes. U sklopu ATD-a do sada je istraživan samo objekt znanja limes (Barbé i sur., 2005; Hardy, 2009) te grafičko prikazivanje funkcije pomoću diferencijalnog računa, što uključuje asimptotu grafa funkcije (Zarhouti i sur., 2014).

2.1. Pregled istraživanja matematičkog obrazovanja vezanih uz tangentu i limes

Istraživanja vezana uz asimptotu, tangentu i limes provedena su unutar teorijskog okvira pod nazivom *slika* i *definicija koncepta*, koji su razvili D. Tall i S. Vinner 1980-tih godina. Razlikuju se slika koncepta, kao pojedinčeva cjelovita kognitivna struktura povezana s danim pojmom, osobna definicija koncepta, kao sklop riječi kojima pojedinac jednoznačno opisuje pojam te formalna definicija koncepta, kako je zadaju znanstvenici (Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991, 2014). Vinner (1991) je tumačio kako znati koncept podrazumijeva imati izgrađenu sliku koncepta. Definiciju koncepta nije nužno poznavati, ne mora biti povezana sa sastavnicama slike koncepta i može biti s njima u konfliktu što može dovesti do teškoća u učenju matematike (Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991). Posebno, Vinner (1991) je istaknuo potrebnim kontinuirano uzajamno djelovanje između slike koncepta i definicije koncepta kako bi učenje bilo uspješno. Učenici razvijaju jaku sliku koncepta i pomoću nje uspješno rješavaju tipične zadatke, za koje nije potrebno konzultirati definiciju koncepta (Cornu, 1991; Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991, 2014; Williams, 1991). Shodno tome, autori se slažu kako je potrebno postavljati nerutinske zadatke za čije rješavanje je nužno angažirati definiciju koncepta jer pogrešni ili nepotpuni faktori u slici koncepta mogu dovesti do kontradiktornog ili krivog rezultata (Cornu, 1991; Tall, 1992; Vinner, 1991; Williams, 1991). Istraživanja pokazuju kako je slika koncepta određena sadržajima i primjerima kojima je pojedinac poučavan i koji uglavnom ne uključuju sve aspekte formalne definicije ili sve veze između sastavnica koncepta (Biza, Christou i Zachariades, 2008; Biza i Zachariades, 2010; Kidron, 2011; Tall, 1992; Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991, 2014; Williams, 1991). Savjetuje se matematičke koncepte usvajati slijedom velikog broja tipičnih i netipičnih primjera, kontraprimjera koji su usklađeni i pokrivaju sve aspekte formalne definicije koncepta. Autori su isticali važnost edukacije nastavnika o karakteristikama pojedinih koncepata, načinima na koje ih studenti interpretiraju i poznaju te miskoncepcijama i teškoćama koje iz toga proizlaze (Cornu, 1991; Tall, 1992; Vinner, 1991).

Vinner (1991) je opisao primjer konflikta za koncept tangente. To je pojam koji se primarno poučava u kontekstu tangente kružnice i kasnije u diferencijalnom i integralnom računu (eng. *calculus*). Istraživanja su pokazala kako su studenti skloni crtati pravac koji ima obilježja tangente kružnice, primjerice jednu zajedničku točku s krivuljom i kad to nije primjereno. Takav pravac se naziva *generička tangenta*. Koncept tangente Biza i sur. (2008; 2010) su prepoznali bitnim objektom edukacijskih istraživanja jer se javlja na različitim razinama obrazovanja, u različitim obrazovnim kontekstima (euklidskoj i analitičkoj geometriji te diferencijalnom računu i matematičkoj analizi), može se definirati i prikazati na različite načine te primjenjivati u poučavanju različitih tema matematičke analize. U geometriji tangenta je globalno svojstvo krivulje, jer se određuje odnos pravca i krivulje u cjelini, a u matematičkoj analizi je to svojstvo lokalno, jer se odnosi na krivulju, njezinu pojedinu točku i okolinu te točke i definira kao granični položaj sekanti (Biza i sur., 2008; 2010). Koncept tangente i drugi koncepti koji se javljaju u različitim kontekstima i različitim obrazovnim razdobljima trebaju se poopćiti, što se može provesti ekspanzivnom ili rekonstruktivnom generalizacijom (Biza i sur. 2008; 2010). Prva podrazumijeva nadogradnju, a druga radikalnu izmjenu postojeće slike koncepta.

Biza i sur. (2008) su istražili postojeće slike koncepta i osobne definicije koncepta tangente kako bi odredili skupine učenika s karakterističnim teškoćama i interpretacijama koncepta tangente te izlučili faktore koji identificiraju sliku koncepta tangente. Biza i Zachariades (2010) su ispitali koje slike koncepta tangente ostaju dostupne studentima po dolasku na sveučilište te kako su povezane s rezultatima istraživanja iz Biza i sur. (2008). Zadaci postavljeni u istraživanju su odabrani s obzirom na teškoće identificirane u prethodnim istraživanjima. Uključene su situacije kad se tangenta podudara s grafom ili dijelom grafa funkcije, kad presijeca krivulju (u točki infleksije), kad je okomita na os apscisa te kad tangenta ne postoji (točka je vrh krivulje ili za dani argument nije definirana prva derivacija). U oba istraživanja prepoznate su tri perspektive tumačenja tangente (Biza i sur. 2008; 2010):

- Analitičko lokalna perspektiva: učenici su sliku koncepta tangente izmijenili tako da odgovara kontekstu matematičke analize. Promatraju se lokalna svojstva, a ne geometrijska obilježja tangente.

- Prijelazna lokalna perspektiva: učenici su postojeću sliku koncepta tangente nadogradili tako da poznata globalna svojstva primjenjuju u okolini točke. Dominantna slika koncepta tangente je pravac koji dodiruje graf (glatke) funkcije, može s grafom imati još zajedničkih točaka, ali ne u okolini dirališta i ne može dijeliti graf na dva dijela u točki dirališta, to jest graf funkcije je s iste strane tangente.
- Geometrijska globalna perspektiva: učenici su zadržali svojstva tangente karakteristična euklidskoj geometriji. Objekt tangente pod snažnim je utjecajem prototipa tangente kružnice (također u Vinner (1991)). Očekivana svojstva tangente su: da ima jednu zajedničku točku s krivuljom te da je položaj krivulje s iste strane pravca.

Rezultati iz Biza i sur. (2008; 2010) su pokazali kako je geometrijska perspektiva jača kod studenata nego učenika i broj studenata s prijelaznom perspektivom se relativno povećao u odnosu na ostale skupine. Studenti su češće odbijali kao tangentu pravac koji siječe graf u drugoj točki, a bolje su baratali karakteristikama glatke krivulje. Tangenta u točki infleksije i tangenta koja se podudara s grafom ili dijelom grafa funkcije su predstavljale teškoću kod obje populacije.

Biza i sur. (2008; 2010) su otkrili nekonzistentnost između poznavanja formule i definicije tangente. Učenici su poznavali formulu za jednadžbu tangente, ali nisu bili u stanju formalno opisati tangentu, dok su studenti imali značajno formalno i simboličko znanje o definiciji tangente u matematičkoj analizi i bili usredotočeni na derivaciju, ali ta znanja nisu koristili u rješavanju problema nego su se oslanjali na sliku koncepta koja nije usklađena s definicijom.

Biza i Zachariades (2010) su protumačili kako studenti sliku koncepta razvijenu tijekom prethodnog obrazovanja nisu izmijenili tako da pravilno uključuje saznanja infinitezimalnog računa. Napomenuli su kako je na višim razinama obrazovanja potrebno propitati prethodno stečeno znanje i na temelju njega rekonstruirati postojeće te izgraditi novo znanje.

Biza i Zachariades (2010) su našli kako zadaci u udžbenicima završne godine i relevantnim ispitima imaju naglasak na poznavanju i primjenjivanju formula, a u manjoj mjeri na različitim reprezentacijama matematičkih koncepata i problemima koji zahtijevaju razvijanje slike koncepta. Tumačili su kako je to zapreka promjeni slike koncepta tangente. Predložili su uključiti raznolike sadržaje u udžbenike, a posebno specifične grafičke reprezentacije koncepta tangente usklađene s formalnom definicijom te izmijeniti testove tako da osim procedura ispituju razumijevanje i kreiranje. Učitelji trebaju dobro poznavati koncept i teškoće učenika pri usvajanju tog koncepta te postaviti primjere koji će potaknuti rekonstrukciju znanja (Biza i Zachariades, 2010).

Istraživanja su pokazala kako učenici koncept limesa razvijaju s različitim konfliktima, poput nedostižnosti limesa, međe koja se ne prelazi ili kao dinamičkog, beskonačnog procesa umjesto kao rezultata tog procesa (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Tall, 1992; Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991; Williams, 1991). Podrijetlo miskoncepcija istraživači su našli u kurikulumu i poučavanju, koji naglasak stavljaju na proceduralno izračunavanje i algebarsko manipuliranje, svojstva limesa te demonstraciju uobičajenih primjera, nadalje prijelazu s intuitivnog, iskustvenog rasuđivanja na formalno matematičko mišljenje, te terminologiji koja limes opisuje približavanjem ili aproksimacijom (Cornu, 1991; Hardy, 2009, 2011; Monaghan, 1991; Roh, 2008; Tall, 1992; Tall i Vinner, 1981; Williams, 1991).

Williams (1991) je istraživao kako studenti mogu sliku koncepta limesa uskladiti s njegovom definicijom. Koristio je *model kognitivne promjene* za opisivanje kako određene situacije doprinose izmjeni modela ka formalnoj definiciji. Modeli su takva znanja koja su jasno definirana, organizirana i koherentna. Kognitivna promjena modela nastupa kad se

1. iskaže nezadovoljstvo postojećim modelom
2. ponude modeli koji su razumljivi i uvjerljivi
3. pokaže kako je ponuđeni model primjeren i koristan (Williams, 1991).

Poučavanje koje treba potaknuti kognitivnu promjenu sadrži „otkrivajuću“ i „proturječnu“ situaciju. U prvoj se prepoznaju i aktiviraju postojeći modeli za rješavanje problema, a u drugoj se spoznaje kako dostupni modeli nisu primjereni u danoj situaciji što dovodi do konflikta. Student potom ulazi u „razdoblje odlučivanja“ kada na poticaj nastavnika izgrađuje novi, vlastiti model koji rješava danu situaciju i nastali konflikt (Williams, 1991). Istraživanje koje je proveo obuhvaćalo je pregled spontanih modela limesa, ispitivanje u kojoj mjeri studenti smatraju različite modele korisnima i uvjerljivima te određivanje posljedica korištenja netočnih modela pri rješavanju zadataka. Razmatrao je koje su metafore za limes i postoji li generički model limesa.

Za određivanje postojećih modela limesa kod studenata Williams (1991) je ponudio dinamički i formalni opis limesa te opis limesa kao međe i aproksimacije funkcije. Kod ispitanih studenata su najučestaliji bili modeli gdje je limes opisan dinamičkim procesom, kao nedostižan ili nalik formalnoj definiciji (Williams, 1991). Dinamički aspekt limesa studenti su očitovali kretanjem po grafu funkcije ili uzastopnim izračunavanjem vrijednosti funkcije za argumente koji se približavaju zadanom broju. Limes su interpretirali beskonačnim procesom približavanja, aproksimacijom, postavljanjem u „sendvič“, a jedan od prisutnih modela limesa je asimptota kao međa funkcije (Williams, 1991).

U sljedećoj fazi istraživanja Williams (1991) je studentima postavio dvije tvrdnje, međusobno proturječne, koje su trebali opovrgnuti ili opravdati. Tvrdnje su služile kao „otkrivajuće“ situacije i zadane su kao izjave dva studenta kako funkcija nikad ne dostiže svoj limes odnosno kako nije bitno dostiže li ili ne funkcija limes nego kako se ona ponaša u blizini zadane točke. Studenti su rješavali zadatke oslanjajući se na odabranu tvrdnju. Tvrdnje i zadaci odabrani su tako da stvore „proturječnu“ situaciju s postojećim modelima kako bi izazvali kognitivni konflikt i potaknuli izgradnju primjerenije definicije limesa. Provedena aktivnost izazvala je konflikt, ali ne pravu kognitivnu promjenu modela limesa ispitanih studenata (Williams, 1991). Različite definicije odnosno opise limesa prepoznali su istinitima jer su valjani u određenim situacijama, čime su studenti pokazali manjak razumijevanja istinitosti matematičke tvrdnje (Williams, 1991). Primjere, koji su trebali dovesti do konflikta, smatrali su iznimkom od ustaljenih i usvojenih pravila i nisu stekli potrebu za kognitivnom promjenom; preferirali su jednostavnije i praktične modele, poput dinamičke interpretacije limesa funkcije, koji su primjenjivi u zadacima s kojima se susreću te studenti ne koriste konceptualne modele limesa koje su razvili nego angažiraju poznate procedure (Williams, 1991). Studenti su tvrdili kako nije potrebno promatrati limes u točki kod neprekidnih funkcije i posebno su se pouzdali u formulu i graf funkcije pri određivanju limesa. Williams (1991) je protumačio kako njihovo pouzdanje dolazi od baratanja isključivo s poznatim funkcijama, bez razmišljanja o specifičnim svojstvima (atipičnih) funkcija. Poučavanje koje bi doprinijelo razvijanju potpunih i formalnih koncepata Williams (1991) je našao u pažljivim i usmjerenim instrukcijama uz odabranu široku lepezu različitih primjera. Postavljeni zadaci trebaju zahtijevati angažiranje alternativnih, kvalitetnijih modela koji su bliski formalnoj definiciji limesa.

Pojam limesa i odgovarajući proces poučavanja istražuju se i unutar teorije APOS, čije je glavne ideje predstavio E. Dubinsky (1984). Prema toj teoriji pojedinac matematički koncept prvo doživljava kao *akciju*. Akcija je svaka transformacija postojećih objekata u novi objekt poduzeta s obzirom na neki zahtjev okoline. Ponavljanjem i refleksijom može ju se interiorizirati u mentalni *proces*. Manipulacijom i rasuđivanjem o procesima koncept se zatvara u mentalni *objekt*. *Shemu* čini koherentna kolekcija akcija, procesa i objekata i drugih shema međusobno povezanih tako da mogu doprinijeti rješavanju problema. Shema je element koji je proizašao iz teorijskih istraživanja i nadograđuje postojeću strukturu teorijskog okvira jer manipulacijom shema mogu nastati novi objekti (Cottrill i sur., 1996).

Istraživački proces unutar APOS teorije provodi se u ciklusima (Cottrill i sur., 1996). Teorijska, matematička i epistemološka saznanja koriste izgradnji polazne genetičke dekompozicije koncepta koji se istražuje. Dizajniraju se instrukcije usmjerene stvaranju određenih misaonih konstrukcija koje su dijelom genetičke dekompozicije koncepta. Nakon poučavanja ispituje se jesu li studenti ostvarili predviđenu kognitivnu konstrukciju i koje instrukcije su doprinijele tomu. Opservacija i interpretacija ishoda procesa poučavanja dovode do modifikacije genetičke dekompozicije. Poučavanje, realizacija i interpretacija te teorijski okvir stalno koreliraju i međusobno se nadopunjuju (Cottrill i sur., 1996).

Cottrill i sur. (1996), suprotno nekim istraživanjima, snažnu i pravilnu dinamičku koncepciju limesa odabrali su kao polazište stjecanju formalne definicije limesa. Istaknuli su kako je limes prvi koncept u matematičkom obrazovanju koji se ne izgrađuje direktnim računanjem i tu se jasno očituje razlika akcije i procesa. Cottrill i sur. (1996) dali su genetičku dekompoziciju koncepta limesa koja započinje akcijom izračunavanja vrijednosti funkcije za jedan odnosno nekoliko argumenata koji su u blizini ili jednaki zadanom broju. Opisana konstrukcija dovodi do usvajanja dinamičkih procesa približavanja po osi apscisa i osi ordinata. Koordinacija tih procesa djelovanjem funkcije je shema približavanja funkcije limesu. Limes kao objekt nastaje manipulacijom koordinirane sheme približavanja vrijednosti funkcije limesu. Genetička dekompozicija predviđa daljnje nadopunjavanje sheme približavanja upotrebom nejednakosti, intervala te kvantifikatora do formalne definicije limesa. U provedenom istraživanju studenti nisu prešli dalje od prva četiri koraka genetičke dekompozicije (Cottrill i sur., 1996). Posebno, studenti imaju teškoće odmaknuti se od akcije izvrednjavanja funkcije za jedan argument, usvojiti proces približavanja po kodomeni te primijeniti funkciju na procese približavanja za konstrukciju sheme „kad $x \to a$ onda $f(x) \to L$“.

Cottrill i sur. (1996) su osmislili računalni program za podršku implementacije sheme približavanja u poučavanju. Zaključili su kako je limes složena shema u kojoj su istaknute koncepcije dinamičkih procesa i kvantifikatora. Slično, Cornu (1991) je istaknuo kako je definicija limesa iskazana koordinacijom dva procesa, a ne kombinacijom dva koncepta.

Swinyard i Larsen (2012) nadogradili su proces poučavanja koji su dali Cotrill i sur. (1996), jer su utvrdili kako predložena genetička dekompozicija razvija proces identificiranja, a ne potvrđivanja limesa. Limes su karakterizirali važnim nastavnim sadržajem i objektom edukacijskih istraživanja, jer je to prvi pojam s kojim učenici manipuliraju formalno i apstraktno, te istaknutim temeljnim pojmom u različitim kontekstima matematičke analize.

Koristili su metodu *heurističke izgradnje novog pojma* kako bi odredili na koji način studenti razvijaju proces potvrđivanja limesa i kako ga formaliziraju u definiciju limesa. Formalno znanje nije ponuđeno i nije potrebno uklopiti ga u postojeća neformalna znanja. Studenti trebaju koristiti vlastita neformalna znanja kako bi otkrili formalne matematičke sadržaje na temelju danih primjera i kontraprimjera, koji mogu imati podrijetlo iz konteksta povijesnih matematičkih otkrića. Instrukcije i diskusije u istraživanju Swinyarda i Larsena (2012) provodile su se isključivo interpretacijom na grafičkim prikazima. Rezultate Cotrilla i sur. (1996) koristili su za analizu neformalnih znanja studenata i osmišljavanje zadataka.

Rezultati su pokazali kako je za formalnu definiciju limesa nužno fokus rasuđivanja postaviti na promjenu vrijednosti ordinata te pravilno tumačiti ideju proizvoljno odnosno beskonačno maloga ili bliskoga (Swinyard i Larsen, 2012; Tall, 1992). Proces koji se formalizira u definiciju limesa je kontinuirano smanjivanje intervala oko potencijalnog limesa (Swinyard i Larsen, 2012). Promatranjem limesa funkcije u beskonačnosti ispitanici su uspjeli nadvladati dvije navedene teškoće te iskazati formalnu definiciju limesa funkcije u beskonačnosti i po uzoru na nju definiciju limesa funkcije u točki. Ispitanici su kao primjere funkcija koje imaju limes u beskonačnosti naveli: konstantu funkciju, funkciju koja se približava svojoj horizontalnoj asimptoti i oscilirajuću funkciju kojoj se amplituda približava nuli (Swinyard i Larsen, 2012).

Swinyard i Larsen (2012) su predložili kako studenti diferencijalnog i integralnog računa trebaju svladati sve korake predložene izmijenjene genetičke dekompozicije koji uključuju: razvijanje snažne dinamičke koncepcije limesa, prebacivanje fokusa na proces približavanja po osi ordinata, razvijanje procesa potvrđivanja limesa sužavanjem intervala oko vrijednosti limesa te formalizaciju definicije upotrebom nejednakosti i kvantifikatora.

Roh (2008) je ispitivao kako prethodno stečene slike koncepta limesa utječu na razumijevanje formalne definicije limesa niza. Studenti su trebali izvrednjavati i grafički prikazati različite nizove te utvrditi jesu li konvergentni i ako da koji je njihov limes. Studenti su u ispitivanju koristili ε-trake, prozirne trake različite širine s crvenom linijom u sredini po kojoj se poravnava potencijalni limes niza na grafičkom prikazu. Studenti su trebali odrediti koliko članova niza se nalazi izvan odnosno unutar ε-trake te odabrati koja od dvije „izjave studenata“ o limesu niza je ispravna (A: beskonačno mnogo članova je unutar i B: konačno mnogo članova niza je izvan ε-trake).

Roh (2008) je tvrdio kako studenti nisu razlikovali dvije izjave zbog nedostatka iskustva s netipičnim primjerima nizova ili poznavanja komplementa beskonačnog skupa. Kad su studenti odabrali jednu izjavu kao ispravnu bili su konzistentni pri svrstavanju nizova koji ju zadovoljavaju i Roh (2008) je razlikovao tri grupe studenata:

1. Studenti koji nisu prihvatili dane izjave kao ispravne nisu uvažili jednakost ili osciliranje vrijednosti članova niza s obzirom na limes. Roh je opisao kako su limes

niza poistovjetili s asimptotom u smislu da se vrijednosti članova niza približavaju, ali nisu jednake limesu i ne prelaze ga kao asimptotu. Studenti u ovoj grupi su prepoznali limes monotonih i omeđenih nizova, nisu prepoznali limes konstantnog niti oscilirajućeg niza ili kombinacije takvih.

2. Studenti koji su odabrali prvu izjavu kao ispravnu su prihvatili višestruke limese niza, odnosno gomilišta niza su interpretirali kao limese niza.
3. Studenti koji su odabrali ispravnu izjavu kao opis limesa niza su uspješno riješili postavljene zadatke. Roh (2008) je istaknuo kako ovi studenti izraz *približavati* koriste u manje doslovnom, kolokvijalnom smislu riječi.

Roh (2008), slično kao Cottrill i sur. (1996), je dinamičku sliku koncepta limesa prepoznao važnom za razvijanje formalne definicije. Diskutirao je kako aktivnosti s ε-trakom uz raznovrsne primjere nizova mogu ukloniti epistemološke prepreke stjecanju formalne definicije limesa i razotkriti nekompatibilne, prethodno stečene slike o konceptu.

2.2. Pregled istraživanja matematičkog obrazovanja vezanih uz asimptotu

Kidron (2011) je istraživala iskustvo učenja formalne definicije horizontalne asimptote jedne studentice. Motivacija za istraživanje su bile učestale interpretacije horizontalne asimptote kao pravca kojemu se graf funkcije približava i s kojim nema zajedničkih točaka. Cilj istraživanja je bio izgraditi definiciju horizontalne asimptote pomoću limesa funkcije u beskonačnosti rješavanjem zadataka koji uključuju situacije konflikta s postojećom slikom koncepta. Teorijska podloga istraživanja je model *apstrakcije u kontekstu*, koji omogućuje opisivanje epistemoloških akcija poduzetih pri izgradnji novog znanja (Kidron, 2011). Prema tom modelu apstrakcija nastaje iz manje razvijene ideje povezivanjem i usustavljivanjem kognitivnih rezultata u koherentnu strukturu. Tri vrste aktivnosti potrebne su za stvaranje novog znanja: (1) *prepoznavanje* matematičke strukture u danoj situaciji, (2) *izgradnja* rješenja dane situacije korištenjem postojećih struktura, (3) *konstrukcija* nove strukture povezivanjem i organiziranjem znanja stečenih prethodnim aktivnostima. Kidron (2011) je istaknula kako je za razumijevanje i izgradnju matematičkih koncepata izuzetno važno koristiti i povezivati različite prikaze matematičkih objekata: analitički, algebarski, grafički, simbolički i druge.

Slika koncepta horizontalne asimptote kod studentice je podrazumijevala graf funkcije koji se za sve veće x poravnava i približava pravcu koji mu je asimptota. Kidron (2011) je tvrdila kako su primjeri kojima je studentica poučavana doveli do djelomično izgrađene slike koncepta koja ne odgovara u potpunosti matematičkoj strukturi. Studentica je rješavala tri zadatka; u prvom je prepoznala horizontalnu asimptotu u situaciji koja odgovara postojećoj slici koncepta. Drugi zadatak je stvorio konflikt zbog kojega se slika koncepta morala prilagoditi tako da uključuje činjenicu kako asimptota može imati sjecište s grafom funkcije. Treći zadatak je bio primjer funkcije koja oscilira oko svoje horizontalne asimptote i stvorio je takvu situaciju konflikta zbog koje je bila nužna značajna promjena u slici koncepta. Studentica je koristila znanja grafičkog prikazivanja, algebarske manipulacije i infinitezimalnog računa kako bi osmislila i opravdala svoje rješenje. Nova konstrukcija u slici koncepta je povezala postojanje horizontalne asimptote grafa funkcije s postojanjem broja kojemu se vrijednosti funkcije u beskonačnosti približavaju, što je konstrukcija usklađena s formalnom definicijom (Kidron, 2011).

Yerushalmy (1997) je ispitivala razvijanje semantike definicija asimptota racionalnih funkcija tijekom poučavanja vođenim otkrivanjem uz pomoć grafičke tehnologije. Istaknula je kako poznavanje procedura nije dovoljno za rasuđivanje o asimptotama koje zahtjeva razumijevanje složenijih matematičkih koncepata. U tu svrhu je osmislila, provela, opisala i interpretirala tri aktivnosti od kojih su dvije nastavne i jedna pisana aktivnost učenika. Učenici su istraživali ponašanje grafova racionalnih funkcija u ovisnosti o polinomima u brojniku i nazivniku, vrstama prekida kod racionalnih funkcija te horizontalnim i kosim asimptotama. Aktivnosti su provedene obrađivanjem pomno odabranih primjera uz pomoć grafičke tehnologije i zajedničkom diskusijom pod vodstvom nastavnika. Korišteni softver omogućavao je istovremenu provedbu aritmetičkih operacija na funkcijama i prikazivanje grafova tih funkcija (racionalna funkcija je količnik dvaju polinoma).

Učenici su formulirali definiciju vertikalne asimptote kao „okomitog pravca koji postoji samo za argument u kojem funkcija nije definirana pri čemu vrijednosti funkcije teže u pozitivnu ili negativnu beskonačnost“ (Yerushalmy, 1997). Za istraživanje horizontalne asimptote primjeri su odabrani tako da učenici

1. prepoznaju sličnosti i razlike između vertikalne i horizontalne asimptote,
2. osmisle proceduru određivanja horizontalne asimptote,
3. utvrde ponašanje funkcije u beskonačnosti i spoznaju ograničenost tehnologije za prepoznavanje odnosa pravca i grafa funkcije u beskonačnosti (je li pravac tangenta ili asimptota),
4. prepoznaju topologiju odnosa asimptote i grafa funkcije, posebno kako horizontalna asimptota može sjeći graf funkcije.

Iskazali su sljedeće karakteristike horizontalne asimptote (Yerushalmy, 1997, str. 12-13):

- *„Horizontalna asimptota je pravac koji je paralelan jednoj koordinatnoj osi i približava se krivulji u beskonačnosti.“*
- *„To je pravac kojemu je nagib nula.“*
- *„Funkcija koja ima horizontalnu asimptotu je racionalna funkcija koja ima broj K za koji je limes funkcije u beskonačnosti jednak K.“*
- *„Ako postoji horizontalna asimptota stupanj brojnika mora biti veći ili jednak stupnju nazivnika“* (djelomično krivo).

Razumijevanje pojma horizontalne asimptote Yerushalmy (1997) je ispitivala zadatkom određivanja funkcije čiji graf se nalazi između grafa zadane funkcije i njezine horizontalne asimptote. Učenici su spretno odredili horizontalnu asimptotu naučenom procedurom, ali su netočno tumačili semantiku približavanja kao konačno dodirivanje negdje na području definicije funkcije i iskazali kako nije moguće smjestiti krivulju između grafa funkcije i njegove asimptote (Yerushalmy, 1997). Većina ponuđenih rješenja je proizašla iz održavanja stupnjeva polinoma u brojniku i nazivniku ili umanjivanja vrijednosti slobodnih koeficijenata zadane racionalne funkcije (Yerushalmy, 1997).

U posljednjoj aktivnosti provedenog istraživanja učenici su trebali predložiti takve polinome koji najbolje opisuju danu racionalnu funkciju. Jednadžbu pravca koji je kosa asimptota racionalne funkcije učenici su prepoznali kao količnik polinoma u brojniku i nazivniku. Yerushalmy (1997) je protumačila kako je uspostavljanju ove veze doprinijela aktivnost istraživanja ovisnosti racionalne funkcije o polinomima u brojniku i nazivniku. Učenici su pojasnili kako ostatak pri dijeljenju polinoma u brojniku i nazivniku postaje zanemariv kad x teži u beskonačnost (Yerushalmy, 1997). Nije dovoljno promatrati koje su vrijednosti funkcije kad x teži u beskonačnost nego koliko brzo teži beskonačnosti odnosno grafu koje funkcije se graf promatrane funkcije približava (Graham i sur., 1988; Yerushalmy, 1997).

Semantika asimptota racionalnih funkcija u provedenim aktivnostima razvijena je neovisno o procedurama određivanja asimptota racionalnih funkcija (Yerushalmy, 1997). Poznavanje procedura nije bilo nužno za rješavanje zadataka, poučavane su nakon istraživanja generičkih primjera i onda kada su se pokazale potrebnima za rješavanje problema te je na njihovu demonstraciju i uvježbavanje utrošeno kratko vrijeme (Yerushalmy, 1997).

Pozitivni ishodi učenja samostalnim istraživanjem asimptotskog ponašanja racionalnih funkcija uz pomoć grafičke tehnologije pokazani su u Mok (1999). Implementirao je kognitivni model poučavanja, koji se temelji na kognitivnom konfliktu i medijaciji nastavnika, uz upotrebu grafičkog kalkulatora. Kognitivni konflikt potiče učenike, kad nisu u stanju postojećim strategijama riješiti problem, stvoriti i aktivirati novo znanje i strategije, a uloga nastavnika je stvoriti okruženje i prilike kojima će učenika potaknuti na takav napredak (Mok, 1999).

Zbog različitog predznanja učenici su podijeljeni u dvije skupine u kojima su se provodile različite aktivnosti. Učenici koji su istraživali horizontalne pomake funkcije $f(x) = 1/(x+a)$, s naglaskom na vertikalnu asimptotu, trebali su učestalu pomoć i usmjerenje nastavnika. Mok (1999) je protumačio kako zbog nedostatka navike vlastitog obrazlaganja matematičke aktivnosti učenici daju nepotpune, neprecizne i nekorektne odgovore. U drugoj skupini učenicima je grafička tehnologija omogućila uvid kako točka prekida funkcije nije nužno argument vertikalne asimptote, nego je potrebno da ordinata teži beskonačnosti. Ispitivanjem vrijednosti funkcije za velike argumente učenici su otkrili stalnost kvocijenta ordinate i apscise te ponašanje funkcije za $x \to +\infty$ opisali konstantnim nagibom; spoznali su kako postoje kose asimptote te da su horizontalne asimptote njihov poseban slučaj (Mok, 1999).

2.3. Teorijski okvir

2.3.1. Antropološka teorija didaktike i didaktička transpozicija

Francuski matematičar Yves Chevallard početkom 1980-tih postavlja temelje antropološke teorije didaktike (ATD). U svojim začecima ATD je usko vezan uz Teoriju didaktičkih situacija Guya Brousseaua. ATD je nastao i opstao u francuskoj didaktici matematike, a procvat je doživio u španjolskim govornim područjima. Primarno je namijenjen za potrebe istraživanja matematičkog obrazovanja, ali se uspješno koristi u didaktikama prirodnih, društvenih i umjetničkih disciplina, muzeografiji, šahu i drugom. ATD je neovisan o pedagogiji, koja je usmjerena unapređivanju nastavne prakse i psihologiji, koja je usmjerena na osobine pojedinca (Chevallard, 1981, 1992, 2007). Posebice, proširuje ideju didaktičkog trokuta nastavnika, učenika i poučavanog sadržaja kao osnovu svakog obrazovnog sustava. S jedne strane, uspjeh učenika ne ovisi samo o njegovim sposobnostima, nastavnom procesu kojim upravlja nastavnik ili njihovom međuodnosu, nego sadržaju koji se poučava i uči te brojnim vanjskim činiteljima. S druge strane, istraživanja matematičkog obrazovanja unutar ATD-a usmjerena su na objekt matematičkog znanja – kako on određuje proces poučavanja i učenja te kako zahtjevi obrazovnog sustava određuju realizaciju objekta znanja.

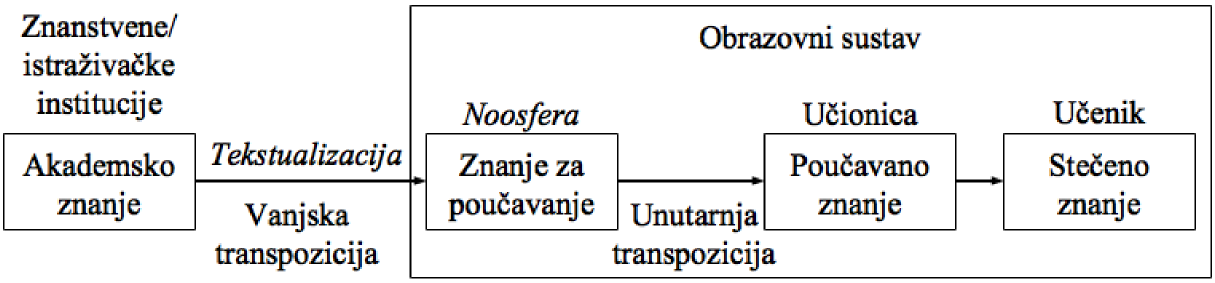
Bosch i Gascón (2006) su istaknuli tri doprinosa Chevallardovog pristupa za istraživanja matematičkog obrazovanja. Prvo, mijenja se i proširuje objekt istraživanja. Središte obrazovnog procesa je objekt matematičkog znanja, a njegova realizacija u nastavnom procesu tumači se, osim međuodnosom učenika i nastavnika prema znanju, raznolikim vanjskim činiteljima koji su dijelom procesa didaktičke transpozicije. Drugo, implementira se prakseologija kao prikladan model za opisivanje matematičkih i didaktičkih aktivnosti i treće, prepoznaje se doseg i opseg djelovanja na obrazovni proces na skali didaktičke određenosti.

ATD didaktičke probleme stavlja pod utjecaj institucija obrazovnog sustava umjesto individualnih karakteristika sudionika nastavnog procesa (Bosch, 2012; Bosch, Chevallard i Gascón, 2005; Bosch i Gascón, 2006, 2014; Chevallard i Bosch, 2014; Winsløw, 2011). ATD razmatra stavove, znanja i sposobnosti pojedinca kao kolektivne konstrukcije institucija unutar kojih djeluje ili je djelovao, čije norme i pravila prihvaća i čijem razvoju pridonosi (Bosch, 2012; Bosch i Gascón, 2014).

Temeljni problem izučavanja ATD-a je relacija $R_I(p,O)$ između *objekta znanja O* i pojedinca koji unutar *institucije I* ima poziciju *p* (Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2013). Relacija $R_I(p,O)$ je podložna institucionalnim *uvjetima* i *ograničenjima* (Bosch, 2012; Bosch i Gascón, 2014; Chevallard, 1992, 2012; Chevallard i Sensevy, 2014). Uvjeti na objekt znanja *O* određuju okolnosti pod kojima se ostvaruje odnos pojedinca *p* prema objektu znanja *O*. Ograničenja su oni uvjeti koje pojedinac i institucija ne mogu promijeniti i koji utječu na razvoj objekta znanja *O* unutar institucije *I*. Prema Chevallardu (2012) temeljno pitanje didaktike je:

> S obzirom na skup ograničenja postavljen na relaciju $R_I(p,O)$, kakve uvjete mogu pojedinac *p* i institucija *I* postaviti, stvoriti ili promijeniti kako bi pojedinac *p* ostvario određeni odnos prema objektu znanja *O*?

ATD znanstveno utemeljeno određuje uvjete i ograničenja pod kojima objekt znanja *O* nastaje i mijenja se u različitim institucijama prije nego što postane dijelom relacije $R_I(p,O)$ u obrazovnom sustavu i taj proces naziva *didaktičkom transpozicijom* (Bosch i Gascón, 2014; Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2013).



Slika 2.3.1: Didaktička transpozicija (Winsløw, 2011)

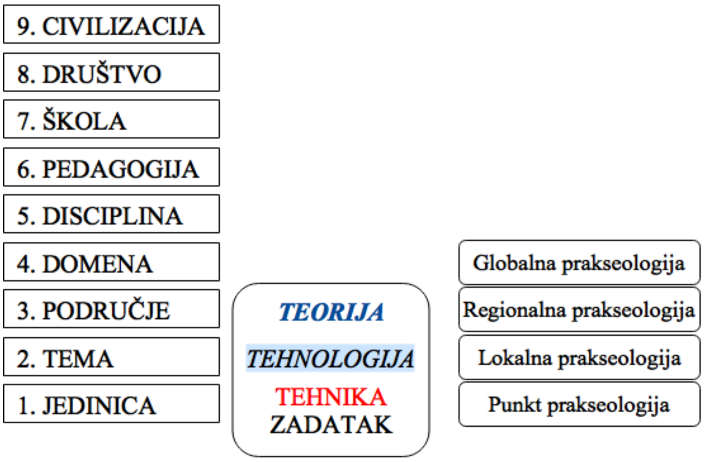
Neka obilježja didaktičke transpozicije su institucionalna relativnost znanja, postojanje izvornog objekta znanja i poučljivost objekta znanja (Bosch i sur., 2005; Bosch i Gascón, 2006; Chevallard, 1981, 1988, 2007; Chevallard i Bosch, 2014). Kada izvorna obilježja objekta znanja *O* nije moguće replicirati s obzirom na uvjete institucije *I*, potrebno je objekt znanja *O* dekonstruirati i rekonstruirati do objekta znanja *O'*, koji u novom obliku egzistira unutar institucije *I*. Objekt znanja *O'* nastao je transpozicijom izvornog objekta znanja *O*. Izvorni objekt znanja naziva se *akademsko znanje*, mora biti integrirana, koherentna, funkcionalna struktura i najčešće je produciran u znanstveno-istraživačkim ustanovama. Didaktička transpozicija obuhvaća sve promjene koje akademsko znanje prolazi kako bi postalo \`poučljivo´ odnosno primjereno poučavanju.

Didaktička transpozicija odvija se u tri koraka (Bosch i sur., 2005; Bosch i Gascón, 2006, 2014; Chevallard, 1992; Chevallard i Bosch, 2014). Značajnu ulogu u procesu didaktičke transpozicije ima *noosfera*, sfera osoba koje razmišljaju (*noos*, grč. misliti) i odlučuju o obrazovanju. Noosfera djeluje kao posrednik između zahtjeva društva i znanosti te mogućnosti obrazovnog sustava. U prvom koraku didaktičke transpozicije ili vanjskoj transpoziciji u odnosu na obrazovni sustav (Slika 2.3.1), noosfera prepoznaje akademski objekt znanja vrijednim za poučavanje. Objekt znanja može imati:

- epistemološku vrijednost – objekt znanja je relevantno akademsko znanje;
- kulturnu vrijednost – objekt znanja je interesantan i koristan u društvu;
- funkcionalnu vrijednost – objekt znanja doprinosi rješavanju problema i poznavanju drugih objekata znanja (Chevallard, 1992, 2012; García, Pérez, Higueras i Casabó, 2006).

Akademsko znanje se oblikuje i iskazuje *tekstualizacijom* kao *znanje za poučavanje*. Proizvodi tekstualizacije su različiti obrazovni dokumenti, kojima institucija obrazovnog sustava informira svoje sudionike o uvjetima i ograničenjima koje postavlja na objekt znanja: kurikulum, programi, udžbenici, priručnici za nastavnike, didaktički materijali i drugo. Drugi korak didaktičke transpozicije je nastavnikova interpretacija objekta znanja u skladu sa zahtjevima znanja za poučavanje, odakle nastaje *poučavano znanje* kojemu nastavnik u učionicama poučava učenike. Krajnji produkt didaktičke transpozicije jest *stečeno znanje* učenika. Unutarnju transpoziciju čine zadnja dva koraka didaktičke transpozicije (Slika 2.3.1).

Uvjeti i ograničenja ostvarivanja relacije $R_I(p,O)$ ovise o prirodi sadržaja objekta znanja *O* i o čimbenicima irelevantnima matematici i mogu se hijerarhijski rasporediti na devet razina *didaktičke određenosti* (Barbé i sur., 2005; Bosch, 2012; Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2011). Disciplinarne razine: domena, područje, tema i jedinica (Slika 2.3.2), uglavnom su posljedica vanjske transpozicije i određene kurikulumom. Supradisciplinarne razine određenosti su *pedagogija* kao skup normi i uvjeta poučavanja jednakih za sve discipline, *škola* kao zakonski organizirana institucija, *društvo* koje okuplja različite institucije koje upravljaju obrazovnim sustavom i *civilizacija* kojom se obuhvaćaju kulturološke norme i tradicije društva (Slika 2.3.2). Razine discipline i pedagogije ključne su kod istraživanja prijelaza između različitih obrazovnih institucija, a društva i civilizacije kod međunarodnih, komparativnih istraživanja. Većina istraživanja matematičkog obrazovanja usmjerena je na temu ili jedinicu.



Slika 2.3.2: Razine didaktičke određenosti, sastavnice i opseg prakseologija

Međunarodno istraživanje *Trends in Mathematics and Science Study* koje ispituje kompetencije učenika iz matematike i prirodoslovlja razlikuje tri razine kurikuluma: predviđeni, primijenjeni i postignuti kurikulum. Predviđenim kurikulum smatra se ono što *društvo* očekuje i propisuje da učenik treba znati uključujući organizaciju obrazovnog sustava kojom je omogućeno ostvarivanje postavljenih zahtjeva. Primijenjeni kurikulum čini ono što se zapravo poučava, karakteristike osoba koje poučavaju i načini kako se poučava, dok se postignuti kurikulum odnosi na to što su učenici naučili i što misle o samom predmetu. U usporedbi s didaktičkom transpozicijom razine kurikuluma zadane TIMSS-ovim okvirom su redom *znanje za poučavanje*, *poučavano znanje* i *stečeno znanje*. Didaktička transpozicija proširuje opisani okvir jer prepoznaje egzistenciju objekta znanja izvan obrazovnog sustava. Izvorno znanje je prethodnik predviđenog kurikuluma i ATD razmatra promjene koje *društvo* poduzima na izvornom objektu znanja kroz proces tekstualizacije.

Znanje koje se poučava u školi svoje podrijetlo i valjanost (legitimnost) povlači od akademskog znanja. No slijedom djelovanja različitih institucija u procesu didaktičke transpozicije školsko i akademsko znanje se mogu značajno razlikovati u strukturi, značenju i funkciji. Time se pred nastavnike i učenike postavljaju matematički, didaktički, pedagoški, društveni i drugi uvjeti i ograničenja, koji mogu otežati ili čak osujetiti razvoj obrazovnog procesa. Nužno je poznavati izvorni oblik i vrijednost objekta znanja, razmotriti uzroke i obilježja svih transformacija te utjecaje svih institucija uključenih u proces transpozicije kako bi razumjeli specifičnosti realizacije objekta znanja u nastavnom procesu. Mnogi fenomeni matematičkog obrazovanja mogu se objasniti obilježjima procesa didaktičke transpozicije (Bosch i Gascón, 2006). Analiza didaktičke transpozicije objekta znanja daje saznanja o obrazovnom sustavu koja se mogu iskoristiti za institucionalne i kurikulumske intervencije (Winsløw, 2011).

2.3.2. Prakseologija i referentni epistemološki model

ATD matematičko znanje i aktivnosti unutar institucije modelira *prakseologijom* [T,τ,θ,Θ] koja se sastoji od praktičnog dijela – *praxis*, koji čine *tip zadatka T* i *tehnika τ,* te diskurzivnog dijela – *logos,* koji se sastoji od *tehnologije θ* i *teorije Θ* (Barbé i sur., 2005; Bosch, 2012; Bosch i sur., 2005; Bosch i Gascón, 2006; Chevallard, 2005). Nazivi p*raxis* i *logos* potječu od grčkih riječi kojima se opisuje aktivnost slobodnih ljudi odnosno ljudsko mišljenje i rasuđivanje. Dva dijela prakseologije su neodvojivi, povezani i jednakovrijedni. Posebno, svaka praktična ljudska aktivnost jest ili treba biti pojašnjena i opravdana odnosno znanstveno spoznata, dok se za svaku teorijsku spoznaju teži ostvariti primjena u rješavanju problema. Prakseologije mogu biti nedovršene, nepotpune, intuitivne ili rutinirane.

Jedna *punkt-prakseologija* je četvorka [T,τ,θ,Θ] određena pojedinačnim problemom (Bosch, 2012; Bosch i Gascón, 2014; Chevallard, 2007; Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2011). Pritom tip zadatka *T* predstavlja problem, pitanje, odnosno zadaću koju treba riješiti, a aktivnosti koje se provode kako bi se dani zadatak riješio čine tehniku τ. Tehnika nastaje generaliziranjem rješenja jednog zadatka i zajednička je zadacima istog tipa. Winsløw (2011) je opisao najjednostavniji oblik učenja prepoznavanjem tipova zadataka koji se mogu riješiti istom tehnikom. *Logos* je teorijska podrška *praxisu*. Tehnologija θ je okvir koncepata, procedura i tvrdnji koji smisleno obrazlaže i opravdava tehniku, kontrolira rješenje i osmišljava nove tehnike. Naziv tehnologija, kao diskurs o tehnici, dolazi od grčkih riječi *technè* i *logos*. Teorija Θ je koherentni sustav pojmova, definicija, modela, tvrdnji i dokaza koji na apstraktnoj razini potvrđuje tehnologiju. Razvijena diskurzivna komponenta prakseologije pojedincu omogućava zadržavanje aktivnosti i njezino prenošenje u komunikaciji s drugima (Hardy, 2009).

Prakseologije mogu biti različitog opsega, a najjednostavnija je punkt-prakseologija. Jedna tehnologija može diskurzivno podržati veći broj tehnika koje se primjenjuju na različite tipove zadataka. Familija više praktičnih blokova sa zajedničkom tehnologijom naziva se *lokalna prakseologija*, kakve, s obzirom na zajedničku teoriju, povezujemo u *regionalnu prakseologiju,* a njihovim usustavljivanjem unutar institucije ili discipline dobivamo *globalnu prakseologiju* (Barbé i sur., 2005; Bosch i Gascón, 2014; Winsløw, 2011).

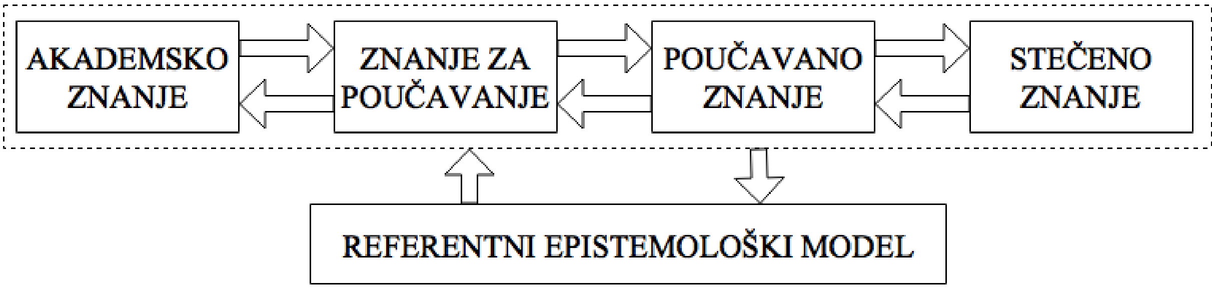
Objekt znanja *O* može činiti jedna prakseologija, skup složenih prakseologija ili dio prakseologije, koje je neka institucija prepoznala kao važno znanje (Chevallard, 2007;

Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2013). Objekt znanja može biti različitog opsega s obzirom na disciplinarne razine didaktičke određenosti (Bosch i Gascón, 2006; Chevallard i Sensevy, 2014; Winsløw, 2011). Pri tom lokalna prakseologija odgovara temi, regionalna prakseologija području, a globalne prakseologije su matematičke domene poput algebre, geometrije, aritmetike, diferencijalnog i integralnog računa i drugih (Slika 2.3.2). Učenje i istraživanje objekta znanja podrazumijeva analizu prakseoloških sastavnica i *raisons d'être* objekta znanja odnosno kako objekt znanja nastaje, koje problema rješava, kojim znanjima doprinosi i koja je njegova vrijednost.

Proces didaktičke transpozicije objekta znanja *O* treba promatrati izvan institucija obrazovnog sustava, što se ostvaruje izgradnjom *referentnog epistemološkog modela* (REM) (Barbé i sur., 2005; Bosch, 2012; Bosch i sur., 2005; Bosch i Gascón, 2006, 2014; Chevallard i Bosch, 2014; Winsløw, 2011). REM je istraživačev radni model za objekt znanja, odnosno hipoteza s obzirom na koju se provodi analiza svih procesa i predstavnika didaktičke transpozicije (Slika 2.3.3). Istaknuti su sljedeći zahtjevi:

- REM treba empirijski utemeljiti, ispitati i razvijati!
- REM treba potkrijepiti podacima iz svih institucija uključenih u proces didaktičke transpozicije. Treba obuhvaćati matematičke sadržaje vezane uz objekt znanja, tako da bude usklađen sa znanjem za poučavanje i legitimiran akademskim znanjem.
- REM treba uvažiti saznanja epistemoloških i znanstvenih istraživanja. U prvom slučaju to podrazumijeva voditi računa o didaktičkim fenomenima učenja i poučavanja odabranog objekta znanja te preporučenim i primjerenim aktivnostima iz prethodnih istraživanja.

  S druge strane, treba integrirati *raison d'être* objekta znanja, aktivnosti koje otkrivaju njegovu epistemološku i kulturnu te funkcionalnu vrijednost, odnosno mogućnost razvoja objekta znanja do takvog *praxisa* i *logosa* koji otvaraju nova pitanja i probleme i motiviraju novo znanje.
- REM treba biti neovisan o institucionalnim modelima objekta znanja ili predodžbama o objektu znanja koje su karakteristične za neku instituciju. Nadalje, ne smije biti podložan utjecajima i ograničenjima koji dolaze od institucija obrazovnog sustava, akademske zajednice ili društva.
- REM treba modelirati pomoću prakseologija. Model je izgrađen od složenih, potpunih i međusobno povezanih prakseologija koje doprinose koherentnosti matematičkog sadržaja. Model mogu činiti prakseologije različitog opsega, lokalne ili regionalne prakseologije ili skup prakseologija rastuće složenosti.



Slika 2.3.3: Odnos referentnog epistemološkog modela sa sastavnicama didaktičke transpozicije (Chevallard i Bosch, 2014)

2.3.3. Istraživanja matematičkog obrazovanja unutar teorijskog okvira ATD

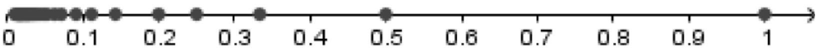
Istraživanja unutar ATD-a provedena su s obzirom na sve značajne matematičke domene, a u posljednje vrijeme naglasak je na matematičkom modeliranju, algebri i diferencijalnom i integralnom računu. García i Ruiz Higueras (2005) su istraživali kako se realizira objekt znanja proporcionalnosti u kurikulumu i udžbenicima viših razreda osnovne škole u Španjolskoj. Prepoznali su kako se u promatranim predstavnicima znanja za poučavanje promiče izgradnja dvaju nepovezanih, međusobno odvojenih prakseologija. U prvom slučaju proporcionalnost je objekt statičke naravi, aktivnost je izračunati nepoznatu vrijednost prema pravilu proporcionalnih veličina u aritmetičkim zadacima. Druga vrsta prakseologije je dinamičke naravi gdje se manipulira proporcionalnosti kao funkcijskom ovisnosti. García i Ruiz Higueras (2005) su predložili istraživati varijacije veličina kroz situacije „planirane štednje“ čime se izgrađuju lokalne prakseologije. Takve potpune, značajne i složene prakseologije se u srednjoškolskom obrazovanju mogu nadograditi u regionalnu prakseologiju funkcijskih ovisnosti.

Bergé (2007) je ispitivala dostupne prakseologije vezane uz realne brojeve i svojstvo potpunosti skupa realnih brojeva u kolegijima sveučilišnog matematičkog obrazovanja u Argentini. Promatrala je kako se prakseologije razlikuju i razvijaju kroz uzastopne kolegije. Analiza je pokazala kako promatrane institucije-kolegiji sadrže zadatke jednakog sadržaja, ali različitog tipa, jer se rješavaju različitim tehnikama (Bergé, 2007). Berge (2007) je upozorila kako promjena u prakseologijama pri prijelazu među institucijama studentima nije očita i može dovesti do teškoća i kontradikcija. Primjerice, Berge (2007) je u više promatranih institucija-kolegija pronašla zadatak određivanja minimuma, maksimuma, infimuma i supremuma skupa. No, takav zadatak je dio različitih prakseologija odnosno institucionalni modeli takvog zadatka se razlikuju (vidi Primjer 2.1 iz Bergé (2007)).

Primjer 2.1: Zadaci istog sadržaja i različitog tipa

T: Zadan je skup $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. Odredite $\inf A$ i $\sup A$.

τ_1: Očitavanje s grafičkog prikaza i θ: Supremum je najmanja gornja međa skupa



$\max A=1, \inf A=0$

τ_2: Algebarsko manipuliranje i θ: Maksimum je supremum koji je sadržan u skupu

$n\in\mathbb{N}\Rightarrow 0<\frac{1}{n}\le 1$, $1\in A\Rightarrow \max A=1$

τ_2: Algebarsko manipuliranje i θ: Arhimedov aksiom

Neka je za $\varepsilon>0$, $n_0\in\mathbb{N}$ takav da $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0$ vrijedi $\frac{1}{n}<\varepsilon$ i ε nije donja međa. Slijedi $\inf A=0$.

