University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Bojan Pažek

Computability of sets with disconnected complements

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2018

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Bojan Pažek

Izračunljivost skupova s nepovezanim komplementima

DOKTORSKI RAD

Mentor:
izv.prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Bojan Pažek

Computability of sets with disconnected complements

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Assoc. Prof. Zvonko Iljazović, PhD

Zagreb, 2018

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Bojan Pažek

Izračunljivost skupova s nepovezanim komplementima

Doktorska disertacija

Voditelj: dr. sc. Zvonko Iljazović, izv. prof.

Zagreb, 2018.

Ova disertacija je predana na ocjenu Prirodoslovno - matematičkom fakultetu - Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Zahvala

Tijekom izrade ove doktorske disertacije podršku i pomoć pružili su mi prijatelji kojima ovim putem iskazujem zahvalu.

Prije svega zahvaljujem se svojoj supruzi, *Ivani Pažek*, koja mi je bila čvrsti oslonac na čitavom doktorskom studiju. Njeno društvo pomaže mi prepoznati maštovitost unutar matematike te mi uvijek iznova otkriva kako matematika uzvraća ljubav onome tko je voli i razumije.

Također, veliku zahvalu iskazujem svom mentoru, izv.prof.dr.sc. *Zvonku Iljazoviću*. Njegova pomoć pri studiranju na doktorskom studiju te pri samoj izradi ove doktorske disertacije bila je od izuzetne važnosti. Drago mi je da je naš odnos prerastao puki profesionalizam te je na koncu prešao u prijateljstvo koje će me pratiti kroz čitav život.

Naposljetku, svojim roditeljima, *Milanu* i *Mileni Pažek*, zahvaljujem što su mi omogućili da dođem do ovog trenutka. Zahvaljujući njima studirao sam matematiku, znanost koja me je oduvijek privlačila svojom profinjenošću i egzaktnošću. Oni su mi omogućili da ovaj doktorat postane stvarnost, a moja profesija užitak. Od srca im se na tome zahvaljujem.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja Bojan Pažek, student Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], [redacted], ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom: *Izračunljivost skupova s nepovezanim komplementima*, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, 19. lipnja 2018.

Potpis: Bojan Pažek

Sadržaj

Poglavlje 1.

Uvod

Ova doktorska disertacija spada u područje takozvane izračunljive analize. Matematička analiza promatra se u kontekstu klasične teorije izračunljivosti. Temelj klasične teorije izračunljivosti jest pojam izračunljive funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdje je skup $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ skup nenegativnih cijelih brojeva. Intuitivno govoreći, funkcija f jest izračunljiva, ako postoji algoritam (neko pravilo) pomoću kojeg za svaki prirodan broj $i \in \mathbb{N}$, možemo izračunati pripadnu funkcijsku vrijednost $f(i)$. Stoga pojam algoritma postaje fundamentalan objekt u izučavanju teorije izračunljivosti. Algoritam shvaćamo kao neki konačan niz jednostavnih naredbi, odnosno instrukcija. Izračunljiva analiza promatra koncepte realne i funkcionalne analize koji se mogu efektivno opisati na izračunljiv način - pomoću algoritma. Stoga klasična pitanja poput:

- Jesu li elementarne funkcije izračunljive?;
- Što se može kazati o uniji i presjeku izračunljivih skupova?;
- Kako „proširiti” koncepte izračunljivosti na općenite metričke, odnosno topološke prostore?...

u izračunljivoj analizi dobivaju svoj prostor za proučavanje.

Pretpostavlja se da je čitatelju ove doktorske disertacije barem na intuitivnom nivou blizak koncept klasične teorije izračunljivosti. Opširniji pregled ove teorije može se pronaći u literaturi [9, 23, 28, 29].

1.1. Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom poglavlju dajemo pregled nekih osnovnih i uglavnom dobro poznatih pojmova i rezultata, kako iz klasične teorije izračunljivosti tako i iz izračunljive analize, koji se koriste u disertaciji. Zbog lakšeg snalaženja i bolje čitljivosti, neka potrebna predznanja i motivacijski rezultati izostavljeni su u ovom početnom poglavlju, da bi bili dani unutar poglavlja u kojima se koriste. Napomenimo da ćemo definicije koje su nove (orginalne) i predstavljaju također jedan od doprinosa ove doktorske disertacije, istaknuti na način da ćemo ih navoditi u okolini definicija.

Za opći uvod u klasičnu teoriju izračunljivosti, čitatelja upućujemo na literaturu [28]. Također pretpostavljamo da je čitatelju ove doktorske disertacije blizak koncept izračunljive (rekurzivne) funkcije $f\colon\ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Budući je taj pojam fundamentalan u okviru teorije izračunljivosti, svakako se preporuča poznavanje *Uvodnog poglavlja* u [9].

Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je *izračunljiv (rekurzivan)* ako je njegova karakteristična funkcija $\chi_S\colon\ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljiva (vidi [9]).

Neka su $n, k \in \mathbb{N}, k, n \geq 1$. Reći ćemo da je funkcija $f\colon\ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ izračunljiva ako su joj komponentne funkcije $f_1, \ldots, f_n\colon\ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ izračunljive ([9]).

Neka je S podskup od $\mathbb{N}^k$. Kažemo da je S *izračunljivo (rekurzivno) prebrojiv* ako je $S = \emptyset$ ili ako je $S = \operatorname{Im} f$ za neku izračunljivu funkciju $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$.

Za početak izdvojimo dva rezultata iz klasične teorije izračunljivosti koji će biti od značajne važnosti u dokazima rezultata koje ćemo prezentirati kroz ovu doktorsku disertaciju (vidi [9]).

Važna karakterizacija izračunljivo prebrojivih podskupova od $\mathbb{N}$ dana je sljedećom propozicijom (vidi propoziciju 1 u [9]).

Propozicija 1.1.1. *Pretpostavimo da je S podskup skupa $\mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) Skup S je izračunljivo prebrojiv.

(ii) Skup S je domena neke parcijalno izračunljive (parcijalno rekurzivne) funkcije.

(iii) Postoji izračunljiv skup $T \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$S = \{x \in \mathbb{N} \ \mid \ \exists\, y \in \mathbb{N}, \quad (i, j) \in \ T\}.$$

Posebice stavljamo naglasak na sljedeću propoziciju iz klasične teorije izračunljivosti (vidi propoziciju 2 u [9]).

Propozicija 1.1.2. *Pretpostavimo da je $T \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ izračunljivo prebrojiv skup. Tada vrijedi:*

(i) Skup $\{x \in \mathbb{N}^n \ \mid \ \exists\, y \in \mathbb{N}^k$ takav da je $(x, y) \in \ T\}$ je izračunljivo prebrojiv.

(ii) Ako su $S_1 \subseteq \mathbb{N}^k$ i $S_2 \subseteq \mathbb{N}^n$ izračunljivo prebrojivi skupovi takvi da za svaki $x \in S_1$ postoji $y \in S_2$ sa svojstvom da je $(x, y) \in T$, onda postoji parcijalno izračunljiva funkcija $f\colon\ S_1 \to \mathbb{N}^n$ takva da vrijedi:

$$\begin{aligned} &f(S_1) \subseteq S_2, \\ &(x, f(x)) \in T, \ \forall\ x \in S_1. \end{aligned}$$

(iii) Za izračunljivo prebrojiv skup $S \subseteq \mathbb{N}^n$ te izračunljivu funkciju $f\colon\ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$, praslika skupa S, to jest skup $f^{-1}(S)$, jest izračunljivo prebrojiv.

Napomenimo da svaki izračunljiv skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ mora biti i izračunljivo prebrojiv, no obrat ne treba vrijediti (vidi primjer 8 i propoziciju 1 u [9]).

Za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoje izračunljive funkcije $a, b, c\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, takve da vrijedi sljedeće:

$$b(l) \neq 0, \ \forall\, l \in \mathbb{N}^k,$$
$$f(l) = (-1)^{c(l)} \frac{a(l)}{b(l)}, \ \forall\, l \in \mathbb{N}^k .$$

Sljedeća propozicija nam daje neka osnovna svojstva izračunljivih funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Za dokaz ove propozicije čitatelj može pogledati propoziciju 1.2 u [9] (te diskusiju nakon propozicije 1.2 u [9]).

Propozicija 1.1.3. *Neka su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive funkcije. Tada su funkcije $-f$, $f + g$ i $f \cdot g$ također izračunljive. Nadalje, ako je dodatno $f(x) \neq 0$, za sve $x \in \mathbb{N}^k$, onda je i funkcija $\frac{1}{f}$ izračunljiva.*

Nadalje, vrijedi sljedeća propozicija (vidi propoziciju 1.3 u [9]).

Propozicija 1.1.4. *Pretpostavimo da su $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive funkcije. Tada su skupovi $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$, $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq g(x)\}$ i $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$ izračunljivi (rekurzivni).*

Za funkciju $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoji izračunljiva funkcija $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|\ f(x) - F(x, l)\ | < 2^{-l}, \ \forall\, x \in \mathbb{N}^k, \ \forall\, l \in \mathbb{N} .$$

Kažemo da je funkcija F **izračunljiva aproksimacija** za funkciju f.

Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, označimo s $\langle a, b\rangle$ otvoreni interval određen točkama a i b. Dakle

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija za koju postoje izračunljive funkcije $F\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $H\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ te realan broj $q \in \langle 0, 1\rangle$ sa svojstvom da vrijedi sljedeće:

$$|\ f(x) - F(x, l)\ | < H(x) q^l, \ \forall\, x \in \mathbb{N}^k, \ \forall\, l \in \mathbb{N} .$$

Tada se lagano može pokazati da je funkcija f također izračunljiva (vidi [9]).

Sljedeći rezultat opisuje neka osnovna svojstva izračunljivih funkcija $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Ta ćemo svojstva često prešutno koristiti. Čitatelja upućujemo na *poglavlje 1* u literaturi [9].

Propozicija 1.1.5. *Pretpostavimo da su $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $f + g$, $f - g$ te $f \cdot g$ također izračunljive. Nadalje, skup definiran sa:*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > g(x)\}$$

je izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^k$.

Napomena 1.1.6. Neka je $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^n$ funkcija te neka su $f_1, \dots, f_n \, \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ njene komponentne funkcije, to jest funkcije takve da je $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Kažemo da je funkcija f **izračunljiva** ako su $f_1, \dots, f_n$ izračunljive funkcije. Slično i za funkciju $g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}^n$ kažemo da je *izračunljiva* ukoliko su njene komponentne funkcije $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ izračunljive.

Definicija koju dajemo u nastavku koncentrira se na ambijentni prostor nad kojim ćemo dokazivati naše rezultate. Ona predstavlja jedan od fundamnetalnih koncepata za istraživanje provedeno u ovoj doktorskoj disertaciji (više o samoj definiciji vidjeti u [1, 2, 9, 17, 29]).

Za uređenu trojku (X, d, α) kažemo da je **izračunljiv metrički prostor** ako je (X, d) metrički prostor, a $\alpha\colon \mathbb{N} \to X$ funkcija čija je slika gusta u (X, d) te vrijedi da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, definirana s:

$$(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$$

izračunljiva.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za točku $x \in X$ kažemo da je **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji neka izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi:

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Analogno, kažemo da je niz $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u X **izračunljiv** u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ako postoji neka izračunljiva funkcija $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$, za sve prirodne brojeve i, k.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $Y \subseteq X$. Za izračunljiv metrički prostor (Y, d', β) kažemo da je **izračunljiv metrički potprostor** od (X, d, α) ako je $d'\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ restrikcija metrike $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ i β je izračunljiv niz u (X, d, α) (vidi [4, 11]).

Primjer 1.1.7. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Za x kažemo da je *izračunljiv broj* ako postoji izračunljiva funkcija $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - F(l)| < 2^{-l}$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$ (vidi poglavlje 1.2 u [9]). Uočimo da je svaki racionalan broj izračunljiv jer je za $q \in \mathbb{Q}$ funkcija $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definirana s $F(l) := q$, za sve $l \in \mathbb{N}$ izračunljiva (konstantna funkcija).

Neka je $n \geq 1$ te pretpostavimo da je $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ izračunljiva funkcija čija je slika čitav $\mathbb{Q}^n$. Takva funkcija sigurno postoji (vidi primjer 2.18 u [4]). Tada je za euklidsku metriku d na $\mathbb{R}^n$, uređena trojka $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, izračunljiv metrički prostor (vidi Propoziciju 3.3 u [4]).

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ izračunljiv broj. Tada po definiciji postoji izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(k)| < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo skup S na sljedeći način:

$$S := \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \ |f(k+1) - \alpha(i)| < 2^{-(k+1)}\}.$$

Propozicija 1.1.4 nam povlači da je S izračunljiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, i) \in S$. Stoga postoji izračunljiva funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k) \in S$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ (vidi lemu 2.2.5 u [25]). Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kako je $(k, \varphi(k) \in S$ to je $|f(k+1) - \alpha(\varphi(k))| < 2^{-(k+1)}$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
|x - \alpha(\varphi(k))| &\leq |x - f(k+1)| + |f(k+1) - \alpha(\varphi(k))| \\
&< 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} \\
&= 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Dakle uočavamo da je x ujedno i izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

Napomenimo ovdje da je niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv u definiranom izračunljivom metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ako i samo ako je svaki komponentni niz od $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv kao funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$. Posebno, točka $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je izračunljiva u $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ ako i samo ako su $x_1, \ldots, x_n$ izračunljivi brojevi (vidi primjer 3.1 u [9]).

Često ćemo uređenu trojku $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$, definiranu u primjeru 1.1.7, zvati **izračunljiv euklidski prostor** (vidi Poglavlje 3.2 u [4]).

U metričkom prostoru (X, d), za $x \in X$ i $r > 0$, označimo sa $B(x, r)$ otvorenu kuglu radijusa r sa središtem u točki x. Dakle:

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \ d(x, y) < r\}.$$

Pripadnu zatvorenu kuglu označit ćemo sa $\hat{B}(x, r)$, to jest:

$$\hat{B}(x, r) := \{y \in X \mid \ d(x, y) \leq r\}.$$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Nadalje, neka je $n \in \mathbb{N}$ te $r \in \langle 0, \infty\rangle \cap \ \mathbb{Q}$. Skup oblika $B(\alpha_n, r)$ zvat ćemo **racionalna otvorena kugla** u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Konačnu uniju racionalnih otvorenih kugli, u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), zvat ćemo **racionalan otvoren skup**. Drugim riječima, to je skup oblika:

$$B(\alpha_{n_1}, r_1) \cup \ldots \cup B(\alpha_{n_k}, r_k),$$

za $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ te $r_1, \ldots r_k \in \langle 0, \infty\rangle \cap \ \mathbb{Q}$.

Sada ćemo opisati jednu efektivnu enumeraciju svih racionalnih otvorenih kugli u (X, d, α), koju ćemo prirodno označiti sa (I_i). Neka je $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka fiksirana izračunljiva funkcija takva da je $q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \ \cap \ \langle 0, \infty\rangle$. Funkcija q sigurno postoji (vidi primjer 1.1 pod (i) u [9]). Nadalje, neka su $\tau_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $\tau_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (vidi [9]) neke fiksirane izračunljive funkcije sa sljedećim svojstvom:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid \ i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.1}$$

Definiramo dva niza $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X te $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{Q}$ tako da stavimo:

$$\lambda_i := \alpha_{\tau_1(i)}, \qquad \rho_i := q_{\tau_2(i)}, \ \forall \ i \in \mathbb{N}\,.$$

Primijetimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki pozitivan racionalan broj r, uređeni par (α_n, r) jednak uređenom paru (λ_i, ρ_i) za neki $i \in \mathbb{N}$. Sada za $i \in \mathbb{N}$, definiramo:

$$I_i := B(\lambda_i, \rho_i).$$

Očito, $\{I_i\colon\ i \in \mathbb{N}\}$ predstavlja familiju svih racionalnih otvorenih kugli u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Također, za $i \in \mathbb{N}$ stavimo:

$$\hat{I}_i := \hat{B}(\lambda_i, \rho_i).$$

Nadalje, neka su $\sigma\colon\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke dvije fiksirane izračunljive funkcije takve da sljedeći skup:

$$\{(\sigma(j,0), \ldots, \sigma(j, \eta(j))) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

predstavlja skup svih nepraznih konačnih nizova u $\mathbb{N}$, to jest jednak je sljedećem skupu

$$\{(a_0, \ldots, a_n) \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}\}.$$

Konstrukciju funkcija σ i η moguće je naći u [9] (vidi primjer 9). Zbog jednostavnosti, umjesto $\sigma(j,i)$ pisat ćemo $(j)_i$, a umjesto $\eta(j)$ pišemo $\overline{j}$. Dakle

$$\{((j)_0, \ldots, (j)_{\overline{j}}) \mid j \in \mathbb{N}\} \tag{1.2}$$

predstavlja skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$. Također, za $j \in \mathbb{N}$, skup oblika

$$\{(j)_i \mid 0 \leq i \leq \overline{j}\}$$

označit ćemo s $[j]$.

Primijetimo da je svaki neprazan i konačan podskup od $\mathbb{N}$ jednak nekom skupu oblika $[j]$, za neki $j \in \mathbb{N}$. To jest, $\{[j] \mid j \in \mathbb{N}\}$ predstavlja familiju svih nepraznih i konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ stavimo:

$$J_j := \bigcup_{i \in [j]} I_i.$$

Uočimo da skupovi J_j predstavljaju konačne unije racionalnih otvorenih kugli. Također, $\{J_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ jest familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Sada ćemo opisati pojam izračunljivog skupa u izračunljivom metričkom prostoru.

Za zatvoren skup S u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je **izračunljivo prebrojiv** u (X, d, α), te pišemo S je c.e. (computably enumerable), ako je skup

$$\{i \in \mathbb{N} \mid S \cap I_i \neq \emptyset\} \tag{1.3}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α). Pretpostavimo da je skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi

$$S = \mathrm{Cl}(\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}). \tag{1.4}$$

Tada je S c.e. skup u (X, d, α) (vidi Teorem 2.2.14 u [25]). Napomenimo ovdje da sa $\mathrm{Cl}(A)$, za $A \subseteq X$, prirodno označavamo zatvarač skupa A u metričkom prostoru (X, d).