τ_3: Manipuliranje i obrazlaganje i θ: Limes monotonih i omeđenih nizova

Elementi skupa A čine padajući, odozdo omeđen niz koji tada konvergira svom infimumu. Jer je limes niza 0, slijedi $\inf A=0$.

Gonzales-Martin, Giraldo i Souto (2013) su ispitivali kako je znanje za poučavanje vezano uz objekt znanja realnih brojeva organizirano u udžbenicima za srednju školu u Brazilu. Našli su kako su realni brojevi u promatranim udžbenicima prezentirani popisom diskurzivnih sadržaja, posebno, nije istaknut značaj niti potreba za „novim" brojevima, odnosno iracionalni brojevi nemaju svoj *raison d'être*. U udžbenicima se prebacuje naglasak na algebarsko manipuliranje, primjerice aktivnost nalaženja racionalnog broja između dva dana racionalna broja, a zadaci se rješavaju bez angažirane tehnološko-teorijske komponente, primjerice aktivnost klasificiranja broja iracionalnim vođena je *logosom* „nije racionalan" ili „jer sam primijenio pravilo" (González-Martín i sur., 2013). Nadalje, diskurs je dan kao očito pravilo koje se ilustrira ili potvrđuje isključivo primjerima, poput $\sqrt{2}$ je iracionalan broj i nema argumentacije zašto je tako i koje je podrijetlo tog broja.

Udžbenici ne uvažavaju epistemološka saznanja, akademsko znanje niti pedagoške standarde, jer se pretpostavlja kako je objekt znanja koji se definira prethodno poznat, matematičke tvrdnje i svojstva se pravdaju primjerima, te su *logos* i *praxis* kontradiktorni, primjerice iracionalni brojevi su opisani kao beskonačni ne-periodični decimalni brojevi, a u zadacima se koristi konačna aproksimacija na način $\sqrt{2}=1.41$ (González-Martín i sur., 2013).

Zarhouti i sur. (2014) su kombinirali teorijske okvire ATD, Duvalove semiotičke reprezentacije i Vandebrouckove tri perspektive o konceptu funkcije. Posebno, spominjali su udžbenike i interpretacije učitelja kao uvjete koji određuju matematičko obrazovanje. Ispitivali su provode li studenti kognitivne aktivnosti manipulacije unutar grafičkog te konverzije između grafičkog i algebarskog registra i utječu li dva koraka didaktičke transpozicije na uspjeh studenata. Studenti su rješavali odgovarajuće zadatke i iznosili svoja mišljenja o podrijetlu teškoća koje su pokazali. Autori su se usredotočili na crtanje i interpretaciju grafa i svojstava funkcije *f* s obzirom na vrijednosti prve i druge derivacije te limesa, posebice oblika $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Rezultati su pokazali i autori diskutirali kako studenti kod manipulacija unutar grafičkog registra:

- nisu ispravno grafički prikazali promjenu konveksnosti *zbog* nedostupnih raznolikih primjera u udžbenicima;
- nisu ispravno grafički prikazali dirалište tangente i krivulje *zbog* manjka formalnog opisivanja i marginalizacije pojma koji je dio aktivnosti;
- nisu ispravno grafički prikazali asimptotsko ponašanje i konkavnost krivulje, nego ju poravnavaju paralelno s kosom asimptotom *zbog* zapreka kognitivne prirode – nisu usvojili pojam asimptote i epistemološke prirode – naučili su crtati grafove linearnih i afinih funkcija;

te kod konverzije između algebarskog i grafičkog registra:

- uspješno su računali odgovarajuće limese, ali ih nisu ispravno grafički interpretirali beskonačnim granama grafa funkcije odnosno nisu razlikovali koji limesi predstavljaju asimptotski smjer ili asimptotu grafa funkcije;
- nisu ispravno grafički interpretirali izračunatu drugu derivaciju odgovarajućom točkom pregiba *zbog* složenosti postupka u dva koraka;
- uspješniji su u računanju limesa u beskonačnosti nego jednostranih limesa i nisu uspješni u određivanju položaja grafa funkcije u odnosu na kosu asimptotu *zbog* nedostatka odgovarajućih aktivnosti u matematičkom obrazovanju;
- nisu uspješni u određivanju područja definicije funkcije ili vrijednosti limesa iz grafičkog prikaza *zbog* tipičnih aktivnosti konverzije iz algebarskog u grafički registar, ne obratno – određivali su pravilo pridruživanja grafički prikazane funkcije kako bi utvrdili njezino područje definicije.

Zarhouti i sur. (2014) su istaknuli kako didaktička transpozicija pojma limesa čini kognitivnu zapreku ostvarivanju zadatka crtanja grafa funkcije, primjerice studenti nisu ispravno nacrtali graf funkcije jer su pogriješili pri izvrednjavanju limesa kod formula za jednadžbu kose asimptote. U istraživanju koje su proveli većina studenata je određivala jednadžbu kose asimptote iz odgovarajućih formula, a neki su izvrednjavali limes $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(kx+l)\right)=0$ kako bi potvrdili odabranu asimptotu. Podrijetlo teškoća pri grafičkom prikazivanju funkcije, autori su našli u didaktičkoj transpoziciji koja naglašava perspektivu promatranja funkcije u točki i zanemaruje globalnu perspektivu, ne omogućava realizaciju raznolikih primjera niti reprezentacije ili manipulaciju i konverziju u različitim registrima zbog preopterećenosti kurikuluma i opširnosti samih aktivnosti (Zarhouti i sur., 2014).

Hardy (2009, 2011) je ATD kombinirala s teorijskim okvirom IAD (Institutional Analysis and Development framework), koji se koristi za analizu institucija unutar političkih znanosti. Ispitivala je kako spontani modeli objekta znanja limesa ovise o poziciji pojedinca unutar institucije te kako pravila, norme i strategije institucije utječu na studentovu klasifikaciju zadataka, odabir tehnike i podrijetlo pravdanja. Hardy (2009) uvodi pojam znanja za učenje, koje je podskup znanja za poučavanje i poučenog znanja, kao znanje koje će se kod učenika vrednovati različitim postupcima. Pojasnila je kako antropološkim pristupom epistemološki razlikuje stanja objekta znanja i otkriva kako pojedinci mogu realizirati različite modele objekta znanja. Institucionalni pristup je omogućio ispitivanje utjecaja institucionalne prakse i položaja pojedinca unutar institucije na modele znanja, ponašanja i stavove studenata. Prakseološkom analizom relevantnih dokumenta otkrila je kako, za kolegij diferencijalnog i integralnog računa na promatranom fakultetu, znanje za učenje čine tipični zadaci i tehnike rješavanja, neformalno pravdanje pripada isključivo znanju za poučavanje, dok formalno matematičko pravdanje nije namijenjeno poučavanju (Hardy, 2009). Nadalje, studenti su razvili različite modele znanja izračunavanja limesa algebarskih izraza od nastavnika.
Modeli nastavnika o znanju za učenje temeljeni su na normama, tradiciji i tumačenju danih zadataka kao osnovnih znanja koje studenti trebaju savladati. S druge strane modeli znanja studenata su stvoreni pod utjecajem prethodnih znanja (srednjoškolska algebra), ostvarivanja očekivanja na ispitima te uvježbanih aktivnosti (Hardy, 2009). Studenti su formirali dva tipa modela znanja za učenje limesa: (1) ako x teži konstanti norma je da su izrazi neodređeni i mogu se jednostavno faktorizirati, rješenje se nalazi primjenom neke algebarske tehnike, nije dovoljno samo uvrstiti konstantu; (2) ako racionalni izraz nije moguće jednostavno faktorizirati onda je ili dan limes kad x teži beskonačnosti ili se određuje uvrštavanjem argumenta.
U istraživanju koje je provela Hardy (2011) pokazalo se kako studenti klasificiraju tipove zadataka s obzirom na primjenjivu strategiju rješavanja umjesto matematičkih značajki. U slučaju kad je zadatak rutinski ili nalik rutinskom studenti su primjenjivali algoritamski naučene postupke. Rutinskim zadacima i tehnikama Hardy (2009) je označila one praktične blokove lokalnih prakseologija koji se učestalo javljaju u praksi institucije i time opisuju znanje za učenje. Odabir tehnike su pravdali institucionalno normiranim, očekivanim ponašanjem, a tehnološko-teorijsku komponentu su pripisali pouzdanju u znanje kako ga

prenose odgovorne osobe (Hardy, 2009, 2011). Teorija nije u vlasti studenata nego nastavnika. Pri rješavanju nerutinskih zadataka studenti angažiraju iz dostupnih resursa *praxis* i *logos* svojstven matematičkom mišljenju (Hardy, 2011). Primjenjuju druge tehnike, jer uvježbane nisu primjenjive, i formalno pravdaju vlastitu aktivnost. Hardy (2011) karakterizira ponašanje studenata kao institucionalnih subjekata kad rješavaju rutinske odnosno kognitivnih subjekata kad rješavaju nerutinske zadatke.

Barbé i sur. (2005) su ispitivali restrikcije za poučavanje limesa u španjolskim srednjim školama. Za REM limesa u španjolskim srednjim školama predložili su dvije prakseologije: algebru limesa, koju čini *praxis* izračunavanja limesa i *logos* svojstava limesa, te topologiju limesa, koju čini *praxis* ispitivanja egzistencije limesa funkcije, gdje je pripadni *logos* formalna definicija limesa funkcije. Te su prakseologije međusobno povezane, tako da je tehnologija prakseologije algebre limesa tip zadatka u praktičnom bloku prakseologije topologije limesa. Obje prakseologije dijele teoriju realnih brojeva odnosno diferencijabilnosti funkcija. Opservacijom didaktičkog procesa ispitivali su kako restrikcije različitih institucija utječu na poučavano znanje.

Barbé i sur. (2005) su identificirali dva oblika didaktičkih restrikcija:

1. Specifične didaktičke restrikcije su određene znanjem za poučavanje, posebno struktura matematičke prakseologije utječe na organizaciju i oblikovanje nastavnog procesa.
2. Opće didaktičke restrikcije su određene pedagoškim normama i pravilima, posebno didaktički zahtjevi organizacije nastavnog procesa utječu na oblikovanje matematičkih prakseologija poučavanog znanja.

Didaktički proces je ovisio o učiteljevoj interpretaciji danih podataka (Barbé i sur., 2005). Barbé i sur. (2005) su pronašli kako kurikulum i udžbenici predlažu izračunavanje limesa algebarskih izraza bez odgovarajućeg diskursa i poznavanje definicije limesa bez praktične primjene pri ispitivanju neprekidnosti funkcije ili svojstava limesa. Znanje za poučavanje je modelirano disjunktnom unijom praktičnog dijela prve i teorijskog dijela druge prakseologije REM-a. Istaknuli su kako se limes kvocijenta dviju funkcija nikad ne koristi za istraživanje njihovog asimptotskog ponašanja. Kurikulum nije omogućavao razvoj potpunih matematičkih prakseologija jer je izostavljena diskurzivna komponenta aktivnosti odnosno nisu zadane odgovarajuće praktične primjene za teorijski sadržaj (Barbé i sur., 2005). Općenito, većina matematičkih prakseologija za poučavanje smještena je i fiksirana unutar tema, prakseologije su slabo međusobno povezane i nemaju vezu s višim razinama didaktičke određenosti (Barbé i sur., 2005). Nastavnici ne mogu organizirati takav didaktički proces kojim bi se ostvarile potpune i povezane prakseologije jer je zbog specifičnih restrikcija to izvan njihovog dosega

(Barbé i sur., 2005). Barbé i sur. (2005) su prepoznali dva pristupa matematičkom obrazovanju. ATD preferira konstruktivnu epistemologiju, gdje se prakseologije spoznaju kao rezultat aktivnosti. Ako opći didaktički principi favoriziraju drugi, ‘kvazi-empirijski’ pristup, tada se didaktički proces vrti oko istraživanja zadatka i uvježbavanja tehnike, koje odabire i predlaže nastavnik. Drugim pristupom je onemogućeno nadograđivanje starog znanja, povezivanje matematičkih sadržaja sa zajedničkom tehnološko-teorijskom komponentom unutar domene i korelacija unutar i između disciplina (Barbé i sur., 2005).
Istraživanje koje su proveli Barbé i sur. (2005) pokazuje važnim određivanje i razumijevanje restrikcija i pritisaka s različitih razina didaktičke određenosti kroz analizu procesa didaktičke transpozicije za provedbu kontroliranih i utemeljenih promjena u matematičkom obrazovanju.

Temeljne pretpostavke ATD-a mogu se prepoznati u drugim teorijskim okvirima. Modeli znanja mogu se opisati u terminima prakseologije: za teorijski okvir APOS, genetička dekompozicija je referentni model, akcija odgovara praktičnom bloku, procesi i objekti se ostvaruju na razini tehnologije, shemom se ostvaruju povezane, potpune prakseologije rastuće složenosti; Tall i Vinner razlikuju proceduralno – praktično i konceptualno – diskurzivno znanje. Rezultati istraživanja pokazuju kako zahtjevi znanja za poučavanje određuju realizirane objekte poučavanog i stečenog znanja i kako je matematičko znanje nužno realizirati praktično i diskurzivno.

Prethodna istraživanja unutar ATD-a i drugih teorijskih okvira daju nekoliko značajnih spoznaja o matematičkom obrazovanju. Hijerarhijska i sadržajna organizacija kurikuluma utječe na organizaciju nastavnog procesa (Barbé i sur., 2005; García i Ruiz Higueras, 2005; González-Martín i sur., 2013; Zarhouti i sur., 2014). Unutar ATD-a to se naziva *tematsko zatočenje nastavnika*, a odnosi se na mogućnost nastavnikova manipuliranja prakseologijama isključivo na nižim razinama didaktičke određenosti. Zastupljenost neprimjerenih prakseologija u dokumentima koji određuju znanje za poučavanje može rezultirati teškoćama i konfliktima u stečenom znanju zbog

1. nedostatka odgovarajućeg *logosa* ili *praxisa* objekta znanja (Barbé i sur., 2005; Biza i sur., 2008; Biza i Zachariades, 2010; Cornu, 1991; González-Martín i sur., 2013; Hardy, 2009, 2011; Williams, 1991; Yerushalmy, 1997),
2. naglašavanja praktičnih aktivnosti i/ili zanemarivanja diskurzivnih aktivnosti (Biza i Zachariades, 2010; Cornu, 1991; González-Martín i sur., 2013; Hardy, 2009, 2011; Kidron, 2011; Mok, 1999; Tall i Vinner, 1981; Williams, 1991),

3. nemogućnosti povezivanja i usustavljivanja prakseologija (Barbé i sur., 2005; Bergé, 2007; García i Ruiz Higueras, 2005; Tall, 1992),
4. matematički sadržaj nije poučljiv, ali je epistemološki vrijedan (Barbé i sur., 2005; González-Martín i sur., 2013; Tall, 1992; Vinner, 1991) ili
5. nepoznavanja *raison d'être* objekta znanja (Barbé i sur., 2005; Cornu, 1991; González-Martín i sur., 2013).

Znanje za poučavanje stoga treba formulirati u obliku povezanih, potpunih prakseologija rastuće složenosti, iskazati *raison d'être* objekta znanja, omogućiti usustavljivanje punkt-prakselogija u lokalne prakseologije odnosno povezivanje objekata znanja iz različitih tema, područja i domena, podržavati praktične aktivnosti primjerenim diskursom i dopustiti izgradnju tehnike potaknute problemom i podržane diskursom.

Za realizaciju objekta znanja asimptote potrebno je iz prethodnih istraživanja uvažiti:

- Intuitivno poznavanje asimptote krivulje može doprinijeti razvijanju diskursa o objektu znanja limesa. Objekt znanja limes funkcije koristi uspostavljanju formalnog diskursa o asimptotskom ponašanju krivulja.

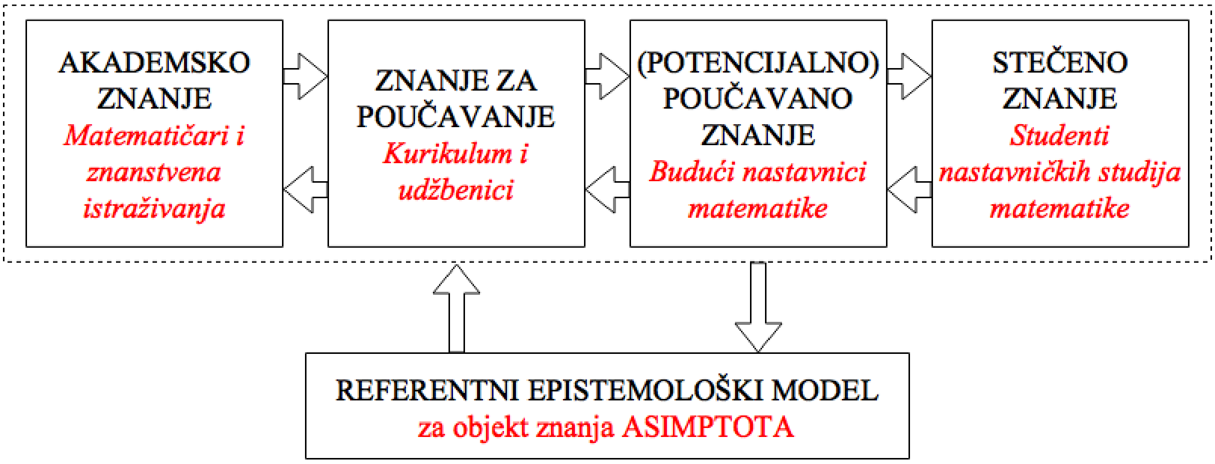
- Objekti znanja limes funkcije i asimptota su snažno povezani, stoga se mogu očekivati slične teškoće u realizaciji objekta znanja asimptote kakve su prepoznate kod objekta znanja limesa – nedostižnost, ostvarivanje vrijednosti u beskonačnosti, neprimjerenost terminologije i drugo.

- Za prakseologiju određivanja asimptota funkcija potrebno je posebno voditi računa (1) na koji način postojanje vertikalne asimptote ovisi o prekidu u području definicije funkcije, (2) postojanje kose asimptote i asimptotskih krivulja ovisi o ponašanju funkcije umjesto vrijednosti funkcije kada $x \to \infty$, (3) asimptota (izuzev vertikalne) može sjeći krivulju, (4) nepotpuni količnik pri dijeljenju polinoma u brojniku i nazivniku racionalne funkcije daje značajne informacije o asimptotskom ponašanju funkcije.

3. CILJ I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA

Pregled relevantne svjetske znanstvene literature ukazuje da su unutar ATD-a i u drugim teorijskim okvirima malobrojna istraživanja fokusirana na opisivanje asimptote kao objekta znanja. Posebice nedostaje istraživanja u kojima se sagledavaju različiti aspekti ovog matematičkog pojma, njihov međusobni utjecaj te različiti konteksti, matematički ili obrazovni, u kojima je taj pojam relevantan. Nadalje, u Republici Hrvatskoj nisu dostupna takva istraživanja kojima se tema iz gimnazijskog matematičkog obrazovanja teorijski utemeljeno propitkuje.

Cilj ovog istraživanja je *izgraditi referentni epistemološki model za objekt znanja asimptote u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj*. Izgradnja REM-a i teorijski okvir ATD-a nameću široki pristup istraživanju objekta znanja. Potrebno je uskladiti matematičke i didaktičke spoznaje, odnosno istovremeno rasuđivati o matematičkom objektu znanja i o sudionicima cjelovitog obrazovnog procesa. Različite sastavnice didaktičke transpozicije utječu na oblikovanje matematičkog objekta znanja.



Slika 3.1: Reprezentanti didaktičke transpozicije u istraživanju i odnos s referentnim epistemološkim modelom

Asimptota je odabrana za objekt ovog istraživanja zbog raznolikih matematičkih sadržaja s kojima se može povezati u gimnazijskom obrazovanju. Objekt znanja mora biti poučljiv odnosno značajan u znanstvenom, širem društvenom i obrazovnom kontekstu. Odgovarajuće informacije pripadaju vanjskoj transpoziciji kojoj su nositelji akademska zajednica i noosfera.

U ovom istraživanju vrijednost objekta znanja interpretira se iz rezultata znanstvenih istraživanja, proizvoda tekstualizacije i stavova znanstvenika matematičara.

Objekt matematičkog znanja mora zadovoljavati kriterije povezanosti, rastuće složenosti, potpunosti i primjenjivosti prakseologija koje ga sačinjavaju. Za realizaciju tih zahtjeva potrebno je ispravno i široko formalno poznavanje izvornog objekta znanja te prilika u kojima se objekt znanja prezentira tijekom unutrašnje transpozicije. Konstruirani polazni REM objekta znanja asimptote temeljen je na funkcionalnoj i epistemološkoj vrijednosti objekta znanja i k tomu je uvažio zahtjeve kurikuluma i dostupne sadržaje u gimnazijskim udžbenicima.

Realizacija objekta znanja u danom obrazovnom sustavu ovisi o formulaciji znanja za poučavanje te spremnosti nastavnika matematike i učenika za svladavanje postavljenih zahtjeva. Shodno tome REM mora biti oblikovan tako da je usklađen sa propisanim i dostupnim znanjem za poučavanje te primjeren kompetencijama nastavnika i učenika.

U ovom istraživanju gimnazijski udžbenici su reprezentanti znanja za poučavanje, a studenti nastavničkih studija matematike su reprezentanti oboje potencijalnog poučavanog znanja i stečenog znanja.

Rezultati analize udžbenika, identificirane kompetencije studenata nastavničkih studija matematike i iskazani stavovi znanstvenika doprinose modifikaciji ili daljnjem propitkivanju REM-a kako bi optimalno pristajao kontekstu gimnazijskog obrazovanja u Republici Hrvatskoj i ostvarivao asimptotu kao matematički i prakseološki korektan objekt znanja.

S obzirom na pregled provedenih epistemoloških istraživanja, postavljeni cilj istraživanja i zahtjeve odabranog teorijskog okvira postavljaju se sljedeća istraživačka pitanja:

Pitanje 1: *Koja je epistemološka, kulturna i funkcionalna vrijednost objekta znanja asimptote?*

Pitanje 2: *Kako se asimptota realizira kao objekt znanja za poučavanje u gimnazijskim udžbenicima u RH?*

Pitanje 3: *Kako se asimptota realizira kao objekt stečenog znanja studenata nastavničkih studija matematike u RH?*

Pitanje 4: *Koji su uvjeti i ograničenja na realizaciju REM-a za objekt znanja asimptote u gimnazijskom obrazovanju u RH?*

4. METODOLOGIJA

Istraživanja u ATD-u identificiraju i modeliraju prakseologijama stanje relacije $R_I(p,O)$ u različitim institucijama *I* koje sudjeluju u procesu didaktičke transpozicije objekta znanja *O*. Modeli objekta znanja se uspoređuju i određuje se odnos s REM-om kako bi se prepoznali uvjeti i ograničenja pod kojima se ostvaruje promatrana relacija i razvile moguće intervencije za unapređenje matematičkog obrazovanja (Barbé i sur., 2005; Bosch, 2012; Bosch i Gascón, 2014). Potrebno je posebno odrediti akademsko znanje koje legitimizira objekt znanja, *raison d'être* objekta znanja u pojedinim institucijama te u kojim prakseološkim sastavnicama institucionalizirani modeli znanja odstupaju od REM-a i koji su razlozi tome.

4.1. Prakseološka analiza udžbenika

U skladu s opisanim okvirom i metodologijama korištenima u prethodnim istraživanjima unutar ATD-a, polazište ovog istraživanja je bilo usustavljivanje REM-a za objekt znanja asimptote, *A* (vidi Poglavlje 5.1). Nakon toga, slijedila je *prva faza istraživanja*, u kojoj se ispitala relacija $R_U(p,A)$, gdje je *U* institucija matematičkih udžbenika za gimnazije u RH koji sadrže nastavne sadržaje relevantne za REM. Konkretno, provela se prakseološka analiza dva najzastupljenija udžbenička kompleta za gimnaziju različitih autora i izdavača. Odabrano je izdanje pojedinog udžbenika koje se koristilo u razdoblju od 2007. do 2011. godine, kada su ispitanici iz druge faze istraživanja pohađali srednju školu. Pomnom analizom udžbenika odredile su se sve dostupne prakseologije koje se mogu povezati s komponentama REM-a za objekt znanja *A*. U udžbenicima su se identificirali diskurzivni elementi i organizirali u odgovarajuće tehnologije. Popisane se dostupne definicije, svojstva i teoremi unutar pojedine tehnologije (Bergé, 2007; González-Martín i sur., 2013) te istaknute zajedničke komponente različitih tehnologija ako takve postoje.

Neovisno o formatu promatranog bloka teksta u udžbeniku, kao zadatak se identificirala svaka praktična aktivnost, odnosno zahtjev da se nešto učini kako bi se došlo do rješenja, odgovora ili rezultata (Bergé, 2007; González-Martín i sur., 2013; Hardy, 2009). Zahtjevi mogu biti iskazani na način: odrediti, izračunati, riješiti, nacrtati, pokazati, istražiti, prepoznati i drugo. Uz prepoznati tip zadatka vezala se vidljiva, odnosno dostupna tehnika. Identifikacija tehnike temeljila se na samom tipu zadatka, riješenim primjerima, uputama ili rješenjima zadataka za vježbu (Bergé, 2007; Hardy, 2009, 2011). Jednu punkt-prakseologiju čine tip zadatka, tehnika rješavanja te odgovarajuća tehnologija, ako je pozvana promatranim zahtjevom. Praktični blok je povezan s *logosom* ako i samo ako je proveden ili opravdan nekim diskursom unutar tehnologije, u suprotnom je to nepotpuna, praktična prakseologija.

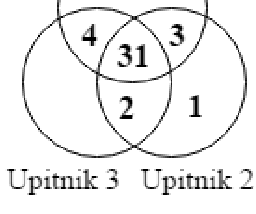
Tehnološko-teorijska komponenta je određena udžbeničkom strukturom, odnosno organizacijom nastavnih tema i jedinica. Za svaki udžbenik odredila se učestalost pojavljivanja identificiranih punkt-prakseologija (Barbé i sur., 2005; González-Martín i sur., 2013). Zadatak koji sadrži više podzadataka istog tipa računao se kao jedna instanca punkt-prakseologije.

Nakon detaljnog pregleda udžbeničkih blokova unutar jedinica koje su relevantne za REM, usustavili su se i popisali prepoznati tipovi zadataka i tehnike njihova rješavanja (Barbé i sur., 2005; González-Martín i sur., 2013). Punkt-prakseologije su se organizirale u lokalne prakseologije sa zajedničkom tehnikom i tehnologijom, na temelju čega se stvorio grafički prikaz odnosa prakseologija te odnosa prema tehnologiji i objektu znanja asimptote *A* (Barbé i sur., 2005; González-Martín i sur., 2013).

4.2. Upitnici sa studentima nastavničkog studija matematike

U *drugoj fazi istraživanja* ispitivalo se stečeno znanje, odnosno relacija $R_S(p,A)$ studenata nastavničkih studija matematike *p* s obzirom na objekt znanja asimptote *A* kao rezultat djelovanja cjelokupnog obrazovnog sustava *S*. Provela su se tri upitnika za cijelu populaciju studenata završne godine nastavničkih studija matematičkog odsjeka pri Prirodoslovno-smatematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u akademskoj godini 2015./2016. Broj studenata koji su ispunjavali pojedini upitnik dan je na Slici 4.2.1. Upitnici su polustrukturirani, pitanja su uglavnom otvorenog tipa s matematičkim rutinskim ili problemskim zadacima (Cohen i sur., 2007). Pitanja su određena i iskazana u skladu s polaznim REM-om za objekt znanja asimptote *A*. Organizacija pitanja po upitnicima je tematski određena na način:

- Upitnik 1 obuhvaća zadatke koji u svom iskazu ne spominju izričito pojam asimptota, ali se isti može javiti u *praxisu* ili *logosu*.
- Upitnik 2 obuhvaća takve praktične i diskurzivne aktivnosti koje su izričito vezane uz pojam asimptote.
- Upitnik 3 obuhvaća pitanja koja su vezana uz različite interpretacije asimptote.



Slika 4.2.1: Broj studenata koji su ispunjavali pojedini upitnik

Odgovori studenata su se analizirali i interpretirali izgradnjom odgovarajućih prakseologija (Hardy, 2009). Rezultati dobiveni iz odgovora studenata na pitanja različitih upitnika grupirali su se po svojoj prakseološkoj naravi kako je prikazano u Tablici 4.2.1.

Prakseološka narav pitanja	**Prakseološka oprema za grafičko prikazivanje**	**Prakseološka oprema za određivanje asimptote funkcije ili krivulje**	**Dostupni diskursi objekta znanja asimptota**
Upitnik 1 (1-3)	Pitanje 1.1 Pitanje 1.2 Pitanje 1.3	-	
Upitnik 2 (1-4)	-	Pitanje 2.2.a Pitanje 2.2.b Pitanje 2.3.a Pitanje 2.3.b Pitanje 2.4.c	Pitanje 2.1.a Pitanje 2.1.b Pitanje 2.2.c Pitanje 2.4.a Pitanje 2.4.b Pitanje 2.4.d
Upitnik 3 (1-3)	Pitanje 3.3.c	Pitanje 3.1 Pitanje 3.3.a	Pitanje 3.3

Tablica 4.2.1: Grupiranje pitanja pojedinih upitnika po prakseološkoj naravi

Pitanje 1.1

Nacrtajte graf funkcije *f* zadane s $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$. Opišite tok te funkcije.

Matematički zadatak je zatvoren i rutinski, a pitanje je otvorenog tipa, jer funkcija ima jednoznačno određen graf, ali grafički prikaz i diskurs toka funkcije mogu biti različito realizirani. Pravilo pridruživanja zadane racionalne funkcije može se pojednostaviti algebarskim manipulacijama do oblika $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$. Očekuje se koristiti neku od tehnika (vidi Poglavlje 5.1):

τ_{TO}: povlačenje krivulje kroz odgovarajuće točke koordinatnog sustava;

τ_{TR}: transformacije grafa funkcije *g* zadane s $g(x)=\frac{1}{x}$;

τ_{SV}: povlačenje krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije i grafa funkcije.

Svojstva funkcije mogu se odrediti iz pravila pridruživanja funkcije (primjerice, zbog vrijednosti u nazivniku zadana funkcija ima pravac $x=1$ za vertikalnu asimptota) ili ispitivanjem pomoću alata infinitezimalnog računa (primjerice, zbog vrijednosti $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2$ graf funkcije ima horizontalnu asimptotu $y=2$). Diskurs može obuhvaćati svojstva funkcije poput područja definicije, monotonosti i konveksnosti funkcije, ponašanja grafa funkcije u rubovima domene i u beskonačnosti, posebno asimptote funkcije.

Ispituje se provedba *praxisa* crtanja grafa funkcije te koje komponente čine diskurzivni blok prakseologije odnosno tehnologiju toka funkcije.

Pitanje 1.2

Nacrtajte graf funkcije *f* koja ima sljedeća tri svojstva:

- na skupu negativnih realnih brojeva je padajuća i poprima samo negativne vrijednosti
- pravac $y = 2$ tangenta je njezinog grafa u nekoj točki
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Matematički zadatak je otvoren i nerutinski, jer zadana svojstva ne određuju jedinstvenu funkciju. Odabrana svojstva su komponente tehnologije toka funkcije, koje se u prakseologiji crtanja grafova funkcija javljaju kao diskurzivna podrška tehnici *povlačenja krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije i grafa funkcije* (vidi Poglavlje 5.1). Diskurzivne komponente koje je potrebno poznavati su:

- Funkcija koja je na području definicije $\langle a,b\rangle$ padajuća i omeđena odozgo ima limes $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ pravac $y = 2$ je horizontalna asimptota funkcije.
- Tangenta grafa funkcije je lokalno svojstvo funkcije i posebno, isti pravac može biti tangenta i asimptota krivulje. Krivulja i tangenta mogu imati zajedničku točku koja nije diralište. Krivulja i asimptota mogu imati zajedničku točku.

Navedena svojstva uzimaju u obzir rezultate epistemoloških istraživanja (vidi Poglavlja 2.1 i 2.2, Biza i sur. (2008, 2010), Kidron (2011)).

Ispituje se kako se realiziraju pojedina i sva zadana svojstva funkcije, posebno koje je ponašanje grafa funkcije kad $x \to -\infty$, kakve vrijednosti funkcija poprima oko nule i kako se ostvaruje zahtjev da je pravac $y = 2$ tangenta i asimptota grafa funkcije.

Pitanje 1.3

Očekuje se da se postotak (izražen kao decimalni broj) gledatelja koji će na komercijalnu poruku o novom proizvodu odgovoriti nakon *t* dana ponaša po formuli $o(t) = 0.7 - 2^{-t}$.

(a) Prikažite grafički opisanu ovisnost $o(t)$.

(b) Koliki se postotak gledatelja koji će odgovoriti na komercijalnu poruku očekuje nakon 7 dana?

(c) Opišite ponašanje očekivanog postotka gledatelja koji će odgovoriti na komercijalnu poruku kako prolaze dani.

Matematički zadatak je zatvoren, a pitanje je otvorenog tipa. Prvi i treći podzadatak su nerutinski, dok je drugi podzadatak rutinski matematički zadatak (vidi Sliku 5.2.1 i 5.2.8). Očekuje se koristiti neku od tehnika (vidi Poglavlje 5.1):

τ_{TO}: povlačenje krivulje kroz odgovarajuće točke koordinatnog sustava;

τ_{TR}: transformacije grafa funkcije g zadane s $g(x)=2^x$;

τ_{SV}: povlačenje krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije i grafa funkcije.

Svojstva funkcije mogu se odrediti iz pravila pridruživanja funkcije (primjerice, zbog baze $2^{-1}<1$ i negativnog predznaka zadana funkcija je rastuća). Diskurs može obuhvaćati područje definicije i područje vrijednosti, rast, omeđenost, stagnaciju vrijednosti i drugo. Posebno je značajna interpretacija ponašanja vrijednosti u beskonačnosti jer zadana funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=0.7$.

Ispituje se provedba *praxisa* crtanja grafa funkcije i izračunavanja vrijednosti funkcije te koje komponente tehnologije toka funkcije se koriste pri opisivanju ponašanja vrijednosti ovisne veličine.

Planira se naknadna detaljnija prakseološka analiza zadatka u smislu ostvarivanja i održavanja konteksta pri realizaciji rutinske prakseologije crtanja grafa funkcije kao odgovor na problem realne situacije.

Pitanje 2.1

(a) Opišite riječima što podrazumijevate pod pojmom asimptota.

(b) Navedite u kojim ste se matematičkim kontekstima susreli s pojmom asimptote. Za svaki takav kontekst navedite konkretan matematički primjer.

Oba pitanja su otvorenog tipa. Očekivani matematički konteksti i organizacija prakseologija dani su u Poglavlju 5.1 (vidi Sliku 5.1.1). Očekuje se više ili manje formalan opis asimptote.

Ispituje se koje komponente, praktične ili diskurzivne naravi, čine objekt znanja asimptote te koji je doseg i opseg dostupnih prakseologija na ljestvici didaktičke određenosti.

Planira se naknadna analiza odgovora na prvo potpitanje unutar teorijskog okvira slike i definicije koncepta (Tall i Vinner, 1981).

Pitanje 2.2

(a) Pročitajte sljedeću tvrdnju:

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota funkcije *f* ako vrijedi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx - l\right) = 0$.

Zašto ona vrijedi za kosu asimptotu? Kako ta tvrdnja odgovara Vašem opisu asimptote iz odgovora na pitanje 1.a?

(b) Obrazložite formule $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $l = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$ za koeficijente k i l kose asimptote $y = kx + l$ funkcije *f*.

(c) Što mora vrijediti za funkciju *f* da joj pravac $x = a$ bude vertikalna asimptota?

Pitanja su otvorenog tipa. Očekuje se poduprijeti formulu danu u prvom potpitanju definicijom asimptote pomoću udaljenosti ordinata (vidi Poglavlje 1.3) te primijeniti svojstva limesa funkcije pri obrazlaganju formula danih u drugom potpitanju (vidi Jednadžbu 5.1.1).

Prvo i drugo potpitanje provjeravaju dostupne matematički formalne prakseologije obrazlaganja tvrdnje ili formule. Treće potpitanje ispituje koje su diskurzivne komponente dostupne i kako odgovaraju formalnom objektu vertikalne asimptote (vidi Poglavlje 1.3).

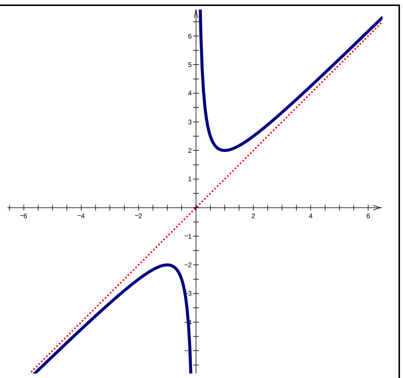
Planira se naknadna analiza odgovora na prvo potpitanje unutar teorijskog okvira slike i definicije koncepta (Tall i Vinner, 1981).

Pitanje 2.3

Na Slici 1. prikazan je graf funkcije *f* zadane pravilom $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(a) Odredite jednadžbe asimptota funkcije *f*.

(b) Odredite pravilo pridruživanja neke funkcije *g*, različite od *f*, koja ima iste asimptote kao funkcija *f*.



Slika 1.

Oba pitanja su otvorenog tipa, prvi podzadatak je matematički zatvoren i rutinski zadatak. Očekuje se primijetiti kako nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku racionalne funkcije određuje njezinu asimptotu, pravac $y = x$ je kosa asimptota, a $x = 0$ je vertikalna asimptota zadane funkcije. Zadatak nadalje služi kao motivacija sljedećem pitanju gdje se uvode asimptotske krivulje.

Drugi podzadatak je otvoren i nerutinski; postoji proizvoljno mnogo funkcija koje zadovoljavaju traženo svojstvo, a tehnika njihova pronalaženja nije jednoznačno određena.

Sličan zadatak zadan je u Yerushalmy (1997). Očekuje se provesti *praxis* algebarske izmjene pravila pridruživanja polazne funkcije, gdje je pripadni *logos* neformalni diskurs graničnih vrijednosti racionalne funkcije (vidi Sliku 5.1.3). Postavljeni zahtjev zadovoljava familija funkcija $\left\{ f(x) = x \pm \frac{\alpha}{x} : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.

Ispituju se dostupne tehnike određivanja asimptota te koji diskurs ih podržava.

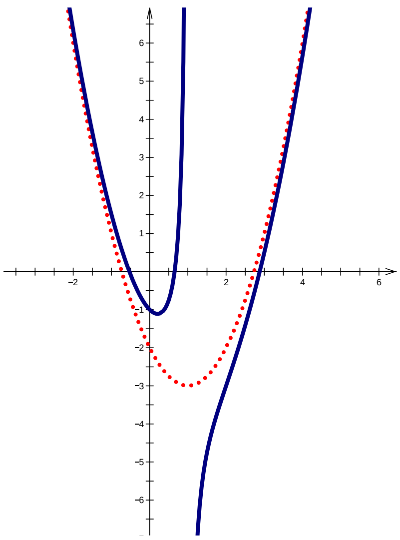
Pitanje 2.4

Funkcija, osim pravca, može imati i druge krivulje kao asimptote. Na Slici 2. punom je linijom nacrtan graf funkcije, a isprekidanom njezina asimptotska parabola.

(a) Matematičkim simbolima formulirajte zahtjev da parabola s jednadžbom $y = ax^2 + bx + c$ bude asimptotska krivulja funkcije *f*.

(b) Kako biste odredili koeficijente *a*, *b* i *c* asimptotske parabole funkcije *f*?

(c) Odredite jednadžbu asimptotske parabole funkcije *f*, zadane s $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$, čiji je graf prikazan na Slici 2.



Slika 2.

(d) Pravilo pridruživanja funkcije *f* zapisano je u obliku $f(x) = g(x) + \frac{h(x)}{q(x)}$, pri čemu je stupanj polinoma *h* manji od stupnja polinoma *q*. Kako taj zapis povezujete s postojanjem asimptotske krivulje funkcije *f*? Obrazložite.

Pitanje je otvorenog tipa. Uvodi se matematički objekt asimptotske krivulje kao generalizacija objekta asimptotskog pravca. U prvom i drugom potpitanju očekuje se proširiti (1) definiciju kose asimptote (2) formule za koeficijente kose asimptote (vidi Pitanje 2.2) u odgovarajuće formule za asimptotsku parabolu funkcije *f* (vidi Jednadžbu 4.2.1). Primjereno je koristiti tehniku *određivanja asimptota racionalne funkcije s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku funkcije* (vidi Sliku 5.1.3, Jednadžbu 4.2.2, Dobbs (2010), Yerushalmy (1997)).

(1) Parabola $y = ax^2 + bx + c$ je asimptotska parabola funkcije *f* ako vrijedi:

$$0 = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - \left(ax^2 + bx + c \right) \right).$$

(2) Formule za koeficijente asimptotske parabole su:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}, \; b = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}, \; c = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - ax^2 - bx \right)$$

Jednadžba 4.2.1: Izvedene formule za asimptotsku parabolu

U trećem potpitanju mogu se implementirati formule iz Jednadžbe 4.2.1, spomenuta tehnika ili druga tehnika opisana u prethodnom potpitanju. Očekuje se da je prakseologija određivanja asimptota racionalne funkcije iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku funkcije efikasnija. U četvrtom potpitanju može se ponuditi više ili manje formalan diskurs graničnih vrijednosti danih funkcija kad $x \to \infty$ (vidi Sliku 5.1.3, Yerushalmy (1997)).

$\left(x^3 - 3x^2 + 1\right) : \left(x - 1\right) = x^2 - 2x - 2$ i ostatak -1

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x-1} = x^2 - 2x - 2 + \frac{-1}{x-1}$$

Asimptotska parabola funkcije *f* zadane s $f(x) = \frac{x^3-3x^2+1}{x-1}$ je $y = x^2 - 2x - 2$.

Jednadžba 4.2.2: Prakseologija određivanja asimptotske parabole racionalne funkcije iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku funkcije

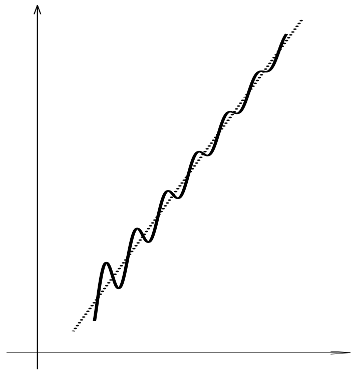
Provjerava se razvijenost formalnih matematičkih prakseologija, dostupnost prakseologije *određivanja asimptota racionalne funkcije s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku funkcije* te implementacija iskazanih tehnika.

Pitanje 3.1

Na Slici 1. punom je linijom istaknut dio grafa funkcije f zadane pravilom pridruživanja

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{\sin(4\pi x)}{x}.$$

Odredite jednadžbu pravca koji je na Slici 1. istaknut isprekidanom linijom. Obrazložite.



Slika 1.

Pitanje je otvorenog tipa, a matematički zadatak otvoren i nerutinski; iako je traženi pravac jedinstven, tehnika rješavanja nije jednoznačno određena niti su zadaci sličnog tipa dostupni (vidi Poglavlja 5.2.2 i 5.2.3). Na koordinatnim osima nisu obilježene jedinične dužine kako bi se onemogućila primjena tehnike određivanja jednadžbe pravca očitavanjem s grafičkog prikaza. Očekuje se primijeniti analogon tehnike *određivanja asimptota racionalne funkcije s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku funkcije* to jest prepoznati kako vrijednost izraza $3x - 1$ značajno doprinosi vrijednosti funkcije kad $x \to \infty$. Rješenje se potvrđuje diskursom formalnog ili neformalnog infinitezimalnog računa o vrijednosti izraza $\frac{\sin(4\pi x)}{x} \to 0$ kad $x \to \infty$.

Ispituju se dostupne tehnike određivanja asimptota te koji diskurs ih podržava.

Pitanje 3.2

Na Slikama 2.a– 2.g punom je linijom nacrtan graf funkcije *f*, a isprekidanom pravac *p*. Za svaku sliku zaokružite slovo ispred svake od izjava

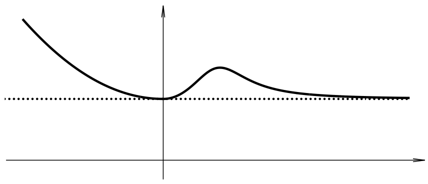
A. Pravac p je tangenta grafa funkcije f.

B. Pravac p je asimptota grafa funkcije f.

C. Pravac p je tangenta u beskonačnosti grafa funkcije f.

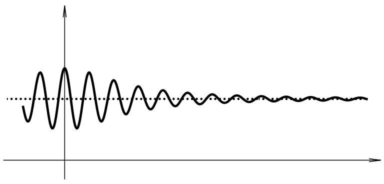
D. Ništa od navedenog.

koja opisuje odnos grafa funkcije *f* i pravca *p* prikazanih na toj slici.



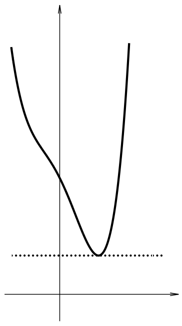
Slika 2.a

A. **B.** **C.** **D.**



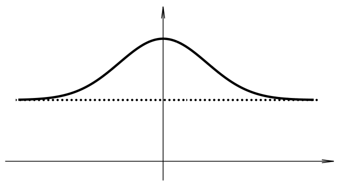
Slika 2.d

A. **B.** **C.** **D.**



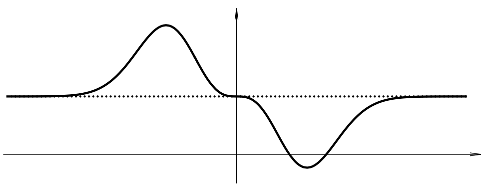
Slika 2.g

A. **B.** **C.** **D.**



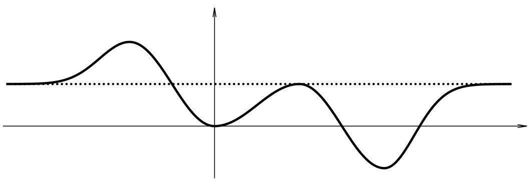
Slika 2.b

A. **B.** **C.** **D.**



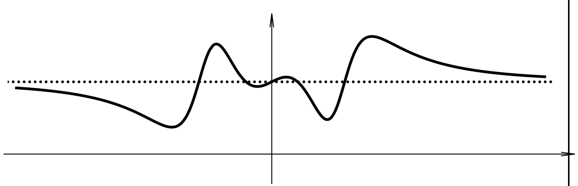
Slika 2.e

A. **B.** **C.** **D.**



Slika 2.c

A. **B.** **C.** **D.**



Slika 2.f

A. **B.** **C.** **D.**

Pitanje je zatvorenog tipa. Ispituje se prepoznavanje asimptote u različitim odnosima s krivuljom, uzimajući u obzir broj zajedničkih točaka krivulje i asimptote (nijedna, jedna, konačno ili beskonačno mnogo), položaj krivulje u odnosu na asimptotu (s iste ili različitih strana pravca) te poznavanje asimptote kao tangente u beskonačnosti. Planira se naknadna analiza odgovora na pitanje unutar teorijskog okvira slike i definicije koncepta (Tall i Vinner, 1981).

Pitanje 3.3

Zadana je hiperbola s jednadžbom $x^2 - 4y^2 = 4$.

(a) Odredite jednadžbe asimptota zadane hiperbole.

(b) Odredite jednadžbe tangenti iz točke $P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ na zadanu hiperbolu.

(c) Skicirajte hiperbolu i pravce iz zadataka (a) i (b). Što uočavate?
Obrazložite smislenost dobivenog rezultata.

Pitanje je otvorenog tipa. Matematički zadatak je otvoren i nerutinski; rješenje zadatka je jedinstveno, no (1) grafička reprezentacija krivulje i pravaca je individualna, (2) iskaz zadatka je rutinski, ali matematička situacija nije, jer se dana točka nalazi na asimptoti (vidi Slike 5.2.5 i 5.2.9), (3) zahtjeva se obrazloženje rezultata. Očekuje se provesti sljedeći *praxis*:

1. odrediti jednadžbe asimptota hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ očitavanjem vrijednosti realne a i imaginarne b poluosi iz segmentne jednadžbe hiperbole – rješenje su pravci $y = \pm\frac{1}{2}x$;
2. odrediti tangente na hiperbolu kroz točku *P*, koja je izvan hiperbole, algebarskom manipulacijom formule za jednadžbu pravca $y = kx + l$ i formule $k^2a^2 - b^2 = l^2$ za uvjet dodira pravca i hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ – rješenje su pravci $y = \frac{1}{2}x$ i $y = -\frac{5}{6}x - \frac{4}{3}$;
3. nacrtati (točku *P*, asimptote, tangentu) hiperbolu povlačenjem krivulje kroz tjemena i uz asimptote;

te obrazložiti rezultate diskursom asimptote kao tangente krivulje u beskonačnosti. Studenti su dobili popis formula koje čine diskurzivni blok prakseološke opreme teme Krivulje drugog reda propisanog znanja za poučavanje.

Ispituje se provedeni *praxis* te dostupnost i tumačenje *logosa* asimptote hiperbole kao tangente u beskonačno dalekoj točki krivulje.

4.3. Intervju sa znanstvenicima

U posljednjoj, *trećoj fazi istraživanja* ispitivala se relacija $R_M(p,A)$, gdje je *M* institucija akademske zajednice matematičara i *p* pojedinci koji pripadaju toj instituciji – znanstvenici. Istraživanje je provedeno kroz fokusirani intervjui s dva znanstvenika koji su dobrovoljno pristali sudjelovati u istraživanju. Intervjui se prate bilješkama i audio zapisom. Takav pristup intervjuu prema Cohen i sur. (2007) opravdava:

- odabir ispitanika koji su upoznati s objektom istraživanja,

- korištenje rezultata prethodno provedenih faza istraživanja (vidi Poglavlja 5.1, 5.2, 5.3),
- odabir pitanja otvorenog, indirektnog tipa, kojima se očekuje steći uvid u znanja, stavove i mišljenja ispitanika o objektu istraživanja.

Ispitanici su znanstvenici u područjima matematike u kojima je asimptota i asimptotsko ponašanje značajan objekt znanja te koji kontinuirano održavaju nastavu studentima različitih studijskih profila. Područja znanstvenog interesa prvog znanstvenika su matematičko modeliranje u mehanici fluida, asimptotička analiza jednadžbi na tankim domenama i analiza nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Održava nastavu iz elementarne matematike, matematičke analize i primijenjene matematičke analize, diferencijalnih jednadžbi, programiranja, statistike i vjerojatnosti i drugih kolegija na matematičkim i nematematičkim studijima. Područje znanstvenog interesa drugog znanstvenika je računarstvo, a održava nastavu iz programiranja i metodike informatike na matematičkom studiju.

Provela se fenomenološka analiza intervjua (Cohen i sur., 2007). Postupak analize, prilagođen odabranom teorijskom okviru ATD-a i istraživačkoj situaciji, sastoji se od devet koraka:

1. Transkribirati audio zapis intervjua.
2. Preslušavati audio zapis ili čitati transkript intervjua za stvaranje općeg dojma o iskazanim znanjima, stavovima i mišljenjima.
3. Popisati iskazana znanja, stavove i mišljenja u *jedinice* jedinstveno određenog značenja, koje mogu biti leksičke ili prakseološke naravi.
4. Odabrati jedinice značajne za objekt istraživanja.
5. Među značajnim jedinicama eliminirati suvišne.
6. Grupirati jedinice ekvivalentnog značenja.
7. Odrediti teme koje povezuju pojedine grupe jedinica.
8. Usporediti teme u provedenim intervjuima i odrediti opće, zajedničke teme.
9. Interpretirati teme u kontekstu provedenih istraživanja.

Intervju je sadržavao ukupno sedam pitanja. Prvo pitanje ispitivalo je osobni doživljaj definicije asimptote, sljedeća tri pitanja istraživala su znanja i stavove o funkcionalnoj, epistemološkoj i kulturnoj vrijednosti objekta znanja, a posljednja tri pitanja ispitivala su mišljenja o utvrđenim nedosljednostima polaznog REM-a s rezultatima prve dvije faze istraživanja.

1. pitanje

Ispitaniku su prikazani opisi asimptote koji su se javili u prethodnim fazama istraživanja (vidi Tablicu 4.3.1) i traži se:

a.	Objasnite kako pojedini opis odgovara Vašem viđenju asimptote.
b.	Kako biste pojasnili izraze „dodirivati u beskonačnosti“ i „proizvoljno približavati“?

Odgovori ispitanika koriste određivanju primjerenog opisa ili definicije asimptote, posebice u kontekstu strogoće matematičkih formulacija. Planira se naknadna analiza odgovora na pitanje unutar teorijskog okvira slike i definicije koncepta (Tall i Vinner, 1981).

Tablica 4.3.1: Opisi asimptote ponuđeni ispitanicama tijekom intervjua i njihovo podrijetlo iz prethodnih faza istraživanja

OPISI ASIMPTOTE		**PODRIJETLO OPISA**
Primjer 1:	Asimptota krivulje je pravac koji određuje smjer krivulje.	Stečeno znanje studenata nastavničkih studija matematike
Primjer 2:	Asimptota krivulje je pravac kojemu se krivulja (sve više, beskonačno) približava.	Izvorno matematičko znanje Znanje za poučavanje gimnazijskog obrazovanja u RH Stečeno znanje studenata nastavničkih studija matematike
Primjer 3:	Asimptota krivulje je pravac kojemu se krivulja priljubljuje.	Znanje za poučavanje gimnazijskog obrazovanja u RH
Primjer 4:	Asimptota krivulje je tangenta krivulje u beskonačno dalekoj točki.	Izvorno matematičko znanje Znanje za poučavanje gimnazijskog obrazovanja u RH
Primjer 5:	Pravac nazivamo asimptotom krivulje ako se krivulja približava pravcu, ali ga nikada ne dodiruje (siječe).	Znanje za poučavanje gimnazijskog obrazovanja u RH[1] Stečeno znanje studenata nastavničkih studija matematike
Primjer 6:	Pravac nazivamo asimptotom krivulje ako udaljenost točke krivulje do pravca teži nuli kad se točke krivulje udaljavaju od ishodišta koordinatnog sustava.	Stečeno znanje studenata nastavničkih studija matematike Znanje za poučavanje gimnazijskog obrazovanja u RH

2. pitanje

Ispitaniku je prikazan nastavni program za gimnazije (vidi Tablicu 5.2.1) i traži se:

Koji bi se zadaci, tehnike rješavanja zadataka i teorijski sadržaji u nastavnim temama mogli povezati s asimptotom i asimptotskim ponašanjem?

[1] Opis se odnosi na asimptotu u određenom matematičkom kontekstu

Očekuje se da će ispitanik angažirati vlastita matematička znanja te stavove o matematičkom obrazovanju kako bi ponudio matematičke sadržaje praktične i teorijske naravi. Dobiveni sadržaji iskazuju se u obliku prakseologije ili prakseološke komponente.

Odgovori ispitanika koriste modifikaciji REM-a i utvrđivanju funkcionalne vrijednosti objekta znanja asimptote. Pojedina prakseologija ili prakseološka komponenta u polaznom REM-u može biti, od strane ispitanika kao reprezentanta akademske zajednice, potvrđena, odbijena, opovrgnuta ili neodređena. Ukoliko prakseologije koje ponudi ispitanik nisu dijelom polaznog REM-a, on se može proširiti što povećava funkcionalnu vrijednost objekta znanja asimptota.

3. i 4. pitanje

3. Opišite svoj stav o značaju asimptote i asimptotskog ponašanja u matematici.
4. Opišite svoj stav o značaju asimptote i asimptotskog ponašanja u primjeni matematike za opće dobro.
   a. Koje bi se primjene asimptote i asimptotskog ponašanja mogle implementirati u gimnazijskom obrazovanju?

Stavovi ispitanika su uvaženi zbog njihovih znanstvenih interesa koji su bliski matematičkom objektu asimptotskog ponašanja.

Polazni REM uzima asimptotsko ponašanje kao istaknuto (epistemološko) svojstvo funkcije. Primjena asimptote (epistemološke naravi) je kod crtanja grafa funkcije i izvrednjavanja funkcije za granične vrijednosti argumenta, što se može proširiti na primjenu (društveno korisne naravi) za aproksimacije vrijednosti u različitim situacijama.

Odgovori ispitanika koriste utvrđivanju epistemološke i kulturne vrijednosti objekta znanja asimptota i formulaciji prakseologija koje su *raison d'être* objekta znanja asimptote.

5. pitanje

Ispitaniku je prikazan popis elementarnih funkcija čiji grafovi se crtaju u gimnazijskom obrazovanju (linearne, kvadratne funkcije, funkcije s apsolutnom vrijednosti, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije, polinomi, opće potencije i racionalne funkcije) i traži se:

Koje tehnike crtanja grafa funkcije smatrate korisnim?

a. Opišite svoje mišljenje o značaju tehnike za gimnazijsko obrazovanje i za asimptotu.

Očekuje se da će ispitanik navesti različite tehnike crtanja grafa funkcije kakve su dostupne u polaznom REM-u (vidi Poglavlje 5.1). Ukoliko ispitanik u svom odgovoru ne navede neku od tehnika iz REM-a, za istu se traži:

b. Smatrate li tehniku značajnom za gimnazijsko obrazovanje i za asimptotu?

Polazni REM preferira tehnike koje uvažavaju svojstva funkcije i grafa funkcije te asimptotu i asimptotsko ponašanje uzima kao značajne komponente tehnika crtanja grafa funkcije. Rezultati prethodnih provedenih faza istraživanja ne pokazuju odgovarajuće ishode (vidi Poglavlja 5.2 i 5.3).

6. i 7. pitanje

6. Asimptota se definira kao „tangenta krivulje u beskonačnosti".
    a. Smatrate li ovu definiciju asimptote značajnom za gimnazijskom obrazovanju?
    b. Kako biste implementirali i opravdali tu definiciju unutar nastavnih tema gimnazijskog programa za matematiku?
7. Smatrate li asimptotsko ponašanje krivulje i konvergenciju niza bliskim pojmovima?

Objekt tangenta u beskonačnosti te veza asimptotskog ponašanja i konvergencije niza dijelom su polaznog REM-a (vidi Poglavlje 5.1). Pripadni matematički sadržaji se nisu javili u odgovarajućoj mjeri u rezultatima prethodno provedenih faza istraživanja, niti su primjereno zastupljeni u empirijskim istraživanja (vidi Poglavlja 2.1, 2.2, 2.3.3, 5.2 i 5.3).

Nužno je prakseologije i prakseološke komponente vezane uz dva pojma propitati iz perspektive akademskog znanja kao sastavnice didaktičke transpozicije. Odgovori ispitanika na posljednja tri pitanja mogu utjecati na modifikaciju REM-a posebice u kontekstu spomenutih nedosljednosti.

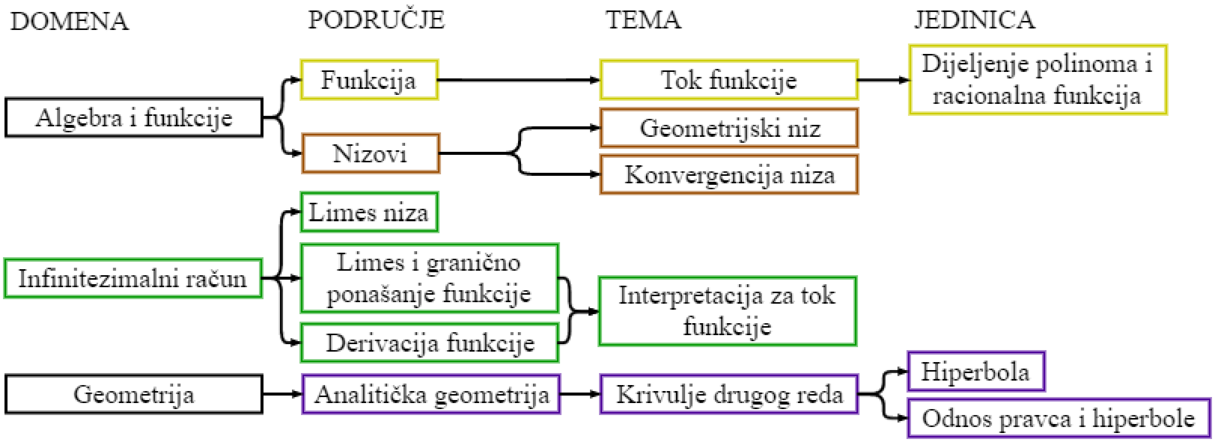
5. REZULTATI

5.1. Polazni referentni epistemološki model za objekt znanja asimptota

Asimptota se, kao matematički objekt, ne spominje u osnovnim dokumentima koji propisuju znanje za poučavanje za gimnazije u Republici Hrvatskoj (*Rasterećeni program za gimnazije*, 2003, *NOK*, 2011). Promatraju se ishodi učenja odnosno zadaće i sadržaji koji mogu uključivati pojam asimptote i asimptotskog ponašanja. U terminima ATD-a, asimptota je objekt znanja koji se sastoji od skupa prakseologija kojima je ona jedna komponenta. Objekti znanja za poučavanje u gimnazijama koji se mogu povezati s asimptotom su:

- racionalna funkcija,
- eksponencijalna i logaritamska funkcija,
- trigonometrijske funkcije (tangens i kotangens),
- krivulje drugog reda (hiperbola),
- pojam, svojstva, tok i limes funkcije,
- pojam, svojstva i limes niza,
- graf (elementarne) funkcije.

Referentni epistemološki model treba obuhvaćati prakseologije, vezane uz navedene objekte znanja, kojima je asimptota komponenta praktičnog ili diskurzivnog bloka. Na Slici 5.1.1 prikazan je doseg i opseg REM-a za objekt znanja asimptota na disciplinarnim razinama ljestvice didaktičke određenosti. Asimptota se kao objekt znanja ostvaruje nadograđivanjem i povezivanjem lokalnih prakseologija, prolazeći podjednako njihovim praktičnim i diskurzivnim komponentama.



Slika 5.1.1: Opseg REM-a objekta znanja asimptota na disciplinarnim razinama skale didaktičke određenosti

Prakseologije unutar teme Tok funkcije

Osnovna prakseologija u području Funkcija, temi Tok funkcije, iz koje proizlaze značajne praktične i diskurzivne aktivnosti, je zahtjev izračunavanja vrijednosti elementarnih funkcija: racionalne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijskih funkcija. Odgovarajuća tehnika je računanje, na primjeren način. Opisivanje *praxisa* provodi se tabličnim i grafičkim prikazom rezultata. Tehnološka komponenta prakseologije je tok funkcije. *Logos* se ostvaruje prepoznavanjem ili pozivanjem svojstava funkcije, gdje se ubraja područje definicije, monotonost, omeđenost, parnost i periodičnost funkcije, kompozicija funkcije s linearnom funkcijom, simetričnost i transformacije grafova funkcija te druga svojstva. Posebno se razmatra ponašanje grafa funkcije u rubovima domene funkcije i u beskonačnosti, što je diskurs čija je važna komponenta asimptota.

Asimptota se prepoznaje kao pravac kojemu se graf funkcije približava ili pravac do kojega se udaljenost točaka grafa funkcije smanjuje kako odgovarajuća koordinata točke grafa funkcije neograničeno raste. Važno je, iako ispravno u danom kontekstu, ne isticati kako pravac i graf funkcije nemaju zajedničkih točaka.

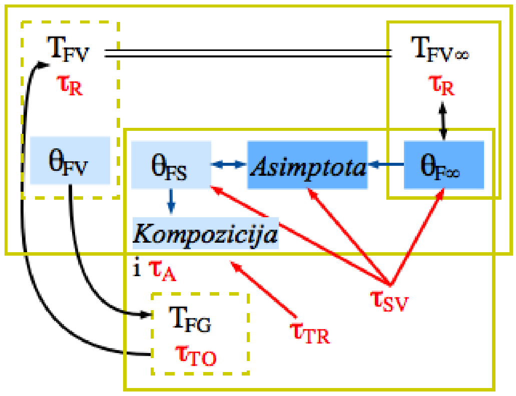
Prakseologija izračunavanja vrijednosti funkcije se nadograđuje zahtjevom određivanja vrijednosti funkcije za argument značajno velike magnitude ili u blizini ruba domene funkcije. Prakseologija se realizira na dva načina (Slika 5.1.2). Rezultati dobiveni računanjem potiču diskurs (približne) jednakosti vrijednosti funkcije i njezine asimptote u beskonačnosti ili se poznavanje diskursa koristi za računanje približnih vrijednosti funkcije za odgovarajući argument.

Asimptotsko ponašanje funkcije opravdava se s obzirom na druga njezina svojstva, posebno uspostavlja se veza područja definicije funkcije i vertikalne asimptote funkcije te omeđenosti i monotonosti funkcije i horizontalne asimptote funkcije.

Prakseologija crtanja grafa funkcije povezana je s prakseologijom izračunavanja vrijednosti funkcije (Slika 5.1.2). Zadatak crtanja grafa elementarne funkcije diskurs je *praxisu* izračunavanja vrijednosti funkcije. Jedna tehnika crtanja grafa funkcije je povlačenje krivulje kroz odgovarajuće točke koordinatnog sustava, što poziva prakseologiju izračunavanja vrijednosti funkcije. Komponente tehnologije toka funkcije podržavaju dvije tehnike crtanja grafa funkcije:

- povlačenje krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije i grafa funkcije, posebno ponašanje funkcije u rubovima njezine domene i u beskonačnosti;
- transformacije grafa temeljne funkcije s obzirom na kompoziciju s linearnom funkcijom ili funkcijom apsolutne vrijednosti.

Prakseologija crtanja grafa funkcije poziva se pri rješavanju problema matematičkog i realnog konteksta tehnikom očitavanja s grafičkog prikaza.



T_{FV} Odrediti vrijednost funkcije za neki argument
$T_{FV\infty}$ Odrediti vrijednost funkcije za argument blizu ruba domene ili velike magnitude
T_{FG} Nacrtati graf funkcije
τ_R Računanje i izvrednjavanje algebarskih izraza
τ_A Manipuliranje algebarskim izrazom
τ_{TO} Povlačenje krivulje kroz odgovarajuće točke
τ_{SV} Povlačenje krivulje s obzirom na istaknuta svojstva
τ_{TR} Transformacije grafa temeljne funkcije
θ_{FV} Tablična i grafička interpretacija funkcije
θ_{FS} Svojstva funkcije i grafa funkcije
$\theta_{F\infty}$ Ponašanje funkcije u rubovima domene i u beskonačnosti
Asimptota Definicija asimptote, asimptotsko ponašanje, odnos s komponentama θ_{FS}

Slika 5.1.2: Prakseologije unutar teme Tok funkcije, područja Funkcija

Prakseologije unutar jedinice Dijeljenje polinoma i racionalna funkcija

Objekt znanja asimptota i asimptotsko ponašanje kod racionalnih funkcija se prakseološki razvijaju kao (Slika 5.1.3):

(1) diskurzivna komponenta prakseologije izračunavanja vrijednosti funkcije: prepoznaju se asimptote kao istaknuto svojstvo ponašanja vrijednosti racionalne funkcije u rubovima njezine domene i u beskonačnosti;

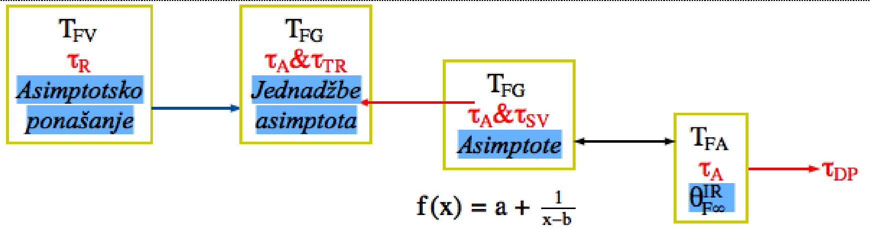
(2) diskurzivna komponenta prakseologije crtanja grafa funkcije transformacijama grafa temeljne funkcije g zadane s $g(x)=\frac{1}{x}$: pravilo pridruživanja racionalne funkcije koja je količnik linearnih funkcija algebarskim manipulacijama se svodi na oblik $f(x)=a+\frac{1}{x-b}$ gdje su a i b realni brojevi, potom se prepoznaje pravac $x=b$ kao vertikalna i $y=a$ kao horizontalna asimptota grafa funkcije f;

(3) diskurzivna podrška tehnici povlačenja krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije: koristi se diskurzivna spoznaja o vezi koeficijenata a i b u pravilu pridruživanja racionalne funkcije oblika $f(x)=a+\frac{1}{x-b}$ s jednadžbama asimptote funkcije;

(4) *raison d'être* prakseologije određivanja asimptota racionalnih funkcija s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku funkcije, koja je podrška tehnici povlačenja krivulje s obzirom na istaknuta svojstva funkcije.

Praktične i diskurzivne aktivnosti vezane uz objekt znanja asimptota racionalne funkcije podrijetlo nalaze u empirijskim istraživanjima (Dobbs, 2010; Mok, 1999; Yerushalmy, 1997). Po analogiji za racionalne funkcije koje su količnik linearnih funkcija, usustavljuje se prakseologija određivanja jednadžbi asimptota racionalne funkcije. *Praxis* je vezan uz dijeljenje polinoma u brojniku i nazivniku racionalne funkcije. *Logos* ima dvojaku ulogu: (1)

interpretacija asimptota iz grafičkog prikaza racionalne funkcije potiče razvijanje algebarske tehnike određivanja asimptota, (2) neformalno rasuđivanje o graničnim vrijednostima funkcije u ovisnosti o pravilu pridruživanja funkcije, pravda tehniku.



T_{FA} Odrediti asimptote funkcije

τ_{DP} Dijeljenje polinoma

Asimptote Asimptotsko ponašanje, vrste (vertikalna, horizontalna, kosa, polinomijalna) asimptota

$\theta_{F\infty}^{IR}$ Neformalni diskurs graničnih vrijednosti algebarskog izraza

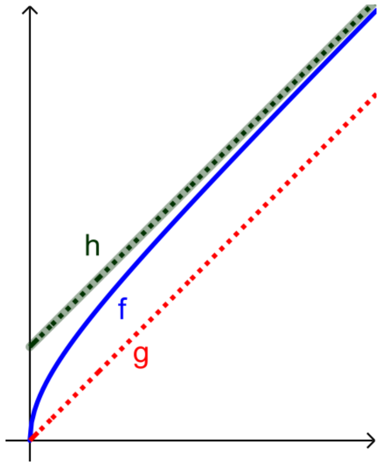
Slika 5.1.3: Prakseologije unutar jedinice Dijeljenje polinoma i racionalna funkcija, teme Tok funkcije

Prakseologije unutar domene Infinitezimalni račun

Povećavanje složenosti algebarskih izraza kojima je zadano pravilo pridruživanja funkcije onemogućuje korištenje postojećih tehnika crtanja grafa funkcije. Prakseologija crtanja grafa funkcije nadograđuje se tako da se istaknuta svojstva određuju u skladu s teorijskim spoznajama iz domene Infinitezimalni račun (Slika 5.1.4). Uspostavlja se veza ponašanja funkcije u rubovima njezine domene i u beskonačnosti s vrijednosti odgovarajućih limesa te veza svojstava funkcije i grafa funkcije (monotonost, lokalni i globalni ekstremi, konveksnost i konkavnost, točke pregiba) s vrijednostima derivacije funkcije. Za objekt znanja asimptotu relevantno je da grafovi zadanih funkcija sa svojom horizontalnom i/ili kosom asimptotom nemaju zajedničkih točaka, imaju jednu ili konačno mnogo zajedničkih točaka te imaju beskonačno mnogo zajedničkih točaka (vidi Pitanje 3.2 u Poglavlju 4.2, Kidron (2011), Swinyard i Larsen (2012), Yerushalmy (1997)). Prakseološka organizacija domene Infinitezimalni račun (Slika 5.1.1) nije dijelom ovog REM-a, a za područje Limes i granično ponašanje funkcije dana je u Barbé i sur. (2005).

Asimptota kao objekt znanja inducira dvije prakseologije u području Limes i granično ponašanje funkcije (Slika 5.1.4). Praktični blok prakseologije računanja limesa funkcije dostupnim, uglavnom algebarskim, tehnikama je tipična matematička aktivnost u području Limes i granično ponašanje funkcije (Barbé i sur., 2005; Cornu, 1991; Hardy, 2009, 2011). Asimptotsko ponašanje je diskurzivni blok ove prakseologije kad se računaju vrijednosti limesa funkcije u rubovima njezine domene i u beskonačnosti te limesi kvocijenta ili razlike dvaju funkcija (vidi Primjer 5.1, Barbé i sur. (2005); Dobbs (2010, 2011)). Ova prakseologija se koristi za formalno pravdanje (1) tehnike određivanja jednadžbe asimptote racionalne funkcije iz jedinice Dijeljenje polinoma i racionalne funkcije te (2) jednadžbe asimptote krivulje i (3) diskursa asimptote hiperbole kao tangente hiperbole u beskonačnosti iz područja Analitička geometrija.

Primjer 5.1: Prakseologija izračunavanja limesa algebarskog izraza



Zadatak: Dane su funkcije f i g zadane s $f(x)=\sqrt{x+x^2}$ i $g(x)=x$. Odredite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)$.

Tehnika: racionalizacija algebarskog izraza, dijeljenje najvećom potencijom i svođenje na izraz poznatog limesa

Rješenje: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\frac{1}{2}$

Tehnologija: Funkcije f i g imaju asimptotski jednake vrijednosti u beskonačnosti. Funkcija f ima kosu asimptotu $h(x)=x+\frac{1}{2}$.

(vidi Primjer 1.6)

Druga značajna prakseologija je određivanje asimptota funkcije računanjem odgovarajućih limesa, koja se poziva za prakseologiju crtanja grafa funkcije s obzirom na istaknuta svojstva. Asimptota i asimptotsko ponašanje kao komponenta *logosa* toka funkcije i kao diskurs računanja limesa, daju *raison d'être* istraživanju formula za jednadžbe asimptota u ovisnosti o limesu funkcije (vidi Poglavlje 1.2). Diskurzivne spoznaje pripadaju području Limes i granično ponašanje funkcije, a podržane su:

- definicijom asimptote u diskurzivnom bloku prakseologije izračunavanja vrijednosti funkcije iz teme Tok funkcije;
- diskursom vrsta asimptota i neformalnog opisivanja graničnog ponašanja funkcije iz jedinice Dijeljenje polinoma i racionalne funkcije;
- prakseološkom opremom iz područja Analitička geometrija;
- prakseološkom opremom iz domene Infinitezimalni račun.

Pravac $y=kx+l$ je kosa asimptota funkcije f ako vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+l))=0$$

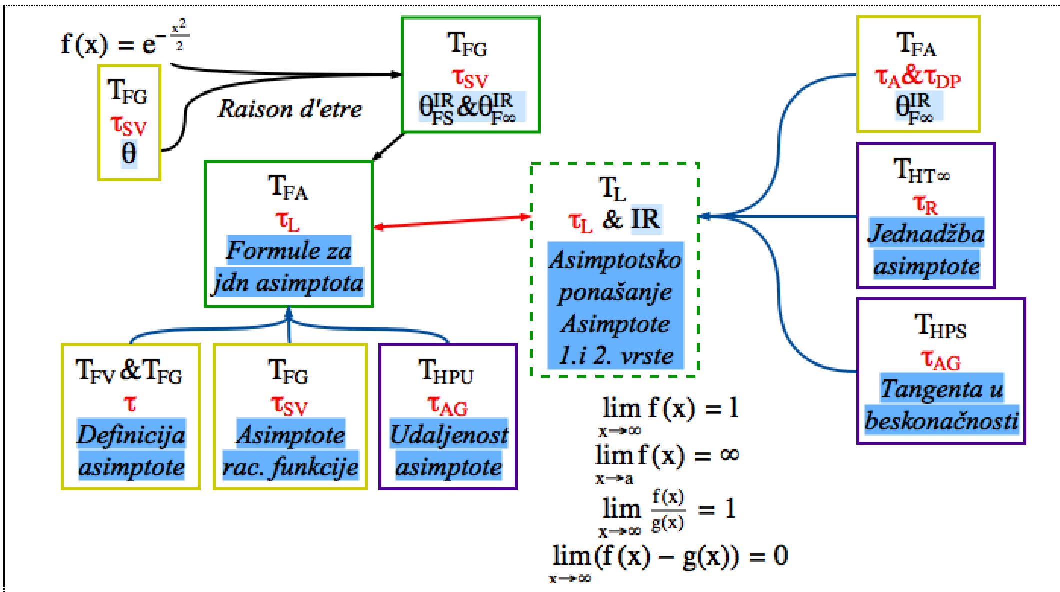
$$1^\circ\quad 0=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+l)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}-l\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$2^\circ\quad 0=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)-\lim_{x\to\infty}l\Rightarrow l=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx$$

Jednadžba 5.1.1: Obrazlaganje formula za koeficijente kose asimptote funkcije *f*

Primjerice, poznato je da udaljenost točaka grafa funkcije do asimptote teži nuli kako apscisa neograničeno raste i da krivulja može imati kosu asimptotu. Oprema iz područja Analitička geometrije daje formulaciju $|f(x)-(kx+l)|\to 0$ za $x\to\infty$, a oprema iz područja Limes i granično ponašanje funkcije daje formulaciju $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+l))=0$. Izvode se formule za koeficijente kose asimptote, kako je dano u Jednadžbi 5.1.1.

Tehnike određivanja vertikalne i horizontalne asimptote racionalne funkcije proizlaze iz diskursa o jednadžbama asimptota funkcije u području Limes i granično ponašanje funkcije. Primjerice, uvjet $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ da pravac $x=a$ bude vertikalna asimptota grafa racionalne funkcije $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ispunjen je onda i samo onda kada je a nultočka polinoma q, ako polinomi p i q nemaju zajedničkih nultočaka. Kad polinomi p i q imaju zajedničku nultočku a tada funkcija f u točki a ima uklonjivi prekid.



T_L Odrediti limes funkcije
τ_L Određivanje limesa algebarskim metodama
θ_{FS}^{IR} Svojstva funkcije i grafa funkcije ispitana alatima infinitezimalnog računa
$\theta_{F\infty}^{IR}$ Granično ponašanje funkcije ispitano alatima infinitezimalnog računa

Slika 5.1.4: Prakseologije unutar domene Infinitezimalni račun

Prakseologije unutar područja Nizovi

Područje Nizovi ima slične prakseologije kao područje Funkcija. Veze između pojedinih komponenti prakseologija iz dvaju područja proizlaze iz definicije niza kao funkcije kojoj je domena skup prirodnih brojeva. *Praxis* računanja vrijednosti članova niza i grafičkog prikazivanja niza potiču diskurs o svojstvima vrijednosti članova niza, gdje se uključuje monotonost, omeđenost, neograničenost i druga svojstva, analogna svojstvima funkcije ili specifična objektu niza. Posebno je značajan *logos* ponašanja vrijednosti članova niza u beskonačnosti.

Praxis računanja vrijednosti članova niza motivira diskurs konvergentnog niza, kao niza čije se vrijednosti članova približavaju nekom broju. Konvergentnost i divergentnost niza

pravdaju se s obzirom na svojstva vrijednosti članova niza, posebno omeđen i monoton niz je konvergentan, dok je neograničen i monoton niz divergentan.
Zahtjev grafičkog prikazivanja niza realizira se na dva načina (Slika 5.1.5). Prva prakseologija određena je tehnikom prikazivanja vrijednosti na brojevnom pravcu. Pripadni diskurs je gomilište i konvergencija niza. Druga prakseologija je prikazivanje niza kao grafa funkcije u koordinatnom sustavu u ravnini, koja poziva prakseologiju crtanja grafa funkcije iz teme Tok funkcije. *Praxis* potiče diskurs o svojstvima vrijednosti članova niza, posebno ponašanju u beskonačnosti te povezivanje s *logosom* ponašanja funkcije u beskonačnosti. Konvergencija niza interpretira se poznatim ponašanjem funkcije koja ima horizontalnu asimptotu.

S obzirom na *logos* svojstava niza razvija se prakseologija određivanja indeksa člana niza od kojeg vrijedi zadano ponašanje vrijednosti članova niza. Usustavljuje se formalna definicija konvergentnog niza i limesa niza te se prelazi s intuitivnog opisivanja ponašanja vrijednosti članova niza u beskonačnosti na praktične i teorijske aktivnosti infinitezimalnog računa unutar područja Limes niza.
Limes niza povezuje se s limesom funkcije u beskonačnosti, slično kao što se konvergencija niza povezuje s ponašanjem funkcije koja ima horizontalnu asimptotu. Definicija limesa niza uključuje ispitivanje udaljenosti vrijednosti članova niza i jednog broja. Istaknuta je veza s:

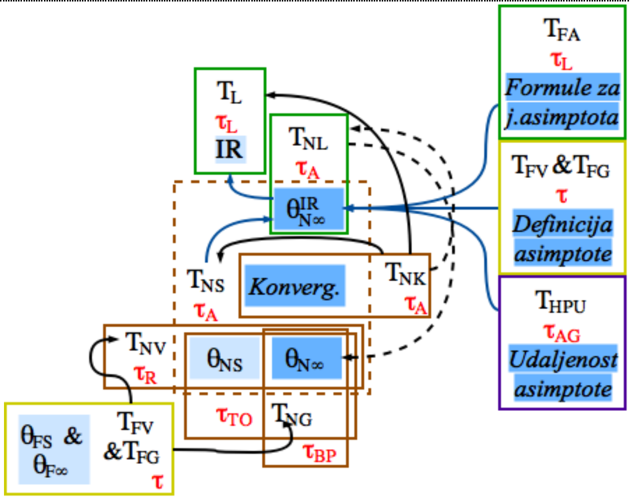
- definicijom asimptote iz diskurzivnog bloka prakseologije izračunavanja vrijednosti funkcije, konkretno *logosa* ponašanja funkcije u beskonačnosti,
- podrškom diskursu određivanja jednadžbe asimptote funkcije unutar područja Limes i granično ponašanje funkcije te
- diskursom smanjivanja udaljenosti točaka krivulje ili grafa funkcije do asimptote kod odgovarajuće prakseologije unutar područja Analitička geometrija.

Konvergentni nizovi trebaju biti takvi da se vrijednosti članova niza monotono približavaju limesu, osciliraju oko limesa i poprimaju vrijednosti limesa niza (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Roh, 2008; Swinyard i Larsen, 2012; Tall, 1992; Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991; Williams, 1991).

Zahtjev ispitivanja konvergencije niza veže se uz nekoliko prakseologija (Slika 5.1.5). Prakseologije izračunavanja vrijednosti članova niza i njihovog grafičkog prikazivanja doprinose identificiranju broja kojemu se vrijednosti članova niza u beskonačnosti približavaju, ako takav postoji. Potvrđuje se da je očekivani broj limes niza algebarskim manipulacijama definicije limesa niza. Divergentnost ili konvergentnost niza utvrđuju se dokazivanjem odgovarajućih svojstava vrijednosti članova niza.

Unutar domene Infinitezimalni račun i područja Limes niza razvijaju se algebarske tehnike određivanja limesa niza zadanog formulom za opći član, slično kao tehnike računanja limesa funkcije. Niz je konvergentan, ako ima limes, pa ispitivanje konvergencije niza poziva prakseologiju određivanja limesa niza.

T_{NV} Odrediti vrijednost člana niza
T_{NG} Prikazati grafički vrijednosti članova niza
T_{NS} Odrediti indeks člana niza od kojeg vrijedi zadano svojstvo
T_{NK} Ispitati konvergenciju niza
T_{NL} Potvrditi limes niza
τ_{BP} Isticanje vrijednosti na brojevnom pravcu
θ_{NS} Svojstva vrijednosti članova niza
$\theta_{N\infty}$ Ponašanje vrijednosti članova niza u beskonačnosti
Konverg. Konvergentni i divergentni niz, odnos s komponentama θ_{NS}
$\theta_{N\infty}^{IR}$ Definicija limesa niza



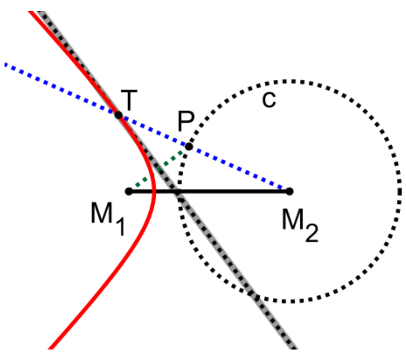
Slika 5.1.5: Prakseologije unutar područja Nizovi

Prakseologije unutar područja Analitička geometrija

Važna komponenta jedinice Hiperbola, unutar područja Analitička geometrija i teme Krivulje drugog reda, je asimptota. *Raison d'être* objekta znanja hiperbola je problem realnog konteksta, za čije rješavanje je potrebno konstruirati geometrijsko mjesto točaka za koje je razlika udaljenosti do dvaju fiksnih točaka stalna (vidi Primjer 5.2, Antončić i sur. (2008, str. 119)). Konstrukcija otkriva jednu granu hiperbole, što motivira definiciju nove krivulje s obzirom na razliku radijvektora. Pripadni *logos* obuhvaća definiciju hiperbole te pojmove žarišta i linearnog ekscentriciteta.

Primjer 5.2: Raison d'être objekta znanja hiperbola

Dvije mjerne stanice, međusobno udaljene 1 km, zabilježile su eksploziju. Do prve stanice zvuk je stigao 2 sekunde prije nego do druge stanice. Možemo li odrediti gdje se dogodila eksplozija?



Zbog brzine zvuka od 343 m/s za udaljenosti mjesta eksplozije T do mjernih stanica M_1 i M_2 vrijedi:

$$\mathrm{d}(T, M_2) - \mathrm{d}(T, M_1) = 343\ m/s \cdot 2\ s = 686\ m$$

odnosno $\mathrm{d}(T, M_2) = \mathrm{d}(T, M_1) + 686\ m$.

Neka je P točka na kružnici $c = k(M_2, 686\mathrm{m})$. P ne može biti mjesto eksplozije. Za sve točke na simetrali dužine $\overline{PM_1}$ vrijedi $\mathrm{d}(T, M_1) = \mathrm{d}(T, P)$. Stoga se za geometrijsko mjesto točaka T bira sjecište pravca M_2P i simetrale dužine $\overline{PM_1}$, jer je $\mathrm{d}(T, M_2) = \mathrm{d}(T, P) + \mathrm{d}(P, M_2) = \mathrm{d}(T, M_1) + 686\ m$.

Na temelju definicije hiperbole pomoću radijvektora, algebarskom manipulacijom, uz podršku prakseološke opreme iz područja Analitička geometrija, izvodi se jednadžba hiperbole kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava i žarišta na osi apscisa. Pokazuje se da je svaka točka, koja zadovoljava dobivenu jednadžbu, točka hiperbole s obzirom na definiciju pomoću radijvektora. *Logos* hiperbole u području Analitičke geometrije čine jednadžba hiperbole, simetričnost hiperbole i pojmovi žarište, linearni i numerički ekscentricitet, realna i imaginarna poluos, tjemena i središte hiperbole.

Problem lokacije iz realnog konteksta smješta se u koordinatni sustav i rješava određivanjem pripadne jednadžbe hiperbole uz podršku prakseološke opreme iz područja Analitička geometrija.

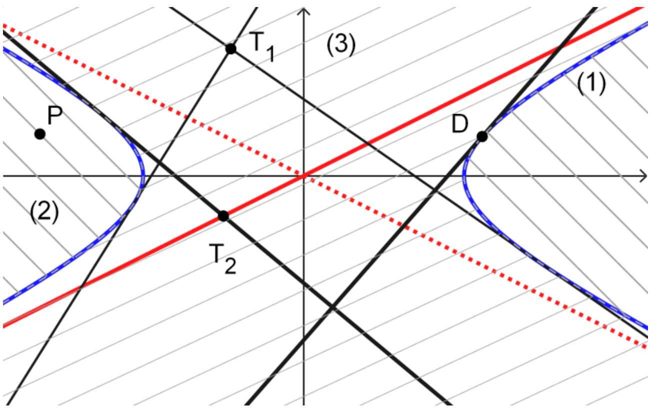
Zahtjev crtanja hiperbole razvija tri prakseologije (Slika 5.1.7). Tehnike crtanja podržane *logosom* su konstrukcija točaka hiperbole s obzirom na definiciju hiperbole pomoću radijvektora te povlačenje krivulje kroz točke koordinatnog sustava koje zadovoljavaju jednadžbu hiperbole. Posljednja spomenuta tehnika poziva prakseologiju određivanja točaka koordinatnog sustava koje zadovoljavaju jednadžbu hiperbole. Taj zadatak se rješava izvrednjavanjem jednadžbe hiperbole ili eksplicitnog izraza za ordinatu točke hiperbole.

Prepoznavanje asimptotskog ponašanja hiperbole je diskurs dviju prakseologija: (1) crtanja hiperbole, gdje se uočava kako se krivulja približava pravcima, i (2) određivanja točaka hiperbole s koordinatama velike magnitude, gdje se uočava stalnost omjera ordinate i apscise točaka hiperbole. Diskurs stalnosti omjera motivira prepoznavanje asimptote kao pravca kojemu je dobiveni omjer koeficijent smjera. Jednadžba asimptote pravda se vrijednošću eksplicitnog izraza za ordinatu točke hiperbole $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \approx \pm\frac{b}{a}x$, jer je za apscisu velike magnitude doprinos vrijednosti realne poluosi zanemariv.

Diskurs asimptotskog ponašanja hiperbole i jednadžbe njezine asimptote omogućuje nadograđivanje prakseologija crtanja hiperbole i određivanja točaka hiperbole koordinata velike magnitude. Nove tehnike su povlačenje krivulje koja prolazi tjemenima i približava se asimptotama te aproksimacija točke hiperbole koordinata velike magnitude koordinatama odgovarajuće točke asimptote (Slika 5.1.7).

Različiti pristupi definiciji asimptote krivulje induciraju značajne prakseologije vezane uz objekt znanja asimptota unutar područja Analitička geometrija i Limes i granično ponašanje funkcije (vidi Poglavlje 1). Prakseologija određivanja udaljenosti točke hiperbole do njezine asimptote ima za *logos* spoznaju kako se povećavanjem koordinate točke hiperbole ta udaljenost smanjuje. Prakseologija se može primijeniti za bilo koju krivulju ili graf funkcije i pripadnu asimptotu zadanu jednadžbom. Računanje limesa algebarskog izraza, koji određuje udaljenost točke krivulje ili grafa funkcije i točke njezine asimptote s istom apscisom, potvrđuje kako dani pravac zadovoljava definiciju asimptote krivulje.

Značajna jedinica za objekt znanja asimptota unutar područja Analitička geometrija je Odnos pravca i krivulje drugog reda. Algebarskom manipulacijom jednadžbi pravca i hiperbole razvija se diskurs odnosa pravca i hiperbole u ovisnosti o rješenjima odgovarajuće kvadratne jednadžbe (Slika 5.1.6). *Logos* uključuje formule za uvjet dodira pravca i hiperbole, koordinate dirališta hiperbole i tangente te jednadžbu tangente kroz točku na hiperboli. Prepoznaju se tri skupa točaka ravnine u odnosu na hiperbolu (1) točke na hiperboli, (2) unutrašnje i (3) vanjske točke hiperbole, među kojima su i točke asimptote. Utvrđuje se kako broj tangenti, koje se iz dane točke ravnine mogu povući na hiperbolu, ovisi o položaju točke u odnosu na skupove koje hiperbola određuje u ravnini.



Hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Pravac $y = kx + l$

Uvjet dodira: $a^2k^2 - b^2 = l^2$

Koordinate dirališta: $\left(\frac{a^2k}{-l}, \frac{b^2}{-l}\right)$

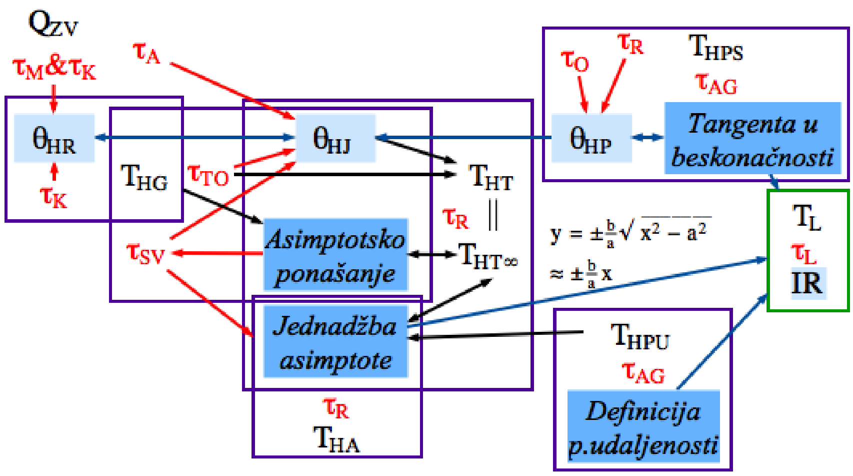
Jednadžba tangente kroz točku (x_0, y_0) na hiperboli dana je jednadžbom:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \text{ ili } y = \frac{bx_0x}{a\sqrt{x_0^2 - a^2}} - \frac{ab}{\sqrt{x_0^2 - a^2}}$$

Slika 5.1.6: Formule unutar *logosa* odnos pravca i hiperbole

Koeficijenti jednadžbe asimptote $k = \pm\frac{b}{a}, l = 0$ zadovoljavaju uvjet dodira, a koordinate pripadnog dirališta imaju neograničeno veliku vrijednost $\frac{ab}{0} = \infty$. Tumači se kako je asimptota hiperbole tangenta hiperbole u beskonačno dalekoj točki. Pomoću prakseološke opreme iz područja Infinitezimalni računa pokaže se kako je granična vrijednost formule za jednadžbu tangente kroz točku na hiperboli kad apscisa točke teži u beskonačnost upravo jednadžba asimptote (vidi Poglavlje 1). Kad asimptotu tumačimo kao tangentu hiperbole u beskonačnosti, tada se iz svake vanjske točke hiperbole mogu povući dvije tangente na hiperbolu.

Praxis ispitivanja odnosa pravca i hiperbole razvija diskurs formula karakterističnih problemu te *logos* asimptote kao tangente u beskonačnosti (Slika 5.1.7). Odnos pravca i hiperbole se tako može ispitati rješavanjem odgovarajuće kvadratne jednadžbe, izračunavanjem vrijednosti uvjeta dodira pravca i hiperbole ili očitavanjem s grafičkog prikaza. Posljednja tehnika podrazumijeva određivanje položaja danog pravca u odnosu na asimptote hiperbole i pravce okomite na os apscisa kroz žarišta hiperbole.



Q_{ZV} Odrediti lokaciju eksplozije ako je poznato vrijeme putovanja zvuka
T_{HG} Nacrtati hiperbolu sa zadanim elementima
T_{HT} Odrediti točku na hiperboli
$T_{HT\infty}$ Odrediti točku na hiperboli s koordinatama velike magnitude
T_{HPU} Odrediti udaljenost hiperbole i pravca
T_{HA} Odrediti jednadžbu asimptote hiperbole
T_{HPS} Odrediti odnos hiperbole i pravca
τ_M Modeliranje situacije algebarskim izrazom
τ_K Konstrukcija točaka koje zadovoljavaju neki uvjet
τ_O Očitavanje s grafičkog prikaza
τ_{AG} Manipuliranje algebarskim izrazima uz diskurzivnu podršku područja Analitičke geometrije
θ_{HR} Definicija hiperbole pomoću radijus vektora
θ_{HJ} Jednadžba hiperbole, karakteristični elementi, točke i parametri
θ_{HP} Odnos hiperbole i pravca, formule, skupovi točaka

Slika 5.1.7: Prakseologije unutar područja Analitička geometrija

Navedene prakseologije stavljaju se na raspolaganje rješavanju problema različitog konteksta i iz različitih matematičkih domena. Odrediti rješenja jednadžbi i nejednadžbi, ispitati broj rješenja jednadžbi, ispitati vrijede li jednakosti, su zadaci koji se rješavaju očitavanjem s grafičkog prikaza što poziva odgovarajuće prakseologije vezane uz tok funkcije. Problemi realnog ili matematičkog konteksta modeliraju se funkcijom, formulom ili jednadžbom. Izgrađene lokalne prakseologije oko tehnologija svojstava niza i funkcije te ponašanja niza i funkcije u beskonačnosti doprinose razumijevanju i tumačenju ponašanja vrijednosti veličina iz zadanog konteksta.

5.2. Znanje za poučavanje u općim gimnazijama u RH za objekt znanja asimptota

5.2.1. Nastavni program matematike u općim gimnazijama u RH

Zakonske odrednice za srednjoškolsko obrazovanje u Republici Hrvatskoj zadaju kako udžbenici i provedba nastave trebaju biti usklađeni s Nacionalnim okvirnim kurikulumom (NOK) i Nastavnim programom. Navedeni dokumenti određuju oblike srednjoškolskog obrazovanja na razini škole, daju ciljeve, načela i preporuke poučavanja na razini pedagogije te definiraju odgojno-obrazovna područja odnosno nastavne predmete, što određuje matematiku kao zasebnu disciplinu (vidi razine didaktičke određenosti na Slici 2.3.2).
Okvirni kurikulum za matematičko područje (*NOK*, 2011) organiziran je u dvije dimenzije: koncepti i procesi. Četvrti odgojno-obrazovni ciklus za gimnazije sadrži koncepte Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje, Podatci i Infinitezimalni račun te procese Prikazivanje i komunikacija, Povezivanje, Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, Rješavanje problema i matematičko modeliranje i Primjena tehnologije. Procesi su učenička postignuća neovisna o sadržaju i nužna za sve matematičke aktivnosti stoga strukturu discipline određuju koncepti.

Nastavni program detaljnije razrađuje zahtjeve NOK-a. Ministarstvo prosvjete i športa i Zavod za unapređivanje školstva 2003. godine su donijeli okvirni nastavni program za gimnazije u funkciji rasterećenja učenika. Rasterećeni nastavni program matematike sadržaje programske građe organizira po razredima na razini teme (Tablica 5.2.1), gdje ističe obvezne i neobvezne zadaće za učenike te korelaciju s drugim predmetima. Za objekt znanja asimptotu značajne su teme Eksponencijalna i logaritamska funkcija u 2. razredu, Trigonometrijske funkcije i Analitička geometrija u ravnini u 3. razredu te Nizovi, Funkcije i Derivacija u 4. razredu.
Očekivane zadaće relevantne REM-u objekta znanja asimptota u Rasterećenom nastavnom programu matematike su uglavnom nepotpune prakseologije. Naglasak je na računanju, crtanju grafova, određivanju limesa, bez diskurzivne komponente ili na primjeni formula i pravila te određivanju svojstava danih diskursom. Primjerice, potrebno je `upotrebljavati osnovna pravila za računanje s logaritmima`, `primjenjivati adicijske formule´, `odrediti temeljni period trigonometrijske funkcije´ ili `primijeniti derivaciju na ispitivanja toka funkcije´, što su uvježbani postupci koji koriste komponente diskursa. Diskurs o svojstvima funkcije nije predviđen kod *praxisa* računanja vrijednosti funkcije i crtanja grafova funkcija u 2. i 3. razredu. Kad su dostupni, diskurzivni elementi su uglavnom odvojeni od *praxisa*.

Potrebno je definirati funkcije, krivulje i nizove, iskazati svojstva i teoreme, opisati ili razlikovati odnose među objektima. Jedina je potpuna prakseologija opisivanje toka funkcije na osnovu grafa funkcije. Nisu predviđene praktične i diskurzivne komponente vezane uz ponašanje funkcije u rubovima domene i u beskonačnosti. Kod realizacije krivulja drugog reda naglasak je na jednadžbi i algebarskoj manipulaciji jednadžbama. Primjena matematičkih sadržaja istaknuta je samo kod općeg člana geometrijskog niza.

Tablica 5.2.1: Teme Rasterećenog nastavnog programa matematike iz 2003. godine

Razred	**Domena**	**Tema**
1. razred	*Brojevi*	SKUP REALNIH BROJEVA
	Algebra i funkcije	POTENCIJE I ALGEBARSKI IZRAZI
	Algebra i funkcije	UREĐAJ U SKUPU REALNIH BROJEVA
	Oblik i prostor	KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI
	Oblik i prostor	SUKLADNOST I SLIČNOST
	Algebra i funkcije	POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE [1994]
	Algebra i funkcije	KORIJENI
	Oblik i prostor	KRUŽNICA I KRUG. PRAVILNI POLIGONI.
2. razred	*Brojevi*	KOMPLEKSNI BROJEVI
	Algebra i funkcije	KVADRATNA JEDNADŽBA
	Algebra i funkcije	POLINOM DRUGOG STUPNJA I NJEGOV GRAF
	Mjerenje	TRIGONOMETRIJA PRAVOKUTNOG TROKUTA
	Algebra i funkcije	EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE
	Oblik i prostor	GEOMETRIJA PROSTORA
	Oblik i prostor	POLIEDRI I ROTACIJSKA TIJELA
3. razred	*Algebra i funkcije*	TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE
	Mjerenje	PRIMJENE TRIGONOMETRIJE U PLANIMETRIJI
	Oblik i prostor	ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI
4. razred	*Brojevi*	BROJEVI
	Algebra i funkcije	NIZOVI
	Algebra i funkcije	FUNKCIJE
	Infinitezimalni račun	PROBLEM IZRAČUNAVANJA POVRŠINE [1994]
	Infinitezimalni račun	DERIVACIJA
	Infinitezimalni račun	INTEGRAL I PRIMITIVNA FUNKCIJA
	Podaci	OSNOVNI POJMOVI VJEROJATNOSTI [1994]

Nastavno gradivo vezano uz asimptotu u dva različita seta matematičkih udžbenika za gimnazije nalazi se u udžbenicima za drugi, treći i četvrti razred. Relevantni sadržaj obuhvaćen je udžbeničkim temama ili jedinicama

- tema *Eksponencijalna i logaritamska funkcija* u udžbenicima za 2. razred,
- teme *Trigonometrijske funkcije, Grafovi trigonometrijskih funkcija, Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe* te jedinice *Hiperbola, Odnos pravca i krivulja drugog reda* u udžbenicima za 3. razred,
- tema *Nizovi*, posebno jedinica *Limes niza*, tema *Funkcija*, posebno jedinica *Limes funkcije* i tema *Derivacija*, posebno jedinica *Tok funkcije*, u udžbenicima za 4. razred.

Prema REM-u, asimptotsko ponašanje je *logos* za vrijednosti niza i funkcije, posebno njihov limes, te dio *praxisa* crtanja grafa funkcije. Svaka jedinica u oba seta udžbenika sastoji se od praktičnih i teorijskih udžbeničkih blokova te završava zadacima za vježbu. Ukupni broj punkt-prakseologija unutar pojedinih udžbeničkih tema dan je u Tablici 5.2.2.

Tablica 5.2.2: Frekvencije javljanja punkt-prakseologija u pojedinim setovima udžbenika

Teme i jedinice:		Ukupno p-praks.	Ukupno zad.	Aritm. sredina*	Mod*	Najm. frekv.*	Donji kvartil*	Medijan*	Gornji kvartil*	Najviša frekv.*
Prvi set udžbenika	Ekspon. i log. funk.	45	134	2,98	1	1	1	2	4	11
	Trigon. funkcije	23	75	3,26	1	1	1	3	5	7
	Krivulje 2. reda	26	77	2,96	1	1	1	2,5	3,75	11
	Nizovi	38	122	3,21	1	1	1	2	4	12
	Funkcija	26	67	2,58	2	1	1,25	2	3	7
	Tok funkcije	24	98	4,08	1	1	1	2	4	35
Drugi set udžbenika	Ekspon. i log. funk.	52	255	4,9	1	1	1	3	6,25	31
	Trigon. funkcije	18	97	5,39	5	1	3,25	5	7	12
	Krivulje 2. reda	20	43	2,15	1	1	1	1,5	2,25	7
	Nizovi	44	146	3,32	1	1	1	2	4,25	11
	Funkcija	37	126	3,41	1	1	1	2	5	14
	Tok funkcije	16	56	3,5	3	1	1,75	3	4,25	12

* s obzirom na frekvencije javljanja pojedinih punkt-prakseologija

5.2.2. Prakseološka organizacija u udžbenicima prvog seta

Tema Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Diskurzivnu komponentu udžbeničke teme čini jedna tehnologija koja obuhvaća svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije i njihovih grafova.

Definicija eksponencijalne funkcija dana je kao proširenje potenciranja pozitivnog broja racionalnim brojem, na skup realnih brojeva. Graf eksponencijalne funkcije je usko vezan uz tablični prikaz funkcije. Dostupna tehnika crtanja grafa je povlačenje krivulje kroz odgovarajuće točke koordinatne ravnine. *Praxis* grafičkog prikaza funkcije daje podršku *logosu* u više navrata. Tok eksponencijalne funkcije $f(x)=10^x$ opisan je kao brzi rast za pozitivne apscise, koji se zorno pojašnjava vrijednostima ordinate 10^{10} za apscisu 10 te kao brzi pad, koji se opisuje priljubljivanjem uz negativni dio osi apscisa. Taj pravac je asimptota grafa eksponencijalne funkcije.

Iz grafičkog prikaza eksponencijalne funkcije, u prilagođenom mjerilu, prepoznaje se skup realnih brojeva kao područje definicije funkcije. Diskurs se potvrđuje demonstracijom tehnike aproksimacije vrijednosti eksponencijalne funkcije za realni argument uz podršku svojstva monotonosti. Diskurs sporijeg rasta odnosno pada eksponencijalnih funkcija različitih baza te odgovarajuće nejednakosti za vrijednosti različitih eksponencijalnih funkcija istog argumenta izvode se također iz grafičkog prikaza funkcija. Crtanje grafova eksponencijalnih funkcija recipročne baze motivira diskurs o simetričnosti, s obzirom na y-os, grafova funkcija f i g za koje vrijedi $g(x) = f(-x)$. Za eksponencijalnu funkciju baze manje od 1 navodi se da je padajuća i asimptota joj je pozitivan dio osi apscisa.

Među osnovnim svojstvima eksponencijalne funkcije istaknuti su: područje definicije i skup vrijednosti funkcije, svojstva naslijeđena od potencija, monotonost, simetričnost grafova eksponencijalnih funkcija recipročne baze i sjecište s osi ordinata.