Može se pokazati (vidi [2, 11]) da u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) koji je ujedno i potpun, to jest svaki Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d) jest konvergentan u X, svaki neprazan c.e skup S nužno mora sadržavati izračunljivu točku. Štoviše, u tom slučaju, u (X, d, α) mora postojati izračunljiv niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa svojstvom da vrijedi:

$$S = \mathrm{Cl}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}).$$

Neka je nadalje $U \subseteq X$. Kažemo da je U **izračunljivo prebrojiv otvoren skup** u (X, d, α), te pišemo S je c.e. otvoren, ako postoji izračunljivo prebrojiv podskup A od $\mathbb{N}$ takav da je

$$U = \bigcup_{i\in A} I_i.$$

Za skup $S \subseteq X$ kažemo da je **koizračunljivo prebrojiv (zatvoren)** skup u (X, d, α), te pišemo S je co-c.e. (co-computably enumerable), ako je $X \setminus S$ c.e. otvoren skup u (X, d, α).

Naposlijetku, kažemo da je S **izračunljiv zatvoren** skup u (X, d, α) ako je S c.e. te co-c.e. skup u (X, d, α) (vidi [2, 29]).

U prvom dijelu ove doktorske disertacije bavit ćemo se izračunljivošću zatvorenih skupova, pa će nam prethodna definicija biti dovoljna u tom pogledu. No, u drugom te trećem dijelu ove disertacije bavit ćemo se izračunljivošću kompaktnih skupova. Stoga ćemo sada definirati pojam izračunljivog kompaktnog skupa. Takve skupove zvat ćemo naprosto izračunljivim skupovima (nećemo posebno naglašavati *izračunljivo kompaktan skup*, već ćemo pisati samo *izračunljiv skup*).

Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor te neka su $A, B \subseteq X$ i $\varepsilon > 0$ neki pozitivan realan broj. Pišemo

$$A \approx_\varepsilon B$$

ako za svaki $x \in A$ postoji neki $y \in B$ takav da je $d(x, y) < \varepsilon$ te ako za svaki $y \in B$ postoji neki $x \in A$ sa svojstvom da je $d(x, y) < \varepsilon$.

Uočimo da za gust skup D u (X, d) i proizvoljan neprazan kompaktan skup K u (X, d), za svaki $\varepsilon > 0$ možemo pronaći konačan podskup A od D takav da je $K \approx_\varepsilon A$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ stavimo:

$$\Lambda_i := \{\alpha_j \mid j \in [i]\}.$$

Uočimo da je familija $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ zapravo familija svih nepraznih konačnih podskupova od $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Pretpostavimo da je K proizvoljan kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Uočimo da ukoliko je skup K neprazan, onda zbog kompaktnosti skupa K, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \approx_{2^{-k}} \Lambda_i$. U tom kontekstu sljedeća definicija se prirodno nameće. Kažemo da je skup K **izračunljiv skup** u (X, d, α) ako je $K = \emptyset$ ili ako postoji neka izračunljiva funkcija $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$K \approx_{2^{-k}} \Lambda_{f(k)}, \ \forall\ k \in \mathbb{N}\,. \tag{1.5}$$

Općenito vrijedi da je svaki izračunljivo kompaktan skup S u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ujedno i izračunljiv zatvoren skup [12]. No, izračunljiv zatvoren skup, koji je ujedno i kompaktan, ne treba biti i izračunljiv skup, u kontekstu prethodno navedene definicije (vidi primjer 3.2. u [11]). Ipak, ukoliko izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) dodamo dodatno svojstvo *efektivnog pokrivanja* te svojstvo da su u promatranom metričkom prostoru (X, d) sve zatvorene kugle ujedno i kompaktne, onda za kompaktan skup S u (X, d) vrijedi sljedeća ekvivalencija (Propozicija 3.6 u [5]):

$$S \text{ izračunljiv skup} \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ izračunljiv zatvoren skup.} \tag{1.6}$$

Napomenimo ovdje, samo ukratko, da izračunljiv metrički prostor (X, d, α) ima **svojstvo efektivnog pokrivanja** ukoliko je skup definiran s

$$\left\{(w, j) \in\ \mathbb{N}^2 \mid\ \hat{I}_w \subseteq I_j\right\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ (više o svojstvu efektivnog pokrivanja čitatelj može pronaći u [2, 9]).

Posebno, ukoliko za ambijentni prostor uzmemo izračunljiv euklidski prostor, onda prethodna ekvivalencija (1.6) svakako vrijedi, budući izračunljiv euklidski prostor ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo kompaktnih zatvorenih kugli (vidi primjer 5.7 u [4], također vidi [9]). U prvom dijelu ove doktorske disertacije posebno će nas zanimati slučaj kada izračunljivom metričkom prostoru uklonimo ova dva navedena važna svojstva. U izvjesnom smislu, zanimat će nas što se o izračunljivosti skupa može kazati u tom slučaju.

Da bismo još malo razjasnili smisao relacije (1.5) uvest ćemo pojam *Hausdorffove metrike*. Neka je (X, d) metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{H}$ skup svih kompaktnih podskupova od (X, d). Tada definiramo **Hausdorffovu metriku** na $\mathcal{H}$, u oznaci ϱ kao:

$$\varrho(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \approx_\varepsilon B\}.$$

Sada, možemo kazati da je neprazan kompaktan skup K u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) izračunljiv ako i samo ako za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo efektivno naći konačno mnogo točaka $\alpha_{i_0}, \ldots, \alpha_{i_k}$ koji aproksimiraju skup K do na 2^{-k}, jasno u kontekstu Hausdrffove metrike, to jest da vrijedi:

$$\rho(K, \{\alpha_{i_0}, \ldots, \alpha_{i_k}\}) < 2^{-k}.$$

U nastavku opisujemo još jedan pristup poimanja izračunljivosti skupa koji koristi definiciju *poluizračunljivog* skupa te pojam *izračunljivo prebrojivog zatvorenog* skupa koji smo opisali relacijom (1.3). Ponavljamo ovdje da je u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), zatvoren skup S, izračunljivo prebrojiv, ako na efektivan način možemo prebrojati sve racionalne otvorene kugle koje sijeku skup S.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da je skup S **poluizračunljiv** ako je skup definiran s:

$$\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Dakle, možemo kazati da je skup S poluizračunljiv ako na efektivan način možemo prebrojati sve racionalne otvorene skupove koji prekrivaju skup S. Vrijedi sljedeća tvrdnja (za detalje dokaza, čitatelja upućujemo na članak [12]).

Propozicija 1.1.8. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S neprazan kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Tada je S izračunljiv u (X, d, α) ako i samo ako je skup S c.e. i poluizračunljiv.*

Nadalje, u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo kompaktnih zatvorenih kugli, za kompaktan skup S u metričkom prostoru (X, d) vrijedi sljedeća ekvivalencija (vidi Propoziciju 3.1 u [12] te [4]):

$$S \text{ poluizračunljiv skup} \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ koizračunljivo prebrojiv zatvoren skup.} \tag{1.7}$$

Uočimo da iz relacije (1.7) te Propozicije 1.1.8 slijedi relacija (1.6).

Za kraj ovog dijela opisat ćemo još i pojam izračunljive funkcije $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f \colon S \to \mathbb{R}$ **efektivno uniformno neprekidna** ako postoji izračunljiva funkcija $\delta \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x, y \in S$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ iz $|x - y| < 2^{-\delta(k)}$ slijedi $|f(x) - f(y)| < 2^{-k}$. Naprimjer, svaka Lipschitzova funkcija, to jest funkcija za koju postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x) - f(y)| \leq \lambda \cdot |x - y|$, $\forall\ x, y \in S$, jest efektivno uniformno neprekidna (vidi poglavlje 1.4 u [9]).

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ izračunljivi brojevi takvi da je $a < b$. Za funkciju $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je **izračunljiva** ako je $(f(x_i))$ izračunljiv niz za svaki izračunljiv niz realnih brojeva (x_i) koji je sadržan u $[a, b]$ te ako je f efektivno uniformno neprekidna.

Napomenimo ovdje da smo u prethodnoj definiciji na $\mathbb{R}$ gledali kao na izračunljiv euklidski prostor, definiran kroz primjer 1.1.7, a na segment $[a, b]$ kao potprostor izračunljivog euklidskog prostora $\mathbb{R}$.

1.2. Doprinos ove doktorske disertacije

U ovom doktorskom radu bavit ćemo se istraživanjem uvjeta uz koje skupovi s nepovezanim komplementom sadrže izračunljivu točku, odnosno postaju izračunljivi. Štoviše, ovo istraživanje ćemo proširiti, to jest poopćiti, i na skupove koji su homeomorfni skupovima s nepovezanim komplementima (vidi posebice poglavlje 4 u nastavku ove disertacije). Ambijentni prostor za naše istraživanje biti će izračunljiv metrički prostor, koji predstavlja svojevrsno poopćenje standardnog euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Prvi dio ovoga rada posvećen je proučavanju koizračunljivo prebrojivih (zatvorenih) skupova u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Poznato je da takvi skupovi ne trebaju biti izračunljivi. Štoviše ne trebaju niti sadržavati izračunljivu točku (vidi [18]). No, ispostavlja se da ovdje topologija može igrati važnu ulogu. Ako koizračunljivo prebrojivom skupu S dodamo neka topološka svojstva, onda nam ta svojstva mogu omogućiti da skup S postane izračunljivo zatvoren ili da barem sadrži izračunljivu točku. Neka od tih svojstava su naprimjer ako je S ćelija ili topološka sfera, graf izvjesne funkcije, lančast ili cirkularno lančast kontinuum, (kompaktna) mnogostrukost s rubom ili ako je pak S neka 1-mnogostrukost (napomenimo ovdje da navedenim svojstvima treba dodati još neka dodatna svojstva na izračunljiv metrički prostor (X, d, α)).

Općenito je poznato da u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo da su u njemu sve zatvorene kugle ujedno i kompaktne te povezane, svaki koizračunljivo prebrojiv skup $S \subseteq X$, kojemu na efektivan način možemo razlikovati komponente povezanosti komplementa, to jest skupa $X \setminus S$ te takav da svaka točka skupa S leži na rubu barem dvije komponente povezanosti od $X \setminus S$, mora nužno biti i izračunljivo zatvoren (vidi [8]).

Možemo uočiti da su u prethodnom rezultatu dodana neka svojstva na sam izračunljiv metrički prostor (X, d, α) koja su svakako igrala važnu ulogu pri dokazu samog rezultata. U okviru prvog poglavlja ovog doktorata, dokazat ćemo da prethodni rezultat također vrijedi čak i ako u potpunosti maknemo pretpostavku efektivnog pokrivanja te pretpostavku da su u metričkom prostoru (X, d) sve zatvorene kugle ujedno i kompaktne. Pretpostavku da su u metričkom prostoru (X, d) sve zatvorene kugle ujedno i povezane oslabit ćemo na način da ćemo pretpostaviti da je izračunljiv metrički prostor *efektivno lokalno povezan*. Možemo slobodno kazati da je taj pojam ključ u prvom poglavlju ove doktorske disertacije. Stoga će se naglasak svakako staviti i na precizan opis samog pojma efektivne lokalne povezanosti, jer općenito nije tako trivijalno u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), za proizvoljnu točku $x \in X$ i svaki proizvoljan odabir otvorene kugle $B(x, r)$, oko točke x, opisati značenje *efektivnog* pronalaska otvorene povezane okoline U, točke x, koja je sadržana u kugli $B(x, r)$. Drugim riječima, treba nam neka pogodna definicija koja bi opisala značenje izračunljivosti niza otvorenih (povezanih) skupova $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Drugi dio disertacije potaknut je željom da se poopći izračunljiva verzija Bolzanovog teorema o nultočki. Prisjetimo se da Bolzanov teorem o nultočki kaže da za svaku neprekidnu funkciju $f\colon [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima svojstvo da je $f(a) < 0 < f(b)$ mora postojati neki $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $f(c) = 0$. Ovaj teorem je zapravo posljedica dobro poznatog teorema srednje vrijednosti (vidi [27]). Pretpostavimo da je K neki povezan podskup euklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ koji siječe obje komponente povezanosti skupa $\mathbb{R}^2 \setminus S$, gdje je $S := \mathbb{R} \times \{0\}$. Tada, iz povezanosti skupa K odmah slijedi da K nužno mora sjeći i skup S. Prirodno je stoga razmišljati o sljedećem. Može li se iz izračunljivosti skupa K odmah zaključiti da skup $K \cap S$ nužno sadrži izračunljivu točku? Budući postoji nenegativna izračunljiva funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ koja ima nultočke, ali joj niti jedna nultočka nije izračunljiv broj [24], to se može konstruirati primjer koji će nam potvrditi da samo izračunljivost skupa K nije dovoljna, sama po sebi, da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku. Naš je cilj, kroz ovo poglavlje, pronaći neke dodatne pretpostavke koje bi omogućile da možemo ipak u nekom obliku potvrdno odgovoriti na prethodno postavljeno pitanje.

Promatrajmo stoga izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i u njemu dva disjunktna i izračunljivo prebrojiva skupa U i V te izračunljiv kontinuum K koji siječe, U i V. Označimo nadalje, sa $S := X \setminus (U \cup V)$. Cilj nam je istražiti uvjete uz koje presjek skupa K sa skupom S sadrži izračunljivu točku. Pokazat ćemo da je dovoljan uvjet da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku upravo slučaj kada je K luk, to jest skup homeomorfan jediničnom intervalu $[0, 1]$. Na taj način zaista smo poopćili izračunljivu verziju Bolzanovog teorema o nultočki, koji opisuje slučaj kada je skup K graf izračunljive funkcije $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, takve da je $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$. Ovo poopćenje ističemo kao jedan od doprinosa ove doktorske disertacije.

Međutim, ići ćemo i korak dalje. Proučavat ćemo i općenitiji slučaj, to jest slučaj kada je skup K izračunljiv lančasti kontinuum i pokazat ćemo da navedeni presjek skupa K sa skupom S sadrži izračunljivu točku uz uvjet da je sam skup $K \cap S$ *totalno nepovezan*. Također ćemo dokazati i da presjek skupa K sa skupom S sadrži izračunljivu točku, ako je skup K izračunljiv lančasti kontinuum, a skup S proizvoljan koizračunljivo prebrojiv (zatvoren) skup takav da skup $K \cap S$ ima izolirane i dekompozabilne komponente povezanosti. Ovo posebno znači da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ako je *povezan* i dekompozabilan.

Naposlijetku istaknimo da se u ovom poglavlju doktorske disertacije nećemo samo ograničiti na skupove koji su oblika $K \cap S$. Vidjet ćemo da promatrani skup $K \cap S$ u našem slučaju, zbog pretpostavki koje zadajemo, nužno mora biti poluizračunljiv skup. Stoga će nas općenito zanimati i što se može reći o izračunljivosti poluizračunljivih lančastih kontinuuma u izračunljivom metričkom prostoru. U tom kontekstu, pokazat ćemo da svaki poluizračunljiv i dekompozabilan lančasti kontinuum nužno sadrži izračunljivu točku. Napomenimo ovdje da postoje do sada neki rezultati koji su pokušali dati odgovore na pitanja koja su direktno povezana s drugim dijelom ove doktorske disertacije (vidi [8, 11]), no ti su rezultati dokazani koristeći neke dodatne pretpostavke na sam ambijentni, izračunljiv metrički prostor (X, d, α), među kojima ističemo pretpostavku efektivnog pokrivanja, svojstvo lokalne izračunljivosti te svojstvo da su u metričkom prostoru (X, d) sve zatvorene kugle ujedno i kompaktne. Ovim radom ti će rezultati biti poopćeni na način da ćemo pokazati da oni i dalje vrijede ukoliko uklonimo sve pretpostavke zadane na ambijentni prostor. Ističemo to kao još jedan doprinos ove doktorske disertacije.

Treći dio ovog rada posvećen je proučavanju poluizračunljivog (topološkog) varšavskog diska. Motivirani smo poznatim rezultatom koji kaže da je poluizračunljiva ćelija izračunljiva ukoliko je njezin rub, to jest njezina rubna sfera, izračunljiv skup (vidi [10, 19]). Potaknuti tim rezultatom dokazat ćemo da je poluizračunljiv (topološki) varšavski disk izračunljiv, ukoliko mu je „rub”, varšavska kružnica, poluizračunljiv skup. Uočimo da ćemo ovim rezultatom proširiti značenje takozvanog rubnog uvjeta, budući (topološki) varšavski disk nije mnogostrukost s rubom, no ipak u izvjesnom smislu određeni dio toga skupa nazivamo njegovim rubom.

Općenito, naposljetku, možemo istaknuti da je najveći doprinos ove doktorske disertacije u tome što bi nam ona trebala pomoći da još bolje shvatimo odnos koji se neminovno pojavljuje između topologije i izračunljivosti.

Djelovi ove doktorske disertacije objavljeni su u člancima [13, 14, 15]. Riječ je o radovima koje sam napisao kao plod petogodišnjeg istraživanja u sklopu doktorskog studija sa mentorom izv. prof. dr. sc. Zvonkom Iljazovićem.

1.3. Osnovne tehnike

Za kraj ovog uvodnog dijela opisat ćemo neke elementarne pojmove iz teorije izračunljivosti koji će biti od izuzetne važnosti u našim daljnjim razmatranjima. Htjeli bismo, za početak, definirati pojam rekurzivne (izračunljive) funkcije definirane na skupu $\mathbb{N}^k$, koja svoje vrijednosti poprima u partitivnom skupu od $\mathbb{N}^n$.

Za funkciju $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ kažemo da je **rekurzivna** ako je funkcija $\overline{\Phi}\colon \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ definirana s

$$\overline{\Phi}(x,y) := \chi_{\Phi(x)}(y),\ \forall\, x \in \mathbb{N}^k,\ \forall\, y \in \mathbb{N}^n$$

izračunljiva. Sa $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ prirodno označavamo skup svih podskupova skupa $\mathbb{N}^n$, a sa $\chi_S\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ karakterističnu funkciju skupa $S \subseteq \mathbb{N}^n$.

Za $m \in \mathbb{N}$ stavimo $\mathbb{N}_m := \{0,\dots,m\}$. Nadalje, za $n \geq 1$ definiramo:

$$\mathbb{N}_m^n := \{(x_1,\dots,x_n) \mid\ x_1,\dots,x_n \in \mathbb{N}_m\}. \tag{1.8}$$

Neka je $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ proizvoljna funkcija. Uočimo da za $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi sljedeće:

$$\{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{N}^n \mid \{y_1,\dots,y_n\} \subseteq \{0,\dots,\varphi(x)\}\} = \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\,.$$

Kažemo da je funkcija $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ **omeđena** funkcijom $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ukoliko za sve $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}\,. \tag{1.9}$$

Nadalje, kažemo da je funkcija $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ **rekurzivno omeđena**, ukoliko postoji neka izračunljiva funkcija $\varphi\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je Φ omeđena funkcijom φ.

Ako je funkcija $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rekurzivna i rekurzivno omeđena, onda ćemo kazati da je Φ **r.r.o.** funkcija.

Definicija r.r.o. funkcije slijedi literaturu [9], Poglavlje 2.5. U svom znanstvenom radu (vidjeti članke [13, 14, 15]) r.r.o. funkcije nazivam e.f.v. (Effectively finitely valued) funkcijama, no ipak, budući u literaturi na hrvatskom jeziku (vidjeti [4, 9]), postoji ustaljen naziv ovakvih funkcija, držim se u ovom doktoratu termina r.r.o. funkcije.

Sljedeća propozicija objašnjava neka osnovna svojstva takvih funkcija. Dokaz je tehničke naravi i može se pronaći u Poglavlju 2.5 literature [9] (vidjeti Propoziciju 2.19 te Lemu 2.5).

Propozicija 1.3.1.

(i) *Neka su* $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *i* $\Psi\colon \mathbb{N}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ *r.r.o. funkcije te neka je* $\Lambda\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ *funkcija definirana s:*

$$\Lambda(x) := \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y),\ \forall\, x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada je Λ *r.r.o. funkcija.*

(ii) *Neka je* $\Phi\colon \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcija te neka je* $T \subseteq \mathbb{N}^n$ *izračunljivo prebrojiv podskup od* $\mathbb{N}^n$*. Tada je skup definiran s:*

$$S := \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq T\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^k$*.*

(iii) *Ako su* $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ *r.r.o. funkcije, tada su skupovi*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\}$$

te

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

izračunljivi podskupovi od $\mathbb{N}^k$*.*

U izračunljivom metričkom prostoru od presudne je važnosti moći na neki način uspoređivati racionalne otvorene kugle. Stoga u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), za $i, j \in \mathbb{N}$, kažemo da je I_i **formalno sadržan** I_j, te pišemo

$$I_i \subseteq_F I_j,$$

ako vrijedi sljedeće:

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j.$$

Uočimo da iz same definicije odmah dobivamo sljedeću implikaciju:

$$I_i \subseteq_F I_j \implies I_i \subseteq I_j.$$

U nastavku navodimo propoziciju čiji je dokaz jednostavna posljedica Propozicije 2.1 u [17] (također vidjeti [8]).

Propozicija 1.3.2. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Tada su sljedeći skupovi izračunljivo prebrojivi:*

(i) $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\}$;

(ii) $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$;

(iii) $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i \in I_j\}$.

Neka je (X, d) metrički prostor i n proizvoljan prirodan broj. Za $x_0, \ldots, x_n \in X$ te $r_0, \ldots, r_n \in \langle 0, \infty \rangle$ definirajmo:

$$D = \max_{0 \leq i,j \leq n} d(x_i, x_j) + 2 \max_{0 \leq i \leq n} r_i.$$

Kažemo da je broj D **formalni dijametar** pridružen konačnom nizu $(x_0, r_0), \ldots, (x_n, r_n)$. Uočimo sljedeće:

$$\operatorname{diam}(B(x_0, r_0) \cup \ldots \cup B(x_n, r_n)) \leq D.$$

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Definiramo funkciju $\operatorname{fdiam}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ na način da za $j \in \mathbb{N}$, broj $\operatorname{fdiam}(j)$ predstavlja formalni dijametar pridružen konačnom nizu

$$\left(\lambda_{(j)_0}, \rho_{(j)_0}\right), \ldots, \left(\lambda_{(j)_{\overline{j}}}, \rho_{(j)_{\overline{j}}}\right).$$

Uočimo da vrijedi

$$\operatorname{diam}(J_j) \leq \operatorname{fdiam}(j).$$

Sljedeća propozicija donosi važno i osnovno svojstvo funkcije fdiam (za dokaz čitatelja upućujemo na članak [8], Propozicija 13).

Propozicija 1.3.3. *Funkcija* $\operatorname{fdiam}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *jest izračunljiva funkcija.*

Za $l \in \mathbb{N}$ označimo s $\mathcal{H}_l$ konačan niz skupova

$$J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\overline{l}}}.$$

Nadalje, definirajmo:

$$\bigcup \mathcal{H}_l := J_{(l)_0} \cup \ldots \cup J_{(l)_{\overline{l}}}.$$

Također stavimo:

$$\operatorname{fmesh}(l) := \max_{0 \leq i \leq \overline{l}} \operatorname{fdiam}((l)_i).$$

Vrijedi sljedeća propozicija (vidi Lemu 4.2 u [4], te također vidi Poglavlje 3 u [9]).

Propozicija 1.3.4. *Funkcija* $\operatorname{fmesh}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *jest izračunljiva funkcija.*

Poglavlje 2.

Korekurzivno prebrojivi skupovi s nepovezanim komplementima

U ovom poglavlju promatrat ćemo koizračunljivo prebrojive (zatvorene) skupove s nepovezanim komplementima u efektivno lokalno povezanom izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). Konkretno, cilj ovog poglavlja jest pobliže promotriti slučaj kada se komponente povezanosti komplementa koizračunljivo prebrojivog skupa $S \subseteq X$ mogu na efektivan način razlikovati. Opisat ćemo dovoljne uvjete koji će osigurati da navedeni skup S sadrži izračunljivu točku te dovoljne uvjete koji će nam omogućiti da i sam koizračunljivo prebrojiv skup S postane izračunljiv. Napomenimo da ovo poglavlje predstavlja svojevrsno poopćenje rezultata koji su prezentirani u radu [8].

2.1. Motivacija

U pozadini ovog poglavlja krije se želja da se pronađu neki uvjeti koji bi osigurali da u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) vrijedi sljedeća implikacija

$$S \text{ koizračunljivo prebrojiv skup} \implies S \text{ sadrži izračunljivu točku.} \tag{2.1}$$

Naravno, prethodna nas implikacija motivira da pokušamo i općenitije pronaći uvjete uz koje bi implikacija

$$S \text{ koizračunljivo prebrojiv skup} \implies S \text{ izračunljiv zatvoren skup} \tag{2.2}$$

bila istinita. Prethodne dvije implikacije svakako svoj korijen imaju u proučavanju euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Za zatvoren skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je koizračunljivo prebrojiv ako mu se komplement, to jest skup $\mathbb{R}^n \setminus S$, može na efektivan način prekriti s otvorenim racionalnim kuglama. Može se pokazati da su u euklidskom prostoru takvi skupovi upravo oblika $f^{-1}(\{0\})$, za izračunljivu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dakle, u euklidskom prostoru, koizračunljivo prebrojiv skup S jest zapravo skup nultočaka neke izračunljive funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Budući postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima nultočke, ali joj niti jedna nultočka nije izračunljiv broj [24], to svakako postoji neprazan koizračunljivo prebrojiv podskup S od $\mathbb{R}$ koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. Stoga možemo zaključiti da postoje koizračunljivo prebrojivi skupovi koji su u izvjesnom smislu „jako daleko" od samog pojma izračunljivosti.

Ipak, opskrbimo li koizračunljivo prebrojiv skup S nekim dodatnim svojstvima, možemo zaključiti da skup S sadrži izračunljivu točku. Na primjer, ako koizračunljivo prebrojiv skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima izoliranu točku, onda ta ista točka nužno mora biti i izračunljiva (vidi poglavlja 1.4 i 2.3 u [9]). Stoga, neprazan koizračunljivo prebrojiv skup $S \subseteq \mathbb{R}$, sa svojstvom da mu komplement ima konačno mnogo komponenti povezanosti, nužno mora sadržavati izračunljivu točku (vidi korolar 2.6 u [9]).

Prirodno je nadalje razmatrati slučaj kada je $n > 1$, to jest slučaj kada je S koizračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{R}^n$ sa svojstvom da mu komplement, to jest skup $\mathbb{R}^n \setminus S$, ima konačno mnogo komponenti povezanosti. U tom slučaju se ipak može dogoditi da skup $\mathbb{R}^n \setminus S$ bude povezan, pa ne možemo tako jednostavno, kao u jednodimenzionalnom slučaju, zaključiti da S sadrži izračunljivu točku. Naime, neka je S neprazan koizračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{R}$ koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku (vidi primjerice [24]). Tada je i skup $S \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ koizračunljivo prebrojiv (vidi poglavlje 5 u [11]). Stoga se lako može zaključiti da postoji koizračunljivo prebrojiv skup $T := S \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku i ima svojstvo da mu je komplement, to jest skup $\mathbb{R}^2 \setminus T$, povezan.

Međutim, može se pokazati da svaki neprazan koizračunljivo prebrojiv skup S u $\mathbb{R}^n$, sa svojstvom da mu komplement $\mathbb{R}^n \setminus S$ nije povezan ali da ima konačno mnogo komponenti povezanosti, mora nužno sadržavati barem jednu izračunljivu točku (vidi [8]). Štoviše, navedenu pretpostavku da komplement skupa S ima konačno mnogo komponenti povezanosti možemo čak zamijeniti i općenitijom pretpostavkom koja kaže da komponente povezanosti skupa $\mathbb{R}^n \setminus S$ možemo na izvjestan način efektivno razlikovati (vidi [8]). Ova navedena tvrdnja ne vrijedi samo u euklidskom prostoru, već i u općenitijem ambijentnom prostoru, to jest proizvoljnom izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo da su u njemu sve zatvorene kugle ujedno kompaktne i povezane (vidi [8]).

Naš je cilj u ovom poglavlju poopćiti prethodne rezultate na način da oslabimo navedene pretpostavke na ambijentni prostor (X, d, α). Naime, pretpostavku da izračunljiv metrički prostor (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo da su u njemu sve zatvorene kugle ujedno i kompaktne u potpunosti ćemo ukloniti, a uviet da su mu sve zatvorene kugle ujedno i povezane, oslabit ćemo na način da ćemo ga zamijeniti svojstvom efektivne lokalne povezanosti. Jednostavno rečeno, izračunljiv metrički prostor (X, d, α) će biti efektivno lokalno povezan ako se u njemu na efektivan način može pronaći izvjesna baza za topologiju induciranu metrikom d koja se cijela sastoji od otvorenih i povezanih skupova.

Zanimljivo jest kako topologija igra važnu ulogu pri opisu uvjeta koji omogućavaju implikacijama (2.1) i (2.2) da budu istinite. Ako je naprimjer S ćelija ili pak topološka sfera (vidi [19, 10]), graf izvjesne funkcije (vidi [1]), lančast kontinum sa izračunljivim krajnjim točkama (vidi teorem 36 u [8]) ili pak dekompozabilan lančast kontinuum (teorem 6.9 u [14]), (kompaktna) mnogostrukost s rubom (vidi [12, 16]) ili pak 1-mnogostrukost (uz dodatnu pretpostavku kompaktnih zatvorenih kugli te pretpostavku svojstva efektivnog pokrivanja na izračunljiv metrički prostor (vidi [5])), onda je implikacija (2.1) istinita. Ovdje napomenimo da u kontekstu implikacije (2.1), postoji kontraktibilan koizračunljivo prebrojiv skup u euklidskoj ravnini $\mathbb{R}^2$ koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku (vidi [18]).

U vidu implikacije (2.2), ako je S koizračunljivo prebrojiv skup u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, koji je homeomorfan jediničnoj m-sferi S^m, tada je skup S izračunljiv (vidi [19, 10, 12]).

Pretpostavimo sada da je $n = m + 1$ te da je skup S topološka $(n-1)$-sfera u $\mathbb{R}^n$. Tada se prema Jordanovom teoremu, skup $\mathbb{R}^n \setminus S$ sastoji od dvije komponente povezanosti i svaka točka od S leži na rubu obje komponente. Stoga je prirodno razmišljati o sljedećem: ako je S proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^n$, takav da $\mathbb{R}^n \setminus S$ ima dvije komponente povezanosti i svaka točka skupa S leži na rubu obje komponente, vrijedi li tada implikacija (2.2)?

Pretpostavimo da izračunljiv metrički prostor (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja te svojstvo da su u metričkom prostoru (X, d) sve zatvorene kugle ujedno kompaktne i povezane. Neka je $S \subseteq X$ koizračunljivo prebrojiv skup, sa svojstvom da se komponente povezanosti skupa $X \setminus S$ mogu na efektivan način razlikovati te dodatno pretpostavimo da svaka točka skupa S leži na rubu barem dvije različite komponente povezanosti od $X \setminus S$. Tada skup S nužno mora biti izračunljiv (vidi [8]).

Dakle, implikacija (2.2) vrijedi, ali uz dodatne pretpostavke na sam prostor. Cilj ovog poglavlja jest pokazati da prethodno navedeni rezultat također vrijedi ukoliko samo pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan.

Uočavamo da je ključan predmet proučavanja ovog poglavlja zapravo pojam efektivne lokalne povezanosti jer nam on omogućava da neke do sada poznate rezultate koji se odnose na implikacije (2.1) i (2.2) poopćimo te same implikacije (2.1) i (2.2) promotrimo s još jednog novog aspekta.

2.2. Definicija efektivne lokalne povezanosti

Povijesno gledajući, povezanost te kompaktnost nekako su svojstva koja topolozi s posebnom pažnjom razmatraju. Ta su svojstva imala snažan utjecaj na samu definiciju topologije te topološkog prostora, budući su topolozi u jednom trenutku shvatili neovisnost navedenih pojmova u odnosu na samu formu euklidske metrike. Dok se je struktura kompaktnih podskupova euklidskog prostora u potpunosti razjasnila *Heine - Borelovim teoremom*, struktura povezanih podskupova prostora $\mathbb{R}^n$ je na izvjestan način znatno složenija. Tako naprimjer, povezan prostor, pa čak i povezan potprostor euklidske ravnine, ne treba biti lokalno povezan. Upravo je to razlog zašto i mi u našim razmatranjima, u okviru ove doktorske disertacije, imamo potrebu proučavati prostor koji je lokalno povezan, odnosno navedeni pojam imamo potrebu staviti u kontekst izračunljive analize.

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *lokalno povezan* ukoliko za svaku točku $x \in X$ i svaku otvorenu okolinu U točke x postoji neka otvorena i povezana okolina V od x koja ima svojstvo da je sadržana u skupu U, to jest vrijedi $V \subseteq U$. Drugim riječima rečeno, topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je lokalno povezan ako u njemu postoji baza $\mathcal{B}$ za topologiju $\mathcal{T}$ koja ima svojstvo da je svaki element familije $\mathcal{B}$ ujedno i povezan skup.

Iako bi možda bilo prirodno, na prvi pogled, definirati da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) *efektivno lokalno povezan* koristeći racionalne otvorene kugle I_i, $i \in \mathbb{N}$, na način da kažemo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan ukoliko u njemu postoji izvjesna baza za topologiju induciranu metrikom d, koja se u cjelosti sastoji od povezanih racionalnih otvorenih kugli, ipak smatramo da bi na neki način to bilo ograničavajuće, budući novi pojam uvijek želimo opisati u najvećoj mogućoj općenitosti. U članku [1] navode se razlozi zašto prirodan odabir povezanih racionalnih otvorenih kugli ipak u ovom slučaju ne bi bio zadovoljavajući. Među ostalim, u navedenom članku, navodi se da je moguće konstruirati lokalno povezan metrički prostor u kojem ne postoji baza za topologiju induciranu danom metrikom koja bi se sastojala od povezanih otvorenih kugli (vidi Definiciju 8.1 u članku [1] te diskusiju nakon navedene definicije).

Stoga se ni mi u ovom radu nećemo ograničiti na povezane otvorene kugle i u tom kontekstu potreban nam je pojam koji opisuje značenje izračunljivosti niza otvorenih (povezanih) skupova (U_i) u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Definicija 2.2.1. *Pretpostavimo da su (A_i) i (B_i) proizvoljni nizovi skupova. Kažemo da niz (A_i)* ***efektivno profinjuje*** *niz (B_i), te pišemo $(A_i) \preceq (B_i)$, ako postoji neki izračunljivo prebrojiv skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}^2$ sa svojstvom da za svaki $i \in \mathbb{N}$ skup B_i možemo izraziti na sljedeći način:*

$$B_i = \bigcup_{(j,i) \in \mathcal{C}} A_j. \tag{2.3}$$

Relaciju (2.3) ekvivalentno možemo izraziti pomoću sljedeća dva uvjeta:

- ako su $j, i \in \mathbb{N}$ takvi da je $(j, i) \in \mathcal{C}$, onda je $A_j \subseteq B_i$;
- ako je $i \in \mathbb{N}$ i $x \in B_i$, onda postoji neki $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_j$ i $(j, i) \in \mathcal{C}$.

Ukoliko želimo u definiciji efektivnog profinjenja naglasiti izračunljivo prebrojiv skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}^2$, onda pišemo

$$(A_i) \preceq_{\mathcal{C}} (B_i).$$

U kontekstu prethodne definicije, reći ćemo da su nizovi skupova (A_i) i (B_i) **izračunljivo ekvivalentni** ako vrijedi sljedeće:

$$(A_i) \preceq (B_i) \quad \text{te} \quad (B_i) \preceq (A_i).$$

Sada, kada u efektivnom smislu imamo mogućnost usporediti dva niza skupova, spremni smo definirati pojam efektivne lokalne povezanosti.

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α)* ***efektivno lokalno povezan*** *ako u metričkom prostoru (X, d) postoji niz otvorenih i povezanih skupova (D_i) koji je izračunljivo ekvivalentan nizu racionalnih otvorenih kugli (I_i).*

Uočimo odmah da, ukoliko u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) postoji takav niz skupova (D_i) iz Definicije 2.2.2, onda je jasno da familija oblika

$$\{D_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

tvori bazu za topologiju induciranu metrikom d.

Primjer 2.2.3. Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji ima svojstvo da su u metričkom prostoru (X, d) sve otvorene kugle ujedno i povezane. Tada je očito (X, d, α) efektivno lokalno povezan. Naime, svaki je niz skupova izračunljivo ekvivalentan sebi samome, pa u Definiciji 2.2.2 možemo jednostavno defnirati

$$D_i := I_i, \ \forall\, i.$$

U prethodnom primjeru pretpostavku da su sve otvorene kugle ujedno i povezane svakako možemo znatno oslabiti zahtjevajući da u metrički prostor (X, d) sve otvorene kugle „dovoljno malog" radijusa budu ujedno i povezane. Sljedeći primjer tu činjenicu upravo i precizira.

Primjer 2.2.4. Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te pretpostavimo da postoji $r > 0$ takav da je $B(\alpha_n, s)$ povezan skup za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $s \in \mathbb{Q}$, takve da je $0 < s < r$. Tada je (X, d, α) efektivno lokalno povezan.