Raison d'être logaritma je određivanje eksponenta za koji se postiže dana vrijednost potencije. Očitavanjem s grafičkog prikaza procjenjuje se tražena vrijednost i ističe se kako je takav broj jedinstven. Logaritam pozitivnog broja y definira se kao realan broj x koji je jedinstveno rješenje eksponencijalne jednadžbe $a^x = y$ ili eksponent kojim treba potencirati bazu a kako bismo dobili y. Važan je dekadski logaritam, koji se računa pomoću kalkulatora. Područje definicije logaritamske funkcije određeno je skupom vrijednosti eksponencijalne funkcije.

Grafički prikaz logaritamske funkcije motivira diskurs simetričnosti, s obzirom na pravac $y = x$, grafova funkcija koje nazivamo inverznima. Prema ilustraciji prepoznaju se: vertikalna asimptota u y-osi i nultočka logaritamske funkcije te, usporedbom s grafom eksponencijalne funkcije, područje definicije i monotonost funkcije.

Logaritamska funkcija ima analogna svojstva kao eksponencijalna funkcija. Poznata svojstva te znanstveni zapis broja koriste se za računanje logaritma, algebarskih izraza s logaritmom i velikih potencija. Demonstrira se tehnika rješavanja eksponencijalnih i logaritamskih nejednadžbi svođenjem na algebarski ekvivalentu jednadžbu po argumentima funkcije, koja ovisi o monotonosti tih funkcija.

Primjene eksponencijalne i logaritamske funkcije su zasebna udžbenička jedinica. Značajna je funkcija $f(t) = f_0 \cdot e^{k \cdot t}$, kojom se opisuju prirodni procesi prirasta, pri čemu je f_0 početno stanje i k konstanta proporcionalnosti, o kojoj ovisi hoće li vrijednosti rasti ili padati.

Istaknuta je logistička funkcija $f(x)=\frac{a}{a+b\cdot e^{-kx}}$ kao model prirodnog procesa ograničenog rasta. Konstanta *k* utječe na ponašanje funkcije tako da kad je $k>0$ funkcija raste i približava se gornjoj granici vrijednosti *a* te obratno kad je $k<0$ što je istaknuto na grafičkom prikazu.

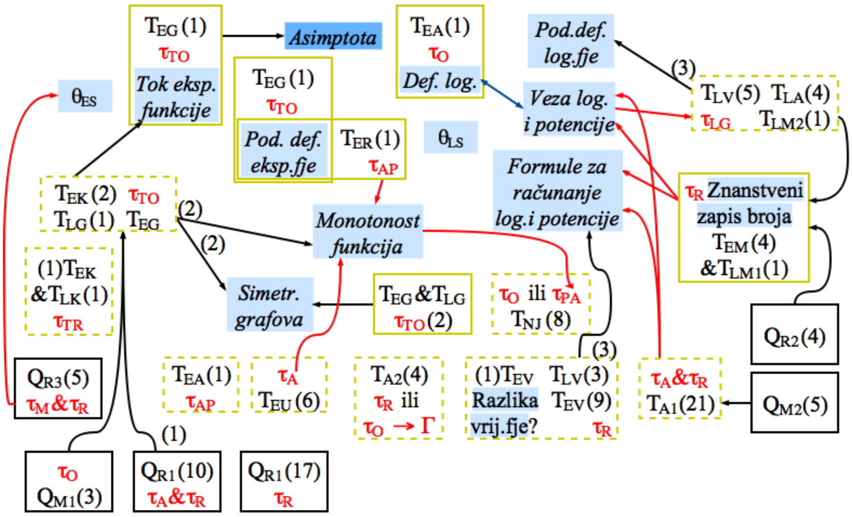
Među najučestalijim punkt-prakseologijama prevladavaju izračunavanje vrijednosti funkcije, algebarskog izraza, potencije ili logaritma, bez diskurzivne komponente. Među njima su dvije potpune prakseologije: \`uspoređivanje vrijednosti eksponencijalne funkcije uz podršku svojstva monotonosti´ te \`računanje s brojevima velike magnitude uz podršku veze logaritma i potencije te znanstvenog zapisa broja´. Među manje učestalim punkt-prakseologijama potpune su: \`računanje logaritma uz argumentiranje nepostojanja rješenja s obzirom na područje definicije logaritamske funkcije´ i \`računanje vrijednosti eksponencijalne funkcije realnog argumenta aproksimacijama uz podršku svojstva monotonosti´. Najviše potpunih prakseologija su tipa \`nacrtati graf funkcije povlačenjem krivulje kroz točke i opisati tok funkcije´, s naglaskom na diskurs simetričnosti grafova i monotonosti.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.1. Prakseologije su uglavnom nepovezane i sačinjene samo od praktičnog bloka. Većina tehnika karakterističnih temi je algebarska manipulacija koja koristi neko svojstvo ili formulu iz *logosa*. Rješavanje nejednadžbi prepoznavanjem ekvivalentne algebarske nejednadžbe i aproksimacija su podržane svojstvom monotonosti, a računanje s velikim brojevima je podržano svojstvima logaritma i potencije te znanstvenim zapisom broja.

Matematički zadaci izvan teme pozivaju *praxis* crtanja grafa funkcije, za rješavanje i određivanje broja rješenja jednadžbi, odnosno *praxis* računanja logaritma, za određivanje broja znamenki broja ili broja prostih brojeva manjih od nekog prirodnog broja te računanje brojeva velike magnitude. Najveći broj zadataka realnog konteksta zahtjeva izračunavanje vrijednosti ili određivanje koeficijenata algebarskog izraza s potencijama ili logaritmom, koji modelira realnu situaciju. Jedan zadatak poziva *praxis* grafičkog prikaza izraza koji modelira situaciju. U pet zadataka očekuje se formirati algebarski izraz koji modelira danu realnu situaciju.

Asimptota se javlja isključivo kao komponenta diskursa toka funkcije.

T_{A1} Odrediti vrijednost algebarskog izraza s potencijama i/ili logaritmom.
T_{A2} Odrediti vrijednost ili argument, ako je zadana vrijednost najvećeg cijela logaritma.
T_{EA} Odrediti argument, ako je zadan graf i vrijednost eksponencijalne funkcije.
T_{EG} Nacrtati graf eksponencijalne funkcije. T_{EK} Nacrtati graf kompozicije eksponencijalne funkcije s linearnom funkcijom ili funkcijom apsolutne vrijednosti.
T_{EM} Odrediti vrijednost potencije velike magnitude.
T_{ER} Odrediti vrijednost eksponencijalne funkcije realnog argumenta.
T_{EU} Usporediti vrijednosti eksponencijalne funkcije za različite argumente ili baze.
T_{EV} Odrediti vrijednost potencije ili eksponencijalne funkcije za različite argumente.
T_{LA} Odrediti bazu ili argument, ako je zadana vrijednost logaritma.
T_{LG} Nacrtati graf logaritamske funkcije.
T_{LK} Nacrtati graf kompozicije logaritamske funkcije s funkcijom apsolutne vrijednosti.
T_{LM1} Odrediti argument, ako je zadana vrijednost logaritma velike magnitude.
T_{LM2} Odrediti vrijednost logaritma, ako je zadan argument male magnitude.
T_{LV} Odrediti vrijednost logaritma za različite argumente.
T_{NJ} Riješiti eksponencijalnu ili logaritamsku nejednadžbu.
Q_{M1} Riješiti jednadžbu ili odrediti broj rješenja jednadžbe.
Q_{M2} Odrediti vrijednost iz matematičkog konteksta, ako je zadan algebarski model.
Q_{R1} Odrediti vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom ili logaritmom.
Q_{R2} Odrediti vrijednost iz realnog konteksta, koja je velike ili male magnitude.
Q_{R3} Odrediti vrijednost iz realnog konteksta.
τ_{AP} Aproksimiranje vrijednosti
τ_{LG} Prepoznavanje eksponenta s obzirom na definiciju logaritma
τ_{PA} Prepoznavanje ekvivalentne algebarske nejednadžbe po argumentima danih funkcija



Slika 5.2.1: Grafički prikaz prakseološke organizacije teme Eksponencijalna i logaritamska funkcija u udžbeniku prvog seta

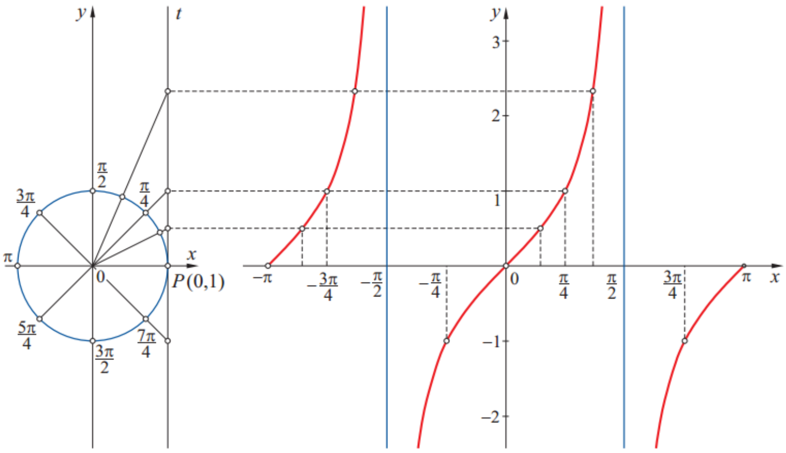
Teme vezane uz trigonometrijske funkcije

U udžbeničkoj temi istaknute su četiri tehnologije: definicija, svojstva, tok trigonometrijskih funkcija i trigonometrijski identiteti.

Funkcije tangens i kotangens definirane su pomoću brojevne kružnice. Pojašnjeno je kako tangens nije definiran za broj $t = \frac{\pi}{2}$ jer je odgovarajuća spojnica paralelna danoj tangenti i ne siječe ju. Kad je argument blizu te vrijednosti spojnica je strma i tangens poprima vrijednosti velikog iznosa. Diskurs je značajan za tehnologiju toka trigonometrijskih funkcija. Iz definicije funkcije tangens pomoću brojevne kružnice vidljivo je kako je to neomeđena funkcija. Analogan diskurs potrebno je napraviti za kotangens.

Brojevna kružnica podržava tehnike određivanja argumenta za danu vrijednost funkcije i vrijednosti funkcije za dani argument. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija realnog broja provodi se tehnikom računanja na kalkulatoru. Kotangens se računa kao recipročna vrijednost tangensa. Odnos dvaju funkcija je komponenta *tehnologije* trigonometrijskih identiteta koji se često koriste za *praxis* i *logos* unutar cijele teme o trigonometrijskim funkcijama. Primjerice, za određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija značajni su adicijski teoremi i formule za trigonometrijske funkcije dvostrukog i polovičnog kuta. Tehnologija o svojstvima obuhvaća parnost i periodičnost trigonometrijskih funkcija. Oba svojstva se obrazlažu na brojevnoj kružnici. Neparnost tangensa i kotangensa je podržana trigonometrijskim identitetom.

Tok trigonometrijskih funkcija, obuhvaća grafove funkcija i poziva preostale *logose*. Tangensoida nad intervalom $[-\pi/2, \pi/2]$ se „kopira" uvažavajući periodičnost funkcije te simetrično s obzirom na ishodište koordinatne ravnine uvažavajući svojstvo neparnosti. Definicija tangensa ima ulogu tehnike, za konstrukciju ordinata točaka grafa funkcije tangens (Slika 5.2.2), i tehnologije, opisivanjem rasta funkcije tangens prema beskonačnosti. Krivulja se približava pravcu $x = \frac{\pi}{2}$ koji se naziva vertikalna asimptota funkcije tangens. Tangens se penje i približava asimptoti kad se argument povećava odnosno tangens poprima negativne vrijednosti kad argument opada prema $\frac{\pi}{2}$. U točki $\frac{\pi}{2}$ tangens nije definiran.



Slika 5.2.2: Tehnika konstrukcije ordinata točaka funkcije tangens prenošenjem odgovarajućih duljina s brojevne kružnice iz udžbenika prvog seta

Graf funkcije kotangens se crta transformacijama grafa funkcije tangens s obzirom na poznati trigonometrijski identitet. Vertikalne asimptote grafa funkcije kotangens su pravci $x = k\pi$ i funkcija je padajuća. Tok funkcije obuhvaća područje definicije, nultočke, skup vrijednosti i monotonost funkcije te ponašanje funkcije u rubovima njezine domene, posebno asimptote funkcija tangens i kotangens.

Temeljne trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe rješavaju se očitavanjem s brojevne kružnice ili grafičkog prikaza.

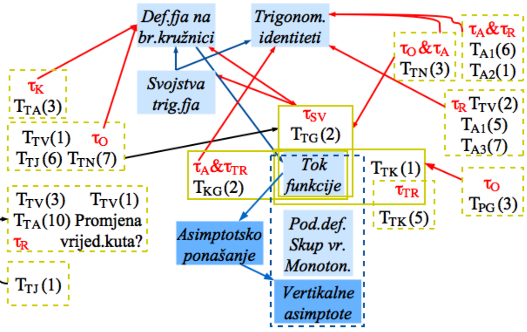
Među najučestalijim punkt-prakseologijama su `računanje vrijednosti funkcije´, `određivanje argumenta ili vrijednosti jedne trigonometrijske funkcije, ako je poznata vrijednost druge funkcije´, bez diskurzivne komponente. Često se javljaju prakseologije `rješavanje jednadžbi i nejednadžbi´, `određivanje argumenta kad je dana vrijednost funkcije očitavanjem s brojevne kružnice´ te `crtanje grafa kompozicije trigonometrijske s linearnom funkcijom transformacijama temeljnog grafa´.

Potpune prakseologije su skoro isključivo vezane uz grafove trigonometrijskih funkcija ili nekih kompozicija, gdje se diskurzivna komponenta odnosi na tok funkcije: područje definicije, skup vrijednosti, monotonost i asimptote funkcije. Posebno, `crtanje grafa funkcije kotangens transformacijama tangensoide na temelju trigonometrijskog identiteta´ je potpuna prakseologija.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.3. Prakseologije su uglavnom praktični blokovi i međusobno rijetko povezane. Diskurs potpunih prakseologija je isključivo vezan uz definiciju trigonometrijskih funkcija na brojevnoj kružnici ili tok funkcije. Značajan broj tipova zadataka rješava se tehnikom očitavanja odnosno konstrukcije s obzirom na brojevnu kružnicu.

Asimptota je značajna komponenta toka funkcije i javlja se u diskurzivnom dijelu prakseologija crtanja grafa trigonometrijskih funkcija ili kompozicija funkcija.

T_{A1} Odrediti vrijednost tangensa ili kotangensa, ako je zadana vrijednost trigonometrijske funkcije.
T_{A2} Odrediti granice vrijednosti tangensa, ako su zadane granice vrijednosti sinusa.
T_{A3} Odrediti vrijednost trigonometrijske funkcije, ako je zadana vrijednost tangensa ili kotangensa za isti argument.
T_{KG} Nacrtati graf funkcije kotangens.
T_{TG} Nacrtati graf funkcije tangens.
T_{PG} Prepoznati graf kompozicije funkcije tangens ili kotangens s linearnom funkcijom.
T_{TK} Nacrtati graf kompozicije funkcije tangens ili kotangens s linearnom funkcijom ili funkcijom apsolutne vrijednosti.
T_{TA} Odrediti argument, ako je zadana vrijednost tangensa ili kotangensa.
T_{TJ} Riješiti jednadžbu s tangensom i/ili kotangensom.
T_{TN} Riješiti nejednadžbu s tangensom i/ili kotangensom.
T_{TV} Odrediti vrijednost tangensa ili kotangensa za dani argument.



Slika 5.2.3: Grafički prikaz prakseološke organizacije tema vezanih uz trigonometrijske funkcije u udžbeniku prvog seta

Jedinice unutar teme Krivulje drugog reda

Udžbenička tema sadrži tri značajne tehnologije: definiciju hiperbole, jednadžbu hiperbole te odnos pravca i hiperbole.

Hiperbola je definirana kao skup točaka u ravnini kojima je razlika duljina radijvektora konstantna, pri čemu su radijvektori vektori određeni žarištima i točkom ravnine. Tehnologija još obuhvaća karakteristične točke i parametre hiperbole. Hiperbola se crta konstrukcijom odgovarajućih radijvektora, što je demonstrirana tehnika podržana diskursom. Na temelju definicije se, algebarskom manipulacijom uz podršku formule za udaljenost dviju točaka iz područja analitičke geometrije, izvodi kanonska jednadžba hiperbole.

Druga tehnologija pripada području analitičke geometrije i razvija se oko kanonske jednadžbe hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, odgovarajućih karakterističnih točaka i parametara hiperbole. Svojstvo simetričnosti hiperbole s obzirom na osi i središte hiperbole proizlazi iz jednadžbe hiperbole.

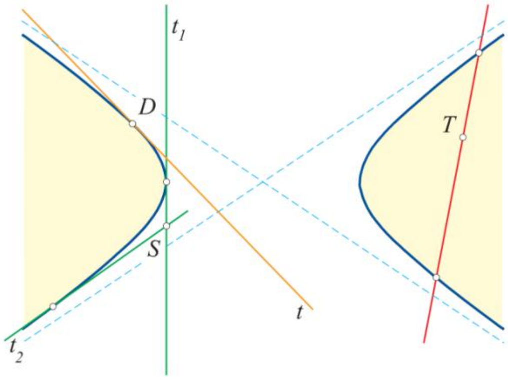
Posebnu komponentu ovog *logosa* čine asimptote hiperbole. Hiperbola je neomeđena krivulja jer je za proizvoljno veliku apscisu moguće naći odgovarajuću ordinatu točke na hiperboli. Napominje se kako je iz preciznog crtanja hiperbole moguće primijetiti njezino približavanje pravcima $y = \frac{b}{a}x$ odnosno $y = -\frac{b}{a}x$. Tvrdnja se potvrđuje određivanjem jednadžbe za ordinatu točke hiperbole. Za veliku pozitivnu vrijednost apscise doprinos vrijednosti realne poluosi za ordinatu je zanemariva, što se zapisuje $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \approx \pm\frac{b}{a}x$. Asimptote hiperbole su pravci zadani svojim jednadžbama te udaljenost točaka s hiperbole do jednog od tih pravaca teži k nuli kad se vrijednost apscise povećava.

Cjelovita tehnologija podržava tehniku crtanja hiperbole kroz tjemena i uz asimptote. Rješava se zadatak određivanja udaljenosti točaka hiperbole do asimptote kojim se pravda definicija asimptote hiperbole. Asimptote se mogu crtati kao dijagonale pravokutnika kojemu su polovišta stranica u realnim i imaginarnim tjemenima hiperbole.

Dva posebna slučaja hiperbole se usustavljuju u ovoj jedinici: hiperbola kojoj su tjemena na osi ordinata i jednakostranična hiperbola kojoj su koordinatne osi asimptote. Obje krivulje potkrijepljene su jednakim diskursom kao izvorno definirana hiperbola. Dana je jednadžba hiperbole kojoj su asimptote paralelne koordinatnim osima i središte translatirano iz ishodišta. Ostale komponente *logosa* vezane uz ovu specijalnu vrstu hiperbole nisu eksplicitno dane.

Posebna jedinica posvećena je odnosu između pravca i krivulja drugog reda (Slika 5.2.4). Odgovarajući tipovi zadataka rješavaju se algebarskim manipulacijama jednadžbama, gdje vrijednost diskriminante dobivene kvadratne jednadžbe određuje broj sjecišta pravca i krivulje. Nisu dane posebne formule.

Od interesa je odrediti tangentu na krivulju drugog reda iz neke točke u ravnini, pri čemu broj tangenti iz točke ovisi o njezinom položaju u odnosu na krivulju. *Logos* uključuje raspoznavanje tri skupa točaka u ravnini s obzirom na jednadžbu hiperbole: točke unutar, izvan i na hiperboli. Na ilustraciji su prikazani hiperbola, njezine asimptote, jedna tangenta kroz točku na hiperboli i dvije tangente kroz točku izvan hiperbole, koja nije na asimptoti.



Slika 5.2.4: Ilustracija odnosa pravaca i hiperbole te skupova točaka s obzirom na položaj prema hiperboli iz udžbenika prvog seta

Najučestaliji zahtjevi su tipa: \`odrediti jednadžbu hiperbole ili drugog objekta´, \`pokazati ili odrediti svojstvo ili odnos hiperbole ili drugih objekata´. Hiperbola se uglavnom crta kroz tjemena i uz asimptote.

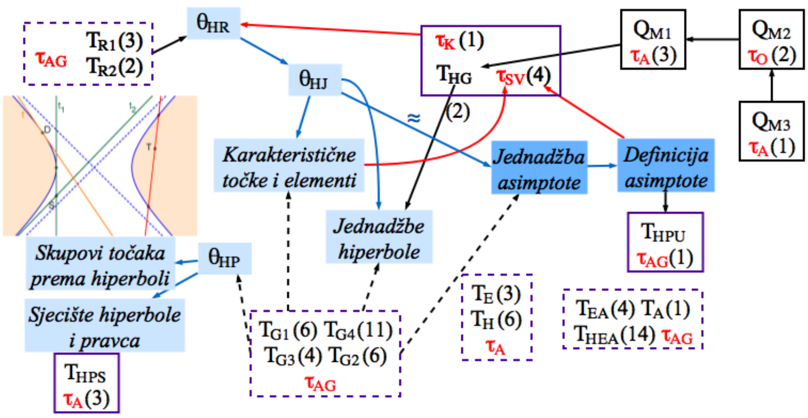
Potpune prakseologije nisu učestale, to su dvije instance punkt-prakseologije crtanja hiperbole s diskursom o simetričnosti te po jedna instanca prakseologija \`konstrukcija hiperbole prema definiciji pomoću radijvektora´ i \`ispitivanje promjene udaljenosti točke hiperbole do asimptote za potvrđivanje definicije asimptote´.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.5. Prakseologije su nepovezane i uglavnom sačinjene od praktičnih blokova osim triju navedenih potpunih punkt-prakseologija. Većina punkt-prakseologija okuplja se oko jednadžbi hiperbole i njezine asimptote, a tehnike rješavanja su uglavnom algebarska manipulacija jednadžbama ili primjena alata analitičke geometrije. Dvije su tehnike crtanja hiperbole, obje temeljene na *logosu*. Diskurzivna komponenta je značajnija kod tehnike crtanja konstrukcijom radijvektora prema definiciji hiperbole. Crtanje hiperbole kroz tjemena i uz asimptote je demonstrirani postupak.

Izvan jedinice *Hiperbola*, a unutar područja analitičke geometrije je prakseologija \`određivanje skupa točaka ravnine, zadanog jednadžbom ili opisanog geometrijskim uvjetom´, koji se svodi na jednadžbu hiperbole. Drugi tip zadatka izvan područja analitičke geometrije, je `grafički prikazati funkciju ili skup točaka zadanih jednadžbom´, koje se svode na hiperbolu. Takav zadatak je pozvan za prakseologiju rješavanja nejednadžbi ili sustava jednadžbi, što je pak *praxis* potreban za zadatak određivanja parametara za koje kvadratna jednadžba ima samo pozitivna rješenja. Vezano uz dvije jedinice unutar teme *Krivulje drugog reda* u udžbeniku se ne nalaze zadaci realnog konteksta.

Asimptota je zastupljena svojom jednadžbom i kao dio tehnike crtanja hiperbole. Samo jedna instanca punkt-prakseologije uvažava asimptotsko ponašanje hiperbole prema pravcu.

T_A Odrediti kut među asimptotama hiperbole.
T_E Odrediti karakteristične elemente hiperbole.
T_{EA} Odrediti odnos karakterističnih točaka ili elemenata hiperbole s njezinim asimptotama.
T_{G1} Odrediti jednadžbu ili svojstvo objekta, ako je zadan odnosom s hiperbolom i njezinim karakterističnim elementima ili drugim objektom.
T_{G2} Odrediti svojstvo objekta, ako je zadan njegov odnos s asimptotama hiperbole i njezinim elementima ili drugim objektima.
T_{G3} Pokazati svojstvo ili odnos objekta s hiperbolom, ako je zadan odnos njihovih elemenata ili tangente.
T_{G4} Odrediti skup točaka ravnine koje zadovoljavaju neku jednadžbu ili uvjet.
T_{HG} Nacrtati hiperbolu.
T_H Odrediti jednadžbu hiperbole, ako su zadane točke, karakteristični elementi hiperbole ili odnos s drugim objektom.
T_{HEA} Odrediti jednadžbu hiperbole, ako je zadan odnos njezinih karakterističnih elemenata i asimptote ili njihov odnos s drugim objektima.
T_{HPS} Odrediti odnos hiperbole i pravca.
T_{HPU} Odrediti udaljenost hiperbole i pravca.
T_{R1} Odrediti točku na hiperboli za koju su poznata svojstva radijus vektora.
T_{R2} Odrediti duljinu radijus vektora točke na hiperboli.
Q_{M1} Grafički prikazati funkciju ili skup točaka zadan jednadžbom.
Q_{M2} Riješiti nejednadžbu ili sustav jednadžbi.
Q_{M3} Odrediti parametre za koje kvadratna jednadžba ima dva pozitivna rješenja.



Slika 5.2.5: Grafički prikaz prakseološke organizacije jedinica unutar teme Krivulje drugog reda u udžbeniku prvog seta

Teme i jedinice vezane uz infinitezimalni račun

Udžbeničke teme zadaju tehnologije svojstva niza, svojstva funkcije, granično ponašanje niza i funkcije i diferencijalni račun.

Prva tehnologija obuhvaća definiciju i različite načine zadavanja niza. Niz se može prikazati kao graf funkcije definirane u skupu prirodnih brojeva ili na brojevnom pravcu. Prvi način prikazivanja daje naslutiti kako je niz restrikcija realne funkcije, a drugi zorno predočava gomilanje članova niza oko nekog broja.

Tehnologija graničnog ponašanja niza obuhvaća značajne sadržaje vezane uz konvergenciju i limes niza. Promatranje izračunatih vrijednosti članova nekih nizova za velike vrijednosti n motivira zapis $\lim x_n = 0$ kad $n \to \infty$, demonstrira kako limes niza može biti bilo koji broj i kako udaljenost, između članova niza i broja kojemu se približavaju, teži nuli. Limes niza (x_n) prepoznat je kao intuitivno jasan te se definira kao broj a, kad za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$. Opisuju se pojmovi divergentnog i konvergentnog niza te niza koji neograničeno raste. Demonstrira se tehnika provjeravanja da je dani broj limes zadanog niza algebarskim manipulacijama s obzirom na definiciju. Dokazuje se, prema definiciji, kako je limes niza kojemu su članovi recipročni članovima niza koji teži u beskonačnost, jednak nuli.

Za složene nizove može biti teško odrediti limes po definiciji pa se limes računa primjenom teorema o limesu. Dana pravila se ne dokazuju, a za konvergentne nizove uključuju limes zbroja, umnoška i kvocijenta, potencije te monotonost limesa. Oni podupiru tehniku računanja limesa neodređenih oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i $\infty - \infty$ algebarskim manipulacijama: dijeljenje najvećom potencijom, racionalizacija i drugi postupci. Nakon algebarske manipulacije potrebno je prepoznati limes nul-niza ili geometrijskog niza.

Monotoni i omeđeni nizovi se definiraju za potrebe utvrđivanja uvjeta s obzirom na koje je niz konvergentan. Dokazuje se kako je limes rastućeg, omeđenog niza jednak supremumu skupa vrijednosti članova niza. Ako rastući niz nije omeđen to je neograničeno rastući niz. Diskurs se koristi za dokazivanje konvergencije niza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ čiji limes se označava s e. Potencijalna konvergencija članova ovog niza je proizašla iz *praxisa* računanja vrijednosti članova niza. Proširuju se tipovi zadataka računanja limesa na one koji se algebarskim manipulacijama mogu svesti na limes ovog niza.

Monotonost i omeđenost niza pripadaju tehnologiji svojstava niza, a njihova primjena tehnologiji graničnog ponašanja niza.

Među najučestalijim punkt-prakseologijama su `ispitivanje monotonosti i omeđenosti niza´, `računanje vrijednosti članova niza´ te `određivanje limesa niza algebarskim tehnikama´. Prakseologija `određivanje indeksa člana niza od kojeg je udaljenost članova niza do nekog broja manja od zadane vrijednosti´, je praktični blok bez diskursa.

Često se zahtjeva pokazati da je broj limes niza odnosno da je niz monoton demonstriranim tehnikama, koje se temelje na diskursu. Potpune prakseologije među učestalima su `dokazivanje omeđenosti s obzirom na diskurs monotonosti niza´ i `opisivanje ponašanja vrijednosti članova niza u beskonačnosti s obzirom na izračunate vrijednosti članova niza´.

Tehnologija svojstva funkcije obuhvaća definiciju funkcije, grafa funkcije, injektivnost, surjektivnost, bijektivnost te monotonost, ograničenost, parnost odnosno neparnost i periodičnost funkcije i pojmove kompozicije i inverzne funkcije. Neprekidnost je relevantna tehnologija koja povezuje dvije tehnologije.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija su primjeri monotone funkcije koja je ograničena odozdo odnosno neograničena. Razlomljena funkcija je primjer parne odnosno neparne funkcije. Graf funkcije *f* zadane s $f(x) = 1/x$ je hiperbola čije su asimptote koordinatne osi. Razlomljena funkcija $f(x) = 1/x^n$ je parna ili neparna – ovisno o potenciji, monotona po intervalima i ima horizontalnu i vertikalnu asimptotu.

Granično ponašanje funkcije obuhvaća različite sadržaje vezane uz limes funkcije. Kaže se da funkcija ima limes *L* u točki *a*, ako za bilo koji niz koji teži k *a* niz funkcijskih vrijednosti teži k *L* odnosno ako jednostrani limesi postoje i podudaraju se. Među svojstvima limesa nabrojani su pravilo direktne zamjene, koje vrijedi za elementarne funkcije, te limes zbroja, umnoška i kvocijenta funkcija, koje imaju limes u toj točki. Prema grafičkom prikazu funkcija obrazlažu se situacije kada funkcija nema limes u točki jer su jednostrani limesi različiti ili teži u beskonačnost. Limes funkcije ne ovisi o vrijednosti funkcije i ilustracijom su interpretirane situacije kad limes postoji, a vrijednost funkcije ne postoji te kad se limes i vrijednost funkcije za neki argument podudaraju i ne podudaraju. Istražuju se vrijednosti racionalne funkcije u blizini točke prekida kao motivacija za demonstriranje tehnike računanja limesa racionalnih funkcija eliminacijom prekida.

Određuje se vrijednost limesa $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ i $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Korištene tehnike su uglavljivanje između poznatih vrijednosti, koja ne poziva izričito odgovarajući diskurs, i supstitucija do limesa koji se računa uvrštavanjem. Za prvi limes vrijednosti su dobivene očitavanjem s brojevne kružnice, a za treći se koristi limes konvergentnog niza. Tehnike određivanja limesa funkcija su pojednostavljivanje algebarskog izraza, uz podršku svojstava limesa funkcije, do algebarskog izraza čiji limes ima poznatu vrijednost ili se može izračunati uvrštavanjem. Kod racionalnih i iracionalnih funkcija algebarske manipulacije uključuju dijeljenje brojnika i nazivnika faktorom koji sadrži točku prekida, racionalizaciju, supstituciju i dijeljenje najvećom potencijom.

Među najučestalijim punkt-prakseologijama su \`određivanje područja definicije funkcije algebarskim manipulacijama´ te \`ispitivanje monotonosti i ograničenosti funkcije očitavanjem s grafičkog prikaza´. Često se zahtjeva \`računati limes funkcije algebarskim tehnikama´. Jedina učestala potpuna prakseologija je \`istraživanje postojanja limesa očitavanjem s grafičkog prikaza funkcije´.

Diferencijalni račun ima zajedničke komponente sa svim *logosima*. Monotonost funkcije opisana je nagibom tangente na graf funkcije u pojedinoj točki. Derivacija funkcije se definira kao limes kvocijenta prirasta, ako takav postoji, i jednaka je nagibu tangente na graf funkcije. Dokazuje se da je neprekidnost u točki nužan uvjet postojanja derivacije u točki. Pravila deriviranja čine zasebnu komponentu ove tehnologije. Dijelom tehnologije su rast i pad funkcije, ekstremi funkcije te konveksnost i konkavnost funkcije. Opisuju se tehnike određivanja intervala monotonosti, točaka lokalnih ekstrema te konveksnosti i konkavnosti. Posebnu udžbeničku jedinicu čine primjene diferencijalnog računa. Problemi matematičkog, fizikalnog ili realnog konteksta rješavaju se ispitivanjem toka funkcije, kojom se modelira dana situacija, posebno monotonosti i ekstrema funkcije.

Kao primjena diferencijalnog računa istaknuto je ispitivanje toka funkcije gdje je značajan objekt asimptota. Pripadni diskurs se značajno oslanja na derivaciju funkcije i ostale dostupne tehnologije. Unutar udžbeničke jedinice opisana je tehnika crtanja grafa funkcije u tri koraka:

1. korak: ispitivanje svojstava i graničnog ponašanje funkcije – područje definicije, limes funkcije u rubovima domene, svojstva funkcije: parnost odnosno neparnost i periodičnost funkcije, nultočka funkcije;
2. korak: ispitivanje prve derivacije – stacionarne točke i intervali monotonosti pomoću vrijednosti prve derivacije te ekstremi funkcije;
3. korak: ispitivanje druge derivacije – intervali konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba pomoću vrijednosti druge derivacije.

Crtanje Gaussove krivulje motivira objekt asimptotu, koja se definira kao pravac *p* do kojega udaljenost točke, koja se giba po grafu funkcije tako da barem jedna od njezinih koordinata teži u beskonačnost, teži k nuli. Vertikalna asimptota funkcije *f* je pravac $x = c$, ako vrijedi $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$. Pravac $y = l$ je desna odnosno lijeva horizontalna asimptota, ako postoji limes $l = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Grafovi funkcije tangens, eksponencijalne i racionalne funkcije su primjeri funkcija koje imaju vertikalnu odnosno horizontalnu asimptotu. Kosa asimptota je pravac $y = kx + l$ za koji vrijedi $\lim_{x \to \infty}\left[f(x) - kx - l\right] = 0$. Iz definicije se izvode formule za računanje koeficijenata kose asimptote. Horizontalna asimptota je poseban slučaj kose asimptote.

Asimptote su komponenta tehnike crtanja racionalnih funkcija, umjesto ispitivanja druge derivacije. Opisuju se tehnike određivanja asimptota racionalnih funkcije. Vertikalne asimptote su u nultočakama nazivnika racionalne funkcije kad one nisu i nultočke brojnika. Ovisno o kratnosti nultočke graf će „dolaziti“ s različitih odnosno iste strane vertikalne asimptote. Kad je stupanj polinoma u brojniku racionalne funkcije manji od stupnja polinoma u nazivniku vrijedi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ i pravac $y=0$ je horizontalna asimptota funkcije. Kad su polinomi u brojniku i nazivniku istog stupnja s vodećim koeficijentima a_n i b_n redom, horizontalna asimptota funkcije je pravac $y=\frac{a_n}{b_n}$. Ako je stupanj brojnika racionalne funkcije za jedan veći od stupnja nazivnika funkcija ima kosu asimptotu, ako je stupanj veći za dva ili više funkcija nema asimptota. Demonstrira se tehnika određivanja kose asimptote iz kvocijenta polinoma u brojniku i nazivniku funkcije. Valjanost tako dobivene jednadžbe kose asimptote funkcije pravda se računanjem limesa $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$, pri čemu je g kvocijent dobiven dijeljenjem.

Najučestalije prakseologije su crtanje grafova polinoma i racionalnih funkcija predviđenim tehnikama. Zadane racionalne funkcije pri tome skoro uvijek imaju horizontalnu asimptotu, koju graf često siječe u jednoj točki (Tablica 5.2.3).

Tablica 5.2.3: Asimptote racionalnih funkcija u punkt-prakseologijama crtanja grafa funkcije u udžbeniku prvog seta

Asimptote racionalne funkcije	**Broj instanci p-p**
Dvije vertikalne i horizontalna asimptota, graf siječe asimptotu u jednoj točki	5
Vertikalna i horizontalna asimptota, graf siječe asimptotu u jednoj točki	3
Horizontalna asimptota, omeđena funkcija, graf siječe asimptotu u jednoj točki	2
Dvije vertikalne i horizontalna asimptota, graf ne siječe asimptotu	2
Vertikalna i kosa asimptota, graf ne siječe asimptotu	1
Vertikalna i horizontalna asimptota, graf ne siječe asimptotu	1
Horizontalna asimptota, omeđena funkcija, graf siječe asimptotu u više točaka	1
Horizontalna asimptota, omeđena funkcija, graf ne siječe asimptotu	1

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.6. Prakseologije su nepovezane i uglavnom praktični blokovi. Prakseologije vezane uz limes niza često pozivaju *logos*. Potpune prakseologije su: `opisivanje ponašanja niza s obzirom na izračunate vrijednosti njegovih članova´, `dokazivanje konvergencije niza potvrđivanjem monotonosti i omeđenosti niza´, `dokazivanje da niz nije konvergentan pokazivanjem da je neograničeno rastući ili ima promjenjive vrijednosti´. Prakseologija `određivanje udaljenosti članova niza do nekog broja´ može pozvati diskurs o konvergenciji, ali u značajnijem broju je odvojena od *logosa*.

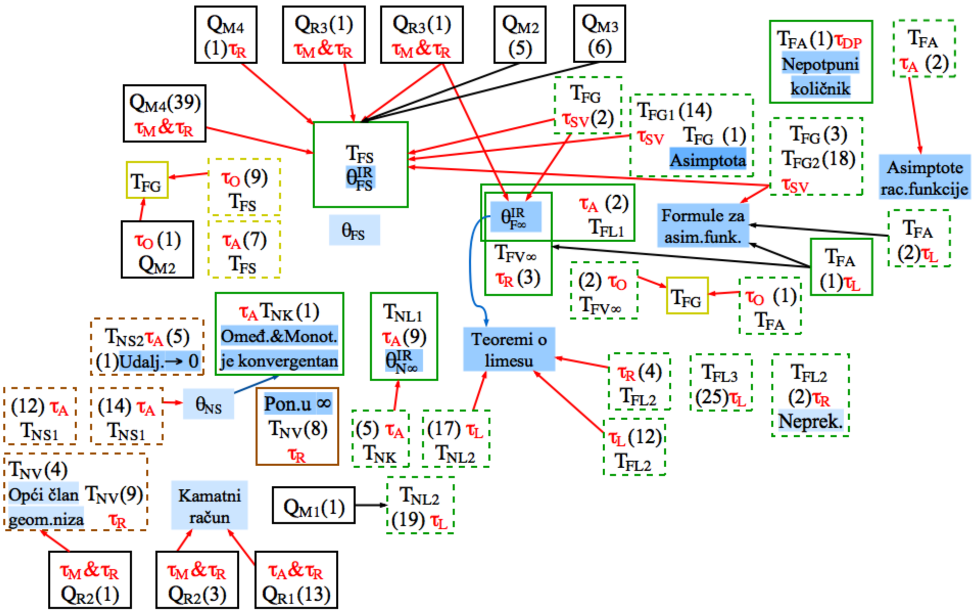
Velik broj punkt-prakseologija su praktični blokovi određivanja limesa niza ili algebarskog izraza. Tehnika računanja limesa uglavljivanjem između poznatih vrijednosti podržana je diskursom svojstava limesa. Potpuna prakseologija vezana uz diskurs neprekidnosti funkcije je `određivanje limesa funkcije u točki uvrštavanjem za ispitivanje vrijednosti jednostranih limesa´. Diskurs limesa funkcije značajan je za potpunu prakseologiju `istraživanje vrijednosti funkcije u blizini točke u kojoj nije definirana, računanjem vrijednosti funkcije uz tablični prikaz, za utvrđivanje limesa´. Ova prakseologija je vezana uz praktični blok `ispitivanje postojanja limesa funkcije u točki očitavanjem s grafičkog prikaza´.

Jedna instanca punkt-prakseologije crtanja funkcije motivira prepoznavanje asimptote kao obilježja toka funkcije. Asimptote se koriste u sklopu tehnika za crtanje grafova proizvoljnih i racionalnih funkcija. Tri tehnike se primjenjuju za određivanje asimptota funkcija.

Izvan relevantnih matematičkih tema je zahtjev određivanja broja rješenja jednadžbe, koji se rješava očitavanjem s grafičkog prikaza ili ispitivanjem ponašanja prve derivacije, zajedno sa zadacima dokazivanja nejednakosti i rješavanja nejednadžbi.

Samo jedna instanca problema realnog konteksta poziva modeliranje situacije općim članom geometrijskog niza. Ostale prakseologije su tipa odrediti koeficijente ili računati vrijednosti s obzirom na formule složenog kamatnog računa i neprekinutog ukamaćivanja. Formula za neprekinuto ukamaćivanje poziva prakseologiju računanja limesa niza. Problemi realnog i matematičkog konteksta uglavnom su određivanje ekstremnih vrijednosti ili vrijednosti za koje se one postižu, a modeliraju se poznatim formulama i rješavaju isključivo ispitivanjem ponašanja prve derivacije.

$\mathbf{T_{FA}}$ Odrediti asimptote funkcije.
$\mathbf{T_{FG}}$ Nacrtati graf funkcije.
$\mathbf{T_{FG1}}$ Nacrtati graf polinoma.
$\mathbf{T_{FG2}}$ Nacrtati graf racionalne funkcije.
$\mathbf{T_{FL1}}$ Potvrditi limes funkcije.
$\mathbf{T_{FL2}}$ Odrediti limes funkcije ili algebarskog izraza.
$\mathbf{T_{FL3}}$ Odrediti limes racionalne ili iracionalne funkcije u točki prekida ili u beskonačnosti.
$\mathbf{T_{FS}}$ Ispitati svojstva funkcije (područje funkcije, monotonost, omeđenost).
$\mathbf{T_{FV\infty}}$ Istražiti vrijednost funkcije u blizini ruba domene ili limes u točki.
$\mathbf{T_{NK}}$ Ispitati konvergenciju niza.
$\mathbf{T_{NL1}}$ Potvrditi limes niza.
$\mathbf{T_{NL2}}$ Odrediti limes niza.
$\mathbf{T_{NS1}}$ Ispitati ili dokazati svojstva niza (monotonost, omeđenost).
$\mathbf{T_{NS2}}$ Odrediti udaljenost općeg člana niza i određenog broja ili indeks člana niza od kojeg je udaljenost manja od zadane vrijednosti.
$\mathbf{T_{NV}}$ Odrediti vrijednosti člana niza.
$\mathbf{Q_{R1}}$ Odrediti vrijednost iz algebarskog modela kamatnog računa.
$\mathbf{Q_{R2}}$ Odrediti vrijednost iz realnog konteksta.
$\mathbf{Q_{R3}}$ Odrediti ekstrem ili ekstremne vrijednosti iz realnog konteksta.
$\mathbf{Q_{M1}}$ Odrediti matematičku formulu.
$\mathbf{Q_{M2}}$ Riješiti nejednadžbu ili odrediti broj rješenja jednadžbe.
$\mathbf{Q_{M3}}$ Dokazati nejednakost.
$\mathbf{Q_{M4}}$ Odrediti ekstrem ili ekstremne vrijednosti iz matematičkog konteksta.
θ_{NS} Svojstva vrijednosti članova niza (monotonost, omeđenost)
$\theta_{N\infty}^{IR}$ Definicija limesa niza (konvergentan, divergentan i neograničeno rastući niz, ε-definicija)
Kamatni račun Formule za složeni kamatni račun i neprekinuto ukamaćivanje
θ_{FS} Svojstva funkcije (područje funkcije, monotonost, omeđenost)
θ_{FS}^{IR} Svojstva funkcije i grafa funkcije ispitana alatima infinitezimalnog računa (monotonost, konveksnost, ekstremi, točke pregiba)
$\theta_{F\infty}^{IR}$ Granično ponašanje funkcije ispitano alatima infinitezimalnog računa
Teoremi o limesu Pravila o aritmetici limesa, limes geometrijskog niza, pravilo direktne zamjene, limes potencije, $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$
Formule za asim.funk. Formule za jednadžbu asimptota pomoću limesa
Asimptote rac.funkcije Pravila određivanja asimptota s obzirom na polinome u brojniku i nazivniku funkcije



Slika 5.2.6: Grafički prikaz prakseološke organizacije tema i jedinica vezanih uz infinitezimalni račun u udžbeniku prvog seta

5.2.3. Prakseološka organizacija u udžbenicima drugog seta

Tema Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Diskurzivnu komponentu udžbeničke teme čini jedna tehnologija koja obuhvaća svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije i njihovih grafova.

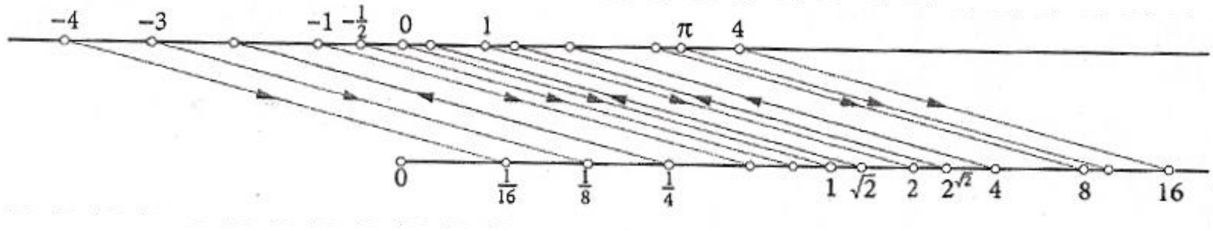
Uvod u temu čini istraživanje promjene broja stanovnika kroz određeni vremenski period. Jednakost kvocijenta susjednih vrijednosti dovodi do algebarskog izraza s potencijama koji modelira danu realnu situaciju i to je istaknuto svojstvo eksponencijalne funkcije. Računanje potencije na kalkulatoru je tehnika koja se koristi kad zadatak nije moguće riješiti potenciranjem i za računanje vrijednosti eksponencijalne funkcije realnog argumenta.

Grafički se prikazuju vrijednosti potencije za eksponente iz skupa prirodnih, cijelih i potom racionalnih brojeva. *Praxis* je potpora proširenju domene eksponencijalne funkcije. Grafički prikaz eksponencijalne funkcije koristi diskursu ograničenja baze na pozitivne brojeve različite od 1, prepoznavanju domene, slike, sjecišta s osi ordinata i monotonosti. Graf funkcije $f(x) = b^x$ se, neovisno o bazi, po volji približava osi apscisa pa mu je to asimptota, koja se opisuje kao tangenta u beskonačno dalekoj točki.

Veza eksponencijalnih funkcija recipročnih baza obuhvaća simetričnost grafova funkcija i jednakost vrijednosti tih funkcija za suprotne argumente, što je pravdano svojstvima potencija.

Kontekst promjene broja stanovnika poziva *praxis* određivanja eksponenta za danu vrijednost potencije kada ona nije potencija baze. Predložena tehnika je metoda uzastopnih približavanja jer tražena vrijednost postoji u danom kontekstu.

Postojanje logaritma kao rješenja eksponencijalne jednadžbe temelji se na domeni, slici i injektivnosti eksponencijalne funkcije uz ilustraciju. Logaritamska funkcija motivirana je *praxisom* prepoznavanja potencije kao argumenta za dane vrijednosti eksponencijalne funkcije. Rezultati se prikazuju pridruženim točkama brojevnog pravca i brojevnog polupravca, koji predstavljaju domenu i kodomenu eksponencijalne te u obratnom slučaju njoj inverzne, logaritamske funkcije (Slika 5.2.7).



Slika 5.2.7: Tehnika pridruživanja točaka domene točkama kodomene iz udžbenika drugog seta

Grafički prikaz vrijednosti logaritma koristi definiranju logaritamske funkcije, prepoznavanju slike funkcije, sjecišta s osi apscisa, monotonosti funkcije s obzirom na bazu te uspostavljanju veze s eksponencijalnom funkcijom. Os ordinata je asimptota grafa logaritamske funkcije, koji se, za sve baze, tom pravcu približava, ali ga ne dodiruje.

Računanje dekadskog i prirodnog logaritma na kalkulatoru je tehnika predstavljena odvojeno od diskursa. Eksponencijalne i logaritamske nejednadžbe rješavaju se prepoznavanjem ekvivalentnih algebarskih nejednadžbi po argumentima funkcija, s obzirom na monotonost promatrane funkcije, ili očitavanjem s grafičkog prikaza. Logaritamska nejednadžba rješava se očitavanjem s prikazivanja pridruživanja na brojevnom polupravcu i pravcu.

Zadaci iz realnog konteksta prisutni su u svim cjelinama, a logaritamska ljestvica te primjena eksponencijalne i logaritamske funkcije čine zasebne udžbeničke jedinice. Promjene kojima je kvocijent stalan opisuju se izrazom s potencijom oblika $a \cdot b^{kt}$. Kad nije jasno kako se veličina povećava koristi se funkcija rasta $N(t) = N_0 e^{kt}$. Izvodi se formula koja daje iznos novca s obzirom na glavnicu i vrijeme štednje uz zadanu kamatnu stopu.

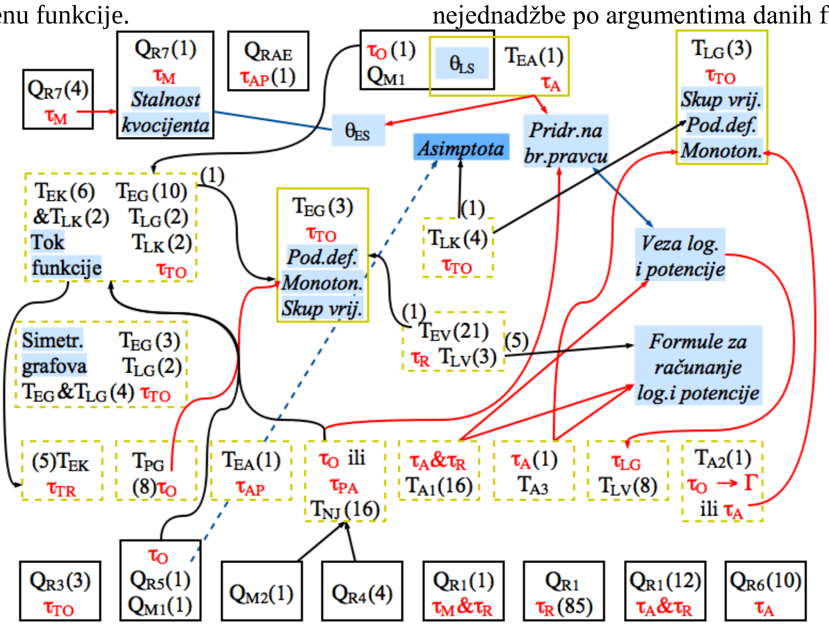
Među najučestalijim punkt-prakseologijama su izračunavanje vrijednosti funkcije, algebarskog izraza, potencije ili logaritma, bez diskurzivne komponente. Prakseologija crtanja grafa funkcije je često zastupljena kao praktični blok i kao potpuna prakseologija. Rješavanje nejednadžbe je često zastupljena prakseologija koja se realizira s tri različite dostupne tehnike. Među potpunim prakseologijama prevladava opisivanje toka funkcije, posebno simetričnosti i transformacija grafova te domene, slike i monotonosti funkcije, s obzirom na *praxis* crtanja grafa funkcije. Potpuna prakseologija je \`prepoznavanje funkcije zadane grafički s obzirom na diskurs monotonosti funkcija´. Ostale potpune punkt-prakseologije su motivacija diskurzivnom sadržaju te jedna instanca punkt-prakseologije `uspoređivanje dvije potencije velikih magnituda algebarskim manipulacijama uz podršku svojstava logaritma i monotonosti funkcija´.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.8. Prakseologije su međusobno nepovezane i uglavnom sačinjene samo od praktične komponente. Među potpunim prakseologijama najviše ih opisuje tok funkcije iz grafičkog prikaza te neke pozivaju monotonost i domenu funkcije. Tehnike karakteristične ovoj temi su uglavnom algebarske manipulacije koje koriste svojstva potencija i logaritma te odgovarajuće formule. Metoda uzastopnih približavanja koristi određivanju eksponenta kad je dana vrijednost potencije i nije izričito podržana diskursom. Tehnika očitavanja s pridruživanja na brojevnom pravcu podržava *logos* definicije logaritma i koristi rješavanju logaritamske nejednadžbe. Nejednadžbe se rješavaju tehnikom svođenja na ekvivalentnu algebarsku nejednadžbu uz podršku monotonosti funkcije.

Matematički zadaci, izvan teme *Eksponencijalna i logaritamska funkcija*, određivanja broja rješenja jednadžbi i određivanja domene funkcije pozivaju crtanje grafa funkcije odnosno rješavanje odgovarajuće logaritamske nejednadžbe. Zadaci iz realnog konteksta pozivaju punkt-prakseologije crtanja grafa funkcije i rješavanja nejednadžbi za određivanje raspona vrijednosti veličine. Jedan takav zadatak zahtjeva `prepoznavanje granične vrijednosti funkcije očitavanjem s grafičkog prikaza´. Radi se o horizontalnoj asimptoti. Najviše zadataka realnog konteksta zadaju algebarski izraz s potencijom ili logaritmom koji modelira tu situaciju. Zahtjeva se izračunati vrijednosti ili odrediti koeficijente tog izraza. Realne situacije koje je potrebno modelirati uglavnom pozivaju pojam stalnosti kvocijenta. Samo jedan zadatak nije moguće modelirati prema tom diskursu.

Asimptota se spominje pri opisivanju toka funkcija iz *praxisa* crtanja grafa funkcije. U jednoj instanci punkt-prakseologije crtanja grafa logaritamske funkcije, pri opisivanju toka funkcije uspostavlja se veza asimptote i domene funkcije. Asimptota je pozvana pri rješavanju jednog zadatka iz realnog konteksta.