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je r racionalan broj. Odaberimo sada neki $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho_{i_0} < r$. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$f(i) = \begin{cases} i, & \rho_i < r \\ i_0, & \rho_i \geq r. \end{cases}$$

Iz propozicije 1.1.4 lako zaključujemo da je f izračunljiva funkcija. Naime, prema propoziciji 1.1.4 imamo da su skupovi $A_1 := \{j \in \mathbb{N} \mid \rho_j < r\}$ i $A_2 := \{j \in \mathbb{N} \mid \rho_j \geq r\}$ izračunljivi. Stoga su po definiciji njihove karakteristične funkcije izračunljive. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$f(i) = i \cdot \chi_{A_1}(i) + i_0 \cdot \chi_{A_2}(i), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}\,. \tag{2.4}$$

Sada iz relacije (2.4) zaključujemo da je f izračunljiva funkcija kao produkt i zbroj izračunljivh funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Kako je funkcija f izračunljiva to imamo da je i skup

$$\mathcal{C} = \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid j = f(i)\}$$

također izračunljiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Svaki izračunljiv skup je ujedno i izračunljivo prebrojiv. Stoga slijedi da je $\mathcal{C}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Za $i \in \mathbb{N}$ stavimo

$$D_i := I_{f(i)}.$$

Očito je $(I_i) \preceq_{\mathcal{C}} (D_i)$.

Nadalje, želimo pokazati da niz skupova D_i također efektivno profinjuje i niz (I_i). U tu svrhu definirajmo:

$$\mathcal{F} := \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid I_{f(j)} \subseteq_F I_i\}.$$

Koristeći propoziciju 1.3.2 zaključujemo da je skup $\mathcal{F}$ izračunljivo prebrojiv. Zaista, neka je $\Omega := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \subseteq_F I_j\}$. Tada je prema propoziciji 1.3.2(i) skup Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ sa $g(j,i) := (f(j),i)$, za sve $j,i \in \mathbb{N}$. Tada je g izračunljiva funkcija jer su joj komponentne funkcije izračunljive. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}(j,i) \in \mathcal{F} \quad &\Longleftrightarrow \quad I_{f(j)} \subseteq_F I_i \\ &\Longleftrightarrow \quad (f(j),i) \in \Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad g(j,i) \in \Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad (j,i) \in g^{-1}(\Omega).\end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da je $\mathcal{F} = g^{-1}(\Omega)$, pa nam propozicija 1.1.2(iii) odmah povlači da je skup $\mathcal{F}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Ako je $(j,i) \in \mathcal{F}$, onda je iz same definicije skupa $\mathcal{F}$ jasno da vrijedi $D_j \subseteq I_i$. Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ te $x \in I_i$. Tada je $d(x,\lambda_i) < \rho_i$ te stoga možemo odabrati pozitivan racionalan broj s takav da je $s < r$ i takav da vrijedi $d(x,\lambda_i) + 2s < \rho_i$. Također, budući je niz (α_i) gust u X, to postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\alpha_n, x) < s$. Neka je l prirodan broj takav da vrijedi $(\alpha_n, s) = (\lambda_l, \rho_l)$. Imamo:

$$d(\lambda_i,\lambda_l) + \rho_l \leq d(\lambda_i,x) + d(x,\lambda_l) + s < d(\lambda_i,x) + 2s < \rho_i.$$

Dakle, $I_l \subseteq_F I_i$. Očito je $x \in I_l$. Kako je $s < r$ to iz definicije funkcije f imamo da je $f(l) = l$, a time i da je $D_l = I_{f(l)} = I_l$. Ovim smo pokazali da za $i \in \mathbb{N}$ te $x \in I_i$, postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in D_l$ i $(l,i) \in \mathcal{F}$. Dakle, pokazali smo da niz skupova (D_i) također efektivno profinjuje niz (I_i) te su stoga (D_i) i (I_i) izračunljivo ekvivalentni nizovi skupova.

Kako je za svaki $i \in \mathbb{N}$ skup D_i otvoren i povezan to odmah slijedi da je (X,d,α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor.

Propozicija 2.2.5. *Pretpostavimo da je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor te neka je (D_i) niz otvorenih povezanih skupova u metričkom prostoru (X,d) koji je izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i). Tada su skupovi definirani s:*

$$\begin{aligned}S &:= \{(n,i) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_n \in D_i\} \\ T &:= \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid D_i \cap D_j \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Budući je po pretpostavci niz skupova (D_i) izračunljivo ekvivalentan nizu skupova (I_i), to postoji neki izračunljivo prebrojiv skup $\mathcal{C}$ u $\mathbb{N}^2$ takav da vrijedi $(I_i) \preceq_{\mathcal{C}} (D_i)$.

Neka su $n,i \in \mathbb{N}$. Tada imamo:

$$\alpha_n \in D_i \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \alpha_n \in I_j \text{ i } (j,i) \in \mathcal{C}.$$

Definirajmo $\Omega := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i \in I_j\}$. Tada je skup Ω izračunljivo prebrojiv prema propoziciji 1.3.2(iii). Nadalje definirajmo:

$$\begin{aligned}A &:= \{(n,i,j) \in \mathbb{N}^3 \mid (n,j) \in \Omega\}, \\ B &:= \{(n,i,j) \in \mathbb{N}^3 \mid (j,i) \in \mathcal{C}\}.\end{aligned}$$

Uočimo da su skupovi A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^3$. Naime $A = f^{-1}(\Omega)$, gdje je $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s $f(n,i,j) := (n,j)$. Funkcija f jest izračunljiva (jer su joj komponentne funkcije izračunljive) pa prema propoziciji 1.1.2(iii) imamo da je A izračunljivo prebrojiv skup. Analogno zaključujemo i za skup B jer je $B = g^{-1}(\mathcal{C})$, gdje je $g\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s $g(n,i,j) := (j,i)$. Stoga je i skup $E := A \cap B$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$ kao presjek dva izračunljivo prebrojiva skupa (vidi propoziciju 2.5 u [4]). Dakle, vrijedi sljedeće:

$$(n,i) \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ (n,i,j) \in E.$$

Time smo pokazali da je zapravo:

$$S = \{(n,i) \in \mathbb{N}^2 \mid \ \exists\, j \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ (n,i,j) \in E\}.$$

Sada propozicija 1.1.2(i) povlači da je skup S izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Nadalje, neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Budući su skupovi D_i i D_j otvoreni, to je i skup $D_i \cap D_j$ otvoren. Stoga, ako je $D_i \cap D_j$ neprazan, onda postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_n \in D_i \cap D_j$. Dakle:

$$D_i \cap D_j \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{takav da je } \ \alpha_n \in D_i \text{ i } \alpha_n \in D_j.$$

Neka su skupovi A_1 i B_1 definirani na sljedeći način:

$$A_1 := \{(i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \mid \ (n,i) \in S\},$$
$$B_1 := \{(i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \mid \ (n,j) \in S\}.$$

Budući smo pokazali da je skup S izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$, analogno kao što smo pokazali da su skupovi A i B izračunljivo prebrojivi zaključujemo da su i skupovi A_1 i B_1 također izračunljivo prebrojivi. Tada je i skup $E_1 := A_1 \cap B_1$ izračunljivo prebrojiv pa imamo da vrijedi sljedeće:

$$(i,j) \in T \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{takav da je } \ (i,j,n) \in E_1.$$

Stoga nam propozicija 1.1.2(i) povlači da je skup T izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. □

Propozicija 2.2.6. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je (D_i) niz otvorenih povezanih skupova u metričkom prostoru (X, d) koji je izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i). Tada postoji izračunljivo prebrojiv podskup $\mathcal{F}$ od $\mathbb{N}^3$ takav da vrijedi sljedeće:*

(i) ako je $(l,i,k) \in \mathcal{F}$, onda je $D_l \subseteq D_i$ i $\operatorname{diam} D_l < 2^{-k}$;

(ii) ako su $i, k \in \mathbb{N}$ te $x \in D_i$, onda postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in D_l$ i $(l,i,k) \in \mathcal{F}$.

Dokaz. Neka su $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq \mathbb{N}^2$ izračunljivo prebrojivi skupovi takvi da vrijedi sljedeće:

$$(D_i) \preceq_{\mathcal{C}} (I_i) \ \wedge \ (I_i) \preceq_{\mathcal{C}'} (D_i).$$

Pretpostavimo da su $i, k \in \mathbb{N}$ te $x \in D_i$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_j$ i takav da vrijedi $(j, i) \in \mathcal{C}'$. Kao i u primjeru 2.2.4, možemo zaključiti da postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_p$, $I_p \subseteq_F I_j$ te $\rho_p < 2^{-(k+1)}$. Konačno, jer je $x \in I_p$, postoji neki $l \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $x \in D_l$ i $(l, p) \in \mathcal{C}$.

Definirajmo skup $\mathcal{F}$ na sljedeći način:

$$\mathcal{F} := \{(l, i, k) \in \mathbb{N}^3 \mid (\exists\, p, j \in \mathbb{N})\ (l, p) \in \mathcal{C},\ \rho_p < 2^{-(k+1)},\ I_p \subseteq_F I_j,\ (j, i) \in \mathcal{C}'\}.$$

Lako možemo zaključiti da je skup $\mathcal{F}$ izračunljivo prebrojiv. Naime, uočimo da je

$$\mathcal{F} := \{(l, i, k) \in \mathbb{N}^3 \mid\ (\exists\, p, j \in \mathbb{N})\ \text{ takvi da je }\ (l, i, k, p, j) \in \mathcal{F}_1\},$$

gdje je

$$\mathcal{F}_1 := \{(l, i, k, p, j) \in \mathbb{N}^5 \mid\ (l, p) \in \mathcal{C},\ \rho_p < 2^{-(k+1)},\ I_p \subseteq_F I_j,\ (j, i) \in \mathcal{C}'\}.$$

Nadalje, stavimo:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{(l, i, k, p, j) \in \mathbb{N}^5 \mid\ (l, p) \in \mathcal{C}\},\\
A_2 &:= \{(l, i, k, p, j) \in \mathbb{N}^5 \mid\ \rho_p < 2^{-(k+1)}\},\\
A_3 &:= \{(l, i, k, p, j) \in \mathbb{N}^5 \mid\ I_p \subseteq_F I_j\},\\
A_4 &:= \{(l, i, k, p, j) \in \mathbb{N}^5 \mid\ (j, i) \in \mathcal{C}'\}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je $\mathcal{F}_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. Sličnim tehnikama kao i u propoziciji 2.2.5 možemo pokazati da su skupovi A_1, A_2, A_3 i A_4 izračunljivo prebrojivi, te stoga odmah imamo da je i skup $\mathcal{F}_1$ izračunljivo prebrojiv. Sada jednostavno primjenom propozicije 1.1.2(i) imamo da je skup $\mathcal{F}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$.

Uočimo da, iz gore navedenoga, vrijedi sljedeće:

$$(i, k \in \mathbb{N}\ \text{ i }\ x \in D_i)\ \Rightarrow\ (\exists\, l \in \mathbb{N}\ \ \text{ takav da je }\ x \in D_l\ \text{ i }\ (l, i, k) \in \mathcal{F}).$$

Time smo pokazali da svojstvo (ii) zaista vrijedi za skup $\mathcal{F}$.

Pretpostavimo sada da je $(l, i, k) \in \mathcal{F}$. Tada po definiciji skupa $\mathcal{F}$, postoje $p, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $(l, p) \in \mathcal{C}$, $\rho_p < 2^{-(k+1)}$, $I_p \subseteq_F I_j$ te $(j, i) \in \mathcal{C}'$. Kako je $(l, p) \in \mathcal{C}$ to je $D_l \subseteq I_p$, a budući je $\operatorname{diam} I_p \leq 2\rho_p < 2^{-k}$ imamo $\operatorname{diam} D_l < 2^{-k}$. Nadalje, uočimo da je $D_l \subseteq D_i$. Naime, $D_l \subseteq I_p$. Kako je po pretpostavci $I_p \subseteq_F I_j$, to je i $I_p \subseteq I_j$, a iz uvjeta $(j, i) \in \mathcal{C}'$ imamo da je $I_j \subseteq D_i$. Stoga je zaista $D_l \subseteq D_i$, što je konačno i trebalo pokazati. $\square$

Propozicija 2.2.7. *Neka je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor te neka je U izračunljivo prebrojiv otvoren skup u (X, d, α). Definirajmo skup Δ na sljedeći način:*

$$\Delta := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i \text{ i } \alpha_j \text{ leže u istoj komponenti povezanosti skupa } U\}.$$

Tada je skup Δ izračunljivo prebrojiv.

Dokaz. Budući je po pretpostavci (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor, to po definiciji postoji neki niz povezanih i otvorenih skupova (D_i), koji je izračunljivo ekvivalentni nizu (I_i). Kako je U izračunljivo prebrojiv otvoren skup u (X, d, α), jednostavno možemo zaključiti da postoji izračunljivo prebrojiv skup A u $\mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$U = \bigcup_{i \in A} D_i. \tag{2.5}$$

Naime, jer je U c.e. otvoren skup u (X, d, α), to po definiciji postoji neki izračunljivo prebrojiv skup $B \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $U = \bigcup_{i \in B} I_i$. Također, jer je niz skupova (D_i) izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i), to postoji neki izračunljivo prebrojiv skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da $(D_i) \preceq_{\mathcal{C}} (I_i)$. Definirajmo:

$$A := \{j \in \mathbb{N} \mid \ \exists\, i \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ (j, i) \in \mathcal{C} \ \text{ i } \ i \in B\}.$$

Primjetimo da skup A možemo zapisati na sljedeći način:

$$A = \{j \in \mathbb{N} \mid \ \exists\, i \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ (j, i) \in D \cap E\},$$

gdje su skupovi D i E definirani s:

$$\begin{aligned} D &:= \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \ (j, i) \in \mathcal{C}\} \\ E &:= \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \ i \in B\}. \end{aligned}$$

Jednostavno vidimo da su skupovi D i E izračunljivo prebrojivi (jer su skupovi $\mathcal{C}$ i B izračunljivo prebrojivi, pa primjenimo sličnu tehniku kao u propoziciji 2.2.5). Sada nam propozicija 1.1.2(i) povlači da je i skup A izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Skup A smo namjestili točno tako da vrijedi $U = \bigcup_{i \in A} D_i$.

Označimo sa $\sim$ binarnu relaciju na U definiranu na sljedeći način: $x \sim y$ ako i samo ako postoji konačan niz elemenata $l_0, \ldots, l_m$ u skupu A tako da vrijedi

$$x \in D_{l_0}, \quad y \in D_{l_m}, \tag{2.6}$$

i

$$D_{l_k} \cap D_{l_{k+1}} \neq \emptyset \ \forall\, k \in \{0, \ldots, m-1\}. \tag{2.7}$$

Uočimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu U. Naime, refleksivnost relacije $\sim$ direktno slijedi iz relacije (2.5), a simetričnost i tranzitivnost su očito zadovoljeni.

Pretpostavimo sada da vrijedi $x \sim y$. Tada postoje elementi $l_0, \ldots, l_m \in A$ koji zadovoljavaju svojstva relacija (2.6) i (2.7). Iz (2.7) slijedi odmah da je skup

$$P := D_{l_0} \cup \cdots \cup D_{l_m}$$

povezan, budući iz opće topologije znamo da ukoliko dva povezana skupa imaju neprazan presjek, onda je i njihova unija povezan skup. Nadalje, skup P je sadržan u skupu U i iz relacije (2.6) čitamo da skup P sadrži i točku x i točku y. Kao unija otvorenih skupova, P je također otvoren te možemo odmah uočiti da vrijedi

$P \subseteq [x]$. Ovdje smo sa $[x]$ označili klasu elementa x definiranu relacijom ekvivalencije $\sim$. Drugim riječima

$$[x] := \{y \in U \mid \ x \sim y\}.$$

Uočimo da prethodna diskusija pokazuje da je za proizvoljan $x \in U$, skup $[x]$ otvoren i povezan u metričkom prostoru (X, d). Naime, za proizvoljan $x \in U$ te $y \in [x]$ postoji povezan i otvoren skup P takav da vrijedi

$$x, y \in P \subseteq [x].$$

Kako familija $\{[x] \mid x \in U\}$ tvori particiju skupa U, to su skupovi $[x]$, za $x \in U$, upravo komponente povezanosti od U.

Dakle, $x \sim y$ ako i samo ako x i y leže u istoj komponenti povezanosti skupa U. Ovo nam omogućuje da definiciju skupa Δ napišemo na sljedeći način:

$$\Delta = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i \sim \alpha_j\}. \tag{2.8}$$

Ovakav opis skupa Δ, izražen u prethodnoj relaciji (2.8), omogućava da lakše pokažemo njegovu rekurzivnu prebrojivost.

Uzmimo proizvoljne elemente $i, j \in \mathbb{N}$. Prema relaciji (2.8) imamo da je uređen par $(i, j) \in \Delta$ ako i samo ako postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\alpha_i \in D_{(l)_0}, \quad \alpha_j \in D_{(l)_{\bar{l}}}, \tag{2.9}$$

$$D_{(l)_k} \cap D_{(l)_{k+1}} \neq \emptyset, \ \forall\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < \bar{l} \tag{2.10}$$

te

$$(l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}} \in A. \tag{2.11}$$

Definirajmo skup Ω kao skup svih uređenih trojki $(i, j, l) \in \mathbb{N}^3$ za koji vrijede relacije (2.9), (2.10) i (2.11). Koristeći propoziciju 2.2.5 lagano se može dokazati da je skup Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$ (za detalje dokaza čitatelj može pogledati propozicija 24 u [8]).

Za sve $i, j \in \mathbb{N}$ konačno imamo

$$(i, j) \in \Delta \iff \exists\ l \in \mathbb{N} \ \text{ takav da je } \ (i, j, l) \in \Omega.$$

Propozicija 1.1.2 nas sada jednostavno vodi na zaključak da je skup Δ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. □

2.3. Efektivna lokalna povezanost i reprezentirani prostori

U nastavku dokazujemo da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) efektivno lokalno povezan ako i samo ako za svaku točku $x \in X$ i svaku otvorenu kuglu $B(x, r)$ možemo *efektivno* pronaći barem jednu povezanu i otvorenu okolinu U točke x koja je sadržana u skupu $B(x, r)$. Da bismo mogli napraviti ovakav zahvat, potreban nam je pojam reprezentiranih prostora. Za detaljniji uvod u teoriju reprezentiranih prostora čitatelja upućujemo na literaturu [22, 29].

Neka je X skup, te neka je $\delta_X\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to X$ proizvoljna parcijalna surjekcija. Tada uređen par (X, δ_X) zovemo **reprezentirani prostor**. Ukoliko je $x \in X$ i $\delta_X(p) = x$, za neki $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, onda ćemo niz p zvati **ime** od x.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $x \in X$. Niz $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ zovemo **Cauchyjevo ime** za točku x ukoliko je $d(x, \alpha_{p(k)}) < 2^{-k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Uočimo da nam pojam Cauchyjevog imena inducira parcijalnu surjekciju $\delta\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to X$, definiranu s:

$$\delta(p) = x \quad \Longleftrightarrow \quad p \;\text{ je Cauchyjevo ime od točke }\; x.$$

Za ovako definiranu surjekciju δ kažemo da je **Cauchyjeva reprezentacija** od X (inducirana metrikom d te nizom α).

Za $k \in \mathbb{N}$, te za $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, neka je

$$\langle a_0, \dots, a_k \rangle := \mathbf{p}_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{p}_k^{a_k+1},$$

gdje su $\mathbf{p}_0, \dots \mathbf{p}_k$ prosti brojevi redom.

Definicija 2.3.1. *Za parcijalnu funkciju $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ kažemo da je izračunljiva ukoliko postoje izračunljive funkcije $g,\ G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi sljedeće:*

- *ako je $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ i $(b_0, b_1, \dots) = F((a_0, a_1, \dots))$ onda:*
  - *za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji neki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $g(\langle a_0, \dots, a_k \rangle, n) = 0$;*
  - *ako su $n, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $g(\langle a_0, \dots, a_k \rangle, n) = 0$, onda je*

$$b_n := G(\langle a_0, \dots, a_k \rangle, n).$$

Napomenimo da se definicija izračunljive funkcije $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ može pronaći u [1, 22, 29]. U literaturi se definicija izračunljive funkcije $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ opisuje pomoću Turingovih strojeva. Tako se za parcijalnu funkciju $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ kaže da je izračunljiva ukoliko postoji neki Turingov stroj, koji računa beskonačno dugo, te transformira svaki niz $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ koji je zapisan na ulaznoj traci u odgovarajući niz $F(p)$, zapisan na izlaznoj traci. Za nas zanimljiviji pristup definiciji izračunljive funkcije $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ može se posebno naći u literaturi [22]. Za funkciju $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ kažemo da je izračunljiva, ukoliko se svaki konačan dio niza $F(p)$ može uniformno izračunati preko nekog konačnog dijela (dovoljno velikog), ulaznog podatka $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Budući nam je za ovo potpoglavlje potrebna operativnija definicija izračunljive funkcije $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, izrazili smo je u kontekstu izračunljivih funkcija $g,\ G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i ova je definicija upravo u skladu sa literaturom [22]. Također, istaknimo da u definiciji 2.3.1 možemo pretpostaviti i sljedeće:

- ako je niz $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ u domeni funkcije $F\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, te ako za neke $k, n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $g(\langle a_0, \dots, a_k \rangle, n) = 0$, onda je i za svaki $k' \geq k$ $g(\langle a_0, \dots, a_{k'} \rangle, n) = 0$.

Taj zahtjev se zapravo prirodno nameće. Naime, ukoliko su nam brojevi $a_0, \ldots, a_k$ dovoljni da bismo mogli izračunati element b_n u nizu $(b_0, b_1, \ldots) = F((a_0, a_1, \ldots))$, onda nam izračunljiva funkcija $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ naprosto kaže da su nam i brojevi $a_0, \ldots, a_{k'}$, za svaki $k' \geq k$, također dovoljni da izračunamo element b_n.

Nadalje, neka su X i Y proizvoljni neprazni skupovi. Funkciju $\Phi\colon \subseteq X \to \mathcal{P}(Y)$ zvat ćemo **multifunkcijom**. Za takve funkcije uvodimo sljedeću oznaku:

$$\Phi\colon \subseteq X \rightrightarrows Y.$$

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $p = (p_0, p_1, \ldots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pišemo:

$$\mathrm{rng}(p) := \{p(n) - 1 \mid \ p(n) > 0\}.$$

Sa $\mathcal{O}(X)$ označimo familiju svih otvorenih podskupova od X. Neka je $\delta_{\mathcal{O}(X)}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{O}(X)$ surjekcija definirana na sljedeći način:

$$\delta_{\mathcal{O}(X)}(p) := \bigcup_{n \,\in\, \mathrm{rng}(p)} I_n.$$

Tada uređeni par $(\mathcal{O}(X), \delta_{\mathcal{O}(X)})$ zovemo **standardnom reprezentacijom** familije $\mathcal{O}(X)$ (vidi [1]).

Neka je $(\mathbb{R}, d, q)$ izračunljiv euklidski prostor (vidi primjer 1.1.7). Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Označimo sa $\delta_{X\times\mathbb{R}}\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \times \mathbb{R}$ **Cauchyjevu standardnu reprezentaciju** na $X \times \mathbb{R}$, definiranu s:

$$\delta_{X\times\mathbb{R}}((a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (x, r) \quad \iff \quad d(x, \alpha_{a(2k)}) < 2^{-k} \;\text{ i }\; |r - q_{a(2k+1)}| < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$ (vidi [1]).

Pretpostavimo da su (X, δ_X) i (Y, δ_Y) dva reprezentirana prostora. Tada kažemo da je funkcija $f\colon \subseteq X \to Y$ **izračunljiva** ako postoji izračunljiva funkcija $F\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takva da vrijedi sljedeće:

$$\delta_Y \circ F(p) = f \circ \delta_X(p),$$

za svaki $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ koji je u domeni funkcije $f \circ \delta_X$ (vidi [1]).

Nadalje, neka su (X, δ_X) i (Y, δ_Y) dva reprezentirana prostora. Tada kažemo da je multifunkcija $:\ \subseteq X \rightrightarrows Y$ izračunljiva ukoliko postoji izračunljiva funkcija $F\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takva da vrijedi sljedeće:

$$\delta_Y \circ F(p) \quad \in \quad f \circ \delta_X(p),$$

za svaki $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ koji je u domeni funkcije $f \circ \delta_X$ (vidi [1]).

U ovom prethodnom kontekstu, sljedeća definicija se prirodno nameće. Za multifunkciju $C\colon \subseteq X \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathcal{O}(X)$ kažemo da je **izračunljiva** ako postoji izračunljiva funkcija $F\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (**izračunljiv realizator**) sa sljedećim svojstvom:

$$\delta_{\mathcal{O}(X)} \circ F(p) \in C \circ \delta_{X\times\mathbb{R}}(p),$$

za svaki $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ koji je u domeni funkcije $C \circ \delta_{X\times\mathbb{R}}$ (vidi [1]). Drugim riječima, multifunkcija $C\colon \subseteq X \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathcal{O}(X)$ je izračunljiva ukoliko postoji izračunljiv realizator $F\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{R} \arrow[r, Rightarrow, "C"] & \mathcal{O}(X) \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[u, "\delta_{X\times\mathbb{R}}"] \arrow[r, dotted, "F"] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[u, "\delta_{\mathcal{O}(X)}"'] \end{tikzcd}$$

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $C\colon \subseteq X \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathcal{O}(X)$ multifunkcija definirana s:

$$C(x, r) := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \text{ povezan i } x \in U \subseteq B(x, r)\}, \quad \forall\, x \in X \text{ i } \forall\, r > 0.$$

Također pretpostavimo da je multifunkcija C izračunljiva. Želimo pokazati da je u tom slučaju izračunljiv metrički prostor (X, d, α) efektivno lokalno povezan.

Budući je skup $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_j \in I_i\}$ izračunljivo prebrojiv, to postoji izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ takva da je

$$f(\mathbb{N}) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_j \in I_i\}.$$

Neka su $f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $f_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Neka je k proizvoljan prirodan broj. Stavimo: $i := f_1(k)$ i $j := f_2(k)$. Definirajmo skup D_k kao komponentu povezanosti točke $\alpha_{f_2(k)}$ u skupu $I_{f_1(k)}$. Uočimo da je D_k otvoren i povezan skup. Naime, D_k je otvoren budući su u lokalno povezanom metričkom prostoru (X, d) komponente povezanosti otvorenog skupa i same otvorene. Kako je po pretpostavci multifunkcija C izračunljiva, to posebno po definiciji znači da za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 0$ možemo efektivno izračunati barem jedan otvoren i povezan skup $U \subseteq X$ koji sadrži točku x i koji je sadržan u skupu $B(x, r)$, što jasno znači da je metrički prostor (X, d) lokalno povezan. Definirajmo:

$$\mathcal{C}' := \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid f_1(k) = i\}.$$

Tada je $\mathcal{C}'$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$, i kako je za svaki $i \in \mathbb{N}$

$$I_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathcal{C}'} D_k,$$

to jasno zaključujemo da niz skupova $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ efektivno profinjuje niz skupova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Sada ćemo pokazati da niz skupova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ također efektivno profinjuje i niz skupova $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, što će značiti da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) efektivno lokalno povezan. Koristeći činjenicu da je multifunkcija C izračunljiva, nije teško zaključiti da je moguće za svaki $i \in \mathbb{N}$ pronaći niz otvorenih skupova $(U_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$, i to takvih da je za svaki $j \in \mathbb{N}$ skup $U_{i,j}$ racionalna otvorena kugla, te je skup $U_{i,j}$ sadržan u nekom otvorenom i povezanom podskupu od I_i, i $I_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{i,j}$ (ovdje ne zahtijevamo da su skupovi $U_{i,j}$ nužno povezani). Da bismo ovaj korak do kraja razjasnili potrebni su nam neki dodatni pojmovi.

Definicija 2.3.2. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka su $x \in X$ i $r > 0$. Za $p = (p_0, p_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kažemo da je* ***strogo Cauchyjevo ime*** *za uređen par (x, r) ako vrijedi sljedeće:*

$$d(x, \alpha_{p(2k)}) < 2^{-k}, \quad d(\alpha_{p(2k)}, \alpha_{p(2k+2i)}) < 2^{-k} \quad i \quad q_{p(2k+1)} = r,$$

za sve $k, i \in \mathbb{N}$.

Nije teško pokazati sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 1. Za svaki $x \in X$ i za svaki $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, postoji strogo Cauchyjevo ime za uređen par (x, r).

Naime postoji $p_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, \alpha_{p(0)}) < 1$. Neka je $z := 1 - d(x, \alpha_{p(0)})$ i $z' := \min\{z, \frac{1}{2}\}$. Postoji neki $p_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x, \alpha_{p(2)}) < z'$. Uočimo da je tada prema nejednakosti trokuta $d(\alpha_{p(0)}, \alpha_{p(2)}) < 1$. Postupak nastavljamo i dobivamo brojeve $p(4)$, $p(6)$...za koje su zadovoljeni uvjeti definicije 2.3.2.

Za konačan niz $(a_0, \dots, a_n)$ elemenata iz $\mathbb{N}$ kažemo da je **početno Cauchyjevo ime** za uređen par (x, r) ako postoji niz $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ u $\mathbb{N}$ takav da je niz

$$(a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$$

strogo Cauchyjevo ime za uređen par (x, r). Za $(a_0, \dots, a_n)$ kažemo da je **početno Cauchyjevo ime** ukoliko znamo da je konačan niz $(a_0, \dots, a_n)$ početno Cauchyjevo ime za neki uređen par (x, r).

Tvrdnja 2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $(a_0, \dots, a_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$. Tada je $(a_0, \dots, a_n)$ početno Cauchyjevo ime ako i samo ako vrijedi sljedeće:

$$d(\alpha_{a(2i)}, \alpha_{a(2j)}) < 2^{-i},$$

za sve $i < j$ takve da je $2j \leq n$, te $q_{a(2i+1)} = q_{a(2j+1)} \in \mathbb{Q}_{>0}$, za sve i, j takve da je $2i + 1 \leq n$ i $2j + 1 \leq n$.

Primijetimo da ukoliko je konačan niz $(a_0, \dots, a_n)$ početno Cauchyjevo ime, onda je jasno da iz same definicije vrijedi navedeno. Nadalje, ukoliko je $(a_0, \dots, a_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$ takav da vrijedi navedeno svojstvo iz tvrdnje 2, onda je tvrdnja jasna za $n = 0$. Ako je $n \geq 1$, onda imamo da je $(a_0, \dots, a_n, a_{n-1}, a_n, a_{n-1}, a_n, \dots)$ strogo Cauchyjevo ime za uređen par $(\alpha_{a_n}, q_{a_{n-1}})$ ako je n paran, odnosno za $(\alpha_{a_{n-1}}, q_{a_n})$ ukoliko je n neparan.

Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in I_i$. Neka je $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) + r < \rho_i.$$

Neka je $(a_0, a_1, \dots)$ strogo Cauchyjevo ime za (x, r). Tada postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d((\alpha_{a(2n)}, \lambda_i) + 2^{-n} + q_{a(2n-1)} < \rho_i. \tag{2.12}$$

Uočimo da ako vrijedi relacija (2.12) za početno Cauchyjevo ime $(a_0, \dots, a_n)$ nekog uređenog para (x, r), onda je sigurno $d(x, \lambda_i) + r < \rho_i$, pa je jasno $B(x, r) \subseteq I_i$.

Kako je po pretpostavci multifunkcija $C\colon\subseteq X\times\mathbb{R}\rightrightarrows\mathcal{O}(X)$ definirana s:

$$C(x,r):=\{U\in\mathcal{O}(X)\mid U \text{ povezan i } x\in U\subseteq B(x,r)\},\quad \forall\, x\in X \text{ i } \forall\, r>0$$

izračunljiva, to postoji izračunljiv realizator $F\colon\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ za multifunkciju C. Stoga postoje izračunljive funkcije $g,G\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ za funkciju F iz definicije 2.3.1.

Tvrdnja 3. Definirajmo skup S kao skup svih $(i,l,m)\in\mathbb{N}^3$ takvih da je $((l)_0,\ldots,(l)_{\bar{l}})$ početno Cauchyjevo ime gdje je $\bar{l}$ paran i $\bar{l}\geq 2$, te takvih da relacija (2.12) vrijedi za $n=\frac{\bar{l}}{2}$, i takvih da je

$$g(\langle(l)_0,\ldots,(l)_{\bar{l}}\rangle,m)=0 \text{ i } G(\langle(l)_0,\ldots,(l)_{\bar{l}}\rangle,m)>0.$$

Tada, koristeći tehniku r.r.o. funkcija dobivamo da je skup S izračunljivo prebrojiv budući su navedeni uvjeti za definiciju skupa S izračunljivo prebrojivi.

Iz prethodne tvrdnje odmah imamo da je $S=f(\mathbb{N})$, za neku izračunljivu funkciju $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}^3$. Neka je $i\in\mathbb{N}$. Neka je $u_0\in\mathbb{N}$ najmanji broj takav da je $f(u_0)$ oblika (i,l,m), za neke l,m. Induktivno definiramo brojeve u_1, u_2,... na sljedeći način. Pretpostavimo da smo definirali u_j za neki $j\in\mathbb{N}$. Neka je u_{j+1} najmanji broj takav da je $u_{j+1}>u_j$ te takav da je $f(u_{j+1})$ oblika (i,l,m), za neke l,m. Ovako dobivamo niz $u_0,u_1,u_2,\ldots$ u $\mathbb{N}$. Imamo $f(u_j)=(i,l,m)$. Sada za $j\in\mathbb{N}$ možemo definirati:

$$h(i,j):=G(\langle(l)_0,\ldots,(l)_{\bar{l}}\rangle,m)-1.$$

Tada je $h\colon\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ izračunljiva funkcija te možemo definirati:

$$U_{i,j}:=I_{h(i,j)}.$$

Kao i u dokazu propozicije 2.2.7 dobivamo da za $i,j_1,j_2\in\mathbb{N}$ skupovi U_{i,j_1} i U_{i,j_2} leže u istoj komponenti povezanosti od I_i ako i samo ako postoje brojevi $l_0,\ldots,l_n\in\mathbb{N}$ takvi da je $l_0=j_1$, $l_n=j_2$ i takvi da je $U_{i,l_p}\cap U_{i,l_{p+1}}\neq\emptyset$ za svaki $p\in\{0,\ldots,n-1\}$. Posebno imamo da je skup $\{(i,j_1,j_2)\mathbb{N}^3 \mid U_{i,j_1} \text{ i } U_{i,j_2} \text{ leže u istoj komponenti povezanosti od } I_i\}$ izračunljivo prebrojiv.

Neka je $k\in\mathbb{N}$. Stavimo $i=f_1(k)$ i $j=f_2(k)$. Možemo efektivno pronaći neki $l\in\mathbb{N}$ takav da je $\alpha_j\in U_{i,l}$. Uočimo da je tada skup D_k jednak uniji svih onih $U_{i,l'}$ takvih da $U_{i,l}$ i $U_{i,l'}$ leže u istoj komponenti povezanosti od I_i. Stoga imamo da je i $(I_i)\preceq(D_k)$. Ovime smo pokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.3.3. *Pretpostavimo da je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor. Tada vrijedi sljedeće: ako je multi funkcija $C\colon\subseteq X\times\mathbb{R}\rightrightarrows\mathcal{O}(X)$, definirana s:*

$$C(x,r):=\{U\in\mathcal{O}(X)\mid U \text{ povezan i } x\in U\subseteq B(x,r)\},\quad \forall\, x\in X \text{ i } \forall\, r>0,$$

izračunljiva, onda je (X,d,α) efektivno lokalno povezan.