T_{A1} Odrediti vrijednost algebarskog izraza s potencijom i/ili logaritmom.
T_{A2} Odrediti između kojih cijelih brojeva se nalazi dani logaritam.
T_{A3} Usporediti vrijednosti potencija velike magnitude.
T_{EA} Odrediti argument, ako je zadana vrijednost eksponencijalne funkcije.
T_{EG} Nacrtati graf eksponencijalne funkcije.
T_{EK} Nacrtati graf kompozicije eksponencijalne funkcije s linearnom funkcijom.
T_{EV} Odrediti vrijednost potencije ili eksponencijalne funkcije za dani argument.
T_{LG} Nacrtati graf logaritamske funkcije.
T_{LK} Nacrtati graf kompozicije logaritamske funkcije s linearnom funkcijom ili funkcijom apsolutne vrijednosti.
T_{LV} Odrediti vrijednost logaritma za dani argument.
T_{NJ} Riješiti eksponencijalnu ili logaritamsku nejednadžbu.
T_{PG} Prepoznati graf eksponencijalne ili logaritamske funkcije.
Q_{M1} Odrediti broj rješenja jednadžbe.
Q_{M2} Odrediti domenu funkcije.
Q_{R1} Odrediti vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom ili logaritmom.
Q_{R2} Odrediti vrijednost za koju se poprima zadana vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom.
Q_{R3} Grafički prikazati veličinu iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom.
Q_{R4} Odrediti raspon vrijednosti iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom ili logaritmom.
Q_{R5} Odrediti najveću očekivanu vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model s potencijom.
Q_{R6} Odrediti koeficijente danog algebarskog modela s potencijama ili logaritmom, koji opisuje promjenjivu veličinu.
Q_{R7} Odrediti algebarski model koji opisuje promjenu vrijednosti dane veličine.
τ_{AP} Aproksimiranje vrijednosti
τ_{LG} Prepoznavanje eksponenta s obzirom na definiciju logaritma
τ_{PA} Prepoznavanje ekvivalentne algebarske nejednadžbe po argumentima danih funkcija



Slika 5.2.8: Grafički prikaz prakseološke organizacije teme Eksponencijalna i logaritamska funkcija u udžbeniku drugog seta

Teme vezane uz trigonometrijske funkcije

U udžbeničkoj temi istaknute su četiri tehnologije: definicija i geometrijska interpretacija, svojstva, tok trigonometrijskih funkcija i trigonometrijski identiteti.

Tangens i kotangens su određeni omjerom sinusa i kosinusa, koje su definirane na brojevnoj kružnici. Vrijednosti u kojima funkcije tangens i kotangens nisu definirane ovise o nazivnicima danih omjera. Tangens i kotangens se geometrijski interpretiraju na brojevnoj kružnici i pravdaju omjerom stranica sličnih pravokutnih trokuta. Navedeni diskurs čini tehnologiju definicije funkcija. Očitavanje s brojevne kružnice je dostupna tehnika za rješavanje jednadžbi i nejednadžbi s tangensom i kotangensom.

Domena, parnost odnosno neparnost i periodičnost trigonometrijskih funkcija pripadaju tehnologiji svojstava funkcija. Domena funkcije tangens utvrđuje se iz definicije tangensa kao omjera, pri čemu se s brojevne kružnice očitava za koje realne brojeve je kosinus jednak nuli. Neparnost funkcija proizlazi iz definicije funkcija kao omjera, a periodičnost je podržana geometrijskom interpretacijom funkcija na brojevnoj kružnici.

Trigonometrijski identiteti su podrška računanju vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Među značajnim identitetima su veza trigonometrijskih funkcija istog argumenta, adicijski teoremi, formule redukcije te dvostrukog i polovičnog kuta. Računanje pomoću identiteta ili kalkulatora je suvremena alternativa tablicama. Kotangens nije dostupna funkcija na kalkulatoru i njegova vrijednost za dani kut računa se kao recipročna vrijednost tangensa kuta, što je tehnika podržana tehnologijom trigonometrijskih identiteta.

Grafovi funkcija sinus i kosinus upotpunjavaju *praxis* izračunavanja vrijednosti funkcija za dane argumente ucrtavanjem pripadnih točaka u koordinatnoj ravnini. Dijelom diskurzivnog bloka ove prakseologije su svojstva funkcija vidljiva iz grafičkog prikaza. Grafovi svih trigonometrijskih funkcija dani su u sažetku teme. To je prva instanca grafova funkcija tangens i kotangens. Tehnologija toka trigonometrijskih funkcija je dana u zasebnoj udžbeničkoj jedinici.

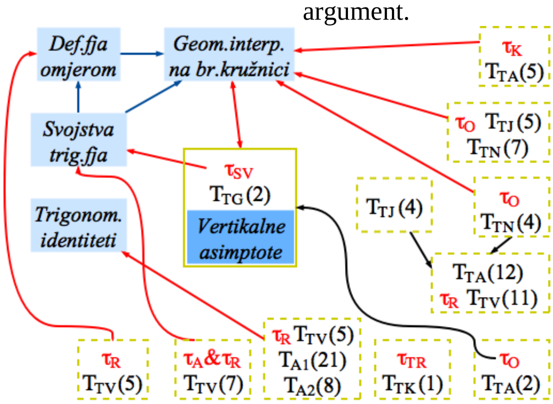
Crtanje grafa funkcije tangens temelji se na komponentama preostalih tehnologija. Domena i periodičnost određuju interval na kojem se crta osnovna krivulja. Geometrijska interpretacija tangensa na brojevnoj kružnici pokazuje kako vrijednosti funkcije neograničeno rastu od nule do beskonačnosti, kad argument raste od nule do $\pi/2$, gdje nije definirana. Ordinate odgovarajućih točaka prenose se s brojevne kružnice u koordinatnu ravninu. Neparnost i periodičnost omogućuju dopunjavanje grafa na domeni. Pravci $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ se prepoznaju kao vertikalne asimptote jer im se graf približava, ali ih nikad ne siječe. Graf funkcije kotangens se konstruira analogno, a njegove vertikalne asimptote su pravci $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Među najučestalijim punkt-prakseologijama su računanje argumenta ili vrijednosti funkcije na kalkulatoru ili pomoću tabličnih vrijednosti, bez diskurzivne komponente ili s obzirom na neparnost i periodičnost trigonometrijskih funkcija. Značajno su zastupljene prakseologije `izračunavanje vrijednosti funkcije, ako je poznata vrijednost druge trigonometrijske funkcije uz podršku trigonometrijskih identiteta´. Jednadžbe se rješavaju očitavanjem s brojevne kružnice uvažavajući geometrijsku interpretaciju funkcija. Samo su dvije potpune punkt-prakseologije, `konstrukcija točke na brojevnoj kružnici kad je dana vrijednost funkcije s obzirom na geometrijsku interpretaciju funkcija´ te `crtanje grafa funkcije s diskursom toka funkcije´, koji uključuje asimptote.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.9. Prakseologije su uglavnom nepovezane i sačinjene samo od praktične komponente. Zbog definicije tangensa i kotangensa dostupna je tehnika računanja vrijednosti tih funkcija iz omjera sinusa i kosinusa. Inzistira se na računanju vrijednosti funkcija kuta, kojeg je potrebno svesti na kut zastupljen u tabličnim vrijednostima, pomoću svojstava neparnosti i periodičnosti. Geometrijska interpretacija funkcija iz podržava tehniku očitavanja ili konstrukcije vrijednosti odnosno argumenta na brojevnoj kružnici.

Zahtjevi rješavanja jednadžbi i nejednadžbi pozivaju prakseologiju računanja argumenta za danu vrijednost funkcije. Argument se računa na kalkulatoru, očitavanjem s brojevne kružnice ili očitavanjem s grafa funkcije. Potpune prakseologije su vezane isključivo uz crtanje grafa funkcije i opisivanje toka funkcije i tu se javlja objekt asimptota.

T_{A1} Odrediti vrijednost tangensa ili kotangensa, ako je zadana vrijednost trigonometrijske funkcije.
T_{A2} Odrediti vrijednost trigonometrijske funkcije, ako zadana vrijednost tangensa ili kotangensa.
T_{PG} Prepoznati graf kompozicije funkcije tangens ili kotangens s linearnom funkcijom.
T_{TA} Odrediti argument, ako je zadana vrijednost tangensa ili kotangensa.
T_{TG} Nacrtati graf funkcije tangens ili kotangens.
T_{TJ} Riješiti jednadžbu s tangensom i/ili kotangensom.
T_{TK} Nacrtati graf kompozicije funkcije tangens s linearnom funkcijom.
T_{TN} Riješiti nejednadžbu s tangensom i/ili kotangensom.
T_{TV} Odrediti vrijednost tangensa ili kotangensa za dani argument.



Slika 5.2.9: Grafički prikaz prakseološke organizacije tema vezanih uz trigonometrijske funkcije u udžbeniku drugog seta

Jedinice unutar teme Krivulje drugog reda

Udžbenička tema sadrži tri značajne tehnologije: definiciju hiperbole, jednadžbu hiperbole te odnos pravca i hiperbole.

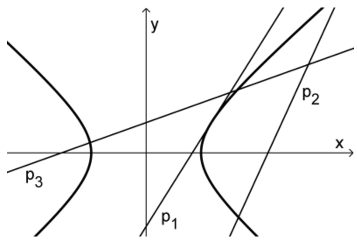
Raison d'etre hiperbole dolazi iz realnog konteksta. Potrebno je odrediti lokaciju eksplozije, ako je poznato da je zvuk stigao u različito vrijeme do dviju mjernih stanica (vidi Primjer 5.2).

Hiperbola s fokusima F_1 i F_2 se definira u terminima radijvektora kao skup točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti do fokusa jednaka zadanoj duljini. Ispituje se zadovoljava li motivacijski primjer definiciju hiperbole. Na odgovarajućem koordinatnom sustavu definiraju se karakteristične točke i parametri hiperbole. Daje se tehnika konstrukcije hiperbole pomoću radijvektora njezinih točaka. Jednadžba hiperbole u koordinatnom sustavu proizlazi iz definicije hiperbole.

Jednadžba hiperbole dana je u kanonskom i segmentnom obliku. Istaknuto je kako apscisa ne može biti manja od realne poluosi, a ordinata poprima svaku vrijednost. Imaginarna tjemena i poluos geometrijski su interpretirani. Diskurzivni dio udžbeničke jedinice uključuje jednadžbu istostrane hiperbole.

Dijagonale pravokutnika kojemu su imaginarna i realna tjemena polovišta stranica određuju pravce na kojima leže asimptote hiperbole. Dane su jednadžbe asimptota i istaknuto da udaljenost točaka hiperbole do jedne od asimptota teži k nuli kada se točka udaljava od ishodišta. Iz danog diskursa proizlazi tehnika crtanja hiperbole kao krivulje koja prolazi tjemenima, a približava se asimptotama.

U uvodnom dijelu udžbeničke jedinice o odnosu pravca i hiperbole na ilustraciji su istaknute tangenta, sekanta jedne grane i sekanta obje grane hiperbole te sekanta koja s krivuljom drugog reda ima jednu zajedničku točku (vidi Sliku 5.2.10).



Slika 5.2.10: Ilustracija odnosa pravaca i hiperbole iz udžbenika drugog seta

Odnos pravca i hiperbole određen je brojem rješenja sustava jednadžbi pravca i krivulje drugog reda. Iskazuju se formule za uvjet tangencijalnosti $k^2a^2 - b^2 = l^2$, pravca $y = kx + l$ i hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, koordinate dirališta te jednadžba tangente kroz točku na hiperboli.

Najučestalije punkt-prakseologije su praktični blokovi sa zahtjevima tipa odrediti jednadžbu hiperbole ili krivulje drugog reda, svojstvo hiperbole ili drugog objekata, koji se rješavaju algebarskim manipulacijama uz pomoć formula analitičke geometrije, jednadžbe hiperbole i asimptote te formula iz tehnologije odnosa pravca i hiperbole. Crtanje hiperbole nije među najučestalijim prakseologijama.

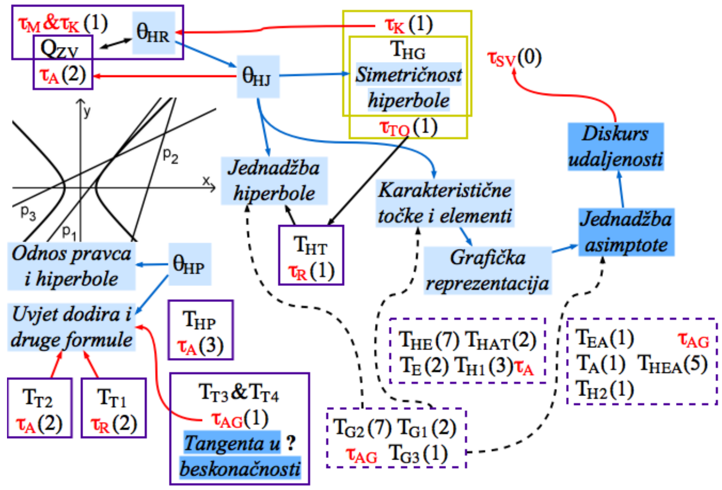
Potpune prakseologije `crtanje hiperbole konstrukcijom točaka radijvektora koji zadovoljavaju definiciju´ i `crtanje hiperbole kroz točke koje zadovoljavaju jednadžbu, uz primjenu svojstva simetričnosti´, javljaju se samo jednom. Specifičan je zahtjev određivanja tangente hiperbole kroz točku koja leži na asimptoti. Potrebno je angažirati diskurs asimptote kao tangente u beskonačno dalekoj točki i kako točka na asimptoti ima samo jednu tangentu na hiperbolu. U istom zadatku je prakseologija `crtanje pravca koji prolazi diralištima tangenti kroz istu točku, kad je jedna od "tangenti" asimptota hiperbole´. Nužno je poznavati diskurs prema kojemu je traženi pravac paralelan asimptoti i prolazi diralištem druge tangente.

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.11. Najviše zadataka se rješava algebarskom manipulacijom jednadžbama ili pomoću formula analitičke geometrije. Tri su tehnike crtanja hiperbole. Tehnika crtanja konstrukcijom radijvektora je usko vezana uz definiciju hiperbole. Tehnika crtanja krivulje kroz tjemena i uz asimptote posljedica je diskursa o asimptoti kao pravcu do kojega se smanjuje udaljenost točaka hiperbole, ali nije primijenjena za rješavanje zadataka. Koristi se tehnika crtanja kroz točke koordinatne ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu hiperbole. Punkt-prakseologija koja poziva diskurs simetričnosti hiperbole je povezana s prakseologijom određivanja točaka koordinatne ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu hiperbole.

Određivanje lokacije je zahtjev koji dolazi iz realnog konteksta. Jedna prakseologija se realizira konstrukcijom i daje *raison d'être* hiperbole, a ostale se realiziraju određivanjem odgovarajuće jednadžbe hiperbole u koordinatnom sustavu.

Asimptota je zastupljena svojom jednadžbom, kao dio predložene tehnike crtanja hiperbole i u prakseologiji određivanja tangente hiperbole kroz točku na asimptotu. Odgovarajući diskurs nije dostupan u udžbeniku.

$\mathbf{T_A}$ Odrediti kut među asimptotama hiperbole.
$\mathbf{T_E}$ Odrediti karakteristične elemente hiperbole.
$\mathbf{T_{EA}}$ Odrediti karakteristične elemente hiperbole, ako je zadan kut među asimptotama.
$\mathbf{T_{H1}}$ Odrediti jednadžbu hiperbole, ako je zadan njezin odnos s drugim objektima.
$\mathbf{T_{H2}}$ Dokazati odnos hiperbole i krivulje drugog reda.
$\mathbf{T_{HAT}}$ Odrediti jednadžbu hiperbole, ako su zadane njezine asimptote i tangenta.
$\mathbf{T_{HE}}$ Odrediti jednadžbu hiperbole, ako su zadani karakteristični elementi hiperbole.
$\mathbf{T_{HEA}}$ Odrediti jednadžbu hiperbole, ako su zadani karakteristični elementi i asimptote ili njihova svojstva.
$\mathbf{T_{HG}}$ Nacrtati hiperbolu.
$\mathbf{T_{HP}}$ Odrediti odnos hiperbole i pravca.
$\mathbf{T_{HT}}$ Odrediti točku na hiperboli, ako je zadana apscisa.
$\mathbf{T_{T1}}$ Odrediti jednadžbu tangente hiperbole kroz točku na hiperboli.
$\mathbf{T_{T2}}$ Odrediti jednadžbu tangente hiperbole kroz točku izvan hiperbole (*točka ne pripada asimptoti*).
$\mathbf{T_{T3}}$ Odrediti tangentu na hiperbolu kroz točku izvan hiperbole (*točka pripada asimptoti*).
$\mathbf{T_{T4}}$ Odrediti jednadžbu pravca kroz dirališta tangenti iz iste točke (*jedna tangenta je asimptota*).
$\mathbf{T_{G1}}$ Odrediti jednadžbu krivulje, ako je zadan odnos s karakterističnim elementima hiperbole.
$\mathbf{T_{G2}}$ Odrediti svojstvo objekta, ako je zadan odnos s hiperbolom i drugim objektima.
$\mathbf{T_{G3}}$ Odrediti jednadžbu pravca, ako je zadan odnos s asimptotama i karakterističnim elementima hiperbole.
$\mathbf{Q_{ZV}}$ Odrediti lokaciju iz realnog konteksta, ako je poznata razlika udaljenosti do dviju točaka.



Slika 5.2.11: Grafički prikaz prakseološke organizacije jedinica unutar teme Krivulje drugog reda u udžbeniku drugog seta

Teme i jedinice vezane uz infinitezimalni račun

Udžbeničke teme zadaju tehnologije svojstva niza, svojstva funkcije, granično ponašanje niza i funkcije i diferencijalni račun.

Tehnologija o svojstvima niza okuplja objekte aritmetički i geometrijski niz, limes niza, geometrijski red i kamatni račun. Dana je motivacija i definicija niza te opisani različiti načini zadavanja niza. Opisuje se monotonost nizova i demonstrira tehnika njezina ispitivanja. Geometrijski niz motiviran je problemom određivanja broja predaka. Diskutira se o monotonosti, predznaku i vrijednostima članova geometrijskog niza u ovisnosti o kvocijentu. Geometrijski niz se primjenjuje za modeliranje promjene vrijednosti veličine iz realnog konteksta. Temelj je za računanje kamata i prirasta neke veličine, što se modelira formulama složenog kamatnog računa i neprekinutog ukamaćivanja.

Limes niza ili granična vrijednost niza motivirana je približavanjem vrijednosti članova zadanog niza nekom broju. Ispituje se ponašanje izračunatih vrijednosti članova niza s obzirom na intervale oko broja kojemu se oni približavaju. Iskazuje se definicija limesa niza kao broja za koji je broj članova niza, izvan po volji malog intervala oko tog broja, konačan i daje pojam konvergentnog niza.

Dokazuje se prema definiciji da je limes niza s općim članom $a_n = \frac{1}{n}$ jednak nuli. Promatranjem izračunatih vrijednosti članova zadanog niza opisuje se što znači da niz teži u beskonačnost i pokazuje da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Na temelju istog *praxisa* iskazuje se kako je limes niza, kojemu su članovi recipročne vrijednosti članova niza koji teži u beskonačnost, jednak nuli i kontraprimjerom se pokazuje kako obrat općenito ne vrijedi.

Ovisno o složenosti formule općeg člana niza nije lako pokazati da je broj, kojeg se prethodno mora utvrditi, limes niza s obzirom na definiciju. Stoga se limes niza računa na temelju

pravila koja za konvergentne nizove uključuju limes zbroja, umnoška konstantom, umnoška i kvocijenta članova dviju nizova te svojstvo da za konvergentne nizove (a_n) i (b_n), niz (c_n) takav da je $a_n \le b_n \le c_n, \forall n \in \mathbb{N}$, je konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Kada algebarski izrazi, koji zadaju promatrani niz, ne određuju konvergentni niz, odnosno u slučaju neodređenih oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i $\infty-\infty$, algebarski izraz treba izmijeniti, primjerice dijeljenjem najvećom potencijom od *n* ili pretvaranjem razlike korijena u razlomak. Iskazuje se i dokazuje konvergentnost i vrijednost limesa geometrijskog niza ovisno o kvocijentu. Potrebno je moći prepoznati nizove koji teže nuli ili beskonačnosti te poznavati vrijednost limesa geometrijskog niza, što čini istaknutu diskurzivnu komponentu granične vrijednosti niza.
Svojstvo omeđenosti nizova opisano je zahtjevom da se svi članovi niza nalaze unutar intervala $\langle -M, M\rangle$ za neki broj *M*. Na temelju *praxisa* računanja vrijednosti članova niza prepoznaje se da omeđen niz ne mora biti konvergentan. Iskazuje se i dokazuje poučak o konvergenciji omeđenog i monotonog niza. Diskurs se koristi za potvrđivanje konvergencije niza $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ što se naslućuje iz izračunatih vrijednosti njegovih članova. Limes ovog niza je beskonačan, neperiodičan decimalni broj, koji ima značajnu primjenu u matematici i označava se slovom *e*. Mogu se računati limesi nizova koji se algebarskom manipulacijom svode na izraz u kojem se može primijeniti neko svojstvo iz Jednadžbe 5.2.1.

$$\text{Ako je } (x_n) \text{ takav da je } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \text{ onda je } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$
$$\text{Ako je } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ i } \lim_{n\to\infty} b_n = b,\ a \ne 0 \text{ ili } b \ne 0, \text{ onda je } \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$
$$\text{Ako je } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ i } k \text{ konstanta, onda je } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{x_n}\right)^{x_n} = e^k$$

Jednadžba 5.2.1: Svojstva limesa za izračunavanje limesa nekih algebarskih izraza iz udžbenika drugog seta

Među najučestalijim punkt-prakseologijama su \`ispitivanje monotonosti niza primjerenim tehnikama´, \`računanje vrijednosti članova niza´, \`određivanje limesa niza algebarskim tehnikama´ i \`određivanje broja članova niza s obzirom na njihov položaj u odnosu na zadani interval´, bez diskurzivne komponente. Često se javljaju potpune prakseologije \`pokazati da je dani broj limes niza algebarskim manipulacijama s obzirom na definiciju niza´ te \`opisati ponašanje vrijednosti članova niza u beskonačnosti na temelju izračunatih vrijednosti´.

Tehnologija o svojstvima obuhvaća definiciju funkcije i grafa funkcije. Elementarne funkcije: linearna, kvadratna, kubna, funkcija apsolutne vrijednosti, racionalna, korjenovanje, eksponencijalna, logaritamska i sinus, dane su svojom domenom, kodomenom i pravilom preslikavanja te prikazane grafički. Asimptote odgovarajućih funkcija podudaraju se s koordinatnim osima i nisu posebno istaknute. Značajne komponente ovog *logosa* su prirodna domena, svojstva funkcije (parnost, neparnost i periodičnost, omeđenost i monotonost, injektivnost, surjektivnost i bijektivnost te inverzna funkcija). Kao primjeri monotonih funkcija su grafički prikazane eksponencijalna i logaritamska funkcija koje su rastuće odnosno padajuće ovisno o bazi. Diskurs o kompoziciji funkcije podržava tehniku crtanja grafa kompozicije elementarne i linearne funkcije transformacijama temeljnog grafa.

Tehnologija graničnog ponašanja funkcije obuhvaća sadržaje vezane uz limes funkcije. Motiviran je tabličnim prikazom izračunatih vrijednosti racionalne funkcije za argumente blizu broja koji ne pripada domeni te funkcije. Očitavanjem s grafičkog prikaza interpretiraju se situacije kad

- funkcija ima limes u točki u kojoj nije definirana,
- funkcija nema limes u točki prekida jer s različitih strana poprima vrlo velike pozitivne odnosno negativne vrijednosti,
- funkcija teži u beskonačnost kada *x* teži točki prekida,
- limes funkcije se podudara odnosno ne podudara s vrijednosti funkcije u točki i
- funkcija nema limes u točki jer teži različitim vrijednostima funkcije s različitih strana točke.

Slijedi definicija limesa funkcije u točki *c* kao broja *L*, ako je to limes niza funkcijskih vrijednosti za svaki niz koji teži *c*. Posebno, limes funkcije može biti beskonačnost.

Unutar udžbeničke jedinice o limesu funkcije nalazi se diskurs o neprekidnim funkcijama, koji se oslanja na određivanje limesa funkcije u točkama domene. Svojstvo neprekidnosti elementarnih funkcija zajedno sa svojstvima limesa s obzirom na zbrajanje, množenje, dijeljenje i potenciranje, omogućuju računanje limesa funkcija različitim algebarskim manipulacijama. Tehnike računanja limesa racionalnih i iracionalnih funkcija u točki temelje se na kraćenju zajedničkog faktora koji sadrži točku prekida, racionalizaciji ili supstituciji. Određuje se vrijednost limesa funkcije $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ u nuli, uglavljivanjem između vrijednosti određenih iz pravokutnih trokuta na brojevnoj kružnici koje imaju isti limes. Vrijednost limesa $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ proizlazi iz poznate vrijednosti limesa niza i supstitucije $x=\frac{1}{t}$. Računaju se limesi funkcija koje se algebarskom manipulacijom svode na izraze u kojima se mogu primijeniti gornji limesi.

Limes u beskonačnosti je istaknuta komponenta tehnologije. Očitavanjem s grafičkog prikaza navode se moguća ponašanja funkcije u beskonačnosti:

(a) funkcija ima limes,

(b) funkcija nema limes jer je ponašanje funkcije u beskonačnosti promjenjivo i

(c) funkcija neograničeno raste pa je njezin limes beskonačno.

Demonstrira se tehnika računanja limesa racionalnih funkcija u beskonačnosti dijeljenjem najvećom potencijom kao kod limesa niza.

Najčešće su zastupljene punkt-prakseologije `određivanje prirodne domene algebarskim manipulacijama´ te `ispitivanje monotonosti očitavanjem s grafičkog prikaza´. Učestala je punkt-prakseologija `crtanje grafa kompozicije transformacijama temeljnog grafa´ bez diskursa. Najviše punkt-prakseologija među najučestalijima su `računanje limesa funkcije algebarskim tehnikama´, kojima je važna komponenta uvrštavanje vrijednosti ili prepoznavanje nekog limesa. Nema diskurzivnih komponenti. Jedina potpuna prakseologija među učestalima je `opisivanje ponašanja vrijednosti funkcije za argumente koji se malo razlikuju od danog broja, očitavanjem s grafičkog prikaza, kako bi se utvrdilo postojanje i vrijednost limesa funkcije za dani broj´.

Diferencijalni račun je tehnologija koju čini derivacija i pripadajući diskurs. Promjena vrijednosti iz realnog konteksta u vremenu tumačena je iz grafičkog prikaza funkcije, koja modelira situaciju, i njezine prve derivacije. Uspostavljena je veza između smanjenja odnosno povećanja vrijednosti funkcije i predznaka njezine prve derivacije. Navedena praktična aktivnost je uvod u udžbeničku jedinicu koja obuhvaća rast i pad funkcije, ekstreme, konveksnost i konkavnost, asimptote, crtanje grafa funkcije te primjenu derivacija za rješavanje problema ekstrema i ekstremnih vrijednosti u matematičkom ili realnom kontekstu. Razrađena je tehnika određivanja lokalnih ekstrema, uz pomoć tablice toka funkcije, s obzirom na vrijednosti derivacije funkcije s različitih strana referentnih točaka. Ispitivanje predznaka druge derivacije je tehnika nalaženja intervala konveksnosti i konkavnosti, točaka pregiba te utvrđivanja je li stacionarna točka ujedno točka lokalnog minimuma ili maksimuma.

Tok funkcije je tehnologija unutar udžbeničke jedinice kojoj pripada diferencijalni račun, a direktno je vezan uz crtanje grafa funkcije. Asimptota je poznat pojam vezan uz horizontalnu odnosno vertikalnu asimptotu eksponencijalne i logaritamske funkcije, te dvije kose asimptote hiperbole, zadane svojim jednadžbama.

Opisuje se postupak određivanja asimptota funkcije. Vertikalne asimptote dobivaju se promatrajući nultočke nazivnika jer blizu njih vrijednost funkcije jako raste. Kosa asimptota se određuje pomoću limesa te je pravac $y = kx + l$ desna kosa asimptota, ako je $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Ako ti limesi ne postoje funkcija nema desnu kosu asimptotu. U slučaju kada je koeficijent k jednak nuli, ako postoji limes $l = \lim_{x \to \infty} f(x)$ tada funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = l$. Lijeva kosa asimptota računa se identičnim formulama za $x \to -\infty$, a ako se koeficijenti k i l podudaraju u oba slučaja tada je asimptota obostrana. Napominje se kako se dokaz formula neće provoditi jer nije „sasvim elementaran“.

Prethodno izneseni diskursi koriste se za formiranje tehnike crtanja grafova. Preporučuje se crtanje grafa na temelju ispitivanja pet diskurzivnih elemenata

1. Odrediti domenu i nultočke.
2. Odrediti asimptote.
3. Ispitati parnost, neparnost i periodičnost.
4. Odrediti intervale monotonosti i ekstreme.
5. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti te točke pregiba.
6. Nacrtati graf funkcije.

Parnost ili neparnost funkcije rezultira grafom funkcije simetričnim s obzirom na *y*-os odnosno ishodište. Tehnika prikazivanja izvedenih podataka u tablici toka funkcije olakšava crtanje grafa funkcije.

Najučestalije punkt-prakseologije su \`crtanje grafa polinoma ili racionalne funkcije, s obzirom na ispitano ponašanje prve derivacije i određene asimptote, uz podršku tablice toka funkcije´. Najveći broj zadanih racionalnih funkcija ima kosu asimptotu. Nacrtani grafovi racionalnih funkcija češće ne sijeku nego što sijeku asimptotu. U punkt-prakseologijama crtanja racionalnih funkcija javljaju se funkcije s polinomijalnom asimptotom, koja nije dijelom *logosa* (Tablica 5.2.4).

Tablica 5.2.4: Asimptote racionalnih funkcija u punkt-prakseologijama crtanja grafa funkcije u udžbeniku drugog seta

Asimptote racionalne funkcije	**Broj instanci p-p**
Vertikalna i kosa asimptota, graf ne siječe asimptotu	6
Vertikalna i polinomijalna asimptota	3
Vertikalna i horizontalna asimptota, graf ne siječe asimptotu	3
Dvije vertikalne i horizontalna asimptota, graf ne siječe asimptotu	3
Horizontalna asimptota, graf siječe asimptotu u jednoj točki	2
Dvije vertikalne i horizontalna asimptota, graf siječe asimptotu u jednoj točki	2
Vertikalna i kosa asimptota, graf siječe asimptotu u jednoj točki	1
Horizontalna asimptota, graf ne siječe asimptotu	1

Popis tipova zadataka relevantnih predloženom REM-u i dostupnih tehnika te grafički prikaz usustavljenih lokalnih prakseologija dan je na Slici 5.2.12. Prakseologije su izolirane i uglavnom sačinjene samo od praktičnog dijela. Limes često poziva diskurs, primjerice \`opisivanje ponašanja niza u beskonačnosti prema izračunatim vrijednostima članova niza´, u nekim situacijama uz tablični prikaz. \`Određivanje broja članova niza s obzirom na položaj

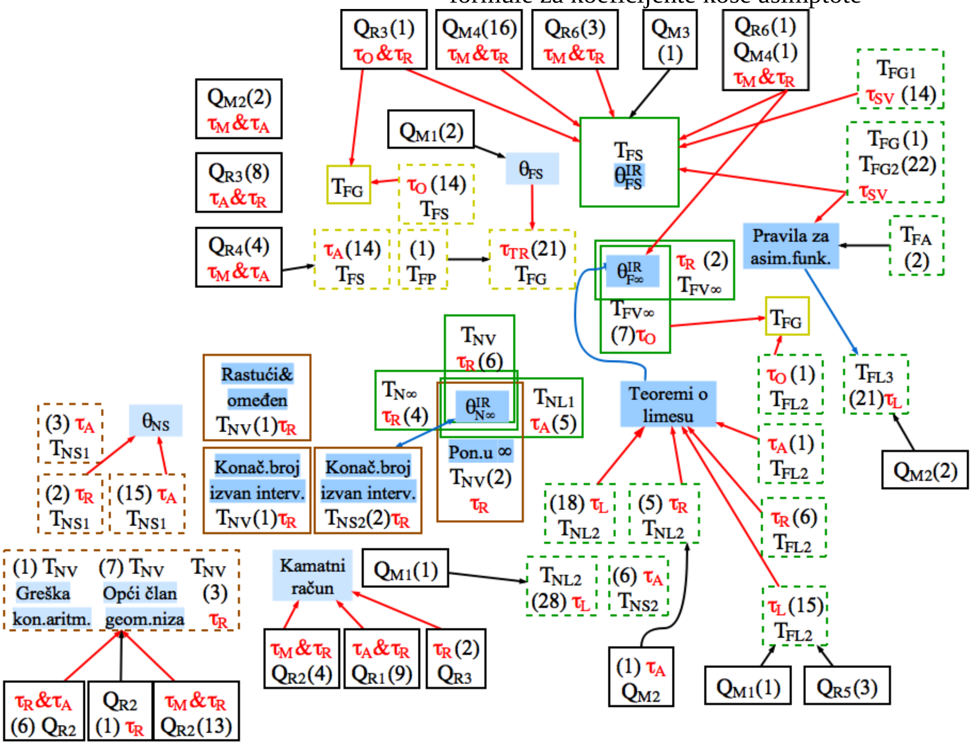
prema nekom intervalu´ može pozvati odgovarajući diskurs, a češće je praktični blok odvojen od njega. Kod diskursa definicije limesa niza, algebarskim manipulacijama se dokazuje kako je limes nekog niza beskonačnost. Značajan broj punkt-prakseologija su `određivanje limesa niza ili algebarskog izraza´, bez diskursa. Značajne su tehnike računanja limesa uglavljivanjem između poznatih vrijednosti i prepoznavanja vrijednosti limesa.
Dvije potpune prakseologije za utvrđivanje postojanja i vrijednosti limesa imaju praktične blokove `ispitivanje ponašanja vrijednosti funkcije u blizini točke u kojoj nije definirana, računanjem i uz tablični prikaz´ odnosno `ispitivanje ponašanja vrijednosti funkcije u blizini neke točke ili u beskonačnosti očitavanjem s grafičkog prikaza´.

Asimptote se koriste u sklopu tehnika crtanja grafa proizvoljne i racionalne funkcije. Dvije su tehnike određivanja asimptota, a jedna pripada temi limes funkcije.

Matematički zadaci izvan relevantnih tema, dokazivanje nejednakosti i rješavanje nejednadžbi angažiraju prakseologije `ispitivanje monotonosti očitavanjem s grafičkog prikaza´ ili `ispitivanje ponašanja prve derivacije´.
Kod zadataka realnog konteksta potrebno je situaciju modelirati općim članom geometrijskog niza ili odrediti koeficijente pripadnih formula složenog kamatnog računa i neprekinutog ukamaćivanja. Realne situacije koje su opisane nekom funkcijom ili algebarskim izrazom pozivaju prakseologije `određivanje domene funkcije´ ili `ispitivanje ponašanja vrijednosti veličine za velike argumente ili blizu nekog broja, računanjem limesa´.
Zadaci realnog i matematičkog konteksta, koji zahtijevaju `određivanje ekstremnih vrijednosti ili vrijednosti za koje se one postižu´, modeliraju se poznatim formulama, a rješavaju isključivo ispitivanjem ponašanja prve derivacije. Dvije su instance prakseologije izvođenja matematičke formule, ovisne o povećavanju neke veličine, što poziva *praxis* računanja limesa.

$\mathbf{T_{FA}}$ Odrediti asimptote funkcije.
$\mathbf{T_{FG}}$ Nacrtati graf funkcije.
$\mathbf{T_{FG1}}$ Nacrtati graf polinoma.
$\mathbf{T_{FG2}}$ Nacrtati graf racionalne funkcije.
$\mathbf{T_{FL1}}$ Potvrditi limes funkcije.
$\mathbf{T_{FL2}}$ Odrediti limes funkcije ili algebarskog izraza.
$\mathbf{T_{FL3}}$ Odrediti limes racionalne ili iracionalne funkcije u točki prekida ili u beskonačnosti.
$\mathbf{T_{FP}}$ Prepoznati funkciju zadanu grafički.
$\mathbf{T_{FS}}$ Ispitati svojstva funkcije (područje funkcije, monotonost, omeđenost).
$\mathbf{T_{FV\infty}}$ Istražiti vrijednost funkcije u blizini ruba domene ili limes u točki.
$\mathbf{T_{N\infty}}$ Odrediti ponašanje vrijednosti niza u beskonačnosti.
$\mathbf{T_{NL1}}$ Potvrditi limes niza.
$\mathbf{T_{NL2}}$ Odrediti limes niza.
$\mathbf{T_{NS2}}$ Odrediti broj članova niza s obzirom na odnos prema nekoj vrijednosti.
$\mathbf{T_{NS1}}$ Ispitati ili dokazati svojstva niza (monotonost, omeđenost).
$\mathbf{T_{NV}}$ Odrediti vrijednosti člana niza.
$\mathbf{Q_{M1}}$ Odrediti matematičku formulu ili pokazati odnos vrijednosti.
$\mathbf{Q_{M2}}$ Odrediti vrijednost iz matematičkog konteksta.
$\mathbf{Q_{M3}}$ Dokazati nejednakost.
$\mathbf{Q_{M4}}$ Odrediti ekstrem ili ekstremne vrijednosti iz matematičkog konteksta.

$\mathbf{Q_{R1}}$ Odrediti vrijednost iz algebarskog modela kamatnog računa.
$\mathbf{Q_{R2}}$ Odrediti vrijednost iz realnog konteksta.
$\mathbf{Q_{R3}}$ Odrediti vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model.
$\mathbf{Q_{R4}}$ Odrediti područje definicije vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model.
$\mathbf{Q_{R5}}$ Odrediti graničnu vrijednost iz realnog konteksta, ako je zadan algebarski model.
$\mathbf{Q_{R6}}$ Odrediti ekstrem ili ekstremne vrijednosti iz realnog konteksta.
θ_{NS} Svojstva vrijednosti članova niza (monotonost i vrijednost razlike ili kvocijenta, omeđenost)
Kamatni račun Formule za složeni kamatni račun i neprekinuto ukamaćivanje
$\theta_{N\infty}^{IR}$ Definicija limesa niza (približavanje, konačan broj izvan intervala, vrijednost limesa)
Teoremi o limesu Pravila o aritmetici limesa, limes geometrijskog niza, limes potencije, $\lim_{x\to 0} \sin x / x = 1$
θ_{FS} Svojstva funkcije (područje funkcije, monotonost, omeđenost, kompozicija).
$\theta_{F\infty}^{IR}$ Granično ponašanje funkcije ispitano alatima infinitezimalnog računa
θ_{FS}^{IR} Svojstva funkcije i grafa funkcije ispitana alatima infinitezimalnog računa (monotonost, konveksnost, ekstremi, točke pregiba)
Pravila za asim.funk. Vertikalna asimptota iz nazivnika, formule za koeficijente kose asimptote



Slika 5.2.12: Grafički prikaz prakseološke organizacije tema i jedinica vezanih uz infinitezimalni račun u udžbeniku drugog seta

5.3. Stečeno znanje studenata nastavničkih studija matematike za objekt znanja asimptota

5.3.1. Prakseološka oprema za grafičko prikazivanje

Pitanje 1.1

Na pitanje je odgovorilo 46 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljeno je sedam provedenih *praxisa* s obzirom na komponente toka funkcije koje se određuju ili ispituju:

P_{TO}: Crtanje krivulje kroz u prosjeku sedam točaka grafa funkcije, uključujući odsječak na osi ordinata.

P_{SV}: Crtanje krivulje uz asimptote prepoznate iz pravila pridruživanja pojednostavljenog algebarskim manipulacijama.

P_{SV1}: Crtanje krivulje s obzirom na ispitano područje definicije i limes funkcije u beskonačnosti.

P_{SV2}: Crtanje krivulje s obzirom na određene tri točke grafa funkcije, ispitano područje definicije i **pogrešno** interpretiranu monotonost funkcije iz tablice predznaka funkcije.

P_{IR}: Crtanje krivulje s obzirom na ispitanu prvu derivaciju funkcije i limes funkcije u beskonačnosti.

P_{IR1}: Crtanje krivulje s obzirom na određeno u prosjeku šest točaka grafa funkcije, uključujući odsječak na osi ordinata, ispitano područje definicije funkcije te interpretiranu monotonost iz prve derivacije funkcije.

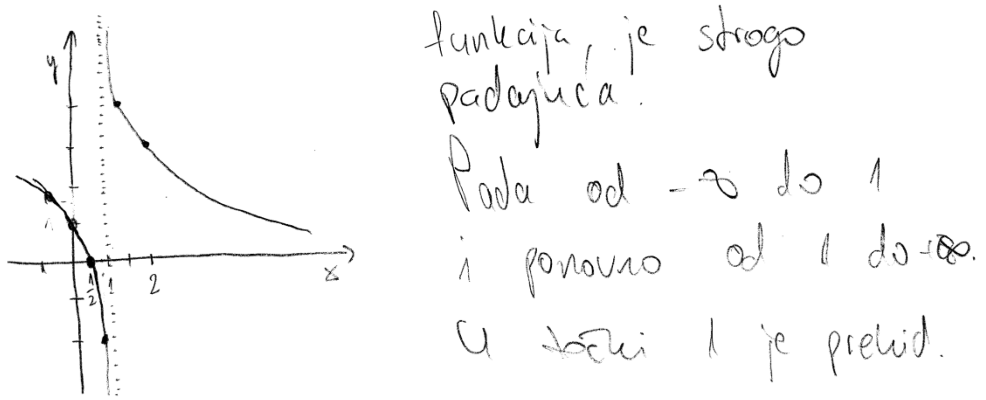
P_{IR2}: Crtanje krivulje s obzirom na ispitanu prvu derivaciju.

Tablica 5.3.1: Broj studenata s obzirom na provedeni *praxis* crtanja grafa funkcije u odgovoru na Pitanje 1.1

Graf funkcije	Asimptota	P_{TO}	P_{SV}	P_{SV1}	P_{SV2}	P_{IR}	P_{IR1}	P_{IR2}	Ukupno
Nema ili pogrešno	**Nema**	1						2	14
	Pogrešno	1			1		1		
	$x=1$				1		1	4	
	Obje			2					
Pogrešna slika funkcije	**Pogrešno**		1			1			15
	$x=1$	5				1	3	4	
Tražena hiperbola	**Nema**						1		17
	$x=1$	4							
	$y=2$			1					
	Obje	1		1		8	1		
	Ukupno	**12**	**1**	**4**	**2**	**10**	**7**	**10**	**46**

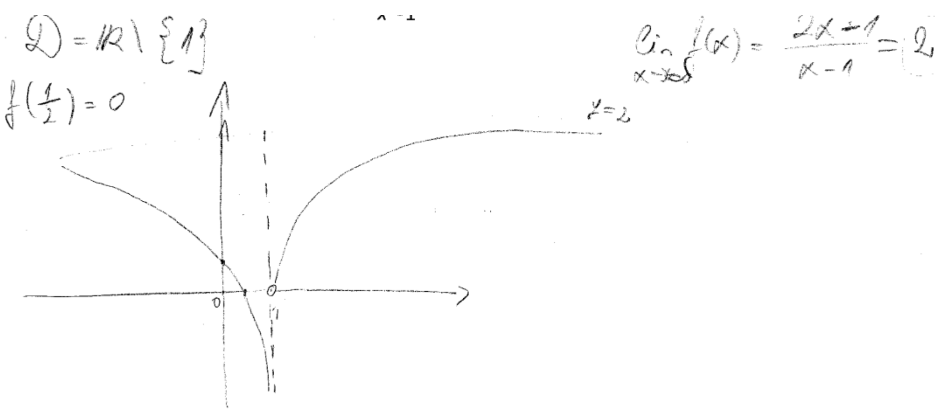
Broj studenata s obzirom na realizaciju pojedinih tehnika nalazi se u Tablici 5.3.1. Vertikalnu asimptotu hiperbole istaknulo je 82.6%, a horizontalnu asimptotu 30.4% ispitanih studenata.

Među studentima koji su proveli *praxis* P_{TO} većina je odredila ili prepoznala argument nultočke. Broj studenata s obzirom na ispravnost rješenja u ovisnosti o broju određenih točaka nalazi se u Tablici 5.3.2. Više od polovine ovih studenata je istaknulo, na različite načine, izuzimanje broja 1 iz područja definicije funkcije. Studenti koji su proveli ovaj *praxis* ponašanje funkcije u beskonačnosti ili nisu odredili ili nisu poštovali sliku dane racionalne funkcije jer nacrtana krivulja siječe pravac $y = 2$ (Slika 5.3.1).



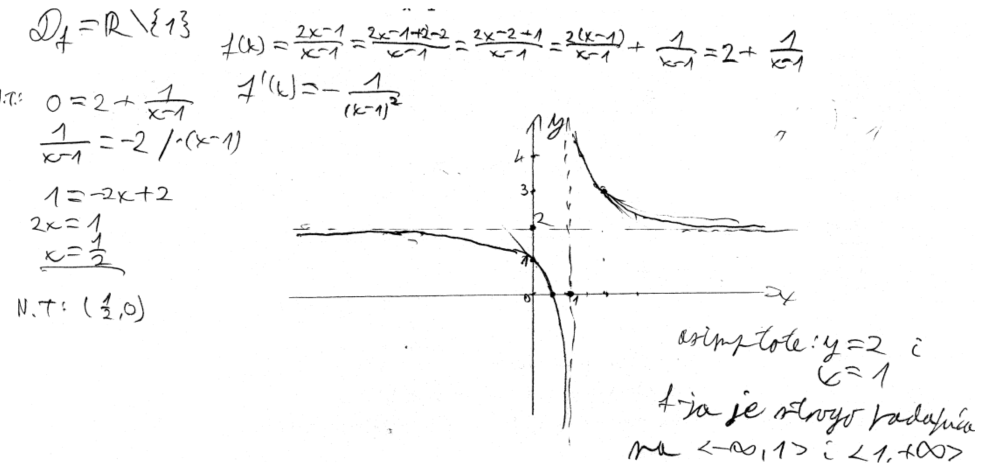
Slika 5.3.1: Krivulja koja određuje pogrešnu sliku funkcije iz *praxisa* P_{TO} u odgovoru na Pitanje 1.1

Student koji je proveo *praxis* P_{SV} nije uspješno pojednostavio pravilo pridruživanja, stoga pravilno interpretirane asimptote i nacrtana krivulja ne odgovaraju zadanoj funkciji. Većina studenata koji su proveli *praxis* P_{SV1}, uz navedena obilježja funkcije, određivala je nultočku i odsječak na osi ordinata. Ovi studenti su područje definicije zapisali u obliku $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, limes funkcije su prepoznali ili izračunali dijeljenjem najvećom potencijom, pri čemu su neki koristili pogrešan zapis (Slika 5.3.2).



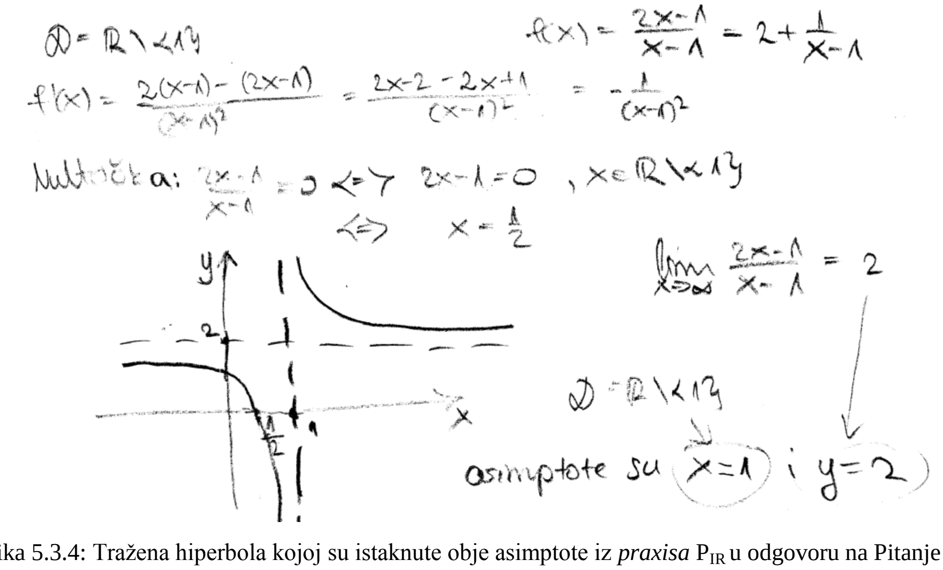
Slika 5.3.2: Pogrešna krivulja iz *praxisa* P_{SV1} u odgovoru na Pitanje 1.1

Među 27 studenata koji su određivali prvu derivaciju, jedan student nije dovršio izračun, jedan student je točno izračunao, ali krivo zapisao $f(x)'$ i jedan student je prepoznao pravilo pridruživanja prve derivacije iz pojednostavljenog algebarskog izraza kojim se zadaje racionalna funkcija (Slika 5.3.3). Ostali studenti su točno izračunali prvu derivaciju primjenjujući pravilo deriviranja kvocijenta. Studenti nisu uvijek interpretirali monotonost funkcije s obzirom na izračunatu prvu derivaciju.



Slika 5.3.3: Točno rješenje i algebarska manipulacija pravila pridruživanja iz *praxisa* P_{IR1} u odgovoru na Pitanje 1.1

Više od polovine studenata koji su proveli *praxis* P_{IR} interpretiralo je monotonost dane funkcije, a jednaki udio studenata je odredio ili prepoznao područje definicije funkcije. Neki studenti su odredili nultočku, odsječak na osi ordinata ili više točaka grafa funkcije te interpretirali područje definicije odnosno limes funkcije u beskonačnosti odgovarajućom asimptotom grafa funkcije (Slika 5.3.4). Samo jedan student je računao drugu derivaciju i to netočno i nije ju interpretirao.



Slika 5.3.4: Tražena hiperbola kojoj su istaknute obje asimptote iz *praxisa* P_{IR} u odgovoru na Pitanje 1.1

Za studente koji su proveli *praxis* P_{IR1} broj ispravnih rješenja u ovisnosti o broju određenih točaka nalazi se u Tablici 5.3.2. Većina ovih studenata je prepoznala ili odredila nultočku funkcije. Neki studenti su računali drugu derivaciju, u tim slučajevima račun je bio pogrešan, interpretacije vrijednosti nije bilo ili je bila pogrešna.

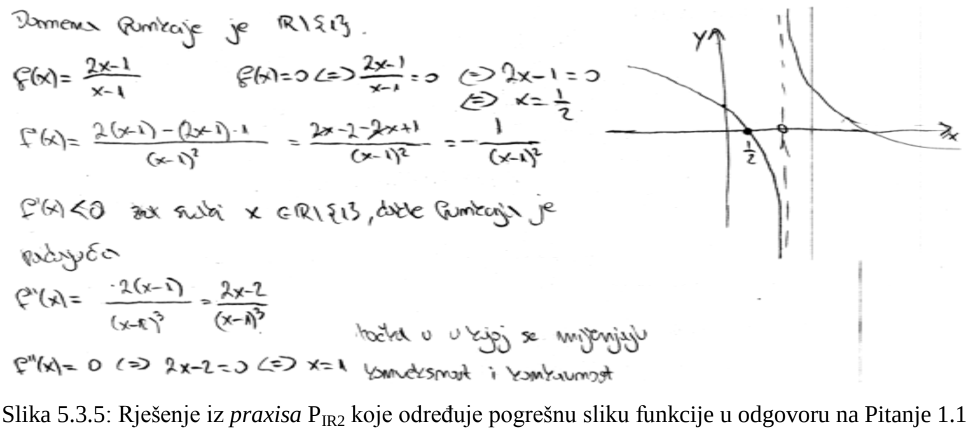
Tablica 5.3.2: Broj studenata s obzirom na *praxis* crtanja grafa funkcije u ovisnosti o broju određenih točaka u odgovoru na Pitanje 1.1

Broj određenih točaka Γ_f	**Broj točnih rješenja od ukupnog broja**		
	P_{TO}	**P_{IR1}**	**Ostalo**
3		1 od 1	**P_{SV2}:** 0 od 2
4		0 od 1	**P_{IR}:** 2 od 2
5	0 od 1	0 od 2	
6	2 od 6		
7	1 od 1	1 od 2	**P_{SV1}:** 1 od 1
8	1 od 3	0 od 1	**P_{IR}:** 1 od 1
11	1 od 1		
Ukupno	5 od 12	2 od 7	4 od 6

Studenti koji su *proveli praxis* P_{IR2} skoro uvijek su odredili nultočku i uglavnom su prepoznali ili odredili područje definicije funkcije. Iako su ovi studenti točno izračunali prvu derivaciju, osim jednog koji nije dovršio izračun, samo polovina je točno interpretirala njezin predznak. Među ostalim studentima dvojica nisu istaknuli svojstvo monotonosti i po jedan student je

- odredio monotonost pogrešno iz predznaka funkcije ispitanog u tablici;
- riješio pogrešno nejednadžbe $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$;
- riješio pogrešno jednadžbu $f'(x) = 0$.

Polovina ovih studenata je računala drugu derivaciju, a samo dva studenta su interpretirala vrijednosti druge derivacije prepoznavanjem konveksnosti i konkavnosti grafa funkcije na intervalima ili točke u kojoj se ona mijenja (Slika 5.3.5).



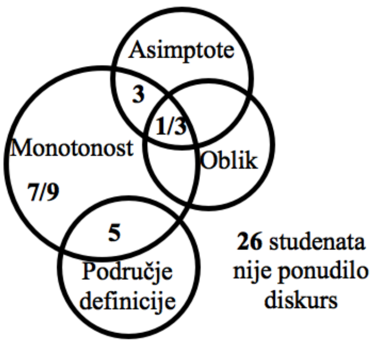
Slika 5.3.5: Rješenje iz *praxisa* P_{IR2} koje određuje pogrešnu sliku funkcije u odgovoru na Pitanje 1.1

Dominantne komponente toka funkcije koje su studenti koristili u *praxisu* crtanja grafa racionalne funkcije su: određene barem tri točke grafa funkcije, područje definicije funkcije, limes funkcije u beskonačnosti i prva derivacije funkcije. Broj studenata s obzirom na ispravnost provedenog *praxisa* nalazi se u Tablici 5.3.3. Najučinkovitiji su oni *praxisi* u kojima se primjenjuju oboje limes funkcije u beskonačnosti i prva derivacija. Određivanje točaka grafa funkcije doprinosi ispravnoj provedbi *praxisa* kad se kombinira s drugim komponentama toka funkcije.

Tablica 5.3.3: Broj studenata s obzirom na realizirani *praxis* crtanja grafa funkcije u ovisnosti o ispitanim komponentama toka funkcije u odgovoru na Pitanje 1.1

Ispitane komponente toka funkcije	**Broj studenata koji su primijenili tehniku**	**Udio nacrtanih traženih hiperbola**
Točke Γ_f	5	20%
Točke Γ_f, D_f	9	44.4%
Točke Γ_f, D_f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$	1	100%
Točke Γ_f, D_f, $f'(x)$	7	28.6%
Točke Γ_f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f'(x)$	1	100%
Točke Γ_f, D_f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f'(x)$	2	100%
D_f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$	3	33.3%
D_f, $f'(x)$	8	0%
D_f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f'(x)$	5	60%
$f'(x)$	2	0%
$\lim_{x\to\infty} f(x)$, $f'(x)$	2	100%

Različite komponente toka funkcije doprinose grafičkoj reprezentaciji funkcije. 65.2% studenata je odredilo područje definicije funkcije i istaknulo vertikalnu asimptotu krivulje; nadalje 85.7% studenata koji su odredili i 72.7% studenata koji nisu odredili područje definicije funkcije je istaknulo vertikalnu asimptotu. S druge strane 26.1% studenata je odredilo limes funkcije u beskonačnosti i istaknulo horizontalnu asimptotu krivulje; ipak skoro svi studenti koji su odredili limes u beskonačnosti su istaknuli horizontalnu asimptotu i obratno, te skoro svi studenti koji nisu odredili limes nisu istaknuli horizontalnu asimptotu i obratno. 41.3% studenata je izračunalo točno prvu derivaciju i nacrtalo padajuću krivulju; većina studenata koji su izračunali prvu derivaciju je nacrtala padajuću krivulju, ali među studentima koji su nacrtali padajuću krivulju 59.4% jest i 40.6% nije izračunalo prvu derivaciju.



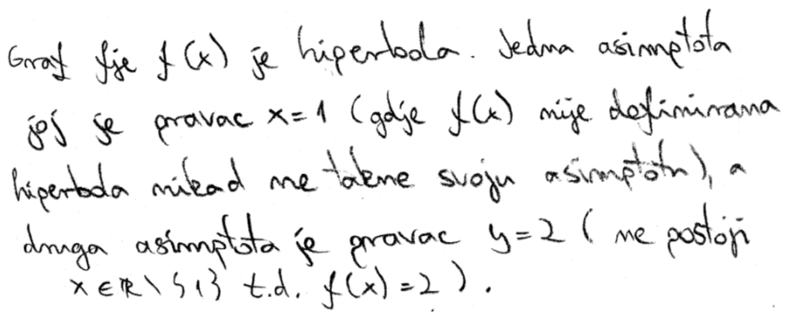
Slika 5.3.6: Broj studenata s obzirom na diskurzivne elemente korištene pri opisu toka funkcije u odgovoru na Pitanje 1.1

Iako su komponente toka funkcije: područje definicije, monotonost, asimptote, studenti odredili i istaknuli u praktičnom dijelu, znatno rjeđe su ih uključili u diskurzivni dio rješenja zadatka (Slika 5.3.6). U diskursu su studenti još spomenuli oblik krivulje koja je graf funkcije. Funkciju su uglavnom opisali strogo padajućom ili padajućom, a studenti koji su dali pogrešan diskurs:

- interpretirao pogrešno monotonost funkcije iz tablice predznaka funkcije;
- opisao „Kako se *x* povećava od $-\infty$ prema 1 vrijednosti funkcije *f* se povećavaju i teže 1“.

Diskurs o padu funkcije su češće proveli studenti koji su izračunali prvu derivaciju funkcije, a podjednako često studenti koji su nacrtali točnu hiperbolu ili padajuću krivulju koja određuje pogrešnu sliku funkcije.

U diskursu su studenti pisali kako funkcija nije definirana u $x=1$ ili kako funkcija u točki 1 ima prekid. Studenti koji su, u opisu toka funkcije, spomenuli oblik dobivene krivulje, nacrtali su traženu hiperbolu kojoj su istaknuli obje asimptote, a imenovali su ju parabolom. Jedan student je prepoznao kako je krivulja hiperbola i dao detaljno obrazloženje asimptotskog ponašanja (Slika 5.3.7). Ostali studenti koji su dali diskurs su istaknuli jednadžbe asimptota krivulje.


Graf fje $f(x)$ je hiperbola. Jedna asimptota joj je pravac $x=1$ (gdje $f(x)$ nije definirana, hiperbola nikad ne takne svoju asimptotu), a druga asimptota je pravac $y=2$ (ne postoji $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ t.d. $f(x)=2$).

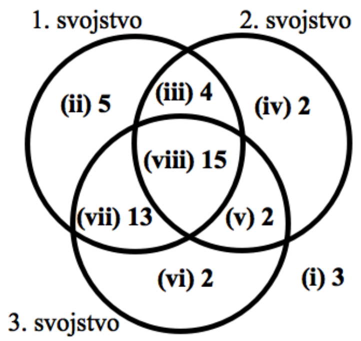
Slika 5.3.7: Diskurs o asimptotama tražene hiperbole u odgovoru na Pitanje 1.1

Pitanje 1.2

Na pitanje je odgovorilo 46 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljeno je osam kategorija rješenja s obzirom na to koja zadana svojstva funkcije zadovoljava nacrtana krivulja (Slika 5.3.8).

U kategoriji (i) su ubrojena rješenja za koja:

- grafički prikaz je nejasan,
- krivulja ne može biti graf funkcije i
- krivulja ima samo točke s negativnim apscisama kojima ordinate mijenjaju predznak jer je pravac $y = 2$ asimptota.



Slika 5.3.8: Broj rješenja po kategorijama s obzirom na svojstva funkcije koja zadovoljava nacrtana krivulja u odgovoru na Pitanje 1.2

U kategoriji (ii) su uglavnom krivulje koje imaju samo točke s negativnim apscisama i to horizontalnu asimptotu $y=2$ i vertikalnu asimptotu $x=0$. Svi studenti koji nisu netočno interpretirali prvo svojstvo nacrtali su krivulju kojoj je os apscisa horizontalna asimptota odozdo za $x \to -\infty$. U kategorijama (iii), (vii) i (viii) je pet tipova krivulje, ovisno o vrijednostima i ponašanju funkcije u nuli i za pozitivne apscise (vidi Tablicu 5.3.4 i Sliku 5.3.10). Posebno se ističu krivulje tipa 2, jer dva studenta su umjesto horizontalne asimptote nacrtali vertikalnu asimptotu $x=2$ (Slika 5.3.9: A).

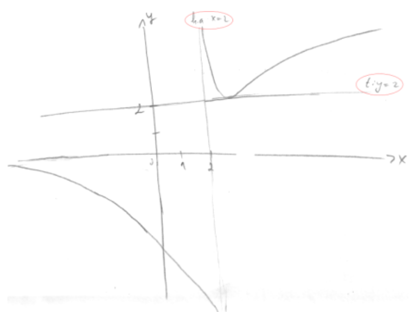
U kategoriji (iv) jedan student je nacrtao horizontalnu asimptotu $y=2$ u negativnoj beskonačnosti i dirałište na pravcu $y=2$ za pozitivnu apscisu (Slika 5.3.9: C). Drugi student je nacrtao krivulju koja ima dirałište na pravcu $y=2$ za negativnu apscisu, a za nenegativne argumente je padajuća i poprima negativne vrijednosti (Slika 5.3.9: B). U kategoriji (v) jedan student je nacrtao pravac $y=2$ kao generičku tangentu i asimptotu za $x \to -\infty$ (Slika 5.3.9: D). Drugi student je nacrtao krivulju tipa 3 koja je za negativne apscise rastuća i negativna. U kategoriji (vi) jedan student je nacrtao krivulju koja siječe svoju horizontalnu asimptotu $y=2$ (Slika 5.3.9: E), a drugi je nacrtao padajuću krivulju koja je za sve realne brojeve iznad svoje horizontalne asimptote $y=2$.

Tablica 5.3.4: Broj studenata s obzirom na kategoriju i tip krivulje u odgovoru na Pitanje 1.2

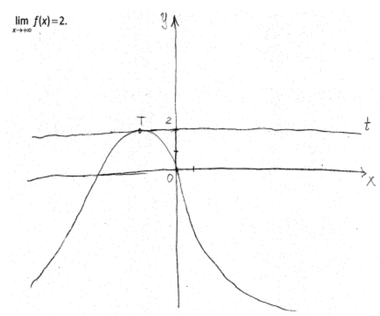
Kategorije za $x \geq 0$	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	$\sum$
Tip 1: $f(0)<0,\ f(x)\leq 2$				1	1		4	1	7
Tip 2: $f(0)<0,\ \lim\limits_{x\to\alpha^{\mp}} f(x)=\mp\infty,\ f(x)\geq 2, \forall x>\alpha$			2				1		3
Tip 3: $f(0)=0,\ f(x)\leq 2$					1		1	4	6
Tip 4: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ili $-\infty$, $f(x)\geq 2$ ili ≤ 2			2				7	5	14
Tip 5: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\ f(x_0)=2, 0<x_0<\alpha, \lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\pm\infty,\ f(x)>2$ ili $<2, \forall x>\alpha$								5	5
Ostalo:	3	5		1		2			11
Ukupno	3	5	4	2	2	2	13	15	46

Od 32 studenta koji su nacrtali horizontalnu asimptotu $y=2$ za $x \to +\infty$, 11 nije precizno istaknuto asimptotsko približavanje krivulje pravcu. Među njima su studenti koji su nacrtali krivulju koja naizgled dodiruje svoju horizontalnu asimptotu (Slika 5.3.9: F). Neki studenti su nacrtali krivulju koja ima *generičku* tangentu i asimptotu (Slika 5.3.9: D). Neki studenti nisu jasno istaknuli vrijednosti funkcije u nuli kad je krivulja tipa 3 (Slika 5.3.10).

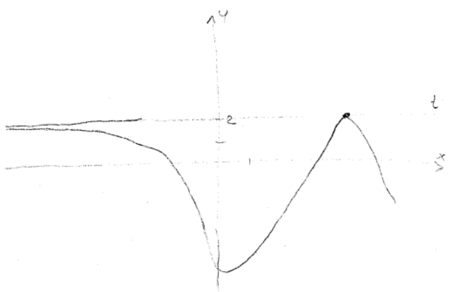
Studenti koji su crtali krivulju tipa 5 su imali najbolji učinak. Studenti koji su crtali krivulje tipa 1, 3 i 4, morali su za pozitivne apscise nacrtati dva lokalna ekstrema, što je uspješno provelo njih 32.3% (Slika 5.3.10).



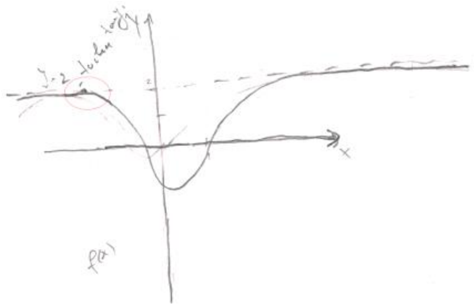
A: Kategorija (iii), tip 2
Vertikalna umjesto horizontalne asimptote



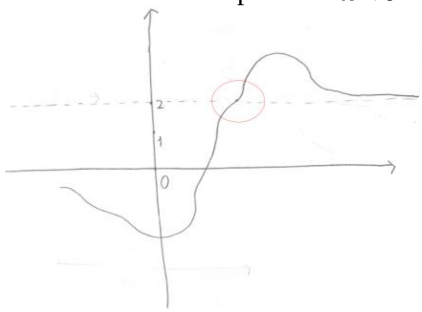
B: Kategorija (iv)
Diralište na $y=2$ za $x<0$



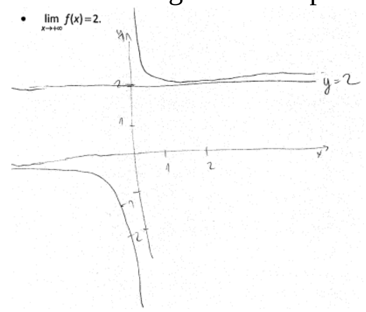
C: Kategorija (iv), tip 1
Horizontalna asimptota za $x<0$



D: Kategorija (v), tip 1
Generička tangenta i asimptota

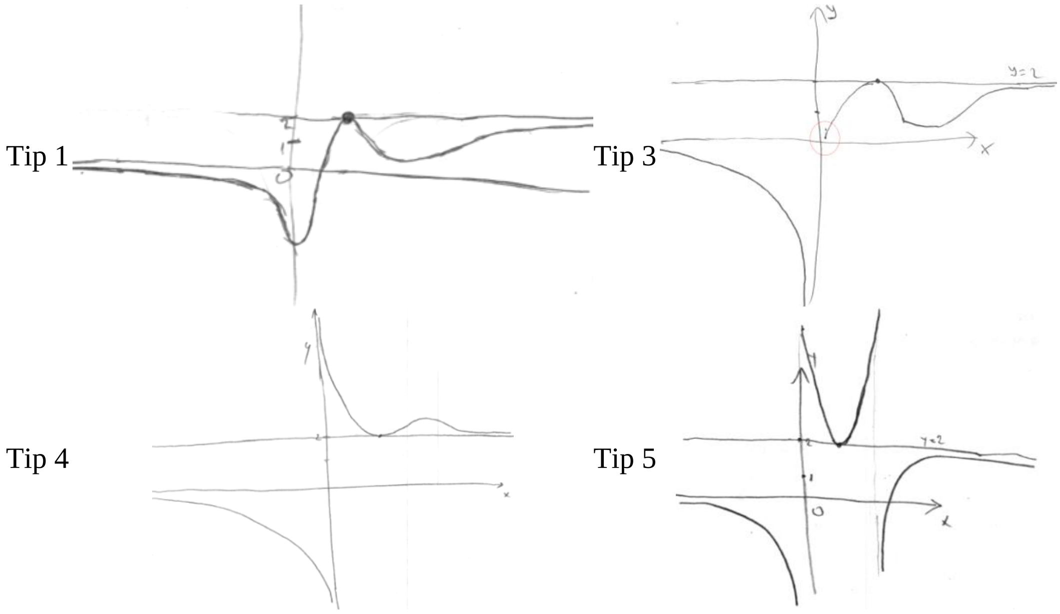


E: Kategorija (vi)
Krivulja siječe pravac



F: Kategorija (vii), tip 4
Krivulja naizgled dodiruje $y=2$

Slika 5.3.9: Krivulje s tipičnim greškama provedenog *praxisa* u odgovoru na Pitanje 1.2



Slika 5.3.10: Rješenja s obzirom na tip krivulje iz Tablice 5.3.4, koja zadovoljavaju sva zadana svojstva u odgovoru na Pitanje 1.2

Pitanje 1.3

Na pitanje je odgovorilo 47 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljena su četiri provedena *praxisa* s obzirom na komponente toka funkcije koje se određuju ili ispituju:

P_{TO}: Crtanje krivulje s obzirom na određene, u prosjeku četiri, točke grafa funkcije.

P_{SV1}: Crtanje krivulje s obzirom na određene, u prosjeku tri, točke grafa funkcije i horizontalnu asimptotu funkcije.

P_{SV2}: Crtanje krivulje s obzirom na određenu točku grafa funkcije s apscisom 1, horizontalnu asimptotu i rast funkcije.

P_{TR}: Crtanje krivulje transformacijama grafa funkcije $g(x) = 2^x$.

Jedan student nije nacrtao krivulju i kod tri studenta nije jasno koja je primijenjena tehnika.

Tablica 5.3.5: Broj studenata s obzirom na *praxis* crtanja grafa funkcije u ovisnosti o broju određenih točaka u odgovoru na Pitanje 1.3

Broj određenih točaka Γ_f	**Broj točnih rješenja od ukupnog broja**	
	P_{TO}	**P_{SV1}**
2	3 od 3	1 od 3
3	4 od 9	5 od 7
4	2 od 2	3 od 5
5	1 od 2	2 od 2
6		2 od 2
8		1 od 1
14	1 od 1	
Ukupno	11 od 17	14 od 20

Broj studenata s obzirom na realizaciju pojedinog *praxisa* nalazi se u Tablici 5.3.6 i broj studenata s obzirom na ispravnost rješenja u ovisnosti o broju određenih točaka nalazi se u Tablici 5.3.5.

Krivulje koje su studenti nacrtali razlikuju se u pet tipova:

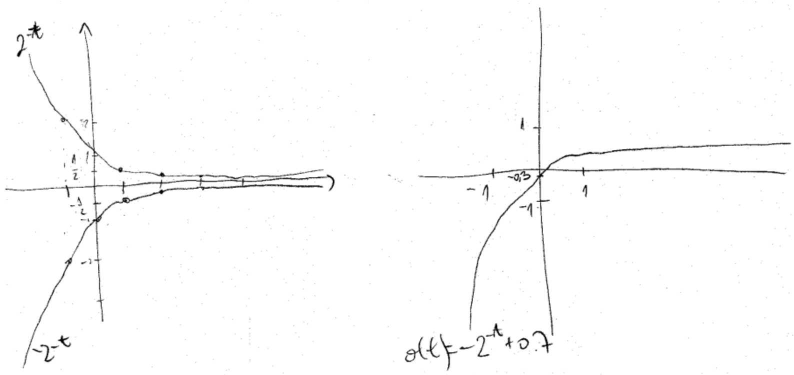
Tip 1: Krivulja je omeđena odozgo horizontalnom asimptotom $y = 0.7$.

Tip 2: Krivulja raste konkavno kroz odgovarajuće točke bez istaknute međe.

Tip 3: Krivulja raste konkavno i ponašanje za $x \to +\infty$ nije dostupno ili određeno.

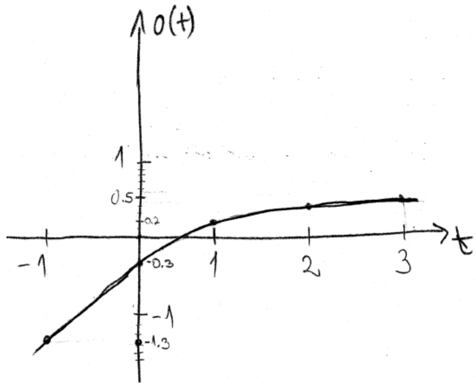
Tip 4: Krivulja raste konkavno kroz odgovarajuće točke i vrijednosti stagniraju kod 0.7 za $x \to +\infty$.

Tip 5: Krivulja raste konveksno.



Slika 5.3.11: Krivulja tipa 3 *iz praxisa* P_{TR} u odgovoru na Pitanje 1.3

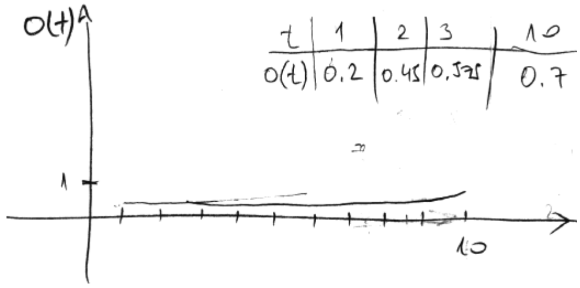
Među studentima koji su nacrtali krivulju tipa 3 jedan student je pokazao kako ovisne vrijednosti imaju među 1 jer ne postoji rješenje jednadžbe $o(t) = 1$. Drugi student je proveo *praxis* P_{TR}, ali nije istaknuo *transformiranu* asimptotu (Slika 5.3.11). Ostali studenti ponašanje u beskonačnosti nisu prikazali grafički nego opisali diskurzivno (Slika 5.3.12).



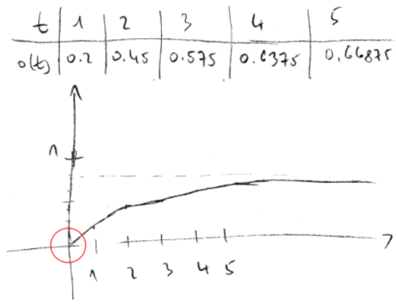
Slika 5.3.12: Krivulja tipa 2 *iz praxisa* P_{TO} u odgovoru na Pitanje 1.3

Studenti su najčešće griješili pri unošenju nultočke ili drugih točaka i izračunu vrijednosti funkcije. Takve greške su napravili studenti koji su nacrtali krivulju tipa 1 (Slika 5.3.13: B) i krivulju tipa 5 (Slika 5.3.13: C). Neki studenti su točno odredili točke i nacrtali netočnu krivulju tipa 5 (Slika 5.3.13: A) ili pravac. Jedan student koji je nacrtao pogrešan graf iz *praxisa* P_{SV1} nacrtao je krivulju kroz točno određene nultočku i točke s apscisama 0, 1 i 2, ali s horizontalnom asimptotom $y=1$. Jedan student, koji je zbog izvrednjavanja nacrtao pogrešan graf tipa 1 iz *praxisa* P_{SV1}, računao je vrijednost $o(\infty)$ i prepoznao kako zbog smanjivanja vrijednosti razlomka vrijedi „$o(t)$ ide prema 0.7“. Studenti koji su koristili nepoznatu tehniku crtanja su nacrtali:

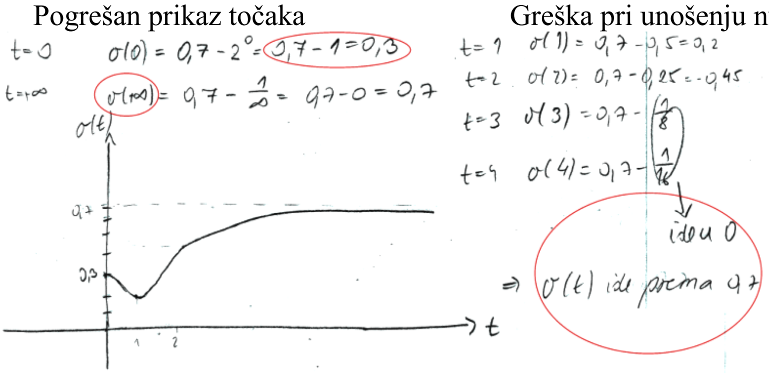
- graf padajuće, stalno pozitivne eksponencijalne funkcije,
- u neobilježenom koordinatnom sustavu krivulju koja raste konkavno od neodređene nultočke odnosno od pogrešno istaknute nultočke.



A: *Praxis* P_{TO}, krivulja tipa 5
Pogrešan prikaz točaka



B: *Praxis* P_{SV1}, krivulja tipa 1
Greška pri unošenju nultočke



C: *Praxis* P_{SV1}, krivulja tipa 1
Greška pri izvrednjavanju

Slika 5.3.13: Rješenja s tipičnim greškama *praxisa* u odgovoru na Pitanje 1.3

Studenti su kod opisa ponašanja ovisne vrijednosti isticali monotonost i asimptotsko ponašanje ovisne vrijednosti. Broj studenata s obzirom na provedeni *praxis* i ponuđeni diskurs nalazi se u Tablici 5.3.6. Studenti koji su proveli *praxis* P_{TO} češće su spomenuli diskurs monotonosti nego asimptotskog ponašanja. Studenti koji su nacrtali krivulju tipa 1 skoro uvijek su spomenuli diskurs asimptotskog ponašanja. Asimptotsko ponašanje je spomenulo 46.2% studenata koji nisu istaknuli horizontalnu asimptotu $y=0.7$ krivulje. Među njima su studenti koji su koristili nepoznatu tehniku i student koji nije nacrtao krivulju, on je prepoznao kako za promatrane vrijednosti vrijedi $0<o(t)<1$ i kako su vrijednosti sve bliže broju 0.7. Među studentima koji su točno nacrtali krivulje 50% ih je istaknulo horizontalnu asimptotu $y=0.7$, a 26.7% studenata asimptotsko ponašanje samo u diskursu.

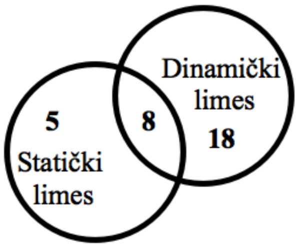
Samo jedan student ponašanje ovisnih vrijednosti nije opisao riječima nego je izračunao limes dane funkcije. Studenti su opisali kako se ovisne vrijednosti povećavaju, rastu ili eksponencijalno rastu te rastu u početku brže potom sporije. Studenti koji su nacrtali točnu krivulju češće su dali formalniji opis rasta vrijednosti.

Kod opisivanja asimptotskog ponašanja studenti su koristili dinamički, statički i kombinirani pristup opisivanju asimptotskog ponašanja, u broju kako je prikazano na Slici 5.3.14. Kao kod tumačenja limesa (Cottrill i sur., 1996; Tall, 1992; Tall i Vinner, 1981; Vinner, 1991; Williams, 1991) dinamički pristup podrazumijeva kretanje po grafu, promjenu vrijednosti i općenito neki proces. Najviše studenata je koristilo opise poput „ne prelaze“, „sve su bliže“, „približavaju se“ ili „ne dostižu“. Manje studenata je koristilo izraze poput „teži“ ili „ustaljuje se“ ili neku kombinaciju navedenih. Statički pristup asimptotskom ponašanju zadaje se odnosom ovisne vrijednosti prema limesu. Studenti koji su koristili statički pristup ponašanje ovisne vrijednosti su češće opisali odnosom „nije jednako“ ili „nije veće“ nego „približno jednako“ ili „u blizini“.

Tablica 5.3.6: Broj studenata s obzirom na provedeni *praxis* i ponuđeni *logos* u odgovoru na Pitanje 1.3

		P_{TO}	P_{SV1}	P_{SV2}	P_{TR}	P?	Ukupno
Praxis	Tip 1/točno		11	3	1		15
	Tip 2	5					5
	Tip 3	6			1		7
	Tip 4	3					3
	Tip 1/netoč.		6				6
	Tip 5/netoč.	4					4
	Ostalo/net.	2	1			4	7
Logos	Monotonost	12	2	0	1	1	16
	Asimptotsko ponašanje	4	3	1	1	1	10
	Monotonost i asimptotsko ponašanje	4	13	2	0	2	21
	Ukupno	20	18	3	2	4	47

Među studentima koji su nacrtali točnu krivulju 40% studenata je koristilo dinamički, 20% kombinirani i 13.3% statički pristup opisivanju asimptotskog ponašanja. S druge strane 66.7% studenata koji su koristili dinamički pristup, 75% koji su koristili kombinirani i 80% koji su koristili statički je nacrtalo točnu krivulju.



Slika 5.3.14: Broj studenata s obzirom na opisano asimptotsko ponašanje vrijednosti u odgovoru na Pitanje 1.3

Osam studenata je formalno iskazalo ponašanje ovisne vrijednosti (Tablica 5.3.7). Među njima pet studenata je nacrtanoj krivulji istaknulo horizontalnu asimptotu, a dvoje je netočno grafički prikazalo zadanu ovisnost. Jedan od njih je student koji je pogrešno istaknuo horizontalnu asimptotu $y=1$, opisao je kako se ovisne vrijednosti povećavaju, ali „nikad neće doseći 100%“ što je potkrijepio formalnim zapisom pomoću limesa. Drugi student je pogrešno istaknuo nultočku (vidi Sliku 5.3.13: B). Četiri studenta su koristila dinamički, dva studenta kombinirani pristup opisivanju asimptotskog ponašanja i jedan student nije dao drugi diskurs osim računanja limesa funkcije u beskonačnosti.

Tablica 5.3.7: Zapisi koje su studenti koristili za opisivanje ponašanja vrijednosti u beskonačnosti u odgovoru na Pitanje 1.3

Tehnika	**Tip krivulje**	**Zapis ponašanja u beskonačnosti**
P_{TO}	Tip 3	0.7 je limes formule kad $t \to +\infty$
P_{TO}	Tip 3	$\lim\limits_{t\to\infty} o(t) = \cdots = 0.7$
P_{TO}	Tip 4	$o(t) = 0.7 - \boxed{2^{-t}} \xrightarrow{} {}^{0} = 0.7$
P_{SV1}	Tip 1	$o(t) = 0.7 - \boxed{2^{-t}} \underset{t\to\infty}{\to 0}$
P_{SV1}	Tip 1	$0.7 - \frac{1}{2^t} \underset{t\to\infty}{\to} 0.7 - 0 \to 0.7$
P_{SV1}	Tip 1	$\lim\limits_{t\to\infty} 0.7 - 2^{-t} = 0.7$
P_{SV1}	Tip 1 (netočno)	Kad t teži u beskonačnost $o(t) = 0.7$
P_{SV1}	Ostalo	$\lim\limits_{t\to+\infty} o(t) < 1$

Pitanje 3.3.c

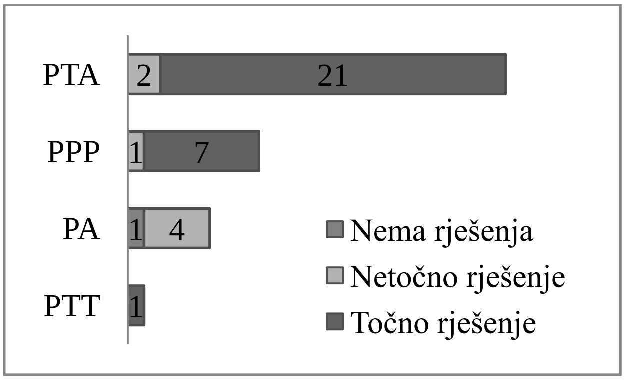
Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljena su tri provedena *praxisa* s obzirom na elemente hiperbole koji se koriste pri crtanju:

P_{TA}: Crtanje krivulje kroz tjemena i uz asimptote.

P_{PP}: Crtanje krivulje s obzirom na pravokutnik određen poluosima hiperbole.

P_{A}: Crtanje krivulje uz asimptote.

P_{TT}: Crtanje krivulje kroz tjemena i s obzirom na tangente.



Slika 5.3.15: Broj studenata s obzirom na realizirani *praxis* crtanja hiperbole u odgovoru na Pitanje 3.3

Praxis P_{PP} zastupljen je u gimnazijskim udžbenicima i opisan u Poglavlju 5.2.2, dok je *praxis* P_{TT} posljedica zahtjeva određivanja tangente hiperbole, koji je zadan u Pitanju 3.3 (vidi Poglavlje 4.2). Broj studenata s obzirom na provedeni *praxis* i točnost rješenja nalazi se na Slici 5.3.15.

Studenti koji su nacrtali pogrešnu hiperbolu su griješili pri određivanju jednadžbe asimptote, prikazivanju asimptote u koordinatnom sustavu ili odabiru točke hiperbole na osi apscisa. Jedan je nacrtao samo asimptote, a drugi je nacrtao asimptote u neobilježenom koordinatnom sustavu i hiperbolu koja nema asimptotski odnos s pravcima. Student koji je proveo *praxis* P_{TT} je nacrtao hiperbolu s odgovarajućim tjemenima i fokusima te prikazao jednu asimptotu kao *generičku* tangentu i asimptotu (Slika 5.3.25: B). Asimptotsko ponašanje pravca i hiperbole je jasno grafički istaknula polovina studenata. Četvrtina studenata je asimptotu prikazala tako da drži konstantnu udaljenost od pravca (Slika 5.3.25: A). Ostali studenti su odnos pogrešno grafički prikazali, dvojica su nacrtali *generičku* tangentu i asimptotu i jedan nije nacrtao hiperbolu.

5.3.2. Prakseološka oprema za određivanje asimptote funkcije ili krivulje

Pitanje 2.2.b

Na pitanje je odgovorilo 18 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljena su tri *praxisa*:

- četiri studenta su manipulirali algebarskim izrazom, prepisali formule ili izlučili koeficijent k;
- devet studenata su opisali algebarski izraz ili njegove članove;
- pet studenata je dokazalo formule infinitezimalnim računom.

Sedam studenata je ponudilo nazive koeficijenata k i/ili l pravca. Za k su koristili izraze: nagib pravca, koeficijent smjera pravca ili vodeći koeficijent funkcije, a za koeficijent l izraze: odsječak na y-osi, slobodni koeficijent ili vrijednost funkcije u nuli. Za koeficijent k jedan student je napisao da „određuje brzinu "rasta", tj. "pada" asimptote, pa tako i grafa funkcije *f*“. On je još prepoznao kako formula za koeficijent l vrijedi jer $f(x)-y$ teži nuli. Još dvojica ovih studenata su opisali koeficijente kao količnik odnosno razliku kad se x povećava odnosno kad $x \to \infty$.

Jedan student je pogrešno tumačio kako „povećanjem vrijednosti funkcije za argument x i povećanje argumenta daju "stalan omjer"“ odnosno „ako od vrijednosti funkcije u x oduzimamo samo brzinu promjene pravca, dobivamo "uvijek isti" broj“. Posljednji od studenata koji su opisivali algebarske izraze je napisao kako su k i l vrijednosti kojima se približavaju vrijednosti funkcija $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ i $h(x) = f(x) - kx$ kad $x \to \infty$.

Studenti koji su obrazložili formule infinitezimalnim računom su ponudili tri značajno različita *dokaza*. Dva studenta su započeli uvjetom da je pravac kosa asimptota funkcije (vidi Pitanje 2.2 u Poglavlju 4.2), koristili su svojstva limesa (Barbé i sur., 2005) i uz pretpostavku da je $l = 0$ izveli formulu za *k*. Iz uvjeta za kosu asimptotu izveli su formulu za *l*, s tim da su prepoznali kako je $\lim_{x\to\infty} l = l$.

Dva studenta su u svome *dokazu* izjednačili vrijednost funkcije *f* i ordinatu kose asimptote, bez obrazloženja zašto takav odnos vrijedi. Jedan od njih je u danu formulu za koeficijent *k* uvrstio umjesto *f* ordinatu pravca, iskoristio svojstva limesa i prepoznao kako je $\lim_{x\to\infty} \frac{kx}{x} = k$ i $\lim_{x\to\infty} \frac{l}{x} = 0$ što potvrđuje jednakost. Drugi student je bio precizniji, istaknuo je činjenicu da $f(x) = kx + l$ kad $x \to \infty$. Izlučio je koeficijent *k* iz jednakosti $f(x) = kx + l$ te *pustio limes u beskonačnost*. Student je prepoznao kako $\lim_{x\to\infty} \frac{l}{x} = 0$, ali nije limes primijenio na obje strane jednakosti i nije izveo formulu za koeficijent *l*.
Potvrdu valjanosti danih formula jedan student je proveo na temelju odnosa $f(x) - y \to 0$ i $\frac{f(x)}{y} \to 1$, ali nije naveo zbog čega oni vrijede. Student je u dane formule umjesto *k* odnosno *x* uvrstio odgovarajuće izraze iz jednakosti $y = kx + l$ te iskoristio navedene odnose.

Pitanje 2.3.a

Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljena su tri primijenjena *praxisa*:

P_O: Određivanje asimptote očitavanjem s grafičkog prikaza funkcije.

P_A: Određivanje asimptote manipulacijom algebarskog izraza.

P_R: Određivanje asimptote izvrednjavanjem formule iz diskursa.

i pozvani *logosi*:

L_{DF}: Veza područja definicije funkcije i jednadžbe vertikalne asimptote.

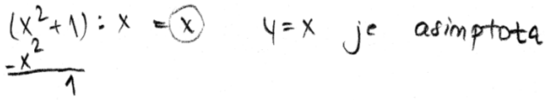
$L_{F\infty}$: Ponašanje funkcije u beskonačnosti.

L_{FA}: Formule za koeficijente kose asimptote funkcije.

$L_{RF\infty}$: Veza graničnog ponašanja racionalne funkcije i nepotpunog količnika polinoma.

Broj studenata s obzirom na ispravnost ponuđenog rješenja, primijenjenu tehniku i pozvani diskurs nalazi se u Tablici 5.3.8.

Student koji je koristio neprimjerenu tehniku za određivanje vertikalne asimptote je točno izvrednjavao formule za koeficijente kose asimptote i zapisao kako je $y = x$ vertikalna asimptota. Ostali studenti koji su ponudili pogrešno rješenje su pravac $y = 0$ imenovali vertikalnom asimptotom. Neprimjeren *logos* za vertikalnu asimptotu $x = 0$ dane funkcije koji je koristio jedan student je formula $\lim_{x\to\infty} f(x) - a = 0$.



Slika 5.3.16: *Praxis* određivanja jednadžbe asimptote iz pravila pridruživanja uz *logos* $L_{RF\infty}$ u odgovoru na Pitanje 2.3.a

Dva studenta su iz *logosa* $L_{F\infty}$ pokazali $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = x$ i tri studenta su pokazali $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 0$. Studenti su pored izvrednjavanja formule za koeficijente kose asimptote ponudili *praxis* očitavanja iz grafičkog prikaza funkcije odnosno određivanja jednadžbe asimptote iz pravila pridruživanja uz *logos* $L_{RF\infty}$ (Slika 5.3.16).

Tablica 5.3.8: Broj studenata s obzirom na primijenjeni *praxis* i *logos* u odgovoru na Pitanje 2.3.a

Vertikalna asimptota	**Nema rješenja**	**Netočno rješenje**	$x = 0$	**Vertikalna asim.** $x = 0$	**Ukupno**
Nema *praxisa*	3				3
Neprimjeren *praxis*		1			1
P_R i neprimjeren *logos*			1		1
Nepoznata tehnika		1	13	9	23
P_O			2		2
P_A i L_{DF}		2	4	1	7
Ukupno	3	4	20	10	37

Kosa asimptota	**Netočno rješenje**	$y = x$	**Kosa asim.** $y = x$	**Ukupno**
Nepoznata tehnika		9	5	14
P_O		2		2
P_R i $L_{F\infty}$		4	1	5
P_R i L_{FA}	1	7	6	14
P_R i L_{FA} i drugi *praxis*		2		2
Ukupno	1	24	12	37

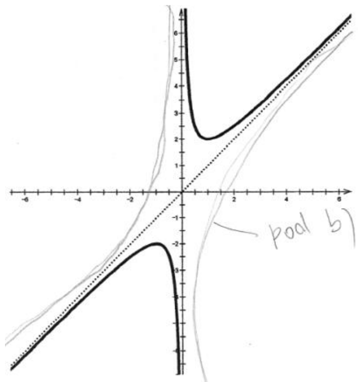
Pitanje 2.3.b

Na pitanje su odgovorila 32 studenta. Rješenja koja su ponudili nalaze se u Tablici 5.3.9. Studenti su rijetko pokazivali primijenjenu tehniku, četvero ih je provjerilo rješenje izvrednjavanjem formula za koeficijente kose asimptote iz *logosa* L_{FA}.

Tablica 5.3.9: Broj studenata s obzirom na ponuđena rješenja u odgovoru na Pitanje 2.3.b

Primijenjeni *praxis* i rješenje	**P?**	**P_R i L_{FA}***	**Ostalo**	**Ukupno**
Netočno rješenje	9	-	-	9
$g(x)=2\cdot f(x)$	1			1
$g(x)=\alpha x+\frac{1}{x}$	5			5
$g(x)=f(x)+1$	2			2
$g(x)=x+\frac{1}{x^2}+3$	1			1
Točno rješenje	16	3	4	23
$g(x)=x+\frac{1}{\alpha x}$	3	1		4
$g(x)=x+\frac{1}{x^n}$	3	2		5
$g(x)=x+\frac{\alpha}{x}$	10		2	12
$g(x)=x-\frac{1}{x}$		1	1	2
Ukupno	25	4	3	32

Među studentima jedan je traženu krivulju prikazao grafički u danom koordinatnom sustavu (Slika 5.3.17), jedan je dao obrazloženje kako je graf funkcije g „samo pomaknut (translatiran) unutar asimptota“ i jedan je zapisao kako je skup svih funkcija oblika $g(x)=x+\frac{a}{x}, a\in\mathbb{R}$ rješenje traženog zadatka. Ostali studenti nisu dali obrazloženje.



Slika 5.3.17: *Praxis* grafičkog prikazivanja funkcije koja ima iste asimptote kao zadana funkcija u odgovoru na Pitanje 2.3.b

Pitanje 2.4.c

Na pitanje je odgovorilo 25 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljene su primijenjene tehnike:

τ_O: Očitavanje s grafičkog prikaza.

τ_R: Izvrednjavanje algebarskog izraza (formule iz diskursa).

τ_A: Manipulacija algebarskim izrazima.

τ_{DP}: Dijeljenje polinoma.

i pozvani *logos*:

L_{SP}: Svojstva parabole (tjeme, sjecište ordinata, tjemena formula za jednadžbu).

L_{FA}: Formule za koeficijente asimptotske parabole pomoću limesa.

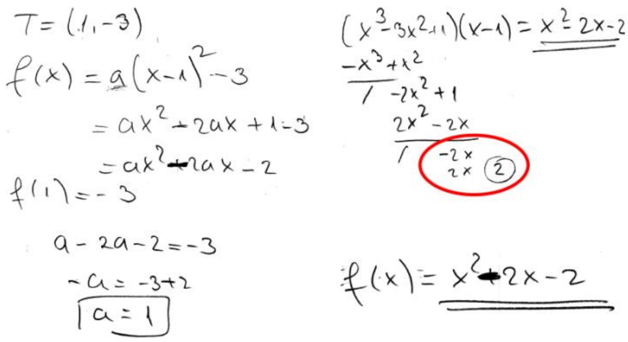
L_{lim}: Definicija asimptotske krivulje funkcije pomoću limesa razlike ordinata.

$L_{RF\infty}$: Veza graničnog ponašanja racionalne funkcije i nepotpunog količnika polinoma. Broj studenata s obzirom na provedene prakseologije nalazi se u Tablici 5.3.10.

Tablica 5.3.10: Broj studenata s obzirom na provedene prakseologije u odgovoru na Pitanje 2.4.c

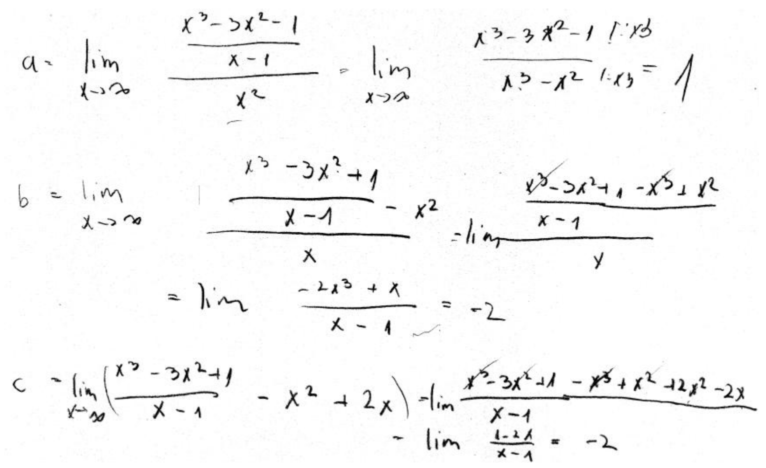
Primijenjeni *praxis* i rješenja	**Nema rješenja**	**Nedovršen *praxis***	**Netočno rješenje**	**Točno rješenje**	**Ukupno**
Ostalo	1	2	1		4
τ_O, τ_R i L_{SP}			1	3	4
τ_O, τ_A		1	1	4	6
τ_R i L_{FA}		4	1	2	7
τ_R i L_{lim}				2	2
τ_{DP} i $L_{RF\infty}$				6	6
Ukupno	1	7	4	17	29

Studenti koji su koristili *logos* L_{SP} su iz grafičkog prikaza odredili tjeme i sjecište parabole s osi ordinata te vrijednosti uvrstili u tjemeni oblik jednadžbe parabole $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. Jedan student je koristio pogrešnu formulu i k tomu diskutirao kako je rješenje „parabola $y = x(x-2)$ translatirana za 3 prema dolje po *y*-osi". Studenti su očitavali točke parabole iz koordinatnog sustava i rješavali sustav linearnih jednadžbi s tri nepoznanice. Četiri studenta koji su proveli dva navedena *praxisa* su k tomu odredili ili provjerili jednadžbu asimptotske parabole s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku ili nazivniku odnosno s obzirom na limes razlike vrijednosti funkcije i asimptotske parabole u beskonačnosti. Iako su svi studenti točno odredili asimptotsku parabolu s obzirom na nepotpuni količnik polovina ih je pogriješila u zadnjem koraku dijeljenja i dobila pogrešan ostatak (Slika 5.3.18).



Slika 5.3.18: Određivanje asimptotske parabole tehnikama τ_O i τ_A i prakseologijom τ_{DP} i $L_{RF\infty}$ u odgovoru na Pitanje 2.4.c

Među ostalim studentima jedan je zapisao jednu točku parabole, drugi je pravilo pridruživanja zapisao u obliku zbroja dva algebarska izraza, bez istaknutog diskursa ili rješenja. Studenti su se još pozivali na limes funkcije u beskonačnosti.



Slika 5.3.19: Prakseologija izvrednjavanja formula za koeficijente asimptotske parabole u odgovoru na Pitanje 2.4.c

Pitanje 3.1

Na pitanje je odgovorilo 27 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljeno je kako su studenti izvrednjavali algebarske izraze i manipulirali njima s obzirom na *logos*:

L_{JP}: Formula za jednadžbu pravca kroz dvije točke.

L_{PF}: Podudaranje vrijednosti ordinata krivulje i pravce.

L_{FA}: Formule za koeficijente kose asimptote pomoću limesa.

$L_{F\infty}$: Ponašanje funkcije u beskonačnosti (limes funkcije ili granične vrijednosti pravila pridruživanja).

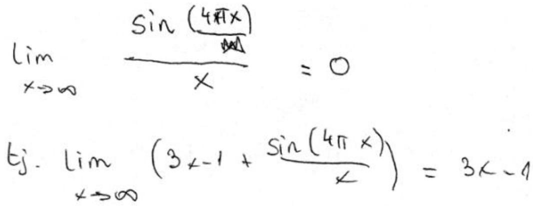
Broj studenata s obzirom na provedene prakseologije nalazi se u Tablici 5.3.11. Jedan student je zapisao $y = kx + l$. Studenti su dobili točno rješenje kad su proveli neprimjeren *praxis* izvrednjavanja jednadžbe pravca kroz dvije točke, gdje su koristili da je za svaki realan broj $\sin(4\pi x) = 0$. Neprimjerena je prakseologija izvrednjavanja vrijednosti zadane funkcije i ordinate odabranog pravca u nekim točkama zbog diskursa kako je rješenje ispravno jer se vrijednosti podudaraju. Jedan student je prakseologiju koristio za provjeru rješenja koje je dobio drugim *praxisom*.

Tablica 5.3.11: Broj studenata s obzirom na provedene prakseologije u odgovoru na Pitanje 3.1

	Nema ili netočno rj.	**Nedovršen *praxis***	**Pogrešan *praxis***	**Točno rješenje**	**Ukupno**
Nije vidljiva tehnika	1			3	4
P_R i L_{JP}			2		2
P_R i L_{PF}				4	4
P_R i $L_{F\infty}$	1	2		1	4
P_R i L_{FA}		1	2	3	6
P_A i $L_{F\infty}$			1	7	8
Ukupno	2	3	5	18	28

Jedini pogrešan odgovor na ovo pitanje – kako je jednadžba pravca $y = 3x - 1 + 4\pi$, ponudio je student koji je pri računanju limesa zadane funkcije u beskonačnosti pogrešno vrednovao $\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi x} = 1$ kad $x \to \infty$. Ispravna interpretacija limesa zadane funkcije u beskonačnosti dana je na Slici 5.3.20. Studenti koji su izvrednjavali formule za koeficijente kose asimptote provedeni *praxis* su pravdali kako se radi o kosoj asimptoti funkcije. Oni koji su pogrešno proveli *praxis* koeficijent k su računali iz formule $k = \lim_{x\to\infty} f(x)$, a dobili su ispravno rješenje jer su pogrešno implementirali tehniku računanja limesa dijeljenjem najvećom potencijom. Student koji je ispitivao granične vrijednosti pravila pridruživanja, svojstvo da je $\sin(4\pi x) = 0$ za svaki cijeli broj, pogrešno je interpretirao izjednačavanjem dane funkcije s izrazom $3x - 1 + \frac{0}{x}$.

Studenti koji su ispravno interpretirali granične vrijednosti pravila pridruživanja dali su dva različita tipa obrazloženja: (1) pravdanje vrijednosti funkcije neformalnim ili formalnim infinitezimalnim računom i (2) opisivanje grafa funkcije s obzirom na transformacije ili položaj krivulje u odnosu na pravac.



Slika 5.3.20: Prakseologija izvrednjavanja limesa funkcije u beskonačnosti u odgovoru na Pitanje 3.1

Studenti su koristili ograničenost funkcije sinus zbog čega se vrijednost $\frac{\sin(4\pi x)}{x}$ smanjuje ili „ide u nulu", pa $y = 3x - 1$ aproksimira vrijednosti funkcije, primjerice:

> „Jer sin postiže vrijednosti između –1 i 1 pa $\frac{\sin(4\pi x)}{x}$ ide u nulu kako $x \to \infty$ pa funkcija postiže vrijednosti bliske vrijednostima $y = 3x - 1$."

Drugi studenti su koristili periodičnost odnosno titranje sinusoide kako bi utvrdili koji dio pravila pridruživanja funkcije određuje oblik grafa funkcije, a koji njegov položaj.

Pitanje 3.3.a

Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Skoro svi studenti su ispravno i očekivano odredili asimptote hiperbole. Jedan student je osim segmentne jednadžbe odredio i eksplicitnu jednadžbu hiperbole, a dva studenta su ispravno odredili realnu i imaginarnu poluos hiperbole no za jednadžbe asimptota odabrali $y = \pm\frac{1}{4}x$.

5.3.3. Dostupni diskursi objekta znanja asimptota

Pitanje 2.1.a

Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljeno je kako su studenti asimptotu najčešće identificirali kao pravac koji ima neki odnos sa grafom funkcije ili krivuljom. Neki studenti su asimptotu identificirali kao krivulju ili vrijednost i neki studenti su dali više različitih informacija o asimptoti. Broj pojedinih opisa asimptote koje su ponudili studenti nalazi se u Tablici 5.3.12.

Jedan student je opisao asimptotu kao pravac kojem „se graf funkcije beskonačno približava“. Dva studenta su razmatrali hiperbolu i njezinu asimptotu, te je jedan od njih odnos opisao \`približava i ne dodiruje´, a drugi \`teži i ne dostiže, ne siječe´ i \`asimptota ograničava krivulju´. Jedan student je izričito dozvolio jednakost vrijednosti funkcije i ordinata asimptote. Nacrtao je eksponencijalnu funkciju i funkciju koja oscilira oko svoje asimptote (Slika 5.3.21) i zapisao:

> „Pod pojmom asimptota funkcije *f* podrazumijevam pravac za čije vrijednosti ordinata vrijedi da se vrijednosti funkcije *f* u beskonačnosti sve više i više približavaju (ili su jednake) vrijednostima ordinata tog pravca.“

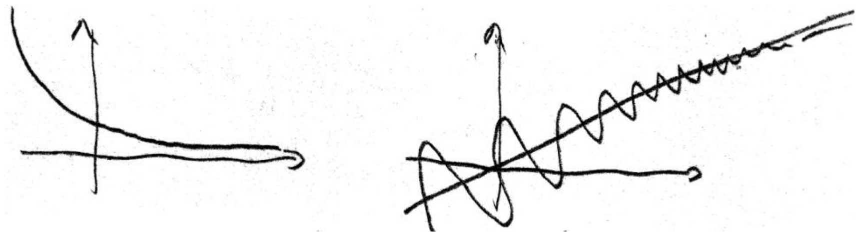
Slično je jedan student napisao:

> „Asimptota je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu i tog pravca teži ka nuli i postiže se udaljenost nula u beskonačnosti.“

Tablica 5.3.12: Broj opisa koji su ponudili studenti s obzirom na broj i vrste korištenih obilježja u odgovoru na Pitanje 2.1.a

Opis odnosa krivulje i asimptote:	**Broj opisa**
Krivulja se približava i ne dodiruje/siječe asimptotu.	15
Krivulja se približava asimptoti.	6
Ostalo	6
Asimptota ograničava krivulju.	5
Krivulja se približava i ne dostiže asimptotu.	5
Krivulja dira/siječe/dostiže asimptotu u beskonačnosti (i drugo).	4
Krivulja teži asimptoti (i drugo).	3
Udaljenost između asimptote i krivulje teži nuli.	3
Asimptota određuje smjer krivulje.	2
Krivulja je blizu asimptote (i drugo).	2
Ukupno:	51

Studenti koji su dali jednu izjavu o asimptoti najčešće su napisali kako se graf funkcije ili krivulja pravcu približava i ne dodiruje ga ili ne siječe. 73% studenata je istaknulo kako krivulja ne dodiruje, ne siječe ili ne dostiže asimptotu. Neki studenti su pored opisa asimptote istaknuli kako asimptote mogu biti vertikalne, horizontalne i kose i kako se računaju pomoću limesa. Jedan je student zapisao kako je asimptota „pravac kojemu pripadaju sve točke u kojima nije definirana neka funkcija“, što je pogrešno. Kad su koristili različite opise odnosa asimptote i krivulje studenti su mijenjali objekte, je li asimptota pravac ili vrijednost te odnosi li se prema krivulji ili vrijednostima funkcije. Neki studenti su kombinirali obilježja \`ograničava´, \`određuje smjer´, \`smanjuje se udaljenost´ s obilježjima \`približava se´, \`ne dodiruje´, \`dodiruje u beskonačnosti´.