Napomenimo da i obrat ove prethodne propozicije također vrijedi. Naime, neka su $x\in X$ i $r>0$ proizvoljni. Neka je $(a_0,a_1,\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ neko Cauchyjevo ime za uređen par (x,r). Pretpostavimo dodatno da je izračunljiv metrički prostor (X,d,α) efektivno lokalno povezan. Po definiciji to znači da postoji niz otvorenih i povezanih skupova $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, koji je izračunljivo ekvivalentan nizu skupova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dakle, postoje izračunljivo prebrojivi skupovi $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{N}^2$ i $\mathcal{C}'\subseteq\mathbb{N}^2$, takvi da je:

$$(D_k)\preceq_{\mathcal{C}}(I_i)\quad\text{i}\quad(I_i)\preceq_{\mathcal{C}'}(D_k).$$

Za početak uočimo da postoji neki $k\in\mathbb{N}$ takav da je $9\cdot 2^{-k}<q_{a(2k+1)}$. Naime, to dobivamo iz činjenice da niz $(q_{a(2k+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema broju r. U suprotnom bismo imali da je $q_{a(2k+1)}\leq 9\cdot 2^{-k}$, pa bi na limesu imali da je $r\leq 0$, što je jasno u suprostnosti s pretposatvkom da je $r>0$. Uočimo da za taj $k\in\mathbb{N}$ vrijedi:

$$x\in B(\alpha_{a(2k)},\frac{q_{a(2k+1)}}{2})\subseteq B(x,r).$$

Postoji $i\in\mathbb{N}$ takav da je $\tau_1(i)=a(2k)$ i takav da je $q_{\tau_2(i)}=\frac{q_{a(2k+1)}}{2}$. Stoga imamo da je $x\in I_i\subseteq B(x,r)$. Nadalje, postoji neki $j\in\mathbb{N}$ takav da je $(j,i)\in\mathcal{C}$ i takav da je $x\in D_j$. Sada, za taj dani j znamo da postoji neki $i_1\in\mathbb{N}$ sa svojstvom da je $(i_1,j)\in\mathcal{C}'$ i takav da je $x\in I_{i_1}$. Dakle imamo da je $x\in B(\lambda_{i_1},\rho_{i_1})$. Stoga je $d(x,\lambda_{i_1})<\rho_{i_1}$. Zbog ovog posljednjeg, postoji neki $l\in\mathbb{N}$ takav da je $d(x,\lambda_{i_1})+2\cdot 2^{-l}<\rho_{i_1}$. Također, za ovaj dani l imamo da je $d(x,\alpha_{a(2l)})<2^{-l}$ jer je po pretpostavci $(a_0,a_1,\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Cauchyjevo ime za uređen par (x,r). Stoga imamo, koristeći nejednakost trokuta da je $d(\lambda_{i_1},\alpha_{a(2l)})<\rho_{i_1}-2^{-l}$, to jest da vrijedi:

$$d(\lambda_{i_1},\alpha_{a(2l)})+2^{-l}<\rho_{i_1}.\tag{2.13}$$

Dakle, ako je $x\in D_j\subseteq B(x,r)$ onda smo pronašli elemente i_1 i l iz $\mathbb{N}$ takve da vrijedi relacija (2.13).

Stoga, krenuvši od Cauchyjevog imena $(a_0,a_1,\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ za uređen par (x,r), $r>0$, možemo pronaći prirodne brojeve i, k, j, i_1 i l takve da vrijedi sljedeće:

(i) $9\cdot 2^{-k}<q_{a(2k+1)}$;

(ii) $\tau_1(i)=a(2k)$ i $q_{\tau_2(i)}=\dfrac{q_{a(2k+1)}}{2}$;

(iii) $(j,i)\in\mathcal{C}$ i $(i_1,j)\in\mathcal{C}'$;

(iv) $d(\lambda_{i_1},\alpha_{a(2l)})+2^{-l}<\rho_{i_1}$.

Također primijetimo da ukoliko je $(a_0,a_1,\ldots)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Cauchyjevo ime za neki uređen par (x,r), $x\in X,r>0$, tako da vrijede svojstva (i), (ii), (iii) i (iv), maločas navedena, onda nužno mora biti:

$$x\in D_j\subseteq B(x,r).$$

Dakle, ova svojstva nam na neki način efektivno provjeravaju kako da za dani $x\in X$ i $r>0$, iz Cauchyjevog imena za uređen par (x,r), koje svakako imamo zbog reprezentacije $\delta_{X\times\mathbb{R}}$, pronađemo neki povezan i otvoren skup D_j koji sadrži točku x i koji je sadržan u otvorenoj kugli $B(x,r)$.

Definirajmo stoga skup S kao skup svih $(i, k, u, v, j, i_1, w, l) \in \mathbb{N}^8$ takvih da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 2^{-k} < q_u; \\ & \tau_1(i) = v \quad \text{i} \quad q_{\tau_2(i)} = \frac{q_u}{2}; \\ & (j, i) \in \mathcal{C} \quad \text{i} \quad (i_1, j) \in \mathcal{C}'; \\ & d(\lambda_{i_1}, \alpha_w) + 2^{-l} < \rho_{i_1}. \end{aligned}$$

Kako je S izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^8$, to postoji izračunljiv skup $T \subseteq \mathbb{N}^9$ takav da je $(i, k, u, v, j, i_1, w, l) \in S$ ako i samo ako postoji $y \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je:

$$(i, k, u, v, j, i_1, w, l, y) \in T.$$

Budući možemo pronaći prirodne brojeve i, k, j, i_1 i l takve da je

$$(i, k, a(2k+1), a(2k), j, i_1, a(2l), l) \in S,$$

to možemo pronaći prirodne brojeve i, k, j, i_1, l i y takve da je

$$(i, k, a(2k+1), a(2k), j, i_1, a(2l), l, y) \in T.$$

Definirajmo:

$$m := \mathbf{p}_0^i \cdot \mathbf{p}_1^k \cdot \mathbf{p}_2^j \cdot \mathbf{p}_3^{i_1} \cdot \mathbf{p}_4^l \cdot \mathbf{p}_5^y,$$

gdje su $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_5$ prosti brojevi redom. Matematičkom indukcijom lagano pokažemo da je $2k + 1 \leq m$, te da je $2l \leq m$ (jasno ukoliko je m barem 2).

Nadalje definirajmo:

$$z = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle.$$

Za funkciju $len\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiranu s

$$len(z) := \begin{cases} max\{i \in \mathbb{N} \mid \ \mathbf{p}_i | z\}, \ z \geq 2 \\ 0, \ z = 0, 1 \end{cases}$$

znamo da je izračunljiva (vidi [9]). Uočimo da je $len(z) = m$. Također imamo:

$$\begin{aligned} & i = (m)_0 = len(z)_0; \\ & k = (len(z))_1; \\ & a(2k+1) = (z)_{2k+1} = (z)_{2(len(z))_1+1}; \\ & a(2k) = (z)_{2(len(z))_1}; \\ & j = (len(z))_2; \\ & i_1 = (len(z))_3; \\ & a(2l) = (z)_{2l} = (z)_{2(len(z))_4}; \\ & y = (len(z))_5. \end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$g(z,n) := \begin{cases} 0, & \big((len(z))_0, (len(z))_1, (z)_{2(len(z))_1+1}, (z)_{2(len(z))_1}, \\ & \quad (len(z))_2, (len(z))_3, (z)_{2(len(z))_4}, (len(z))_4, (len(z))_5\big) \in T \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je funkcija g izračunljiva jer je skup T izračunljiv.

Dakle, rezimirajmo. Ako je $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Cauchyjevo ime za polazni $(x, r) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$, onda možemo pronaći neki $m \in \mathbb{N}$, takav da je $g(\langle a_0, \dots, a_m\rangle, n) = 0$ (m jasno može biti jako velik prirodan broj) i to za svaki $n \in \mathbb{N}$. Obratno, ako je $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Cauchyjevo ime za neki (x, r) i ako za neke $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $g(\langle a_0, \dots, a_m\rangle, n) = 0$, onda imamo da je:

$$((m)_0, (m)_1, a(2(m)_1 + 1), a(2(m)_1), (m)_2, (m)_3, a(2(m)_4), (m)_4, (m)_5) \in T,$$

(za $m \geq 2$ su ispunjeni uvjeti da je $2(m)_1 + 1 \leq m$ i da je $2(m)_4 \leq m$) pa stoga vrijedi da je:

$$x \in D_{(m)_2} \subseteq B(x, r).$$

Nadalje, definirajmo funkciju $G'\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tako da stavimo:

$$G'(z,n) := \begin{cases} (m)_2, & \text{gdje je } \ m \leq k \ \text{ najmanji takav da je} \\ & \quad g(\langle a_0, \dots, a_k\rangle, n) = 0 \ \text{ i } \ z = \langle a_0, \dots, a_k\rangle \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je funkcija G' također izračunljiva. Kako je skup $\mathcal{C}'$ izračunljivo prebrojiv to postoji izračunljiv skup $\Sigma \subseteq \mathbb{N}^3$, takav da vrijedi sljedeće: $(i, j) \in \mathcal{C}'$ ako i samo ako postoji neki $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j, y) \in \Sigma$. Neka su $\omega_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $\omega_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije takve da je

$$\mathbb{N}^2 = \{(\omega_1(i), \omega_2(i)) \mid \ i \in \mathbb{N}\}.$$

Takve funkcije zaista postoje (vidi [9]).

Definirajmo sada funkciju $G\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$G(z,n) := \begin{cases} \omega_1(n) + 1, & (\omega_1(n), G'(z,n), \omega_2(n)) \in \Sigma \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Uočavamo sljedeće. Ako je $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Cauchyjevo ime za polazni $(x, r) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$, onda postoji neki $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $g(\langle a_0, \dots, a_{m_0}\rangle, n) = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i takav da je broj m_0 najmanji takav prirodan broj s navedenim svojstvom.

Definirajmo sada funkciju $F\colon \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na sljedeći način. Za Cauchyjevo ime $(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (polaznog $(x, r) \in \ X \times \mathbb{R}_{>0}$) postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $g(\langle a_0, \dots, a_{m_0}\rangle, n) = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i broj m_0 je najmanji takav prirodan broj. Stavimo:

$$b_n := G(\langle a_0, \dots, a_{m_0}\rangle, n).$$

Tada definiramo:

$$F((a_0, a_1, \ldots)) := (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots).$$

Za funkciju F, upravo definiranu, odmah imamo da je izračunljiva, jer su nam funkcije g, G izračunljive. Ovime smo pokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.3.4. *Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor. Tada je multi funkcija $C\colon \subseteq X \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathcal{O}(X)$, definirana s:*

$$C(x, r) := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \ \ \textit{povezan i} \ \ x \in U \subseteq B(x, r)\}, \quad \forall\, x \in X \quad i \quad \forall\, r > 0,$$

izračunljiva.

2.4. Co-c.e. skupovi s efektivno nepovezanim komplementima

U ovom poglavlju proučit ćemo komponente povezanosti izračunljivo prebrojivih otvorenih skupova u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Lema 2.4.1. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je S co-c.e. zatvoren skup u (X, d, α). Nadalje, pretpostavimo da su skupovi (D_i) i $\mathcal{F}$ kao iz propozicije 2.2.6.*

(i) Ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da skup D_i siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$ i takav da je interior od $D_i \cap S$ prazan, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $(l, i, k) \in \mathcal{F}$ i takav da D_l siječe dvije različite komponente povezanosti od $X \setminus S$.

(ii) Ako je U otvoren i povezan skup u metričkom prostoru (X, d) koji siječe dvije različite komponente povezanosti povezanosti skupa $X \setminus S$ i takav da je interior od $U \cap S$ prazan, onda postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $D_l \subseteq U$ i takav da D_l siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj. Prema tvrdnjama (i) i (ii) leme 2.2.6 imamo

$$D_i = \bigcup_{(l,i,k) \in \mathcal{F}} D_l. \tag{2.14}$$

Pretpostavimo sada da ne postoji niti jedan $l \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da vrijedi $(l, i, k) \in \mathcal{F}$ i takav da D_l siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$.

Za svaku komponentu povezanosti K od $X \setminus S$ neka je skup $[K]$ definiran na sljedeći način:

$$[K] := \{l \in \mathbb{N} \mid (l, i, k) \in \mathcal{F} \ \wedge \ D_l \cap K \neq \emptyset\}.$$

Neka su K_1 i K_2 dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$ te neka su $l_1 \in [K_1]$ i $l_2 \in [K_2]$. Tvrdimo da vrijedi sljedeće:

$$D_{l_1} \cap D_{l_2} = \emptyset. \tag{2.15}$$

U suprotnom, skup $D_{l_1} \cap D_{l_2}$ je neprazan i budući imamo da je $D_{l_1} \subseteq K_1 \cup S$ te $D_{l_2} \subseteq K_2 \cup S$, nužno mora biti

$$D_{l_1} \cap D_{l_2} \subseteq S.$$

No kako je $D_{l_1} \cap D_{l_2} \subseteq D_i$ to interior skupa $D_i \cap S$ mora biti neprazan što jasno vodi na kontradikciju sa pretpostavkom same tvrdnje (i).

Stoga, relacija (2.15) nužno vrijedi. Iz (2.15) te iz relacije (2.14) zaključujemo da je D_i zapravo disjunktna unija skupova

$$\bigcup_{l \in [K]} D_l,$$

gdje je K komponenta povezanosti skupa $X \setminus S$. Dakle:

$$D_i = \bigcup_{K} \left(\bigcup_{l \in [K]} D_l \right), \tag{2.16}$$

gdje K u relaciji (2.16), ide po svim komponentama povezanosti skupa $X \setminus S$.

Kako po pretpostavci tvrdnje (i) skup D_i siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$ to postoje dvije različite komponente povezanosti K_1 i K_2 od $X \setminus S$ takve da su pripadni skupovi

$$\bigcup_{l \in [K_1]} D_l \quad \text{i} \quad \bigcup_{l \in [K_2]} D_l, \tag{2.17}$$

koji ulaze u rastav skupa D_i iz relacije (2.16), neprazni. Skupovi iz relacije (2.17) su očito otvoreni te time dobivamo odmah kontradikciju s povezanošću skupa D_i.

Potpuno identično bismo pokazali i tvrdnju (ii). Ovdje je bitno da je skup U otvoren i povezan, te da je (D_i) niz otvorenih i povezanih skupova koji je po pretpostavci izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i), pa se skup U može prikazati kao unija nekih elemenata niza (D_i). $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je V nepovezan otvoren skup u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da je skup V **efektivno nepovezan** u (X, d, α) ako postoji izračunljivo prebrojiv podskup A od $\mathbb{N}$ sa svojstvom da za svaku komponentu povezanosti K skupa V postoji jedinstven broj $i \in A$ takav da je $\alpha_i \in K$.

Uočimo da svaki nepovezan otvoren skup koji ima konačno mnogo komponenti povezanosti nužno mora biti efektivno nepovezan.

Propozicija 2.4.2. *Neka je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor te neka je U izračunljivo prebrojiv otvoren skup u (X, d, α) koji je efektivno nepovezan. Tada je skup Γ, definiran s:*

$$\Gamma = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid \ \alpha_i \text{ i } \alpha_j \text{ leže u različitim komponentama povezanosti od } U\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Budući je po pretpostavci skup U efektivno nepovezan, to po definiciji postoji izračunljivo prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sa svojstvom da za svaku komponentu povezanosti K skupa U, postoji jedinstven element $i \in A$ takav da je $\alpha_i \in K$.

Neka je Δ skup kao u Propoziciji 2.2.7 te neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:

$$(i,j) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \exists\, a, b \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } a \neq b,\; a, b \in A,\; (i,a) \in \Delta,\; (j,b) \in \Delta.$$

Sada tvrdnja ove propozicije slijedi iz činjenice da je skup Δ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. $\square$

U nastavku navodimo jednu jednostavnu, ali za nas jako korisnu činjenicu iz opće teorije izračunljivih funkcija.

Lema 2.4.3. *Neka su $S \subseteq \mathbb{N}$ i $T \subseteq \mathbb{N}^3$ izračunljivo prebrojivi skupovi koji imaju svojstvo da za svaki $i \in S$ i svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $l \in S$ takav da je $(l, i, k) \in T$. Tada za svaki $i_0 \in S$ postoji izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima:*

a) $f(0) = i_0$,
b) $f(\mathbb{N}) \subseteq S$,
c) $(f(k+1), f(k), k+1) \in T,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S co-c.e. skup u (X, d, α). Tada, kako je spomenuto na početku ovog poglavlja u motivacijskom dijelu, skup S ne treba sadržavati izračunljivu točku. No, s druge strane, ako pretpostavimo da je skup $X \setminus S$ efektivno nepovezan, onda u izračunljivom euklidskom prostoru S nužno mora sadržavati izračunljivu točku (vidi [8]).

Općenito, čak ni ako je metrički prostor (X, d) povezan, co-c.e. skup $S \subseteq X$ kojemu je komplement efektivno nepovezan ne treba u sebi imati izračunljivu točku, što sljedeći primjer i potkrepljuje.

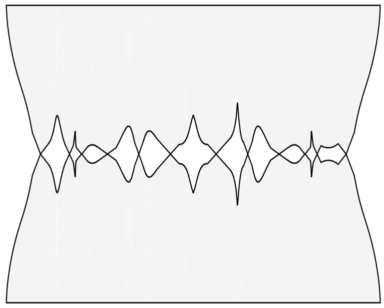
Primjer 2.4.4. Pretpostavimo da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ izračunljiva funkcija (za preciznu definiciju izračunljive funkcije sa $[0,1] \to \mathbb{R}$ vidjeti [9, 23]) koja ima nultočke, ali joj niti jedna nultočka nije izračunljiva. Takva funkcija sigurno postoji (vidi [24]). Možemo pretpostaviti da je $0 \leq f(x) < 1$, za svaki $x \in [0,1]$. Definirajmo skup X na sljedeći način:

$$X := X_1 \cup X_2,$$

gdje je

$$X_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ f(x) \leq y \leq 1\},$$
$$X_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ -1 \leq y \leq -f(x)\}.$$

Tada je X c.e. zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$ (vidjeti Sliku 1). Napomenimo ovdje da na $\mathbb{R}^2$ gledamo kao na izračunljiv metrički prostor koji je opisan u primjeru 1.1.7.



Slika 1.

Pokažimo da je skup X_1 c.e. zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$. Da bismo to pokazali, konstruirat ćemo izračunljiv niz $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}^2$, takav da je

$$X_1 = \mathrm{Cl}(\{x_j \mid \ j \in \mathbb{N}\}).$$

Tada ćemo odmah imati da je skup X_1 c.e. zatvoren (vidi relaciju 1.4). Neka je $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ izračunljiva funkcija takva da je $\mathrm{Cl}(\{r(j) \mid \ j \in \mathbb{N}\}) = [0,1]$ (da takva funkcija zaista postoji čitatelja upućujemo na primjer 1.1(ii) u [9]). Definirajmo funkciju $\beta\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ sa:

$$\beta(i,j) := r(i) + f(r(j)) \cdot (1 - r(i)), \ \forall\, i,j \in \mathbb{N}\,.$$

Tada imamo da je β izračunljiva funkcija (vidi propoziciju 1.1.5). Također imamo da je za fiksni $j \in \mathbb{N}$ ispunjeno sljedeće:

$$\mathrm{Cl}(\{\beta(i,j) \mid \ i \in \mathbb{N}\}) = [f(r(j)), 1].$$

Neka je $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ funkcija (niz) definirana s

$$x(k) := (r((k)_0), \beta((k)_1, (k)_2)), \ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Tada je funkcija x izračunljiva (jer su komponentne funkcije od x izračunljive; vidi napomenu 1.1.6) te vrijedi sljedeće:

$$X_1 = \mathrm{Cl}(\{x(k) \mid \ k \in \mathbb{N}\}),$$

to jest X_1 je c.e. zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$. Slično bismo pokazali da je i skup X_2 c.e. zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$, pa zaista imamo da je i skup X c.e. zatvoren podskup od $\mathbb{R}^2$.