Slika 5.3.21: Grafički prikaz funkcija koje imaju asimptotu u odgovoru na Pitanje 2.1.a

Pitanje 2.1.b

Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Studenti su asimptotu prepoznali unutar domena geometrije i matematičke analize i njima pripadnih područja analitičke odnosno diferencijalne geometrije te funkcije i limesa. U samo osam slučajeva su studenti dali hijerarhiju matematičkih sadržaja, kako je prikazano u Tablici 5.3.13. Studenti su vrlo rijetko spominjali područje i domenu unutar kojih se javlja objekt asimptota. Puno češće su istaknuli temu krivulje nego funkcije, ali podjednako su spomenuli objekte unutar područja geometrije te algebre i funkcija. Samo dva studenta su asimptotu stavili unutar područja infinitezimalnog računa.

Tablica 5.3.13: Hijerarhija matematičkih sadržaja u odgovoru na Pitanje 2.1.b

	Domena	Područje	Tema	Jedinica
1.	Geometrija		Hiperbola	
2.		Diferencijalna geometrija		Asimptotske krivulje na plohi
3.		Analitička geometrija		Određivanje asimptota krivulja
4.		Analitička geometrija		Asimptote hiperbole
5.	Matematička analiza	Funkcija		
6.		Funkcija		Asimptote funkcije
7.		Limes	Tok funkcije	
8.		Limes		Formula za kosu asimptotu funkcije

Studenti su 64% matematičkih konteksta u kojima se javlja asimptota dali samo na razini jedinice, što po opsegu odgovara punkt prakseologiji. Studenti su naveli pojmove ili *praxis* koji su vezani uz asimptotu. Među pojmovima na razini jedinice studenti su više puta naveli asimptote hiperbole ili funkcije te vrste asimptota. Po dva puta spomenuti su definicija hiperbole i prekid u domeni funkcije. Najčešće spomenut *praxis* je crtanje grafa funkcije, a potom crtanje krivulje, hiperbole i racionalne funkcije te određivanje asimptota funkcije.

Studenti su naveli i neke realne funkcije koje povezuju s asimptotom. Najčešće su spomenuli racionalnu funkciju, nekoliko puta eksponencijalnu i logaritamsku i jednom trigonometrijske funkcije.

Tri studenta su pogrešno naveli parabolu kao objekt znanja koji se povezuje s asimptotom. Dva studenta su navela matematički objekt asimptotske krivulje, jedan od njih je naglasio kako je to sadržaj unutar diferencijalne geometrije. Taj student je za asimptotu napisao da je „pravac ili krivulja koja govori o graničnim vrijednostima pojedine funkcije“.

Pitanje 2.2.a

Na pitanje je odgovorilo 29 studenta. Četiri studenta su obrazložili kako za kosu asimptotu funkcije vrijedi $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-l\right)=0$ jer se radi o „kosom pravcu“ ili jer se graf funkcije približava i ne siječe asimptotu. Pet studenata se pogrešno izrazilo u svojim obrazloženjima, primjerice:

> „Vrijedi za kosu jer mora biti i k i l različiti od 0 da bi se **graf funkcije** (limes funkcije *f*) približavao asimptoti, odnosno **težio 0**“
>
> ili
>
> „Zato što uzimajući sve veću i veću vrijednost od x vrijedit će da se **razlika vrijednosti** funkcije i tog pravca *y* sve više i više **približavaju**.“

Studenti su još pogrešno pisali kako je razlika vrijednosti funkcije i ordinate asimptote minimalna jer se obje vrijednosti povećavaju, kako za sve vrste asimptota vrijedi da je limes nula i kako funkcija nije definirana u nultočkama pravca.

17 studenata koji su dali obrazloženje tvrdnje iskazali su:

- Udaljenost između krivulje i asimptote teži nuli, jednaka je nuli u beskonačnosti ili smanjuje se, ali nije nikad jednaka nuli.
- Razlika vrijednosti funkcije i asimptote teži nuli, jednaka je nuli u beskonačnosti ili smanjuje se.
- Vrijednosti funkcije i asimptote se približavaju kad $x\to\infty$, jednake su u beskonačnosti ili nakon nekog $x=a$.

Većina studenta nije pojasnila kako se dana tvrdnja uklapa u njihovu definiciju asimptote funkcije ili su dali trivijalne odgovore, poput:

> „Tvrdnja odgovara opisu iz odgovora na pitanje 1.a u smislu da se funkcija sve više približava asimptoti (kako se *x* povećava).“

Jedanaest studenata koji su dali konkretno pojašnjenje uglavnom su se osvrnuli samo na neki oblik odnosa asimptote i krivulje koji su naveli ili odnos koji nisu naveli u svom opisu asimptote. Primjerice, student je asimptotu opisao kao pravac kojemu se krivulja **približava**. Dao je obrazloženje oblika: graf funkcije i asimptota se **sijeku u beskonačnosti** pa kad $x \to \infty$ vrijednosti $f(x)$ i y su jednake odnosno $f(x) - y = 0$. Studenti su dali druge različite uzročno-posljedične veze dane tvrdnje i opisa asimptote:

- Graf funkcije *dodiruje u beskonačnosti* asimptotu, jer je $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0$.
- Graf funkcije se *približava* asimptoti, jer se $f(x) - y$ smanjuje (2 studenta).
- Kad $x \to \infty$ graf funkcije se *približava* asimptoti, jer se $f(x) - y$ smanjuje kad $x \to \infty$ ili jer je $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0$.
- Kad $x \to \infty$ vrijedi $f(x) = y$, jer graf funkcije *dodiruje u beskonačnosti* asimptotu ili jer se graf funkcije *približava i dodiruje u beskonačnosti* asimptotu.
- Udaljenost između grafa funkcije i asimptote teži nuli, jer se graf funkcije *približava i ne dodiruje* asimptotu.
- $f(x) - y \to 0$, jer graf funkcije *dodiruje u beskonačnosti* asimptotu.
- $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0$, jer se graf funkcije *približava, ne dodiruje i naizgled dodiruje u beskonačnosti* asimptotu.

Pitanje 2.2.c

Na pitanje je odgovorio 31 student. Dva studenta su ponudila algebarski izraz koji se ne može povezati s uvjetom za postojanje vertikalne asimptote i jedan student je samo nacrtao pravac $x = a$ u koordinatnom sustavu. Još osam studenata su pored diskursa dali primjer funkcije koja ima vertikalnu asimptotu, algebarski ili grafički, ili nacrtali pravac $x = a$ u koordinatnom sustavu. Broj studenata s obzirom na dani relevantni diskurs nalazi se u Tablici 5.3.14.

Studenti su češće kao uvjet za vertikalnu asimptotu naveli zahtjev na područje definicije funkcije nego vrijednost limesa funkcije. Kod zahtjeva na područje definicije studenti su često pisali kako \`funkcija nije definirana u točki *a* i *a* nije u domeni funkcije´. Studenti su dali odgovore koji su pogrešni: $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to a} f(x) = a$ i takve uvjete koji su dovoljni, ali ne nužni za vertikalnu asimptotu: $f(x) = \dfrac{g(x)}{r(x)}$, *a* je nultočka funkcije *r* i funkcija ima prekid u točki *a*. Studenti su najčešće dali takve matematičke situacije koje vrijede u nekim situacijama kad je pravac $x = a$ vertikalna asimptota: funkcija nije definirana u točki *a*, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pm\infty$.

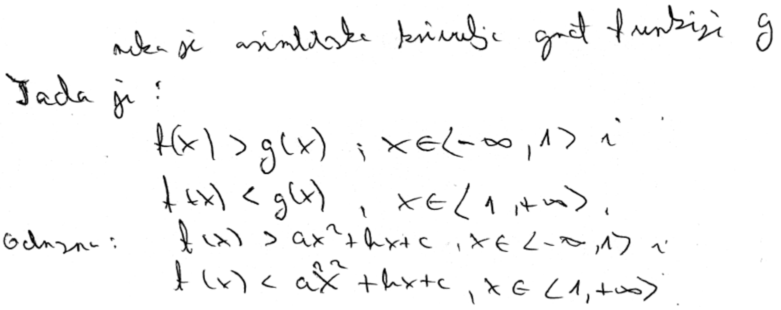
Tablica 5.3.14: Broj studenata s obzirom na ponuđeni diskurs u odgovoru na Pitanje 2.2.c

Uvjet da pravac $x = a$ bude vertikalna asimptota funkcije:	#
Funkcija nije definirana u točki *a*	13
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$	4
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$	3
Funkcija ima prekid u točki *a*	2
Funkcija nije definirana u točki *a* i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$	2
$f(x) = \frac{g(x)}{r(x)}$, *a* je nultočka funkcije *r*	1
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \pm\infty$	1
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$	1
Funkcija nije neprekidna u točki *a*	1
Funkcija ima prekid u točki *a*	1
„*Točka a mora biti točka prekida funkcije f (tj. točka u kojoj funkcija nije definirana)*“ i $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$	1
Ukupno	28

Pitanje 2.4

Na prvo potpitanje je odgovorilo 25 studenata. Matematički zahtjev da parabola s jednadžbom $y = ax^2 + bx + c$ bude asimptotska krivulja funkcije *f* dvadeset studenata je iskazalo točno izrazom $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - ax^2 - bx - c) = 0$ ili $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - y) = 0$. Po jedan student je

- zapisao limes samo u pozitivnoj beskonačnosti,
- pogriješio u predznacima članova izraza,
- dao formule za koeficijente *a* i *c*,
- odredio intervale na kojima je graf funkcije *f* iznad odnosno ispod svoje asimptotske krivulje (Slika 5.3.22),
- zapisao kako funkcija *f* treba biti oblika $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{g(x)}{h(x)}, \deg g < \deg h$.



Slika 5.3.22: Pogrešan zahtjev da parabola bude asimptotska krivulja funkcije u odgovoru na Pitanje 2.4.a

Na drugo potpitanje su odgovorila 24 studenta. Jedanaest studenata je ponudilo formule za koeficijente asimptotske parabole iskazane pomoću limesa. Šest studenata su dali točne formule za sva tri koeficijenta. Studenti su skoro uvijek dali točnu formulu za koeficijent a asimptotske parabole, $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ i koeficijent c, $c = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax^2 - bx)$. Pet studenata ili nije ponudilo ili su dali netočnu formulu za koeficijent b: $b = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ ili $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax^2$. Jedan je student dao formule koje ne doprinose određivanju koeficijenata (Slika 5.3.23).

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax^2 - bx - c) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - a \lim_{x\to\infty} x^2 - b \lim_{x\to\infty} x - c = 0$$

$$a = 0 : \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \left(a \lim_{x\to\infty} x - b \right)$$

Slika 5.3.23: Neprimjerena formula za određivanje koeficijenata asimptotske parabole funkcije u odgovoru na Pitanje 2.4.b

Ostali studenti su predložili koristiti algebarsko-analitički pristup određivanju koeficijenata asimptotske parabole. Jedan se poziva na koeficijente nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku kako je dao u odgovoru na prvo potpitanje. Student koji je u prvom potpitanju dao formule za koeficijente a i c pomoću limesa, u ovom potpitanju je tumačio vrijednosti koeficijenata parabole i njezin oblik, primjerice „a mora biti veći od 0 (jer je okrenuo prema gore)“. Student koji je u prvom potpitanju zapisao nejednakosti (Slika 5.3.22) predložio je za određivanje koeficijenata asimptotske parabole uvrstiti konkretne vrijednosti u dane nejednakosti i riješiti dobivene nejednadžbe. Jedan student je zapisao vrijednost dane funkcije u nuli.

Šest studenata je predložilo očitati tri točke iz grafičkog prikaza asimptotske parabole, uvrstiti ih u jednadžbu parabole $y = ax^2 + bx + c$ te riješiti pripadni sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Tri studenta su predložili očitati koordinate tjemena i još jedne točke iz grafičkog prikaza parabole za njezinu tjemenu jednadžbu $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, gdje je (x_0, y_0) tjeme parabole.

Iz Tablice 5.3.15 vidi se da predloženi *praxis* uspješno provode uglavnom studenti koji su predložili algebarsko-analitički pristup. Svi studenti koji su dali točne formule pomoću limesa za koeficijente asimptotske parabole, proveli su predloženi *praxis* (Slika 5.3.19). Većina studenata koji su proveli *praxis* različit od predloženog određivala je asimptotsku parabolu iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku.

Tablica 5.3.15: Broj studenata s obzirom na predloženi (u stupcima) i provedeni (u recima) *praxis* u odgovoru na Pitanje 2.4

Provedeni → Predloženi ↓	**Nema ili netočno rješenje**	**Nedovršen *praxis***	**Proveden drugi *praxis***	**Proveden drugi *praxis* točno**	**Proveden pred. i drugi *praxis* točno**	**Točno proveden *praxis***	**Ukupno**
Bez odgovora ili netočno	10		2	3			15
Izvrednjavanje formula s limesima	4	4	1*	1		2	12
Izvrednjavanje tjemene jednadžbe parabole	1				1	1	3
Rješavanje sustava jednadžbi 3x3	1		1		2	2	6
Određivanje iz nepotpunog količnika						1	1
Ukupno	16	4	7	4	4	6	37

Na posljednje potpitanje je odgovorilo šest studenata. S obzirom na funkciju $f(x)=g(x)+\frac{h(x)}{q(x)}$ dva studenta su vertikalnu asimptotu povezali s nultočkom funkcije q. Jedan student je zapisao nejednakost $\deg(h)<\deg(q)$ i limes koji se ne može jasno povezati s danim kontekstom. Preostala tri studenta su koristili *praxis* određivanja jednadžbe asimptotske parabole iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku dane racionalne funkcije i dali su obrazloženja:

1. „Ako funkciju f možemo zapisati u obliku $f(x)=g(x)+\frac{h(x)}{q(x)}$ pri čemu je $\mathrm{st}(h)<\mathrm{st}(q)$ tada postaje asimptotska krivulja funkcije *f*."

Student nije istaknuo što postaje asimptotska krivulja funkcije f i nije obrazložio zašto bi asimptotska krivulja funkcije postojala. Student je kao zahtjev za postojanje asimptotske parabole naveo nejednakosti.

2. „Asimptotska krivulja funkcije *f* je graf funkcije *g*."

Student je istaknuo kako je funkcija g asimptotska krivulja dane funkcije i nije obrazložio zašto to vrijedi. Student je određivanje jednadžbe iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku koristio kao *logos* i *praxis* za asimptotsku parabolu.

3. „Dijeljenje polinoma!

   Funkcija (racionalna) ima asimptotsku krivulju ako je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku."

Student je ponuđeni zapis povezao s dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku dane racionalne funkcije. Iskazao je uvjet za postojanje asimptotske krivulje u ovisnosti o stupnju danih polinoma. Nije obrazložio zašto bi tada postajala asimptotska krivulja. Student je za određivanje jednadžbe asimptotske parabole predložio i proveo *praxis* izvrednjavanja tjemene jednadžbe parabole.

Ostali studenti koji su proveli *praxis* određivanja jednadžbe asimptotske parabole iz nepotpunog količnika polinoma u brojniku i nazivniku dane racionalne funkcije nisu dali odgovor na ovo pitanje.

Pitanje 3.3

Na pitanje je odgovorilo 37 studenata. Pregledom odgovora ispitanika usustavljeno je kako su studenti izvrednjavali algebarske izraze i manipulirali njima s obzirom na *logos*:

L_{JP}: Formula za jednadžbu pravca kroz točku.

L_{HP}: Skupovi točaka ravnine s obzirom na položaj prema hiperboli.

L_{TT}: Formula za jednadžbu tangente kroz točku na hiperboli.

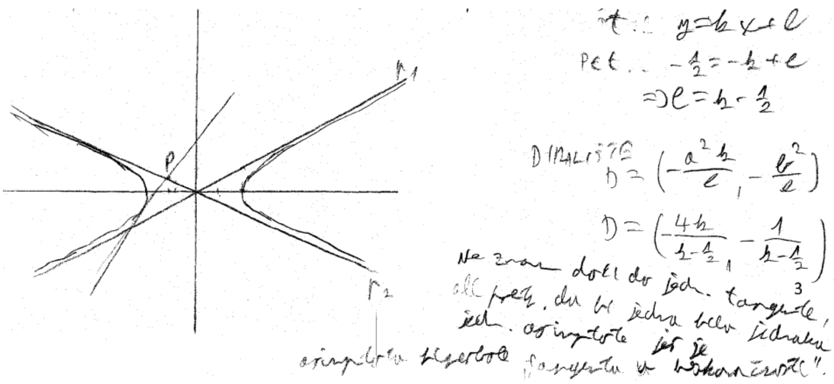
L_{UD}: Formula za uvjet dodira pravca i hiperbole.

Broj studenata s obzirom na realizirani *praxis* i ponuđeni *diskurs* o rješenju zadatka nalazi se u Tablici 5.3.16.

Tablica 5.3.16: Broj studenata s obzirom na realizirani *praxis* i ponuđeni diskurs u odgovoru Pitanje 3.3

***Praxis* →** **Diskurs ↓**	**Drugi praxis**	**τ_R i L_{TT}**	**τ_A i L_{JP}, L_{UD}**			Ukupno
			Nema rj.	**Netočno rj.**	**Točno rj.**	
Nema	2	6	3	3	4	18
Formula je neprimjerena		1				1
Pravac ne zadovoljava zahtjeve		4				4
Rješenje nema smisla		2				2
Zahtjev nema smisla		2				2
Pravac je tangenta i asimptota	1				9	10
Ukupno	3	15	3	3	13	37

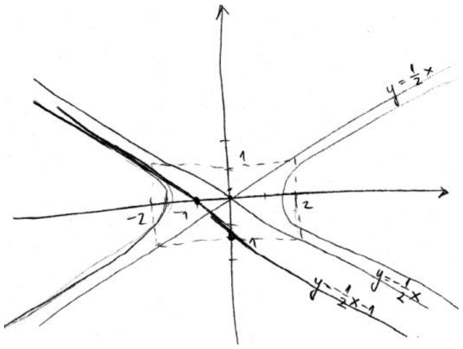
Jedan student je ispitao položaj točke P u odnosu na hiperbolu i utvrdio da pripada asimptoti. Nacrtao je proizvoljno tangentu kroz točku P. Napisao je kako ne poznaje odgovarajuću tehniku za određivanje tangente na hiperbolu kroz točku koja ne leži na krivulji, ali pretpostavlja „da bi jedna bila jednaka jednadžbi asimptote“ (Slika 5.3.24). Jedan student je u jednadžbu pravca kroz točku P uvrstio pogrešni koeficijent smjera $2\frac{b^2}{a^2}$ i za rezultat je dobio jednadžbu asimptote i jedan je pogrešno uvrstio jednadžbu pravca kroz točku P u jednadžbu hiperbole. Nisu nacrtali dobiveni pravac niti dali obrazloženje.



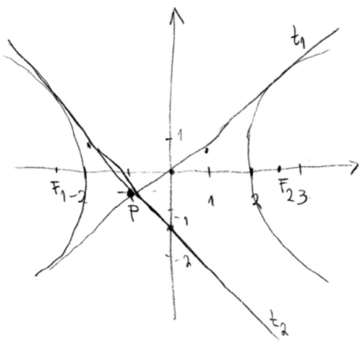
Slika 5.3.24: Hiperbola iz *praxisa* P_{TA} i pogrešno prikazanim pravcem kroz točku P zbog nedostatka odgovarajućeg *praxisa*, ali s poznavanjem ispravnog *logosa* u odgovoru na Pitanje 3.3

Neki studenti koji su koristili *logos* L_{UD} nisu dovršili *praxis*. Studenti koji su proveli ovaj *praxis* nisu uvijek ispitali ili istaknuli položaj točke *P* u koordinatnom sustavu. Studenti koji su dobili netočno rješenje pogriješili su pri rješavanju kvadratne jednadžbe. Po jedan od njih tangentu nije grafički prikazao, prikazao je *generičku* tangentu (Slika 5.3.25: A) ili dobiveni pravac pogrešno kroz točku *P*. Ovi studenti nisu komentirali svoja rješenja.

Jedan od studenata koji su ispravno proveli *praxis* dvojio je o rješenju te je pravac $y = \frac{1}{2}x$ grafički prikazao kao *generičku* tangentu i asimptotu nacrtane hiperbole (Slika 5.3.25: B).



A: Netočna hiperbola iz *praxisa* P_{PP}
Generička tangenta zbog pogrešnog rješenja iz *praxisa* τ_R i L_{TT}

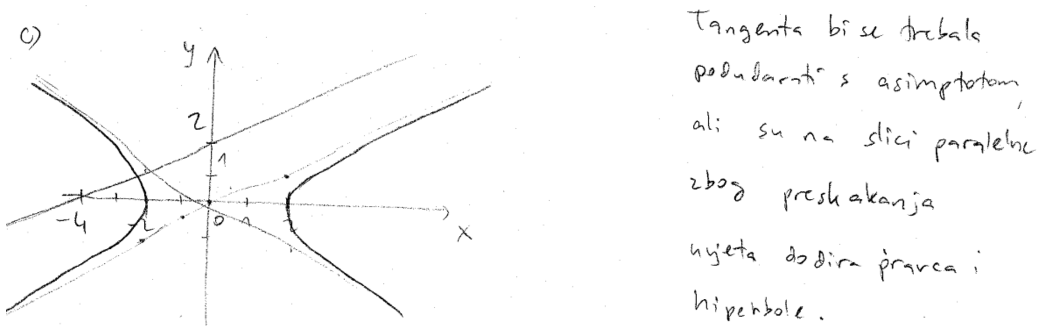


B: Hiperbola iz *praxisa* P_{TT}
Generička tangenta i asimptota zbog rješenja iz *praxisa* τ_A i L_{JP}, L_{UD} i neprimjerenog *logosa*

Slika 5.3.25: Grafički prikaz rješenja s obzirom na primijenjeni *logos* L_{UP} za određivanje tangente u odgovoru na Pitanje 3.3

Svi studenti koji su izvrednjavali formulu za jednadžbu tangente kroz točku na hiperboli su za rješenje dobili pravac koji ne prolazi točkom *P* i nije tangenta zadane hiperbole. Ovi studenti su često ispitali ili istaknuli položaj točke *P* u koordinatnom sustavu. Polovina njih je nacrtala dobiveni pravac, a neki su pravac pogrešno prikazali kroz točku *P* (Slika 5.3.28). Među studentima koji su komentirali svoje rješenje jedan je prikazao točku *P* i dobiveni pravac te prepoznao kako rješenje nije ispravno (Slika 5.3.26), jer je zapisao:

„Tangenta bi se trebala podudarati s asimptotom, ali su na slici paralelne zbog preskakanja uvjeta dodira pravca i hiperbole.“



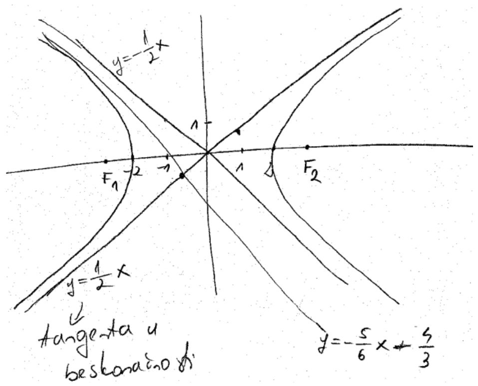
Slika 5.3.26: Hiperbola iz *praxisa* P_{TA}, pogrešan *praxis* određivanja tangente i ispravan *logos* u odgovoru na Pitanje 3.3

Jedan student je utvrdio kako točka *P* pripada asimptoti, nije nacrtao pravac jer je prepoznao kako nije tangenta, budući da „Ne možemo konstruirati tangentu iz te točke na hiperbolu“.

Obrazloženje provedenog *praxisa* je dalo 11 studenata. Diskursi su se razvijali oko tri svojstva asimptote odnosno odnosa pravca i hiperbole:

1. *Asimptota je tangenta u beskonačno dalekoj točki hiperbole.*

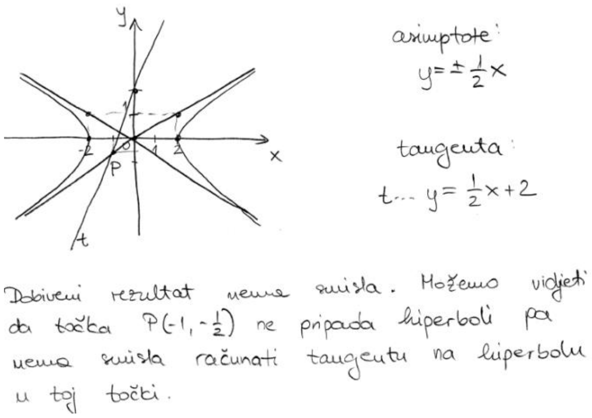
Dva studenta su asimptotu imenovali *tangenta u beskonačnosti*. Jedan od njih je student koji je ispitivao položaj točke *P* u odnosu na hiperbolu (Slika 5.3.24). Još jedan student, koji je koristio *logos* L_{UD}, grafički je prikazao samo asimptote, utvrdio je da se tangenta i asimptota podudaraju te će pravac „negdje u beskonačnosti sjeći hiperbolu“.



Slika 5.3.27: Hiperbola iz *praxisa* P_{TA}, točno određene tangente i ispravan *logos* u odgovoru na Pitanje 3.3

2. *Kroz točku izvan hiperbole mogu se odrediti dvije tangente na hiperbolu; ako točka leži na asimptoti jedna od tangenti je sama asimptota.*

Jedan student koji je koristio *logos* L_{UD} podudaranje asimptote i tangente pripisao je razlogu „što je odabrana točka pripadala asimptoti“. Student koji je ispitivao položaj točke *P* u odnosu na hiperbolu, a nije odredio tangente kroz tu točku je pokazao kako poznaje navedeni diskurs. Još dva studenta su istaknula da je tangenta kroz danu točku asimptota bez daljnjeg obrazloženja. Među studentima koji su koristili *logos* L_{TT} je student koji je izričito tvrdio da ne postoji tangenta na hiperbolu iz točke koja se nalazi na asimptoti i tri studenta koji su utvrdili su kako zbog položaja točke *P* nema smisla određivati tangentu kroz tu točku (Slika 5.3.28).



Slika 5.3.28: Hiperbola iz *praxisa* P_{TA} i pogrešno prikazanim pravcem kroz točku P zbog netočnog rješenja iz *praxisa* τ_R i L_{TT} u odgovoru na Pitanje 3.3

3. *Pravac može istovremeno biti tangenta i asimptota.*

Jedan student koji je koristio *logos* L_{UD} izričito je iskazao kako „pravac krivulji može istovremeno biti asimptota i tangenta“, dok drugi student, koji je prikazao *generičku* tangentu i asimptotu, dvoji o ispravnosti rješenja jer „asimptota ne dodiruje hiperbolu, a sad smo pokazali da je tangenta“ (Slika 5.3.25: B). Svojstvo je potvrdio student koji nije zadovoljan rješenjem dobivenim pomoću *logosa* L_{TT} (Slika 5.3.26).

5.4. Stavovi znanstvenika prema objektu znanja asimptota

5.4.1. Definicija i vrijednost objekta znanja asimptota

Intevjuirani znanstvenici su iznijeli slične stavove o ponuđenim opisima asimptote. Posljednji primjer su izdvojili kao ispravan opis asimptote, ali nisu skloni koristiti ga u gimnazijskom obrazovanju ili u znanosti. Znanstvenici su primijetili kako studenti asimptotu često opisuju kao pravac kojemu se krivulja približava. Prvi znanstvenik je istaknuo kako je ovaj opis primjeren prije formalnog tumačenja asimptote pomoću limesa.

Znanstvenici su iskazali negativan stav prema ostalim opisima asimptote. Istaknuli su kako je neprimjereno koristiti drugi značajni ili novi pojam pri opisivanju asimptote, primjerice smjer krivulje, tangenta, beskonačno daleka točka. Prepoznali su kako *priljubiti* nije precizan, matematički izraz. Prema drugom znanstveniku prikladniji je od izraza *približavati* koji se koristi u „svakodnevnom životu“ jer zorno opisuje što se događa s asimptotom i krivuljom te se može tumačiti „kao da se zalijepe [asimptota i krivulja] jedna za drugu“.

Znanstvenici su primijetili kako se zanemaruje proizvoljnost odnosa asimptote i krivulje u konačnosti, primjerice u opisu asimptote kao pravca kojemu se krivulja približava i nikad ga ne dodiruje. Drugi znanstvenik je dao istu zamjerku izrazima *približavati* i *priljubljivati*, što je usporedio s pogrešnim opisom tangente kao pravca koji ne siječe krivulju, ukoliko se ne istakne kako to vrijedi „u epsilon okolini dodirne točke“.

Definicija asimptote kao tangente krivulje u beskonačno dalekoj točki intervjuiranim znanstvenicima nije bliska i mišljenja su da nije značajna za gimnazijsko obrazovanje. Prvi znanstvenik je rekao kako je formulacija zbunjujuća jer „tangenta mora imati točku dirališta“. Njemu izraz *dodirivati u beskonačnosti* nije prihvatljiv jer „asimptota nikad ne dodiruje [krivulju], ona se približava [krivulji]“. Drugi znanstvenik je prigovorio kako se vertikalna asimptota ne uklapa u takvu definiciju jer nije jasno u kojoj bi točki bila tangenta i kako se asimptota „može na puno ljepšim primjerima pokazati“. On je utvrdio kako izraz *dodirivati u beskonačnosti* učenici mogu interpretirati da su asimptota i krivulja blizu „na kraju nacrtanog koordinatnog sustava“. Oba znanstvenika su izraz *proizvoljno približavati* tumačili isključivo pomoću epsilon okolina.

Prvi znanstvenik je tumačio vrijednost asimptote u svojem području interesa kako je opisano u Primjeru 5.3. Ispričao je doživljaj kad su ga na znanstvenom seminaru kolege iz područja primijenjene matematike pitali „što ti promatraš tu, kad ti epsilon ide u nuli to - tvoja cijev ili domena ti ode u crtu?“ Znanstvenik je primijetio kako „elementarno nerazumijevanje cijele priče“ gdje je promatrani parametar jako mali, ali nije jednak nuli, nastaje jer se odgovarajući sadržaji zanemaruju u gimnazijskom i studijskom obrazovanju. Više puta je istaknuo kako je značajno poznavati i poučavati ponašanje funkcije u blizini točke ili u beskonačnosti, posebno asimptote i asimptotsko ponašanje funkcije.

Primjer 5.3: Prakseologija u asimptotičkoj analizi ponašanja toka fluida

> U asimptotičkoj analizi ponašanja toka fluida promatraju se parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju tok fluida u domenama koje su na neki način tanke. Primjerice, kad se napravi omjer između polumjera cijevi i duljine cijevi, ako je on mali znači da je cijev jako dugačka ili jako uska.
>
> Uvodeći mali parametar u opis domene i korištenjem asimptotičkih razvoja dobivaju se asimptotske aproksimacije u terminima tog parametra. Tako dobivene formule su jednostavnije za izračunati i valjane za određene vrijednosti malog parametra što se može potvrditi teorijskim ocjenama greške.

Prvi znanstvenik je naglasio kako je asimptota ključna za ispitivanje toka i crtanje grafa funkcije. Nije mogao domisliti druge aktivnosti koje bi promovirale razumijevanje asimptotskog ponašanja i bile prikladne postojećem gimnazijskom nastavnom programu. Predložio je asimptotsko ponašanje objasniti pomoću diferencijalnih jednadžbi. Učenici bi morali poznavati pojam diferencijalne jednadžbe i provjeriti njezino rješenje, ali ne i tehnike rješavanja (vidi Primjer 5.4).

Primjer 5.4: Asimptotsko ponašanje u rješavanju diferencijalne jednadžbe

> Zadana je diferencijalna jednadžba $f'(x) = -2 - f(x) + x$. Jedno njezino rješenje je $f_0(x) = x - 3$. Rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je oblika $f(x) = c \cdot e^{-x} + x - 3$ i ono je asimptotički ekvivalentno funkciji f_0.

Drugi znanstvenik je vrijednost asimptote kroz njezinu primjenu naveo kod ocjenjivanja greške uvijek kada se nešto približno računa, primjerice Taylorov razvoj, Newtonov interpolacijski polinom ili numerička integracija, te kod određivanja klase složenosti algoritma kako bi se provjerilo je li isplativ prije njegove implementacije. Za primjenu asimptote u gimnazijskom obrazovanju istaknuo je kako se s jedne strane nekad približno računao drugi korijen i kako je jednadžba tangente na graf funkcije zapravo aproksimacija prvog stupnja iz Taylorovog razvoja, a s druge strane kako se u gimnazijskoj nastavi informatike određuju klase složenosti algoritama pretraživanja. Znanstvenik je primijetio kako studenti imaju teškoće pri određivanju klasa složenosti algoritma jer ne uviđaju kako se asimptotika odvija u beskonačnosti, nakon nekog n_0-tog ulaza, stoga sve što se događa u konačnosti, prije tog n_0, nije značajno.

Znanstvenici su istaknuli asimptotu kao osnovni pojam u matematičkoj analizi, a asimptotsko ponašanje kao značajan znanstveni objekt u primijenjenoj, teorijskoj, numeričkoj matematici, računarstvu i teoriji vjerojatnosti te u asimptotičkoj analizi kod mehanike fluida i teorije elastičnosti.

5.4.2. Prakseologije vezane uz objekt znanja asimptota

Asimptota i elementarne funkcije

Znanstvenici su kod elementarnih funkcija predložili istaknuti i prepoznati na grafu funkcije njezina svojstva, primjerice rast ili pad pogotovo u ovisnosti o nekom koeficijentu u pravilu pridruživanja, bijektivnost i posljedično postojanje inverzne funkcije, parnost i neparnost te njihovu veza s oblikom grafa funkcije, područje definicije, sliku funkcije te asimptotu kao značajno svojstvo funkcije. Predložili su asimptotu učenicima prezentirati na grafu funkcije ili iz izračunatih vrijednosti funkcije u blizini neke točke ili u beskonačnosti, kako je prvi znanstvenik rekao „čisto da usvoje termin, što mi zovemo asimptotom“. Istaknuli su aktivnosti vezane uz ponašanje vrijednosti elementarnih funkcija kod vertikalne asimptote:

- Izvrednjavati i promatrati vrijednosti logaritamske funkcije kad je argument jako mali, ali ostaje pozitivan. Ili kad je argument jako mali i ostaje negativan; prvi znanstvenik je upozorio kako je ovo „trik pitanje“ koje postavlja studentima.
- Izvrednjavati, tabelirati i promatrati vrijednosti racionalne funkcije u blizini točke prekida; drugi znanstvenik je upozorio kako su posebice zanimljive one racionalne funkcije koje mijenjaju predznak s različitih strana točke prekida.
- Utvrditi ponašanje vrijednosti funkcije kotangens u blizini nule uvažavajući područje definicije i predznak vrijednosti trigonometrijskih funkcija po kvadrantima u omjeru $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; drugi znanstvenik je objasnio „[vrijednosti kotangensa u blizini nule] tu mi je pozitivan, tu mi je negativan, a već smo naučili ako mi nešto ide blizu nule, a pozitivno, ide u plus beskonačno“.

Prema mišljenju intervjuiranih znanstvenika asimptota se *u početku* ne treba definirati, može se opisati neformalno kao pravac kojemu se krivulja približava ili motivirati pomoću primjera iz realnog konteksta (vidi Primjer 5.5).

Drugi znanstvenik je kod eksponencijalne funkcije naglasio vrijednost primjera iz realnog konteksta za motiviranje eksponencijalne funkcije, njezinog rasta i asimptotskog ponašanja. Upozorio je kako je teško naći primjere realnog konteksta kod logaritamske funkcije, a posebice za asimptotsko ponašanje jer su odgovarajuće vrijednosti negativne. Predložio je logaritamsku funkciju i njezinu vertikalnu asimptotu motivirati vezom s eksponencijalnom funkcijom i oba znanstvenika su spomenula kako se logaritamska funkcija može crtati simetrično grafu eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac $y = x$ jer su funkcije inverzne. Za ostale elementarne funkcije znanstvenici nisu ponudili vezane primjere realnog konteksta. Drugi znanstvenik je primijetio kako studenti lakše uoče i dožive vertikalnu nego horizontalnu asimptotu, primjerice kod logaritamske i eksponencijalne funkcije, iako je potonju istaknuo kao značajan primjer funkcije koja ima *lijevu*, a nema *desnu* horizontalnu asimptotu. Treba istaknuti kako prvom znanstveniku nazivi *lijeva* i *desna* horizontalna asimptota nisu prihvatljivi. Drugi znanstvenik je predložio istaknuti neke funkcije:

- Izračunati i tabelirati vrijednosti te nacrtati graf racionalne funkcije f zadane s $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i istaknuti njezina svojstva: ima horizontalnu asimptotu, nema nultočku, parna je i graf je zanimljivog oblika.
- Prepoznati funkciju tangens kao istaknuti primjer funkcije koja je neprekidna na području definicije, a ne crta se jednim potezom.
- Prepoznati funkciju arkus tangens kao istaknuti primjer funkcije koja je rastuća i ima dvije horizontalne asimptote.

Primjer 5.5: Raison d'être horizontalne asimptote eksponencijalne funkcije

Nedugo nakon uzimanja aspirina u krvi bolesnika bilo je 300 miligrama tog lijeka. Ako se količina lijeka u krvi smanjuje tako da je svaka dva sata upola manja, koliko će aspirina biti u krvi bolesnika nakon 5 sati? (Dakić i Elezović, 2007)

Tražena funkcija je $A(n) = 300 \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$. Nakon 5 sati količina lijeka u krvi bolesnika iznosi približno 53.033 mg.

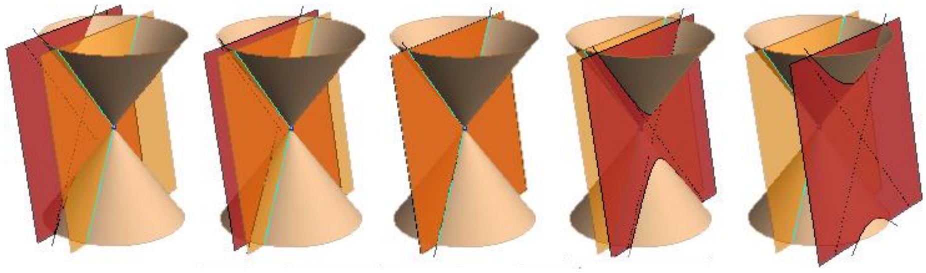
n **(sati)**	**0**	**2**	**4**	**5**	**6**	**8**	**12**	**17**	**37**	**57**
A(n) **(mg)**	300	150	75	≈ 53.03	37.5	18.75	4.6875	≈ 0.83	$\approx 8 \cdot 10^{-4}$	$\approx 8 \cdot 10^{-7}$

Može se promotriti kako nakon 17 sati količina lijeka padne ispod 1 mg, nakon jednog i pol dana padne ispod 1 μg, a nakon dva dana (i 9 sati) padne ispod 1 ng. Može se tumačiti kako nakon dva dana lijek izlazi iz organizma, jer su preostale količine **zanemarive**.

Asimptote hiperbole

Prvi znanstvenik nije dao prijedlog aktivnosti iz područja analitičke geometrije jer se ne susreće s odgovarajućim sadržajima na kolegijima koje predaje. Drugi znanstvenik je komentirao hiperbolu kao „najljepši primjer da se vidi što se tu [s asimptotama krivulje] događa“. Istaknuo je značajnim izvesti jednadžbu asimptote hiperbole kad je poznata jednadžba hiperbole. Znanstvenik se u danom trenutku nije prisjetio kako to provesti, no potrebno je odrediti „koliki mora biti *x* i onda ćemo vidjeti iz uvjeta pozitivnosti pod korijenom što se događa“ te je napomenuo kako bi razmišljao, izvrednjavao i promatrao što se događa s točkama hiperbole (vidi Poglavlje 5.1). Preporučio je demonstrirati učenicima konstrukciju hiperbole pomoću programa dinamičke geometrije, gdje „bi se gledala razlika, jel kod elipse je zbroj [udaljenosti do fokusa]“. Iznio je stav kako je krivulje drugog reda najbolje motivirati pomoću presjeka konusa i potom predstaviti njihove jednadžbe. Istaknuo je kako „na tom presjeku se baš lijepo vidi…asimptotika, jer kažemo imamo beskonačni konus“ (vidi Primjer 5.6). Znanstvenik je iznio još dva vlastita opažanja koja su značajna, potrebno je istaknuti i pojasniti kako je krivulja zadana jednadžbom $y = \frac{1}{x}$ hiperbola te voditi računa o različitim jednadžbama tangente na hiperbolu u ovisnosti o položaju točke prema hiperboli (vidi Poglavlja 4.2 i 5.1).

Primjer 5.6: Motivacija hiperbole i asimptote pomoću presjeka konusa



Presjek beskonačnog konusa ravninom, u ovisnosti o tome prolazi li ona vrhom konusa, može biti:

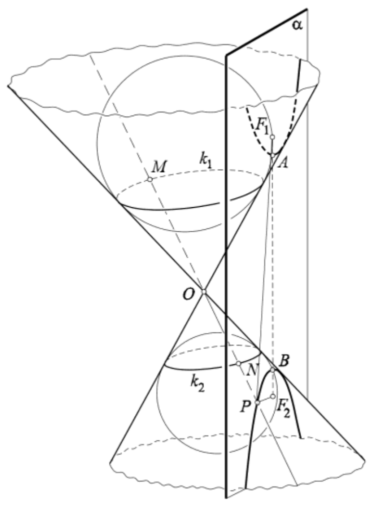
- jedna točka – vrh konusa
- jedan pravac – izvodnica konusa
- dva pravca – dvije izvodnice ukrštene u vrhu konusa

- elipsa – ravnina siječe sve izvodnice konusa
- parabola – ravnina je paralelna jednoj izvodnici konusa
- hiperbola – ravnina je paralelna dvjema izvodnicama ukrštenima u vrhu konusa.

Asimptote hiperbole, koja je presjek konusa, su pravci koji su ortogonalne projekcije izvodnica konusa na ravninu krivulje. Točke ovako zadane hiperbole zadovoljavaju svojstvo stalnosti razlike udaljenosti do dvaju fiksnih točaka.

Neka je dan beskonačan konus s vrhom O i ravnina α koja ga siječe po hiperboli. Neka su u konus upisane sfere koje konus diraju po kružnicama k_1 odnosno k_2, a ravninu α dodiruju u točkama F_1 odnosno F_2.
Neka je P točka hiperbole i neka izvodnica koja prolazi točkom P siječe kružnice k_1 i k_2 redom u točkama M i N.
Jer su PM i PF_1 tangente na istu sferu kroz točku P vrijedi $|PM| = |PF_1|$ i analogno $|PN| = |PF_2|$. Vrijedi $|PF_1| - |PF_2| = |MN|$ što je konstantno za bilo koju točku P zbog položaja kružnica k_1 i k_2.
Posebno, neka pravac F_1F_2 siječe hiperbolu u točkama A i B tada za bilo koju točku hiperbole P vrijedi:

$$\left||PF_1| - |PF_2|\right| = |AB|$$



Asimptota i nizovi, vjerojatnost

Znanstvenici su se složili kako je konvergencija niza bliska asimptoti funkcije. Prvi znanstvenik je rekao kako je ipak „najbolje taj pojam asimptote uvesti kod limesa“, dok je drugi znanstvenik odlučan istaknuti povezanost ta dva pojma i ponudio je aktivnosti:

- Izvrednjavati formulu za opći član niza, primjerice $a_n = \alpha^n, |\alpha| < 1$, promatrati vrijednosti kad $n \to \infty$ i utvrditi asimptotsko ponašanje odnosno konvergenciju, pritom nije potrebno koristiti niti poznavati formalne pojmove.
- Promatrati i diskutirati asimptotsko ponašanje odnosno konvergenciju vrijednosti iz konkretnih primjera kad se iteracije povećavaju, poput anegdote o Ahilu i kornjači ili pojava koje se ponašaju po pravilu geometrijskog niza.
- Ispitivati od kojeg člana niza počinje zadano ponašanje vrijednosti članova niza, posebice udaljenost članova niza do određenog broja.
- Grafički prikazivati vrijednosti članova konvergentnog niza i uspoređivati s odgovarajućom funkcijom i njezinom horizontalnom asimptotom.
- Promatrati vrijednosti članova niza koji ima gomilište za utvrđivanje razlike između gomilišta i limesa, primjerice $a_n = \begin{cases} n, n \text{ je neparan} \\ \frac{1}{n}, n \text{ je paran} \end{cases}$.

Drugi znanstvenik je primijetio kako se aktivnosti u području vjerojatnosti uglavnom svode na izračunavanje vjerojatnosti nekog događaja količnikom broja povoljnih i broja mogućih događaja što je po njegovom mišljenju loše. Predložio je neke uobičajene prakseologije, uz pomoć računala za generiranje pseudoslučajnih brojeva, upotpuniti spoznajama koje se mogu povezati s idejom asimptotskog ponašanja, primjerice:

- U pokusu bacanja igraće kocke n puta relativne frekvencije elementarnih događaja se *približavaju* vjerojatnostima odgovarajućih ishoda kad se povećava broj ponavljanja pokusa.
- U pokusu bacanja n igraćih kocaka vjerojatnost ishoda „na svih n kocaka pala je šestica“ *opada* kako se povećava broj kocaka u pokusu.

Asimptota i limes

Znanstvenici su se složili kako asimptotu funkcije treba formalno definirati kad su učenici upoznati s pojmom limesa funkcije, prvi znanstvenik je rekao „da se vidi, u krajnjoj liniji i zašto smo ga [pojam limesa funkcije] uveli“. On je zauzimao stav kako nije primjereno u nižim razredima prezentirati asimptotu „jer oni se nisu ni upoznali s pojmom limesa“. S druge strane istaknuo je kako tipične tehnike računanja limesa nisu zahtjevne i primjerene su gimnazijskom obrazovanju, posebno izvrednjavanje formula za asimptote, ali nije primjereno niti potrebno uvoditi epsilon formulaciju. Upozorio je kako je korpus funkcija kojima se može odrediti asimptota ograničen s obzirom na dostupne tehnike računanja limesa. Ipak, istaknuo je kako se formule za asimptote mogu valjano demonstrirati na racionalnim funkcijama. Po njegovom mišljenju, učenicima koji poznaju tehnike deriviranja nije zahtjevno predstaviti primjenu L'Hospitalovog pravilo za računanje i prepoznavanje neodređenih limesa. Posljedično, napomenuo je kako bi učenici mogli odrediti asimptote i nacrtati graf složenijih funkcija. Prvi znanstvenik je predložio jednostrane limese pojasniti pomoću poznatog objekta vertikalne asimptote, a drugi znanstvenik je predložio, slično kao asimptotu, promatrati limes funkcije iz izračunatih vrijednosti funkcije.

Znanstvenici su istaknuli primjerenim dati odgovarajuće formule za vertikalnu, horizontalnu i kosu asimptotu funkcije. Nisu se složili oko toga treba li formule dati kao gotovo pravilo i treba li ih pravdati. Ipak, oba su znanstvenika spomenula kako izračunavanje i promatranje količnika vrijednosti racionalne funkcije i argumenta može koristiti prepoznavanju formule za koeficijent smjera kose asimptote.

Drugi znanstvenik je istaknuo kako je po izračunavanju asimptota nužno grafički prikazati funkciju i asimptote „da se vidi zašto to tako izgleda i što se događa“, inače se računanje asimptota svodi „samo operativno idem gledati nekakav limes“. Iznio je stav kako izračunavati asimptote nije primjereno za racionalne funkcije koje su količnik dviju linearnih funkcija, nego za one funkcije za koje „intuitivno možete reći, aha ona mi raste tamo [ali] ne vidite baš je li ima asimptotu ili nema“.

Znanstvenici su istaknuli neka značajna svojstva asimptote:

- Ako je racionalna funkcija definirana za sve realne brojeve onda nema vertikalnu asimptotu.
- Ako funkcija ima konačno područje definicije onda nema horizontalnu asimptotu.
- Ako funkcija ima obje horizontalne asimptote onda nema kosu asimptotu.
- Ako je stupanj polinoma u brojniku racionalne funkcije za jedan veći od stupnja polinoma u nazivniku onda funkcija ima kosu asimptotu.
- Različite funkcije mogu imati isto asimptotsko ponašanje.

i shodno tome predložili aktivnosti: prepoznati koje asimptote treba odrediti s obzirom na područje definicije ili pravilo pridruživanja funkcije te pronaći, odrediti funkciju koja ima zadane asimptote.

Crtanje grafa funkcije

Znanstvenici su istaknuli značajnim poznavati graf temeljnih elementarnih funkcija, eksponencijalne, logaritamske, racionalne, trigonometrijske funkcije i funkcije apsolutne vrijednosti. Preferirali su crtati ih transformacijama u odnosu na tehniku crtanja s obzirom na svojstva prepoznata iz pravila pridruživanja. Crtanje transformacijama je po njihovom mišljenju najprimjerenije gimnazijskom obrazovanju jer se može „vizualizirati“, učenici trebaju poznavati samo jedan graf i „razmišljati što se događa“. Posebno, drugi znanstvenik je istaknuo, treba voditi računa koja svojstva grafa funkcije se mijenjaju, a koja su očuvana, primjerice, horizontalna asimptota se ne mijenja kad se skalira argument funkcije.

Znanstvenici nisu skloni koristiti tehniku crtanja grafa funkcije s obzirom na svojstva funkcije ispitana infinitezimalnim računom. Po njihovom mišljenju ovu tehniku treba koristiti za crtanje složenijih funkcija, drugi znanstvenik je rekao: „To je po meni malo prejako oružje za nešto što, što se zna kako izgleda“. Prvi znanstvenik je naveo računanje limesa, ispitivanje prve derivacije te konveksnost i konkavnost kao komponente tehnike *ispitivanja toka funkcije* i izrazio sumnju kako se takav složen sadržaj može korektno prezentirati u gimnazijskom obrazovanju. Drugi znanstvenik je negodovao kako se vrsta ekstrema provjerava predznakom vrijednosti druge derivacije, što nije točno i komplicirano je odrediti i izračunavati. Istaknuo je kako je primjereno ekstreme odrediti izvrednjavanjem prve derivacije i promatranjem predznaka vrijednosti funkcije u okolini odabrane točke.

Crtati graf funkcije kroz odgovarajuće točke u koordinatnom sustavu znanstvenici su ocijenili neprihvatljivim osim za linearne funkcije, a drugi znanstvenik je istaknuo kako je vrijedno crtati elementarne funkcije: linearne, kvadratne, racionalne funkcije i polinome s obzirom na njihova istaknuta svojstva. Napomenuo je kako treba uvažiti odabir jedinične dužine u koordinatnom sustavu s obzirom na zadanu funkciju koju treba grafički prikazati. Rekao je kako se učenici „moraju odgojiti tako da oni vide, aha funkcija je parna pa odmah znam da, da se ne trebam uopće obazirati na negativne x-eve, idem gledati što se ovdje događa, pa idem gledati što se događa u beskonačnosti i tako“.

Znanstvenici su istaknuli kako asimptotu treba koristiti za crtanje grafa funkcije; ona se može kod elementarnih funkcija odrediti iz pravila pridruživanja ili kod složenijih funkcija izračunati pomoću formula za asimptote. Prvi znanstvenik je naglasio kako je pri crtanju grafa funkcije potrebno staviti crtice koje predstavljaju gdje se krivulja približava asimptoti. Napomenuo je kako je važno znati s koje strane vertikalne asimptote je krivulja, ali nije potrebno odrediti s koje strane horizontalne asimptote je krivulja jer se to primijeti iz ostalih svojstava ispitivanjem toka funkcije. Primijetio je kako studenti imaju teškoće pri isticanju asimptota za grafičko prikazivanje funkcije jer ne razlikuju apscisu i ordinatu odnosno argument i vrijednost funkcije. Upozorio je kako „na tome treba inzistirati, da to [razliku između apscise i ordinate, argumenta i vrijednosti funkcije] uhvate“, jer su posljedice teškoće u različitim matematičkim aktivnostima.

Drugi znanstvenik je naveo još aktivnosti iz područja planimetrije, stereometrije, analitičke geometrije, trigonometrije, skupova brojeva, polinoma, diferencijalnog i integralnog računa, primjerice odrediti broj rješenja neke jednadžbe očitavanjem s grafičkog prikaza, promatrati ponašanje funkcije sinus u beskonačnosti i utvrditi kako ona nema limes niti horizontalnu asimptotu, ali ima tangentu koja dodiruje funkciju u beskonačno mnogo točaka, promatrati rotacijska tijela koja imaju konačan volumen i beskonačnu površinu, izvesti formulu za opseg i površinu kruga s obzirom na granične vrijednosti opsega i površine upisanih ili opisanih poligona, odrediti površinu ispod grafa funkcije s obzirom na granične vrijednosti ukupne površine upisanih ili opisanih trapeza. Druge predložene aktivnosti se ne mogu značajno povezati s objektom znanja asimptota, ali imaju vrijednost za istraživanja matematičkog obrazovanja druge tematike.