Budući je $\mathbb{R}^2$ potpun metrički prostor, to u $\mathbb{R}^2$ postoji izračunljiv niz α takav da je $X = \mathrm{Cl}(\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\})$.

Neka je d euklidska metrika na X. Kako je funkcija $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ izračunljiva (vidi poglavlje 3.1 u [9]), to je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Kako je niz α izračunljiv u $\mathbb{R}^2$, njegovi komponentni nizovi su također izračunljivi te nije teško zaključiti da ako je (x,y) izračunljiva točka u(X, d, α), onda su x i y nužno izračunljivi brojevi.

Neka je nadalje $S := f^{-1}(\{0\}) \times \{0\}$. Tada je $S \subseteq X$ te vrijedi da je

$$S = X \cap (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Stoga se jednostavno može zaključiti da je S co-c.e. skup u (X, d, α). Očito skup $X \setminus S$ ima dvije komponente povezanosti pa je time $X \setminus S$ ujedno i efektivno nepovezan. No, iz same definicije skupa S uočavamo da S ne sadrži niti jednu točku koja bi bila izračunljiva u (X, d, α). Primijetimo, također, da je metrički prostor (X, d) povezan (naime, može se provjeriti da je (X, d) putevima povezan, a općenito je poznato iz topologije da ukoliko je neki prostor putevima povezan, onda je i povezan).

Ubrzo ćemo vidjeti da je pretpostavka efektivne lokalne povezanosti, na izračunljiv metrički prostor (X, d, α), dovoljna za zaključak da co-c.e. skup S kojemu je komplement efektivno nepovezan nužno mora sadržavati izračunljivu točku ukoliko je metrički prostor (X, d) povezan. Ta činjenica je zapravo posljedica sljedećeg teorema.

Teorem 2.4.5. *Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor. Neka je S co-c.e. skup u (X, d, α) takav da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan.*

(i) Pretpostavimo da je (X, d) potpun metrički prostor te U otvoren i povezan skup u metričkom prostoru (X, d) koji siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Tada skup $U \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

(ii) Pretpostavimo da svaka točka $x \in S$ leži na rubu barem dvije različite komponente povezanosti od $X \setminus S$. Tada je S izračunljiv skup u (X, d, α).

Dokaz. Neka je (D_i) niz otvorenih i povezanih skupova u metričkom prostoru (X, d) koji je izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i). Nadalje, neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^3$ izračunljivo prebrojiv skup kao u Propoziciji 2.2.6.

Definirajmo skup Γ na sljedeći način:

$$\Gamma := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_i \text{ i } \alpha_j \text{ leže u različitim komponentama povezanosti skupa } X \setminus S\}.$$

Iz propozicije 2.4.2 odmah imamo da je Γ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Također stavimo:

$$\Omega := \{i \in \mathbb{N} \mid D_i \text{ siječe dvije različite komponente skupa } X \setminus S\}.$$

Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$i \in \Omega \;\Leftrightarrow\; \exists\, a, b \in \mathbb{N} \text{ takvi da } \alpha_a, \alpha_b \in D_i \text{ i } (a, b) \in \Gamma.$$

Propozicija 2.2.5 sada osigurava da je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

(i) Pretpostavimo prvo da je $\mathrm{Int}(U \cap S) \neq \emptyset$. Tada postoji neki $a \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_a \in U \cap S$. Takav broj sigurno postoji jer je $\mathrm{Int}(U \cap S)$ otvoren skup, a (α_i) je niz koji je gust u X. Dakle, u tom slučaju, α_a je tražena izračunljiva točka.

Pretpostavimo stoga da je $\mathrm{Int}(U \cap S) = \emptyset$. Prema lemi 2.4.1 (ii) postoji neki broj $P \in \mathbb{N}$ takav da je $D_P \subseteq U$ te takav da skup D_P siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$.

Lema 2.4.1 nam osigurava da za svaki $i \in \Omega$ te $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \Omega$ sa svojstvom da je $(l, i, k) \in \mathcal{F}$. Također, iz Leme 2.4.3 zaključujemo da postoji izračunljiv niz $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takav da je $i_0 = P$, $i_k \in \Omega$ te $(i_{k+1}, i_k, k+1) \in \mathcal{F}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Lagano se može zaključiti da povezan skup V, u metričkom prostoru (X, d), koji siječe dvije različite komponente skupa $X \setminus S$, nikako ne može biti cijeli sadržan u skupu $X \setminus S$. U tom slučaju dakle moramo imati da vrijedi $V \cap S \neq \emptyset$. Stoga, za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo:

$$D_{i_k} \cap S \neq \emptyset. \tag{2.18}$$

Nadalje, vrijedi da je

$$D_{i_{k+1}} \subseteq D_{i_k} \text{ i } \operatorname{diam} D_{i_{k+1}} < 2^{-(k+1)}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Slijedi:

$$\mathrm{Cl}(D_{i_{k+1}}) \subseteq \mathrm{Cl}(D_{i_k}) \quad \text{i} \quad \operatorname{diam} \mathrm{Cl}(D_{i_{k+1}}) = \operatorname{diam} D_{i_{k+1}} < 2^{-(k+1)},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Kako je metrički prostor (X, d) po pretpostavci potpun, to sada Cantorov teorem o presjeku (vidi Teorem 4.13 u [27]) povlači da vrijedi sljedeće

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Cl}(D_{i_k}) = \{x\},$$

gdje je $x \in X$. Kako je prema propoziciji 2.2.5 skup $\{(n, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha_n \in D_i\}$ izračunljivo prebrojiv, to se može zaključiti da postoji izračunljiva funkcija $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_{f(k)} \in D_{i_k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, imamo

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < \operatorname{diam}(D_{i_k}) < 2^{-k}$$

te stoga slijedi da je x izračunljiva točka. Kako svaka otvorena okolina točke x u (X, d) sadrži u sebi neki skup D_{i_k} koji prema relaciji (2.18) siječe skup S to nužno imamo da je $x \in \mathrm{Cl}(S)$, pa zbog zatvorenosti skupa S odmah dobivamo i $x \in S$.

(ii) Kako je po pretpostavci teorema S co-c.e. skup to nam jedino ostaje još dokazati da je skup S ujedno i izračunljivo prebrojiv. Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}^2$ izračunljivo prebrojiv skup takav da je $(D_i) \preceq_{\mathcal{C}} (I_i)$.

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $I_i \cap S \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in I_i \cap S$, te budući je posebno $x \in I_i$, to postoji neki $j \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je

$$x \in D_j \text{ i } (j, i) \in \mathcal{C}.$$

Kako je $x \in S$, to prema pretpostavci x leži na rubu dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Stoga, jer je D_j otvorena okolina točke x, mora nužno sam skup D_j sijeći dvije različite komponente povezanosti od $X \setminus S$. Dakle, $j \in \Omega$.

S druge strane, pretpostavimo da je $j \in \mathbb{N}$ takav da $(j, i) \in \mathcal{C}$ i $j \in \Omega$. Budući D_j siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$, imamo da $D_j \cap S \neq \emptyset$. Ovo posljednje, zajedno sa činjenicom da je $D_j \subseteq I_i$ povlači odmah $I_i \cap S \neq \emptyset$.

Dakle vrijedi:

$$I_i \cap S \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \exists\, j \in \mathbb{N} \text{ takav da } (j, i) \in \mathcal{C} \text{ te } j \in \Omega.$$

Slijedi da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap S \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$, a time i da je skup S izračunljiv, što je i trebalo dokazati. □

Korolar 2.4.6. *Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor te neka je S co-c.e. skup u (X, d, α) takav da je skup $X \setminus S$ efektivno nepovezan. Dodatno, pretpostavimo da je metrički prostor (X, d) povezan i potpun. Tada skup S sadrži izračunljivu točku.*

Dokaz. Definirajmo $U := X$ te primijenimo teorem 2.4.5 pod (i). □

Promotrimo sada izračunljiv metrički prostor (X, d, α) konstruiran u primjeru 2.4.4. Neka je skup S također isti kao i u primjeru 2.4.4. Imamo da je skup S co-c.e. te da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan. Također, metrički prostor (X, d) jest potpun, štoviše također je i kompaktan. Ako stavimo $U := X$, tada je U otvoren i povezan skup u (X, d). No, uočimo da skup $U \cap S = S$ ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. Prethodni Teorem 3.7 nas odmah vodi na zaključak da izračunljiv metrički prostor (X, d, α) nije efektivno lokalno povezan. S druge strane, iz same definicije skupa X nije teško provjeriti da je metrički prostor (X, d) lokalno povezan (štoviše, vidjeli smo da je i povezan).

Pretpostavimo da je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor i neka je S co-c.e. skup u (X, d, α) takav da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan. Teorem 3.7 pod (i) nam daje dovoljni uvjet da skup S sadrži izračunljivu točku. Ipak, općenito S ne treba sadržavati izračunljivu točku. U tu svrhu promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.4.7. Postoji broj $b \in \langle 0, 1\rangle$ koji nije izračunljiv te postoji izračunljiv niz racionalnih brojeva β sa svojstvom da je $([0, b], d', \beta)$ izračunljiv metrički prostor (vidi [9, 11]). Ovdje je d' euklidska metrika na $[0, b]$. Nije teško zaključiti da je skup $\{b\}$ co-c.e. u ovom promatranom izračunljivom metričkom prostoru (vidjeti naprimjer primjer 3.2 u [11]). Također, jednostavno se može konstruirati izračunljiv niz racionalnih brojeva γ takav da je $\{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$ te izračunljiv niz racionalnih brojeva α takav da je $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\beta_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Neka je $X := [0, b] \cup [1, 2]$ i pretpostavimo da je d euklidska metrika na X. Tada je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor u kojem je $S := \{b\}$ co-c.e. skup. Nadalje, $X \setminus S$ ima točno dvije komponente povezanosti te je time skup $X \setminus S$ efektivno nepovezan. Kako su sve otvorene kugle, u promatranom metričkom prostoru (X, d), s dovoljno malim radijusom ujedno i povezane, imamo da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) efektivno lokalno povezan (primjer 2.2.3). Ipak, uočimo da skup S ne sadrži niti jednu izračunljivu točku (činjenica da b nije izračunljiv broj povlači da b također nije ni izračunljiva točka u (X, d, α)).

Sada ćemo opisati još jedan dovoljan uvjet uz koji skup S sadrži izračunljivu točku. Dokazat ćemo da S sadrži izračunljivu točku ukoliko postoji povezan skup A koji siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Štoviše, pokazat ćemo da se u ovom slučaju izračunljiva točka x može pronaći tako da bude po volji blizu skupu A. Napomenimo ovdje da u metričkom prostoru (X, d), za neki $A \subseteq X$ te točku $x_0 \in X$ definiramo:

$$d(x_0, A) := \inf\{d(x_0, a) \mid a \in A\}.$$

Teorem 2.4.8. *Neka je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor i neka je S co-c.e. skup u (X, d, α) takav da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan. Pretpostavimo da je metrički prostor (X, d) potpun te da je A povezan skup u (X, d) koji siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$, postoji izračunljiva točka $x_0 \in S$ takva da je*

$$d(x_0, A) < \varepsilon.$$

Dokaz. Neka je (D_i) niz otvorenih i povezanih skupova koji je izračunljivo ekvivalentan nizu (I_i) te neka je $\varepsilon > 0$. Lagano možemo zaključiti, koristeći Propoziciju 2.2.6, da je familija $\{D_i \mid i \in \mathbb{N},\ \operatorname{diam} D_i < \varepsilon\}$ otvoren pokrivač od (X, d). Definirajmo:

$$A' := \{i \in \mathbb{N} \mid D_i \cap A \neq \emptyset,\ \operatorname{diam} D_i < \varepsilon\}.$$

Imamo

$$A \subseteq \bigcup_{i \in A'} D_i. \tag{2.19}$$

Prvi slučaj: Pretpostavimo da postoji neki $i \in A'$ takav da D_i siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Budući je metrički prostor (X, d) potpun i D_i je otvoren i povezan, to Teorem 3.7 pod (i) povlači da skup $D_i \cap S$ sadrži izračunljivu točku x_0. Imamo da je $D_i \cap A \neq \emptyset$ te $\operatorname{diam} D_i < \varepsilon$. Stoga odmah slijedi:

$$d(x_0, A) < \varepsilon.$$

Drugi slučaj: Pretpostavimo da za svaki $i \in A'$ skup D_i siječe najviše jednu komponentu povezanosti skupa $X \setminus S$. Ako postoji neki $i \in A'$ takav da skup D_i ne siječe niti jednu komponentu povezanosti od $X \setminus S$, onda je $D_i \subseteq S$. Kako je D_i otvoren i neprazan, to postoji neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_n \in D_i$ te, kao i u prvom slučaju, možemo zaključiti da $d(\alpha_n, A) < \varepsilon$, što posebno znači da je α_n tražena izračunljiva točka.

Stoga možemo pretpostaviti da za svaki $i \in A'$ skup D_i siječe točno jednu komponentu povezanosti skupa $X \setminus S$. Neka je $\mathcal{K}$ skup svih komponenti povezanosti od $X \setminus S$. Za $K \in \mathcal{K}$ neka je

$$A'_K = \{i \in A' \mid D_i \cap K \neq \emptyset\}.$$

Tada vrijedi

$$A' = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} A'_K, \tag{2.20}$$

te za svaki $K \in \mathcal{K}$ i $i \in A'_K$ imamo

$$D_i \subseteq K \cup S. \tag{2.21}$$

Za $K \in \mathcal{K}$ stavimo

$$U_K := \bigcup_{i \in A'_K} D_i.$$

Iz relacija (2.19) i (2.20) slijedi

$$A \subseteq \bigcup_{K \in \mathcal{K}} U_K. \tag{2.22}$$

Uočimo da za svaki $K \in \mathcal{K}$ imamo da je $K \cap A \subseteq U_K \cap A$. Prema pretpostavci teorema skup A siječe dvije komponente povezanosti skupa $X \setminus S$, te stoga barem dva skupa U_K, $K \in \mathcal{K}$ sijeku skup A. Kako je A povezan te relacija (2.22) vrijedi, skupovi U_K, $K \in \mathcal{K}$, koji su očito otvoreni, ne mogu u parovima biti disjunktni. Stoga moraju postojati neki $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ takvi da je $K_1 \neq K_2$ i

$$U_{K_1} \cap U_{K_2} \neq \emptyset.$$

Slijedi da postoje $i \in A'_{K_1}$ i $j \in A'_{K_2}$ takvi da je $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. Prema relaciji (2.21) imamo da vrijedi sljedeće:

$$D_i \cap D_j \subseteq (K_1 \cup S) \cap (K_2 \cup S) \subseteq S.$$

Stoga je $D_i \cap D_j$ otvoren i neprazan skup koji je sadržan u S. Ako sada odaberemo neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha_n \in D_i \cap D_j$, a to možemo jer je navedeni skup otvoren i neprazan, imamo da je $d(\alpha_n, A) < \varepsilon$, te je stoga α_n tražena izračunljiva točka. $\square$

Prirodno se postavlja pitanje može li se izračunljiva točka $x_0 \in S$ odabrati tako da vrijedi i $x_0 \in A$. Naravno, u tom pogledu razumno je pretpostaviti da sam skup A posjeduje neko izračunljivo svojstvo, naprimjer da je A izračunljiv skup. Idući nam primjer pokazuje da čak ni u tom slučaju takva točka ne treba postojati.

Primjer 2.4.9. Pretpostavimo da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nenegativna izračunljiva funkcija koja ima nultočke, ali joj niti jedna nultočka nije izračunljiva. Koristeći činjenicu da je funkcija f izračunljiva, nije teško pokazati da je graf funkcije f, to jest skup $\Gamma(f)$, izračunljiv skup u $\mathbb{R}^2$. Nadalje, $\Gamma(-f)$ je izračunljiv skup te je stoga skup

$$A = \Gamma(f) \cup \Gamma(-f)$$

također izračunljiv podskup od $\mathbb{R}^2$. Neka je $S = \mathbb{R} \times \{0\}$. Tada je S co-c.e. skup u $\mathbb{R}^2$ takav da je $\mathbb{R}^2 \setminus S$ efektivno totalno nepovezan. Izračunljiv metrički prostor $\mathbb{R}^2$ je očito efektivno lokalno povezan. Nadalje, skup A siječe dvije komponente skupa $\mathbb{R}^2 \setminus S$. No, ipak, skup $S \cap A$ ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. Naime, uočimo da vrijedi

$$S \cap A = f^{-1}(\{0\}) \times \{0\}.$$

Ovim primjerom zaključit ćemo ovo poglavlje.

Poglavlje 3.

Izračunljive točke presjeka

Opišimo za početak što će biti predmet proučavanja u ovom poglavlju. Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je K izračunljiv skup u X koji je kao potprostor od (X, d) kompaktan i povezan (drugim riječima pretpostavljamo da je skup K izračunljiv kontinuum u X) te neka su U i V dva disjunktna c.e. otvorena skupa u (X, d, α) takva da skup K siječe i skup U te skup V. Stavimo:

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Želimo odrediti uvjete uz koje skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku. Dokazat ćemo da promatrani skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko pretpostavimo da je skup K luk. Također, proučavat ćemo i općenitiji slučaj kada je K lančasti kontinuum te ćemo u tom slučaju dokazati da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku uz dodatnu pretpostavku da je $K \cap S$ *potpuno nepovezan*. Nadalje, dokazat ćemo da $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko je K lančasti kontinuum i skup S bilo koji co-c.e. zatvoren skup koji ima svojstvo da u presjeku sa skupom K sadrži izolirane i dekompozabilne komponente povezanosti. U vezi s time, proučavat ćemo poluizračunljive lančaste kontinuume te ćemo dokazati neke rezultate koji govore o aproksimaciji takvih kontinuuma izračunljivim potkontinuumima.

3.1. Nuldimenzionalnost i tehnika (U, V)-lanaca

Pretpostavimo da je X neprazan skup. Neka je $C_0, \dots, C_m$ konačan niz nepraznih podskupova od X. Kažemo da je konačan niz $C_0, \dots, C_m$ **lanac** u X ako za sve $i, j \in \{0, \dots, m\}$ vrijedi:

$$|i - j| > 1 \implies C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Za skup C_i $(0 \leq i \leq m)$ prirodno kažemo kažemo da je **karika** lanca $C_0, \dots, C_m$.