6. RASPRAVA

Istraživačko pitanje 1. Koja je epistemološka, kulturna i funkcionalna vrijednost objekta znanja asimptote?

Epistemološka vrijednost objekta znanja asimptota očituje se u različitim interpretacijama, definicijama i proširenjima pojma. Geometrijski, asimptota je obilježje krivulje koje je prisutno u matematici od antike. S druge strane, postojanje asimptote je istaknuto svojstvo nekih elementarnih funkcija i usko vezano uz postojanje limesa funkcije. Definicije asimptote kao tangente u beskonačno dalekoj točki ili kao graničnog položaja tangente u beskonačnosti tvore zanimljiv presjek znanja iz analitičke, projektivne geometrije, algebre i matematičke analize, posebice infinitezimalnog računa. Asimptota kao karakterizacija graničnog ponašanja funkcije ima značajna proširenja u različitim matematičkim područjima. U diferencijalnoj geometriji razmatraju se asimptotske krivulje, u matematičkoj analizi asimptote prve i druge vrste (Dobbs, 2010, 2011), u primijenjenoj matematici asimptotsko ponašanje i asimptotski ekvivalentne funkcije, u računarstvu asimptotika kroz klase složenosti. Neka proširenja imaju teorijsku, a neka značajnu praktičnu vrijednost.

U znanosti se promatraju i procjenjuju veličine iz realnih situacija. Primijenjena matematika nudi i traži alate za rješavanje takvih problema, koji uključuju izračune, aproksimacije, ocjene vrijednosti. Asimptotsko ponašanje i asimptotička analiza bitan su dio takvih postupaka, na način koji nadilazi temeljno matematičko obrazovanje i opseg ovog istraživanja. REM objekta znanja asimptota za gimnazijsko obrazovanje mora uvažiti takve prakseologije koje će omogućiti ispravno tumačenje ideje asimptotskog ponašanja u kasnijem matematičkom obrazovanju.

Funkcionalna vrijednost objekta znanja asimptota proizlazi iz njegove epistemološke vrijednosti. Asimptota je važan objekt epistemoloških istraživanja iz sličnih razloga kao što su istaknuti za koncept tangente u Biza i sur. (2008; 2010). Kao istaknuto svojstvo funkcije značajna je pri crtanju grafa funkcije, opisivanju toka funkcije i tumačenju drugih svojstava funkcije. Asimptota odnosno granično ponašanje funkcije je zorna interpretacija izračunatih vrijednosti (određenih) funkcija i diskurs, odnosno smisao, praktičnim aktivnostima izračunavanja limesa algebarskog izraza ili dijeljenja polinoma. Diskurs definicije i jednadžbi asimptota krivulje ili funkcije angažira prakseološku opremu iz različitih matematičkih područja i različite matematičke reprezentacije objekata.

Istraživačko pitanje 2. Kako se asimptota realizira kao objekt znanja za poučavanje u gimnazijskim udžbenicima u RH?

Na skali didaktičke određenosti doseg NOK-a završava na razini Domene što prakseološki odgovara slobodi organiziranja regionalnih prakseologija. Podređeni dokument, Rasterećeni nastavni program matematike, kojemu odgovara prakseološka organizacija promatranih udžbenika, definira odgojno-obrazovni proces na svim disciplinarnim razinama skale. Rasterećeni nastavni program matematike je sadržajno orijentiran i fragmentiran, kako zadaje punkt-prakseologije. U programu su najzastupljenije teme iz domene Algebra i funkcije. Propisane obvezne zadaće su zahtjevi koji se realiziraju uglavnom praktičnim blokovima i potreba racionalizacije *praxisa* nije naglašena. Nije predviđeno nadograđivanje i povezivanje prakseologija. Modeliranje situacija izvan matematičke teme odgovarajućom prakseologijom nije značajno zastupljeno.

U drugom setu udžbenika novo gradivo je uglavnom motivirano zadacima realnog konteksta. Takve prakseologije se nisu značajno iskoristile kao *raison d'être* objekata znanja. Prakseologije su u oba udžbenika zastupljene uglavnom praktičnim blokom, čak one kojima je diskurzivna komponenta očita (primjerice, odrediti broj članova niza udaljenih od broja za danu vrijednost ili broj članova niza izvan nekog intervala, bez konteksta konvergencije ili limesa niza). Slični rezultati su pronađeni u Barbé i sur. (2005), Biza (2010), Hardy (2011). Dostupne potpune prakseologije su uglavnom prepoznavanje svojstava funkcije očitavanjem s grafičkog prikaza, opisivanje ponašanja niza ili funkcije u beskonačnosti ili u blizini neke točke i slično. U drugom setu udžbenika ističe se prakseologija prepoznavanja pravila pridruživanja funkcije prikazane grafički s obzirom na njezina svojstva te grafičkog prikazivanja kao diskursa vrijednostima i svojstvima trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus, ali ne funkcija tangens i kotangens.

Svojstva funkcija, te svojstva nizova i uvjet dodira pravca i krivulje u drugom setu udžbenika, se kao diskurzivne spoznaje koriste uglavnom za manipulacije pri izvrednjavanju složenih algebarskih izraza ili jednadžbi, koji uglavnom nemaju značajno podrijetlo. Objekti znanja se uvode bez pravog *raison d'être* (primjerice, u prvom setu udžbenika pojam inverzne funkcije spominje se kod spoznaje o simetričnosti grafova 10^x i $\log x$, monotonost i omeđenost nizova unaprijed se demonstrira kako bi se potvrdila konvergencija jednog niza, u drugom setu udžbenika metoda uzastopnih približavanja i procedura pridruživanja na pravcu koriste se za definiranje logaritamske funkcije). Tvrdnje, formule i pravila su dane kao gotovo pravilo umjesto kao rezultat praktične aktivnosti (primjerice, udaljenost točaka hiperbole do asimptote teži nuli), nisu podržani odgovarajućim diskursom (primjerice, formule za određivanje jednadžbi asimptota pomoću limesa, u prvom setu udžbenika jedinstvenost logaritma kao rješenja eksponencijalne jednadžbe i procedura određivanja broja znamenki broja velike magnitude, u drugom setu udžbenika logaritam kao rješenje eksponencijalne jednadžbe i uloga koeficijenata u formulama koje opisuju prirodne procese rasta). Nije jasno što predstavlja definiciju odnosno svojstvo objekta znanja (primjerice, logaritam broja i asimptota hiperbole), što je dokaz, provjera (primjerice, u prvom udžbeniku tehnika aproksimacije vrijednosti potencije s iracionalnim eksponentom za potvrđivanje područja definicije eksponencijalne funkcije te diskurs udaljenosti točke hiperbole do asimptote koji prethodi praktičnoj aktivnosti). Matematički formalizam je u prvom setu udžbeniku naglašen kod diskursa limesa niza, koji je u drugom setu udžbenika proveden manje formalno, no sa značajnim primjerima i kontraprimjerima pojedinih svojstava nizova, posebice ponašanja vrijednosti članova niza u beskonačnosti.

Poznate prakseologije pozivaju se uglavnom za rješavanje složenih jednadžbi i nejednadžbi, ispitivanje vrijede li jednakosti odnosno nejednakosti, određivanje broja rješenja jednadžbi, u drugom setu udžbenika određivanje područja definicije funkcije ili u prvom setu udžbenika određivanje skupa točaka koje zadovoljavaju jednadžbu. Koriste se tehnike očitavanja s grafičkog prikaza i ispitivanja toka funkcije s obzirom na vrijednosti prve derivacije. U zadacima su zastupljene jednadžbe krivulja drugog reda.
Problemi realnog konteksta uglavnom su već zadani odgovarajućim modelom i u prvom setu udžbenika znatno češće se rješavaju izračunavanjem, izvrednjavanjem ili algebarskom manipulacijom, dok je u drugom setu udžbenika ponekad potrebno grafičko prikazivanje ili interpretiranje toka funkcije. U drugom setu udžbenika situacije se modeliraju pomoću stalnosti kvocijenta, geometrijskim nizom te formulama složenog kamatnog računa i neprekinutog ukamaćivanja. Kad je potrebno ispitivati tok funkcije onda se poziva samo prakseologija određivanja lokalnih ekstrema ili monotonosti ispitivanjem prve derivacije. U drugom udžbeniku se javlja prakseologija prepoznavanja granične vrijednosti eksponencijalne funkcije koja modelira realni kontekst i može se interpretirati horizontalnom asimptotom.

Asimptota se spominje pri inicijalnom crtanju grafa elementarnih funkcija, osim kod funkcija tangens i kotangens gdje je vertikalna asimptota značajna komponenta toka funkcije. U udžbenicima se graf eksponencijalne i logaritamske funkcije crta povlačenjem krivulje kroz točke, funkcije tangens na temelju svojstava funkcije, funkcije kotangens ili kompozicija funkcija tangens i kotangens s linearnom funkcijom transformacijama temeljnog grafa. Značajno udžbeničko gradivo je ispitivanje toka funkcije, koje podrazumijeva provjeravanje područja definicije, parnosti, periodičnosti, monotonosti, konkavnosti i asimptota. U drugom setu udžbenika se pak pri rješavanju zadataka inzistira samo na ispitivanju vrijednosti prve derivacije funkcije te asimptota kod racionalnih funkcija, uz obveznu tablicu toka funkcije. Navedena tehnika se koristi za crtanje polinoma i racionalnih funkcija. Zadane su racionalne funkcije s relativno raznolikim vrstama asimptota i odnosom prema njima, ali analiza odnosa asimptote i funkcije nije sustavno ili općenito istaknuta.

Za prakseologije dostupne u udžbenicima *logos* toka funkcije uglavnom podrazumijeva svojstva monotonosti i područja definicije funkcije. Nije istaknuta veza asimptote s drugim svojstvima elementarnih funkcija. U drugom setu udžbenika dostupna je prakseologija opisivanja toka logaritamske funkcije s obzirom na grafički prikaz uz uspostavljanje veze vertikalne asimptote s područjem definicije funkcije. Spominje se, ali ne diskutira veza jednadžbe hiperbole i pravila pridruživanja funkcije $f(x) = 1/x$. Asimptota nije istaknuta kod drugih relevantnih objekata, primjerice logističke funkcije ili konvergencije niza. U udžbenicima se kod elementarnih funkcija asimptota opisuje neformalno. U prvom setu udžbenika u opisu asimptote koristi se izraz *priljubljuje*, dok se u drugom setu udžbenika spominje izraz *tangenta u beskonačno dalekoj točki* i stavlja naglasak kako krivulja *ne dodiruje* asimptotu.

Asimptota hiperbole je u udžbenicima zastupljena kroz manipulacije jednadžbom pravca. Diskurs udaljenosti točaka hiperbole do asimptote, ponašanje vrijednosti koordinata hiperbole u beskonačnosti ili primjena asimptote za crtanje hiperbole se spominju, ali su rijetko zastupljeni ili gotovo nikako u drugom setu udžbenika. Ilustracije i diskurs položaja pravaca, asimptote i točaka u odnosu na hiperbolu su nepotpuni. Odgovarajuće formule su dostupne u drugom setu udžbenika, dok se u prvom setu udžbenika poziva samo izvrednjavanje sustava jednadžbi. U drugom setu udžbenika ističe se problemski zadatak u kojemu se javlja diskurs asimptote hiperbole kao tangente u beskonačnosti kada teorija koja bi takav diskurs podržala nije dostupna.

U udžbeničkoj jedinici oba seta o limesu funkcije ne spominju se asimptote, primjerice, kod ilustracije funkcije koja nema limes u točki prekida jer teži u beskonačnost nije imenovana vertikalna asimptota ili u drugom setu udžbenika kod ilustracije egzistencije i vrijednosti limesa funkcije u beskonačnosti ne spominje se horizontalna asimptota. Pravila limesa nisu dokazana kako predlažu Barbe i sur. (2005). Naglasak je na *praxisu* računanja limesa algebarskim tehnikama. Tehnika potvrđivanja limesa niza proizlazi iz formalne definicije limesa dok Swinyard i Larsen (2012) predlažu obrnuto, da iz tehnike potvrđivanja slijedi diskurzivna spoznaja o formalnoj definiciji.

Asimptote funkcije su locirane unutar udžbeničke teme oba seta o derivaciji funkcije, kod udžbeničke jedinice ispitivanja toka funkcije. U prvom setu udžbenika nudi se više informacija o asimptotama, uključujući formalnu definiciju, formule za određivanje jednadžbe asimptota funkcije i prilagođene tehnike određivanja asimptota racionalnih funkcija. Kod limesa za jednadžbu vertikalne asimptote $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ nije istaknuto podrijetlo argumenta a. U drugom setu udžbenika pojedine vrste asimptota identificirane su s tehnikama njihova određivanja. Vertikalna asimptota je vezana isključivo uz vrijednost nultočke nazivnika, što nije uvijek ispravna tehnika određivanja asimptote kako je istaknuto u Zeng (2007). U udžbeničkoj jedinici naglasak je na formulama za koeficijente kose asimptote. Podrijetlo formula za jednadžbe asimptota i veza s definicijom nisu dostupni u udžbenicima.

Istraživačko pitanje 3. Kako se asimptota realizira kao objekt stečenog znanja studenata nastavničkih studija matematike u RH?

Kod opisa asimptote ili asimptotskog ponašanja funkcije studenti su koristili neformalne izraze i često su naglasili kako asimptota i krivulja nemaju zajedničkih točaka. Preferirali su dinamički pristup opisivanju asimptotskog ponašanja vrijednosti. Kad su koristili limes istaknuli su kako se vrijednost smanjuje, teži nuli, ali *nije jednaka* nuli. Neki studenti su asimptotu doživjeli kao među, granicu. Kod formalne definicije kose asimptote nisu uskladili neformalni opis asimptote, udaljenost krivulje i asimptote u algebarsko-analitičkom smislu, njihove granične vrijednosti ili razliku vrijednosti u smislenu i potpunu izjavu o asimptoti.
Studenti su nerijetko pisali kako se neki odnos funkcije i krivulje ostvaruje *u beskonačnosti*, primjerice „dodiruje u beskonačnosti", iako su rijetko opisali ili prepoznali asimptotu kao tangentu u beskonačnosti. Značajno je ispitati što studenti podrazumijevaju pod pojmom *smjer krivulje*. Taj termin nije prisutan u akademskom znanju, a s obzirom na rezultate stečenog znanja može se odnositi na odnos funkcija f i g za koje vrijedi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$.

Pri opisivanju toka funkcije studenti su češće naveli svojstvo monotonosti u odnosu na druga svojstva funkcije. Vertikalnu asimptotu racionalne funkcije su nacrtali neovisno o istaknutom području definicije funkcije i znatno češće nego horizontalnu asimptotu. S druge strane, rijetko su ispitivali limes racionalne funkcije u beskonačnosti, ali je svojstvo značajno povezano s isticanjem horizontalne asimptote. Pri izvrednjavanju eksponencijalne funkcije studenti su često prepoznali približavanje vrijednosti nekom broju, ali nisu istaknuli njezinu horizontalnu asimptotu na grafu.

Većina studenata je ispravno interpretirala zahtjev $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ horizontalnom asimptotom $y = 2$. Važno je kako su ga neki studenti pogrešno interpretirali nacrtavši vertikalnu asimptotu $x = 2$, što može upućivati na teškoće u tumačenju razlike argumenta i vrijednosti funkcije odnosno apscise i ordinate, kako je istaknuo prvi znanstvenik. Sličnu grešku su napravili neki studenti kod određivanja vertikalne asimptote racionalne funkcije zadane algebarski i grafički ili zadavanja uvjeta za vertikalnu asimptotu funkcije. Zahtjev monotonosti i omeđenosti funkcije na otvorenome intervalu su studenti uglavnom ispravno protumačili i povezali s postojanjem horizontalne asimptote.
Studenti su pokazali teškoće u interpretaciji zahtjeva u zadacima, kad je isti pravac tangenta i asimptota grafa funkcije ili hiperbole i pribjegavali su različitim neprimjerenim rješenjima. Primjerice, zanemarili su uvjet da pravac bude tangenta pri crtanju grafa funkcije, nisu diskutirali da je pri određivanju jednadžbe tangente hiperbole rezultat jednadžba asimptote hiperbole ili su crtali generičku tangentu i asimptotu. S druge strane, studenti su napisali kako je isti pravac tangenta i asimptota hiperbole, ali nije jasno kakvu *teoriju* tu podrazumijevaju. Zahtjev crtanja grafa funkcije kojemu je isti pravac tangenta i asimptota su najbolje ostvarili studenti koji su nacrtali racionalnu funkcije s dvije vertikalne asimptote i različitim horizontalnim asimptotama u negativnoj i pozitivnoj beskonačnosti, gdje se tangencijalnost i asimptotsko približavanje ostvaruju na *različitim dijelovima* istog pravca.

Studenti su često koristili tehniku crtanja grafa funkcije povlačenjem krivulje kroz odgovarajuće točke u koordinatnom sustavu. U odnosu na druge primijenjene tehnike crtanje kroz točke pokazalo se neučinkovitim. Kod racionalne funkcije nacrtana krivulja nije odgovarala slici zadane funkcije i zanemarena je horizontalna asimptota, a kod eksponencijalne funkcije pogrešno izvrednjavanje rezultiralo je netočnom krivuljom. Veći broj određenih točaka funkcije nije doprinio točnosti nacrtane krivulje. Studenti su određivali primjerene točke ovisno o zadanoj funkciji (kod racionalne funkcije su odredili nultočku i odsječak na ordinati, dok kod eksponencijalne nisu odredili nultočku koja postoji, ali su odredili odsječak na ordinati i vrijednost za argument 1). Studenti su za crtanje grafa jednostavne racionalne funkcije često ispitivali vrijednosti prve derivacije, što je istaknuta komponenta tehnike dostupne u udžbenicima. Važno je napomenuti kako su neki studenti pogrešno interpretirali monotonost iz predznaka funkcije umjesto predznaka prve derivacije. Ispitivanje prve derivacije je u kombinaciji s drugim komponentama toka funkcije učinkovita tehnika za crtanje grafa funkcije. Ističu se studenti koji su ispitali područje definicije i limes funkcije u beskonačnosti, ispravno istaknuli vertikalnu i horizontalnu asimptotu, ali su nacrtali

pogrešan graf funkcije. Ovo je u skladu sa mišljenjem prvog znanstvenika kako druga svojstva funkcije, u ovom slučaju monotonost, trebaju pomoći određivanju položaja krivulje u odnosu na asimptote. Ipak, u danom zadatku treba uvažiti kako se radi o pravoj racionalnoj funkciji koja je kvocijent polinoma prvog stupnja i očekuje se nacrtati njezin graf transformacijama temeljnog grafa. Zasebno ispitivanje prve derivacije nije nužno za crtanje padajuće krivulje, ali jest dovoljno. Studenti su rijetko crtali graf eksponencijalne funkcije s obzirom na istaknuta svojstva ili transformacijama temeljnog grafa što se pokazalo učinkovitim tehnikama, u smislu jednostavnosti postupka i točnosti dobivenih rješenja. Kod racionalne i eksponencijalne funkcije određivanje ili prepoznavanje horizontalne asimptote funkcije značajno je doprinijelo crtanju točnog grafa funkcije. Studenti su bili uspješni u određivanju asimptota i crtanju hiperbole, što su često spomenuli među prakseologijama vezanim uz asimptotu. Popularna je tehnika crtanja hiperbole koja je istaknuta u udžbenicima.
Studenti nisu uzimali u obzir svojstva funkcije i graf temeljne funkcije, bilo za tehnike crtanja ili provjeru valjanosti nacrtane krivulje, nisu koristili strukturu algebarskog izraza za određivanje asimptota ili za crtanje grafa funkcije transformacijama te nisu precizni pri grafičkom prikazivanju asimptotskog približavanja ili ponašanja funkcije u beskonačnosti. Slični rezultati su pronađeni u Zarhouti i sur. (2014).

Studenti su se, slično kao kod Williams (1991), pouzdali u očitavanje informacija s grafičkog prikaza, uključujući jednadžbe asimptota. Studenti su asimptotu često određivali uvježbanim *praxisom* izvrednjavanja formula za koeficijente pravca pomoću limesa. Kod nerutinskih zahtjeva pribjegavali su postupcima algebarsko-analitičkog umjesto infinitezimalnog pristupa. Dostupan je, ali podzastupljen *praxis* ispitivanja graničnog ponašanja funkcije izvrednjavanjem limesa u beskonačnosti ili interpretiranjem vrijednosti algebarskog izraza, posebno s obzirom na nepotpuni količnik. Takav *praxis* se češće javljao u netipičnim zadacima, kod određivanja asimptotske parabole ili asimptote oscilirajuće funkcije. Studenti su često koristili pogrešan zapis kad bi iskazivali jednakost ponašanja funkcija u beskonačnosti.

Za asimptotsku parabolu kao generalizaciju pojma asimptote izvrednjavanje formula pomoću limesa se pokazalo kao najmanje učinkovita tehnika određivanja jednadžbe asimptotske parabole. Određivanje asimptotske parabole iz nepotpunog količnika je rijetko prepoznato kao odgovarajuća tehnika za određivanje asimptotske parabole, ali se primjenjuje relativno često kao jednostavna, efikasna i dostupna alternativa. S druge strane, studenti su unatoč pogrešno provedenom *praxisu* određivanja asimptote oscilirajuće funkcije prilagodili svoje rješenje do točnog rezultata, možda svjesni graničnih vrijednosti pravila pridruživanja funkcije. Rijetko su dali diskurs, tada su ispravno opisali vrijednosti izraza, češće neformalnim nego formalnim infinitezimalnim računom. Dostupan je diskurs položaja grafa funkcije u odnosu na pravac koji je asimptota, što se može povezati s ponuđenim opisom asimptote kao pravca koji određuje smjer krivulje.

Studenti nisu skloni primijeniti limes u nepoznatim matematičkim situacijama, za određivanje ponašanja funkcije u beskonačnosti ili kao diskurs rješenja, primjerice za opisivanje asimptotskog ponašanja vrijednosti. Rijetko su koristili limes kako bi dali uvjet postojanja vertikalne asimptote ili formule za koeficijente asimptotske parabole, a kad jesu čine to pogrešno. Poistovjetili su postojanje vertikalne asimptote s izuzimanjem vrijednosti iz područja definicije funkcije te slično kao kod znanja za poučavanje zanemareni su primjeri funkcija koje imaju uklonjivi prekid. Studenti nisu uvažili različite vrste prekida funkcije.

Studenti su koristili *praxis* određivanja jednadžbe tangente hiperbole kroz zadanu točku, koji je uobičajen prema znanju za poučavanje, iako su utvrdili kako je neprimjeren u danoj situaciji. Zbog očito pogrešnog rezultata, studenti su dvojili o rješenju i postavljenom zadatku, ali ne i primijenjenom *praxisu*, slično kao u Hardy (2009, 2011). Nisu svjesni *logosa* skupova točaka u odnosu na položaj prema hiperboli i broja tangenti kroz točke, što je naglasio drugi znanstvenik.

Studenti su rijetko ponudili diskurs o matematičkim objektima, bilo zbog nedostatka potrebnog *logosa* i *praxisa* ili nedostatka navike diskurzivnog podržavanja matematičkih aktivnosti, slično kao kod Mok (1999). Uglavnom su dali trivijalna umjesto formalnih obrazloženja i pri tom nisu konzistentni niti matematički korektni, primjerice kod formula za koeficijente kose asimptote. Matematičke alate nisu koristili spretno niti korektno. Studenti su bili uspješniji i češće su provodili isključivo praktične aktivnosti te su sigurniji i točniji kad koriste analitičko-algebarski pristup. Koristili su neprimjereni *praxis* u naizgled rutinskim zadacima, a kod nerutinskih zadataka pribjegavali su tipičnim rješenjima, slično kao u Hardy (2009, 2011), ali i tehnikama koje su efikasnije od tipičnih.

Istraživačko pitanje 4. Koji su uvjeti i ograničenja na realizaciju REM-a za objekt znanja asimptote u gimnazijskom obrazovanju u RH?

U ovom istraživanju kod reprezentanata stečenog znanja i znanja za poučavanje fokus je na pojedinačnim matematičkim problemima, objekti znanja se ne povezuju i ne nadograđuju. Asimptota, prakseologije i objekti znanja su identificirani sa sličnim značajkama zbog čega je evidentno kako su studenti opterećeni srednjoškolskim obrazovanjem. Polazni REM je uglavnom potvrđen rezultatima prakseološke analize udžbenika, upitnika sa studentima nastavničkog studija matematike ili intervjua sa znanstvenicima.

Prakseologije izvrednjavanja i crtanja grafa funkcije su značajne i dostupne u znanju za poučavanje, ali nepotpune i nepovezane s drugim objektima znanja. Mišljenja znanstvenika i prakseologije koje su ponudili studenti ukazali su kako je potrebno naglasiti **sva** svojstva funkcije i grafa funkcije u diskurzivnom bloku ovih prakseologija. Izvrednjavanje funkcije ili algebarskog izraza za argumente blizu ruba domene funkcije ili velike magnitude nije dostupno ili je rijetko zastupljeno u znanju za poučavanje. Rezultati stečenog znanja su pokazali kako je prakseologija iskoristiva i znanstvenici su iskazali mišljenje kako može doprinijeti interpretiranju asimptotskog ponašanja ili prepoznavanju formula za asimptote hiperbole. U skladu s rezultatima u Zarhouti i sur. (2014) izvrednjavanje i aproksimacija može doprinijeti preciznosti grafičkog prikazivanja asimptotskog ponašanja krivulje ili grafa funkcije.

Asimptota je intuitivno blizak pojam studentima, ali u skladu s komentarima znanstvenika, zanemarena je proizvoljnost odnosa asimptote i krivulje u konačnosti. Podrijetlo neprimjerenog diskursa je u upotrebi kolokvijalnog izraza *približavati*, naglašavanju odnosa \`asimptota ne siječe krivulju´ kod elementarnih funkcija i nedostatka raznolikih primjera asimptotskog ponašanja u udžbenicima. Izraz *priljubljivati* nije primjeren za opisivanje asimptote jer ima specifičnu interpretaciju u kontekstu odnosa krivulje i njezine tangente.

Tehnike crtanja grafa funkcije dostupne kod reprezentanata znanja za poučavanje i stečenog znanja odstupaju od predloženog REM-a. Rezultati stečenog znanja i stavovi ispitanih znanstvenika su priloženi u korist tehnika naglašenih u REM-u. Transformacije i uvažavanje istaknutih svojstava elementarnih funkcija pri crtanju grafova su primjerene, učinkovite tehnike i zahtijevaju razumijevanje. Sukladno znanju za poučavanje izvrednjavanje funkcije i crtanje grafa po odgovarajućim točkama predviđeni su za inicijalno upoznavanje funkcionalne ovisnosti određenog tipa i trebaju imati *raison d'être*, podrijetlo iz realnog konteksta, kako je predložio drugi znanstvenik, a dostupno je u drugom setu udžbenika,.

Dijeljenje polinoma nije dijelom aktualnog nastavnog programa gimnazijskog obrazovanja. Legitimitet ovog *praxisa* za određivanje asimptota racionalnih funkcija dobiven je od rezultata epistemoloških istraživanja i stečenog znanja. Prakseologije su alternativa prijedlogu prvog znanstvenika za uvođenje diferencijalnih jednadžbi kako bi se objasnilo asimptotsko ponašanje funkcija, daju *raison d'être* tehnici dijeljenja polinoma i mogu se pravdati angažiranjem prakseologija infinitezimalnog računa.

Znanje za poučavanje odstupa od polaznog REM-a i stavova znanstvenika pri formalnom uvođenju asimptote u sljedećim aspektima:

1. asimptota je sadržana u udžbeničkoj jedinici ispitivanja toka funkcije umjesto u udžbeničkoj jedinici limesa i graničnog ponašanja funkcije,
2. formule za jednadžbe asimptota funkcije su dane kao *gotovo pravilo*.

Opisana nedosljednost se javila u rezultatima stečenog znanja kod popisivanja prakseologija vezanih uz asimptotu i kod neprimjerenog tumačenja spomenutih formula.

Nedostatak diskursa *praxisu* izvrednjavanja limesa algebarskih izraza i nedostatak primjene limesa za rješavanje problema realnog i matematičkog konteksta prisutan je u znanju za poučavanje, posljedično u rezultatima stečenog znanja na što i upozorava drugi znanstvenik. Prijedlog prvog znanstvenika o uključivanju L'Hospitalovog pravila u znanje za poučavanje nije primjeren REM-u jer se fokus opet prebacuje na *praxis* izračunavanja. Vrijednosti nedostupnih limesa mogu se odrediti pozivanjem drugih prakseologija, odnosno kako je prvi znanstvenik istaknuo, iz ostalih svojstava funkcije.

Objekt znanja asimptote je diskurzivno određen objektom znanja limesa. Rezultati stečenog znanja su pokazali kako studenti imaju slične teškoće i miskoncepcije u realizaciji asimptote kao objekta znanja kakve su prepoznate u prethodnim istraživanjima limesa – nedostižnost, dinamički pristup te da vrijednosti funkcije i asimptote ne mogu biti jednake. Nadalje, epistemološka istraživanja i znanstveni izvori pokazuju kako prevladava interpretacija asimptote kao pravca kojemu se krivulja približava i ne dostiže (Roh, 2008; Williams, 1991).

Sličnost pojmova konvergencije i asimptote nije dijelom znanja za poučavanje niti stečenog znanja, ali ju znanstvenici ističu kao značajnu poveznicu. Drugi znanstvenik je podržao realizaciju prakseologija kako je predloženo u polaznom REM-u. Nadalje, asimptotsko ponašanje vrijednosti u vjerojatnosnim pokusima, što je drugi znanstvenik predložio implementirati, nije dijelom polaznog REM-a jer odgovarajući nastavni sadržaj nije aktualan u nastavnom programu gimnazijskog obrazovanja.

Izvrednjavanje jednadžbe hiperbole i crtanje hiperbole su dostupni u znanju za poučavanje i odgovaraju značajkama danima u REM-u, ali su izrazito zanemareni u odnosu na algebarsku manipulaciju i izvrednjavanje jednadžbi geometrijskih objekata i formula **bez istaknutog diskursa**. Zanemaren je diskurs o skupovima točaka i broju tangenti kroz točku s obzirom na njezin položaj prema hiperboli u udžbenicima i posljedično neprimjerene prakseologije su se javile kod reprezentanata stečenog znanja. Drugi znanstvenik je podržao prakseologije predložene u REM-u, posebice izvrednjavanje jednadžbe hiperbole i asimptote ili konstrukciju hiperbole za utvrđivanje odnosa hiperbole i njezinih asimptota. Prijedlog znanstvenika o demonstriranju hiperbole i njezinih asimptota na presjeku konusa može poslužiti kao motivacija za definiciju objekta znanja, ali prednost ima realni kontekst koji daje *raison d'être* novom objektu znanja.

Tangenta krivulje u beskonačnoj točki je objekt znanja koji je izgubio najviše izvornog značenja pri didaktičkoj transpoziciji. Oba znanstvenika ovome pojmu nisu dali vrijednost niti ga smatraju poučljivim. Treba istaknuti kako ispitanim znanstvenicima geometrija nije područje znanstvenog niti nastavnog interesa. Studentima je diskurs nepoznat, ali blizak jer nerijetko koriste slične, odgovarajuće izraze za opisivanje asimptote. S druge strane, u udžbeniku drugog seta se spominje takva definicija asimptote u kontekstu eksponencijalne i logaritamske funkcije te poziva takav diskurs u prakseologiji određivanja tangenti na hiperbolu kroz zadanu točku. Objekt znanja pripada REM-u jer je značajan kao komponenta diskursa o asimptoti hiperbole i jer se za potvrđivanje i obrazlaganje diskursa angažiraju prakseologije različite naravi i iz različitih područja.

7. ZAKLJUČCI

Relacije $R_U(p,A)$, $R_S(p,A)$ i $R_M(p,A)$ su interpretirane s obzirom na analizu udžbenika, upitnike sa studentima i intervju sa znanstvenicima. Rezultati provedenog istraživanja pokazuju kako polazni referentni epistemološki model, u većoj mjeri, primjereno i valjano opisuje perspektivu realizacije objekta znanja asimptota u gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj. Iznijet će se doprinosi rada sa stajališta *poučavanog znanja*, *znanja za poučavanje* i korpusa epistemoloških istraživanja.

U prvom slučaju, predlažu se takve intervencije u nastavi matematike koje se mogu ostvariti u sadašnjem kontekstu gimnazijskog matematičkog obrazovanja. To znači da uvažavaju stanje relacije $R_U(p,A)$, usklađene su s relacijom $R_M(p,A)$ i REM-om te mogu pospješiti razvoj relacije $R_S(p,A)$. Stoga se predlaže:

(1) Kod elementarnih funkcija, *praxis* izračunavanja vrijednosti funkcije treba upotpuniti grafičkim prikazom i *logosom* toka funkcije. Sva značajna globalna svojstva funkcije (područje definicije, točke prekida, monotonost, omeđenost, ponašanje u beskonačnosti, asimptote, parnost, periodičnost, simetričnost, injektivnost, surjektivnost, kompozicija, inverz) treba izgraditi, interpretirati i primjenjivati u algebarskoj, grafičkoj i numeričkoj reprezentaciji, opisivati ih u realnom i formalnom kontekstu te povezati s lokalnim svojstvima funkcije (limes u točki i u beskonačnosti, neprekidnost i derivabilnost).

(2) Za razvijanje *logosa* svojstava i toka elementarnih funkcija važno je uspostaviti odnose među pojedinim svojstvima funkcije. Primjerice, za pojam asimptote je značajno horizontalnu asimptotu povezati sa stagnacijom ili stabilizacijom vrijednosti te limesom funkcije u beskonačnosti; postojanje vertikalne asimptote suprotstaviti uklonjivim prekidima i slično.

(3) Kao dio *praxisa*, asimptota se može primijeniti pri crtanju grafa funkcije ili krivulje te kako bi se odredile vrijednosti funkcije za argumente blizu ruba domene ili velike magnitude odnosno koordinate točaka krivulje velikih magnituda. Ispravno grafičko prikazivanje asimptotskog ponašanja može biti potaknuto postojanim izvrednjavanjem funkcije za argumente sve bliže točki prekida odnosno sve veće magnitude.

(4) Za razvijanje *logosa* asimptote potrebno je asimptotu neformalno opisati kod grafa i vrijednosti elementarnih funkcija. Izraz *približavati* je primjeren za takav diskurs, ali nije potrebno naglašavati obilježje „ne dodiruje krivulju“ i onda kada je ispravno u danom kontekstu. Prelazak s neformalnog na formalni opis asimptota pomoću limesa nije jednostavan. Izgradnji formalnog diskursa mogu doprinijeti prakseologije grafičkog prikazivanja krivulje i asimptote, izvrednjavanja ordinate točaka krivulje i asimptote za istu apscisu te određivanja udaljenosti točaka krivulje do njezine asimptote, kad točka krivulje teži

u beskonačnost.

(5) U području Analitička geometrija, za *logos* asimptote hiperbole potrebno je uspostaviti jasnu poveznicu između jednadžbe asimptote hiperbole, vrijednosti koordinata točaka hiperbole kad se točka hiperbole udaljava od ishodišta i grafičkog prikaza hiperbole i njezine asimptote.

U drugom slučaju, ističu se komponente REM-a koje se mogu implementirati u obrazovnom sustavu uz odgovarajuću potporu *noosfere*. To su takve intervencije koje streme razvijanju relacije $R_U(p,A)$ kako bi bila usklađena s REM-om i relacijom $R_M(p,A)$ i imaju uporište u trenutnom stanju relacije $R_S(p,A)$. Osim prijedloga navedenih u prethodnom odlomku, ovdje se ističe:

(6) Korpus funkcija koje se izvrednjavaju ili prikazuju grafički treba biti raznolik, imati značajno, matematičko ili realno, podrijetlo te pozivati i implementirati diskurs ponašanja vrijednosti funkcije. Utvrđena svojstva funkcije treba koristiti za grafičko prikazivanje elementarnih funkcija. Posebno je značajno odabrati tehniku i koristiti svojstva koja su najprimjerenija za danu funkciju. Ispitivanje toka funkcije alatima infinitezimalnog računa za prakseologiju grafičkog prikazivanja i druge zadatke, treba biti predstavljeno kao tehnika primjerena složenijim funkcijama.

(7) Kod infinitezimalnog računa, potrebno je *praxisu* izračunavanja limesa funkcija i algebarskih izraza pridružiti diskurzivne komponente. Primjerice, ispravna formalna definicija vertikalne asimptote može biti posljedica izvrednjavanja limesa i grafičkog prikazivanja racionalnih funkcija s različitim vrstama prekida. Potrebno je dati *raison d'être* prakseologiji određivanja limesa. U tom pogledu, formule za jednadžbe asimptota je primjereno dokazati u gimnazijskom obrazovanju. Nadalje, istraživanje ponašanja dvaju funkcija, izvrednjavanje, grafičko prikazivanje i ispitivanje limesa funkcije (razlike, kvocijenta ili drugo) može pomoći razumijevanju asimptotskog ponašanja i općenito odnosa među funkcijama. Primjerice, odrediti formulu za koeficijent *b* asimptotske parabole $y = ax^2 + bx + c$ racionalne funkcije.

(8) Za razvijanje *logosa* o odnosu asimptote i krivulje, može se u nižim razredima gimnazijskog obrazovanja osloniti na crtanje grafa i izvrednjavanje netipičnih i različitih funkcija kako bi se demonstrirali mogući odnosi asimptote i krivulje. Nadalje, izvrednjavanje nizova i različita ponašanja vrijednosti konvergentnih nizova mogu doprinijeti razumijevanju asimptotskog ponašanja funkcija i krivulja.

(9) U području Funkcija, tehnika određivanja asimptota racionalnih funkcija s obzirom na nepotpuni količnik polinoma u brojniku i nazivniku funkcije je učinkovita i korisna. Može dati smisao *praxisu* crtanja grafa funkcije transformacijama, *praxisu* dijeljenja polinoma te

potaknuti diskurs neformalnog infinitezimalnog računa i dati *raison d'être* pojmu polinomijalnih asimptota ili asimptotskog ponašanja funkcija.

(10) U udžbenicima je potrebno prebaciti naglasak s izvrednjavanja, izračunavanja i manipuliranja složenim algebarskim izrazima i jednadžbama na grafičko prikazivanje, angažiranje svojstava funkcije, interpretaciju vrijednosti i toka funkcije ili krivulje. Korisno je smanjiti broj instanci jednostavnih, izoliranih, praktičnih i nepovezanih punkt-prakseologija slaganjem sveobuhvatnih, povezanih, lokalnih prakseologija koje ispituju sva svojstva, pregledavaju sve mogućnosti i iskorištavaju sve primjene jednog matematičkog objekta znanja.

Konačno, doprinosi ovog rada za korpus epistemoloških istraživanja matematičkog obrazovanja su višestruki. Po prvi puta su utvrđeni uvjeti i ograničenja realizacije matematičkih objekata znanja u kontekstu vanjske transpozicije prema gimnazijskom obrazovanju u Republici Hrvatskoj. Implikacije za nastavnu praksu su već navedene.

Referentni epistemološki model nije potvrđen, niti opovrgnut, za prakseologije unutar područja Analitička geometrija. Ustanovljena su odstupanja relacije $R_U(p,A)$ od REM-a i ispitani znanstvenici nisu pružili odgovarajuća akademska znanja. Analitička geometrija je prikladno područje za istraživanje i potvrđivanje različitih definicija objekta znanja asimptota, koje su pronađene u literaturi. Jednadžba asimptote se može pravdati neformalnim i formalnim infinitezimalnim računom s obzirom na (1) udaljenost točaka hiperbole do pravca, (2) eksplicitni izraz za ordinatu točke hiperbole ili (3) jednadžbu tangente u točki hiperbole kad apscisa točke teži u beskonačnost. Nadalje, interpretacija asimptote kao tangente u beskonačnosti upotpunjuje *logos* o broju tangenti na koniku kroz točku izvan konike, koji je zastupljen u znanju za poučavanje. Te komponente nisu uklonjene iz REM-a jer u relaciji $R_S(p,A)$ postoji naznaka kako su ostvarivi. Potrebno ih je dalje propitati i vrednovati od strane znanstvenika koji mogu pružiti relevantne informacije u tom matematičkom području, primjerice geometara, te u kontekstu sveučilišnog obrazovanja nastavnika matematike.

Sukladno prethodnim istraživanjima matematičkog obrazovanja, potvrđeno je kako se prakseološka oprema studenata nastavničkog studija matematike uvelike slaže s prakseološkom organizacijom udžbenika odnosno realizacijom znanja za poučavanje u srednjoškolskom obrazovanju. Osim toga, analizirani udžbenici imaju slične karakteristike kakve su prepoznate u prethodnim istraživanja, a koje ometaju razvijanje matematičkog znanja: nedostatak odgovarajućeg *logosa* ili *praxisa* objekta znanja, naglašavanje praktičnih aktivnosti i/ili zanemarivanje diskurzivnih aktivnosti, nemogućnost povezivanja i usustavljivanja prakseologija te nepoznavanje *raison d'être* objekta znanja.

Daljnja analiza stečenog znanja studenata iz perspektive drugih teorijskih okvira i s fokusom na druge objekte znanja treba biti usmjerena na različite reprezentacije matematičkog objekta znanja (jezična, tablična, simbolička, numerička, grafička, algebarska i druge reprezentacije), različite perspektive o pojmovima funkcija, graf i svojstva funkcije (perspektiva po točkama, lokalna i globalna perspektiva) te izgradnju formalnog matematičkog diskursa.
Za doprinos teorijskom okviru pokazalo se kako je prakseološka analiza prikladan metodološki alat za istraživanja matematičkog obrazovanja jer omogućuje ispitivanje i opisivanje kada (na temelju kojih zadataka), što (kojim postupcima), kako (zašto je takav postupak primjeren) i zašto (koja je teorijska potpora tog postupka) pojedinac ili institucija čini u svakoj komponenti obrazovnog sustava.

Asimptota i asimptotsko ponašanje je takav objekt znanja koji se može iskoristiti za razvijanje matematičkog diskursa obrazlaganjem praktičnih aktivnosti ili formalnim pravdanjem rješenja zadataka, tehnika i teorijskih sadržaja te za povezivanje relevantnih prakseologija različitog podrijetla. S obzirom na manjak diskursa u odgovorima studenata nužno je takve aktivnosti poticati već u srednjoškolskom obrazovanju. Sustav koji obuhvaća i utječe na nastavnu praksu potrebno je, jednako kao aktere obrazovanja, stalno pratiti, podvrgavati istraživanju i vrednovati kako bi se pravovremeno uočile poteškoće i aktivirale neophodne promjene. Promjene u obrazovanju se moraju događati na razini društva, ali kako bi bile uspješne moraju biti temeljene na empirijski vrednovanim intervencijama unutar učionice.

LITERATURA

Algèbre et trigonométrie. (1964). Paris: Ligel.

Anić, V. i Goldstein, I. (2007). Asimptota. *Rječnik stranih riječi*. Zagreb: Europapress holding, Novi liber.

Antoliš, S., Copić, A., & Antončić, N. (2008a). Matematika 4, 1. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije. Zagreb: Školska knjiga.

Antoliš, S., Copić, A., & Antončić, N. (2008b). Matematika 4, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije. Zagreb: Školska knjiga.

Antončić, N., Špalj, E., Antoliš, S., & Volenec, V. (2008). Matematika 3, 1. dio, udžbenik za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije. Zagreb: Školska knjiga.

Antončić, N., Špalj, E., Antoliš, S. i Volenec, V. (2008). *Matematika 3, 2. dio, udžbenik za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije*. Zagreb: Školska knjiga.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. i Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1/3), 235–268.

Bender, E. A. (1974). Asymptotic Methods in Enumeration. *SIAM Review, 16*(4), 485–515.

Bergé, A. (2007). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 217–235.

Biza, I., Christou, C. i Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53–70.

Biza, I. i Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218–229.

Bosch, M. (2012). Doing research within The anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. Rad predstavljen na 12th International Congress on Mathematical Education, Seul, Korea. Preuzeto s http://www.icme12.org/upload/submission/1996_F.pdf

Bosch, M., Chevallard, Y. i Gascón, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. U *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (str. 1254–1263). Sant Feliu de Guíxols, Spain. Preuzeto s http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG11.pdf

Bosch, M. i Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction, 58*, 51–65.

Bosch, M. i Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). U A. Bikner-Ahsbahs i S. Prediger (Ur.) , *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (str. 67–83). Springer International Publishing.

Chevallard, Y. (1981). The Didactics of Mathematics : Its Problematic and Related Research. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *2*(1), 146–158.

Chevallard, Y. (1988). On Didactic Transposition Theory: Some Introductory Notes (str. 51–62). Rad predstavljen na International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education, Bratislava. Preuzeto s http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/

Chevallard, Y. (1992). A Theoretical Approach to Curricula. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *13*(2–3), 215–230.

Chevallard, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics education. U *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (str. 21–30). Sant Feliu de Guíxols, Spain. Preuzeto s http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_2_Plenaries.pdf#page=3

Chevallard, Y. (2007). Readjusting Didactics to a Changing Epistemology. *European Educational Research Journal*, *6*(2), 131–134.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. U S. J. Cho (Ur.) , *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Séoul. Preuzeto s http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf

Chevallard, Y. i Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. U S. Lerman (Ur.) , *Encyclopedia of Mathematics Education* (str. 170–174). Springer Netherlands.

Chevallard, Y. i Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. U S. Lerman (Ur.) , *Encyclopedia of Mathematics Education* (str. 38–43). Springer Netherlands.

Cohen, L., Manion, L. i Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education, 7th Edition* (6th ed.). Oxon: Routledge.

Cornu, B. (1991). Limits. U D. Tall (Ur.) , *Advanced Mathematical Thinking* (str. 153–166). New York: Kluwer academic publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. i Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167–192.

Dakić, B., & Elezović, N. (2006a). Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije, 1. dio. Zagreb: Element.

Dakić, B., & Elezović, N. (2006b). Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije, 2. dio. Zagreb: Element.

Dakić, B., & Elezović, N. (2007a). Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije, 2. dio. Zagreb: Element.

Dakić, B., & Elezović, N. (2007b). Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio. Zagreb: Element.

De Bruijn, N. G. (1958). *Asymptotic methods in analysis*. Amsterdam: North-Holland

Publishing.

Dobbs, D. E. (2010). Polynomial asymptotes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(7), 943–950.

Dobbs, D. E. (2011). Polynomial asymptotes of the second kind. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(2), 276–282.

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, *2*, 41–47.

García, F. J., Pérez, J. G., Higueras, L. R. i Casabó, M. B. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, *38*(3), 226–246.

García, F. J. i Ruiz Higueras, L. (2005). Mathematical praxeologies of increasing complexity. U *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (str. 1645–1654). Sant Feliu de Guíxols, Spain. Preuzeto s http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/13/GarciaRuiz.pdf

Giblin, P. J. (1972). What is an Asymptote? The Mathematical Gazette, 56(398), 274–284.

González-Martín, A. S., Giraldo, V. i Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230–248.

Graham, R. L., Knuth, D. E. i Patashnik, O. (1988). *Concrete mathematics: a foundation for computer science*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Gusić, J., Mladinić, P., & Pavković, M. (2008). Matematika 2, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije. Zagreb: Školska knjiga.

Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level Calculus courses. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 341–358.

Hardy, N. (2011). Students' praxeologies of routine and non-routine limit finding tasks: Normal vs. mathematical behaviour. U M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M.

Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, … M. Larguier (Ur.) , *Un panorama de la TAD: An overview of ATD* (Vol. 10, str. 349–366). Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1261–1279.

Kurikularni pristupi promjenama u gimnaziji, Razrada okvirnog nastavnog plana i programa u funkciji rasterećenja učenika, Prirodno-matematičko-informatičko područje. (2003). Zagreb: Ministarstvo prosvjete i športa, Zavod za unapređivanje školstva.

Mok, I. A. C. (1999). Learning Opportunities with Graphing Calculators: The Case of Asymptotes. Rad predstavljen na Asian Technology Conference in Mathematics, Guangzhou, China.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20–24.

Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje. (2011). Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa.

Pavković, B. i Veljan, D. (1995). *Elementarna matematika 2*. Zagreb: Školska knjiga.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217–233.

Rutter, J. W. (1935). *Projective curves*. Boca Raton: Chapman & Hall.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics* (Vol. 2). Dover.

Swinyard, C. i Larsen, S. (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465–493.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. U D. A. Grouws (Ur.) , *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (str. 495–511). New York: Macmillan.

Tall, D. i Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. U D. Tall (Ur.) , *Advanced Mathematical Thinking* (str. 65–81). New York: Kluwer academic publishers.

Vinner, S. (2014). Concept Development in Mathematics Education. U S. Lerman (Ur.) , *Encyclopedia of Mathematics Education* (str. 91–96). Springer Netherlands.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219–236.

Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena. U M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, … M. Larguier (Ur.) , *Un panorama de la TAD: An overview of ATD* (Vol. 10, str. 117–138). Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Winsløw, C. (2013). The Transition from University to High School and the Case of Exponential Functions. U *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (str. 2476–2485). Antalya, Turkey. Preuzeto s http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14_Winslow.pdf

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(1), 1–25.

Zarhouti, M. K., Mouradi, M. i Maroufi, A. E. (2014). The teaching of the function at high school: The graphic representation of a function at first year, section experimental sciences. *IOSR Journal of Research & Method in Education*, *4*(3), 56–65.

Zeng, G. (2007). Computing the asymptotes for a real plane algebraic curve. *Journal of Algebra*, *316*(2), 680–705.

ŽIVOTOPIS

Ana Katalenić rođena je u Stocu u Bosni i Hercegovini 18. siječnja 1986. godine. Osnovnu školu i opću gimnaziju je završila u Čapljini u Bosni i Hercegovini. Godine 2004. upisala se na Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomski rad pod nazivom *Tvrdnje ekvivalentne Euklidovom petom postulatu* pisala je pod stručnim vodstvom prof. dr. sc. Mirka Polonija te je diplomirala 19. svibnja 2009. i stekla zvanje profesora matematike i informatike.

U razdoblju od 2007.-2009. godine održavala je nastavu matematike i informatike u Osnovnoj Montessori školi „Barunice Dedee Vranyczany". Zaposlenica je Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku od 1. srpnja 2009. u suradničkom zvanju asistent-znanstveni novak. Od tada održava nastavu kolegija iz područja informatike, matematike i metodike matematike te djeluje kao suvoditeljica izvannastavne aktivnosti za učenike četvrtog razreda osnovne škole s posebnim interesom za matematiku, *Male matematičke škole*. Bila je suradnica na projektu *Obrazovanje učenika s posebnim interesom za matematiku* pod vodstvom doc. dr. sc. Margite Pavleković i sumentor na nekoliko diplomskih radova iz područja metodike matematike.

Godine 2009. upisala je doktorski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Aktivna je članica poslijediplomskog Seminara za metodiku nastave matematike. Sudjelovala je na više domaćih i međunarodnih stručnih i znanstvenih skupova, kolokvija i konferencija te je koautorica nekoliko znanstvenih i stručnih radova.

Živi u Đakovu sa suprugom Matom i dvoje djece, kćeri Vitom i sinom Jurjem.

Popis objavljenih djela

Rački, Željko; Katalenić, Ana; Gregorović, Željko. (2015). Self-reported creativity of primary school teachers and students of teacher studies in diverse domains, and implications of creativity relationships to teaching mathematics in the primary school. U Kolar-Begović, Z., Kolar-Šuper, R., Đurđević Babić, I. (Ur.), Higher goals in mathematics education (str. 283-302). Osijek: Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Education and Department of Mathematics.

Janjatović, Ivana; Migles, Željka; Katalenić, Ana. (2015). *Numeričke sposobnosti učenika četvrtih razreda osnovne škole*. Matematika i škola, 17, 81; 34-37.

Nagy, Jelena; Kolak, Leona; Katalenić, Ana. (2015). *Slagalice u razrednoj nastavi*. Matematika i škola, 16, 79; 158-163.

Đurđević, Ivana; Mirković Moguš, Ana; Katalenić, Ana. (2013).Humour in teaching mathematics and computer science courses - yes or no? U Pavleković, Margita; Kolar-Begović, Z., Kolar-Šuper R. (Ur.), *Mathematics teaching for the future* (str. 271-281). Zagreb: Element.

Jukić Matić, Ljerka; Matić, Ivan; Katalenić, Ana. (2013) Approaches to learning mathematics in engineering study program. U Pavleković, Margita; Kolar-Begović, Z., Kolar-Šuper R. (Ur.), *Mathematics teaching for the future* (str. 186-195). Zagreb : Element, 2013.

Kolar, Vida Manfreda; Pavleković, Margita; Perić, Ana; Hodnik Čadež, Tatjana. (2011). Matematična pismenost z vidika razumevanja pojma neskončnosti pri študentih rezrednega pouka. U Cotič, Mara; Medved Dudović, Vida; Starc, Sonja (Ur.), *Razvijanje različnih pismenosti* (str. 188-201). Koper, Slovenija: Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta.

Perić, Ana. (2009). *Montessori iz prve ruke*. Matematika i škola, 11 , 51; 12-20.