Nadalje, za lanac $C_0, \dots, C_m$ kažemo da je **jednostavan** ako vrijedi sljedeće (vidi [6]):

$$C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset, \ \forall\, i \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{A} := (A_0, \dots, A_m)$ konačan niz nepraznih i ograničenih skupova u X. Tada definiramo:

$$\mathrm{mesh}(\mathcal{A}) := \max_{0 \leq i \leq m} \mathrm{diam}(A_i).$$

Ukoliko je ε pozitivan realan broj te $\mathcal{C}$ lanac u metričkom prostoru (X, d), onda kažemo da je $\mathcal{C}$ ε-lanac ako je $\mathrm{mesh}(\mathcal{C}) < \varepsilon$.

Za (jednostavan) lanac u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je **otvoren** u (X, d) ako mu je svaka karika otvoren skup u (X, d). Pojam **kompaktnog** (jednostavnog) lanca u (X, d) definiramo na potpuno analogan način.

Pretpostavimo da je X neprazan skup. Neka je $S \subseteq X$ te $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ konačan niz podskupova od X. Kažemo da $\mathcal{C}$ **pokriva** S ako je $S \subseteq C_0 \cup \cdots \cup C_m$. Nadalje, reći ćemo da $\mathcal{C}$ **pravilno pokriva** S ako $\mathcal{C}$ pokriva S i $C_0 \cap S \neq \emptyset$, $C_m \cap S \neq \emptyset$. Ako su $a, b \in X$, onda kažemo da $\mathcal{C}$ **pokriva** S **od** a do b ako $\mathcal{C}$ pokriva S i vrijedi da je $a \in C_0$ te $b \in C_m$.

Neka je (X, d) kontinuum (kompaktan i povezan metrički prostor). Reći ćemo da je (X, d) **lančasti kontinuum** ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji jednostavan otvoren ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (X, d) koji pokriva X. Ako su $a, b \in X$, onda kažemo da je (X, d) **kontinuum lančast od** a **do** b ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji jednostavan otvoren ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (X, d) koji pokriva X od točke a do točke b (vidi [6, 21]).

Lema 3.1.1. *Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor te neka je $k \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$. Nadalje, neka su $D_0, \ldots, D_k$ neprazni kompaktni skupovi u (X, d) takvi da je $diam\,(D_i) < \frac{\epsilon}{2}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$. Tada postoje otvoreni skupovi $C_0, \ldots, C_k$ koji zadovoljavaju sljedeće:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diam}\,(C_i) < \epsilon, && \forall\ i \in \{0, \ldots, k\};\\
&D_i \subseteq C_i, && \forall\ i \in \{0, \ldots, k\};\\
&C_i \cap C_j = \emptyset, && \forall\ i, j \in \{0, \ldots, n\} \ \ \textit{takvi da je} \ \ D_i \cap D_j = \emptyset.
\end{aligned}$$

Dokaz. Ako je $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ za sve $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, onda stavimo $\mu = 1$, u protivnom neka je

$$\mu = \min \{d\,(D_i, D_j) \mid i, j \in \{0, \ldots, k\},\ D_i \cap D_j = \emptyset\}.$$

Budući su skupovi $D_0, \ldots, D_k$ kompaktni imamo da je $\mu > 0$. Sada definirajmo:

$$\lambda = \min \left\{\mu, \frac{\epsilon}{4}\right\}.$$

Za $i \in \{0, \ldots, k\}$ stavimo

$$C_i = \bigcup_{x \in D_i} B\left(x, \frac{\lambda}{2}\right). \tag{3.1}$$

Za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$ skup C_i je očito otvoren.

Pretpostavimo sada da su $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ takvi da je $D_i \cap D_j = \emptyset$. Tada je i $C_i \cap C_j = \emptyset$. Zaista, uočimo ako postoji neki $x \in C_i \cap C_j$, onda postoje neki $a \in D_i$ i $b \in D_j$ takvi da je $x \in B\left(a, \frac{\lambda}{2}\right)$ i $x \in B\left(b, \frac{\lambda}{2}\right)$ te je stoga

$$\lambda \leq \mu \leq d\,(a, b) \leq d\,(a, x) + d\,(x, b) < \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

što nas očito vodi na kontradikciju $\lambda < \lambda$.

Nadalje, $\operatorname{diam}(C_i) < \epsilon$ za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$. Zaista, ako su $x, y \in C_i$, onda postoje $a, b \in D_i$ takvi da je $x \in B\left(a, \frac{\lambda}{2}\right)$ i $y \in B\left(b, \frac{\lambda}{2}\right)$ te vrijedi

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) \\ &< \frac{\lambda}{2} + \operatorname{diam}(D_i) + \frac{\lambda}{2} = \lambda + \operatorname{diam}(D_i) \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{3\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Dakle

$$\operatorname{diam}(C_i) \leq \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon.$$

Očito iz same definicije (vidi relaciju (3.1)) vrijedi da je $D_i \subseteq C_i$ za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$. □

Propozicija 3.1.2. *Neka je (X, d) kontinuum i neka su $a, b \in X$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) (X, d) je lančast od a do b;

(ii) za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvoreni ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (X, d) koji pokriva X od a do b;

(iii) za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan ϵ-lanac $K_0, \ldots, K_m$ u (X, d) koji pokriva X od a do b.

Dokaz. Očito je da tvrdnja (i) povlači tvrdnju (ii).

Obratno, ako je $\varepsilon > 0$ te $C_0, \ldots, C_m$ otvoreni ε-lanac u (X, d) koji pokriva X od točke a do točke b, onda je $C_0, \ldots, C_m$ jednostavan lanac. Zaista, ako je $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ takav da je $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$, onda je $(C_0 \cup \cdots \cup C_i, C_{i+1} \cup \cdots \cup C_m)$ separacija od (X, d), što je naravno u suprotnosti s činjenicom da je (X, d) povezan. Dakle imamo da (ii) povlači (i).

Pretpostavimo sada da (iii) vrijedi. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji kompaktan $\frac{\varepsilon}{2}$-lanac $D_0, \ldots, D_k$ u (X, d) koji pokriva X od a do b. Neka su $C_0, \ldots, C_k$ kao u lemi 3.1.1. Tada je $C_0, \ldots, C_m$ otvoren ε-lanac u (X, d) koji pokriva X od a do b. Dakle imamo da tvrdnja (ii) vrijedi.

Pretpostavimo nadalje da tvrdnja (ii) vrijedi. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji otvoreni ε-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (X, d) koji pokriva X od a do b. Stoga je $\{C_0, \ldots, C_m\}$ otvoreni pokrivač od (X, d) i budući je (X, d) kompaktan, to mora postojati neki $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj za ovaj otvoreni pokrivač. Kompaktnost od (X, d) povlači da mora postojati konačno mnogo točaka $x_0, \ldots, x_N \in X$ takvih da je

$$X = B\left(x_0, \frac{\lambda}{3}\right) \cup \cdots \cup B\left(x_N, \frac{\lambda}{3}\right).$$

Neka je

$$\mathcal{D} = \left\{ \operatorname{Cl}\left(B\left(x_0, \frac{\lambda}{3}\right)\right), \ldots, \operatorname{Cl}\left(B\left(x_N, \frac{\lambda}{3}\right)\right) \right\}.$$

Tada je $\mathcal{D}$ konačna familija skupova koji su kompaktni i čiji dijametri su manji od broja λ. Stoga nužno svaki član familije $\mathcal{D}$ mora biti sadržan u nekom od skupova $C_0, \ldots, C_m$.

Za $i \in \{0, \ldots, m\}$ neka je K_i unija onih članova familije $\mathcal{D}$ koji su sadržani u skupu C_i. Tada je

$$K_0 \cup \{a\},\ K_1,\ \ldots,\ K_{m-1},\ K_m \cup \{b\}$$

kompaktan ε-lanac u (X, d) koji pokriva X od a do b. Dakle tvrdnja (ii) povlači tvrdnju (iii). $\square$

Potpuno analogno dokazali bismo i sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.3. *Neka je (X, d) kontinuum. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) (X, d) je lančast;

(ii) za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvoreni ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_m$ u (X, d) koji pokriva X;

(iii) za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan ϵ-lanac $K_0, \ldots, K_m$ u (X, d) koji pokriva X.

Neka je X neprazan skup te neka su $U, V, C_0, \ldots, C_m$ podskupovi od X. Za konačan niz skupova $C_0, \ldots, C_m$ kažemo da je (U, V)-**niz** ako za svaki $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ vrijedi

$$C_i \subseteq U \text{ ili } C_i \subseteq V \text{ ili } C_{i+1} \subseteq U \text{ ili } C_{i+1} \subseteq V. \tag{3.2}$$

Nadalje, ako relacija (3.2) vrijedi te ako je $C_0, \ldots, C_m$ (jednostavan) lanac, onda kažemo da je $C_0, \ldots, C_m$ **(jednostavan)** (U, V)-**lanac**.

Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor. Neka su U i V disjunktni neprazni skupovi u ovom metričkom prostoru. Neka je nadalje $K \subseteq X$ kontinuum lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Možemo si postaviti sljedeće pitanje: uz koje dodatne uvjete za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan/otvoren (U, V)-ε-lanac u (X, d) koji pokriva skup K? Mi ćemo odgovoriti na ovo pitanje, ali ćemo prvo uvesti pojam *topološke dimenzije*.

Neka je $\mathcal{A}$ familija skupova te neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Reći ćemo da familija $\mathcal{A}$ ima **red** n ako postoje različiti elementi $A_1, \ldots, A_n$ od $\mathcal{A}$ takvi da je $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ i ne postoje različiti elementi $A_1, \ldots, A_{n+1}$ od $\mathcal{A}$ takvi da je $A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dvije familije skupova. Kažemo da familija skupova $\mathcal{B}$ profinjuje familiju $\mathcal{A}$ ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji neki $A \in \mathcal{A}$ takav da vrijedi $B \subseteq A$.

Neka je X topološki prostor. Pretpostavimo da je S skup svih $n \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od X koji profinjuje $\mathcal{U}$ i ima red najviše $n + 1$. Ukoliko je skup $S \neq \emptyset$, tada ćemo za najmanji element od S kazati da je **topološka dimenzija** od X ([20]).

Uočimo sljedeće: familija skupova $\mathcal{A}$ ima red 1 ako i samo ako $\mathcal{A}$ sadrži neprazan element i svaka dva različita elementa od $\mathcal{A}$ su disjunktna. Stoga, neprazan topološki prostor X ima topološku dimenziju 0 ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od X koji profinjuje $\mathcal{U}$ i čiji su svi elementi u parovima disjunktni.

Naravno, za metrički prostor (X, d) kažemo da ima topološku dimenziju n ako pripadni topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ ima topološku dimenziju n. Ovdje $\mathcal{T}_d$ predstavlja topologiju koja je inducirana metrikom d.

Za metrički (odnosno topološki) prostor kažemo da je **nuldimenzionalan** ako ima topološku dimenziju 0.

Propozicija 3.1.4. *Pretpostavimo da je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada je (X, d) nuldimenzionalan ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo u parovima disjunktnih otvorenih skupova $D_0, \ldots, D_k$ u (X, d) takvih da je* $\operatorname{diam} D_i < \varepsilon$ *za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$ i takvih da vrijedi $X = D_0 \cup \cdots \cup D_k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (X, d) nuldimenzionalan. Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo

$$\mathcal{U} := \left\{ B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \mid x \in X \right\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d) i stoga postoji neki otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od (X, d) koji profinjuje $\mathcal{U}$ i koji ima svojstvo da su mu svaka dva različita elementa ujedno i disjunktna. Budući je metrički prostor (X, d) kompaktan to postoji konačno mnogo elemenata $D_0, \ldots, D_k$ od $\mathcal{V}$ takvih da vrijedi

$$X = D_0 \cup \cdots \cup D_k.$$

Naravno, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su skupovi $D_0, \ldots, D_k$ u parovima različiti i neprazni. Stoga imamo da su ovi skupovi također i u parovima disjunktni. Ako je $i \in \{0, \ldots, k\}$, tada je $D_i \subseteq B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ za neki $x \in X$ i stoga imamo da je $\operatorname{diam} D_i \leq 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo u parovima disjunktnih otvorenih skupova $D_0, \ldots, D_k$ u (X, d) koji pokrivaju X i koji imaju svojstvo da su im dijametri manji od broja ε. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoreni pokrivač od (X, d). Budući je metrički prostor (X, d) kompaktan, to postoji Lebesgueov broj λ za $\mathcal{U}$. Neka su $D_0, \ldots, D_k$ u parovima disjunktni otvoreni skupovi koji pokrivaju X i čiji dijametri su manji od broja λ. Tada je $\{D_0, \ldots, D_k\}$ otvoreni pokrivač od (X, d) koji profinjuje $\mathcal{U}$. Dakle, imamo da je (X, d) nuldimenzionalan. $\square$

Pretpostavimo sada da je (X, d) metrički prostor i neka je $K \subseteq X$ kontinum lančast od $a \in U$ do $b \in V$, gdje su U i V disjunktni i neprazni skupovi u metričkom prostoru (X, d). Stavimo da je $S := X \setminus (U \cup V)$. Nadalje, pretpostavimo da je $D_0, \ldots, D_m$ kompaktan (U, V)-lanac u (X, d) koji pokriva K. Neka su $i_0 < \cdots < i_k$ svi elementi $i \in \{0, \ldots, m\}$ takvi da je $D_i \cap (K \cap S) \neq \emptyset$. Tada su skupovi $D_{i_0}, \ldots, D_{i_k}$ u parovima disjunktni i također pokrivaju $K \cap S$. Iz ovoga, te leme 3.1.1 i propozicije 3.1.4, zaključujemo sljedeće: ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan (U, V)-ε-lanac u (X, d) koji pokriva K, onda je $K \cap S$ nuldimenzionalan.

Obrat ove prethodne tvrdnje je također istinit ukoliko pretpostavimo da su skupovi U i V otvoreni te disjunktni, što sljedeća propozicija i pokazuje.

Propozicija 3.1.5. *Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor. Neka su U i V otvoreni i disjunktni skupovi u (X, d) te neka je*

$$S = X \setminus (U \cup V).$$

Nadalje, neka je $K \subseteq X$. Pretpostavimo da je K, kao potprostor od (X,d), kontinum lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Tada je $S \cap K$ nuldimenzionalan (kao potprostor od (X,d)) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan (U,V)-ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_n$ koji pokriva K od a do b te zadovoljava da je $C_0 \subseteq U$, $C_n \subseteq V$ i $C_0 \subseteq K, \ldots, C_n \subseteq K$ (uočimo da takav lanac ujedno mora biti i jednostavan).

Dokaz. Pretpostavimo da je $K \cap S$ nuldimenzionalan. Neka je $\epsilon > 0$. Definirajmo:

$$\mu = \min \{d(a,S), d(b,S)\},$$

gdje za $x \in X$, $d(x,S)$ predstavlja udaljenost točke x do skupa S. Prema propoziciji 3.1.4 postoji konačno mnogo nepraznih u parovima disjunktnih otvorenih skupova $D_0, \ldots, D_k$ u $S \cap K$ takvih da je

$$\operatorname{diam}(D_i) < \frac{\min\{\epsilon, \mu\}}{2},$$

za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$, i takvih da vrijedi

$$S \cap K = D_0 \cup \ldots \cup D_k.$$

Uočimo da su skupovi $D_0, \ldots, D_k$ također i zatvoreni u $S \cap K$. Budući je $S \cap K$ zatvoren u X i sadržan u skupu K, imamo da je $S \cap K$ kompaktan, te stoga slijedi da su i skupovi $D_0, \ldots, D_k$ kompaktni.

Prema lemi 3.1.1 postoje otvoreni, u parovima disjunktni skupovi $\tilde{D}_0, \ldots, \tilde{D}_k$ dijametra $\operatorname{diam}\left(\tilde{D}_i\right) < \min\{\epsilon, \mu\}$ i takvi takvi da je $D_i \subseteq \tilde{D}_i$ za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$. Neka je

$$\mathcal{U} = \left\{\tilde{D}_0, \ldots, \tilde{D}_k, U, V\right\}.$$

Tada je familija $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K. Kako je K kompaktan, to postoji $\lambda > 0$ takav da je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$ za K. Drugim riječima, broj λ ima svojstvo da svaki neprazan podskup od K dijametra manjeg od λ mora biti sadržan u nekom članu familije $\mathcal{U}$.

Budući je K kontinum koji je lančast od a do b, to postoji kompaktan $\min\{\epsilon, \lambda\}$-lanac $F_0, \ldots, F_m$ u K takav da je $a \in F_0$, $b \in F_m$ i takav da je $K \subseteq F_0 \cup \ldots \cup F_m$. Za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$ imamo da je $\operatorname{diam}(F_i) < \lambda$ te stoga slijedi

$$F_i \subseteq U \text{ or } F_i \subseteq V \text{ or } F_i \subseteq \tilde{D}_j \text{ za neki } j \in \{0, \ldots, k\}.$$

Uočimo da vrijedi $F_0 \subseteq U$. Zaista, u protivnom bismo imali $F_0 \subseteq V$ ili $F_0 \subseteq \tilde{D}_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Ako je $F_0 \subseteq V$, tada je $a \in V$, jer je $a \in F_0$, te bismo tada imali $U \cap V \neq \emptyset$, što je jasno nemoguće. Ako je pak $F_0 \subseteq \tilde{D}_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, k\}$, tada je $a \in \tilde{D}_j$ i ako bismo sada uzeli neki $x \in D_j$, tada bi imali da je $x \in S$ te

$$d(a,S) \leq d(a,x) \leq \operatorname{diam}\left(\tilde{D}_j\right) < \min\{\epsilon, \mu\} \leq \mu \leq d(a,S),$$

što nas očito vodi na kontradikciju.

Potpuno analogno bismo zaključili da b ne može biti element niti jednog od skupova $\tilde{D}_j$. Dakle $F_m \subseteq V$.

Neka je $i \in \{0, \dots, , m-1\}$. Tada imamo da je $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$. Naime, kada to ne bi vrijedilo onda bi $F_0 \cup \ldots \cup F_i$ i $F_{i+1} \cup \ldots \cup F_m$ bili disjunktni i zatvoreni skupovi koji pokrivaju K, a to je očito suprotnost s pretpostavkom povezanosti skupa K.

Nadalje, tvrdimo da postoji neki $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te brojevi $i_1, \dots, i_p$ i $j_1, \dots, j_p$, takvi da vrijedi sljedeće:

(1) $0 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \ldots < i_p < j_p < m$;

(2) sve karike među skupovima$F_0, \dots, F_m$ s indeksima $0, \dots, i_1$ nužno moraju biti sadržane u U;

(3) sve karike među skupovima $F_0, \dots, F_m$ s indeksima $j_p+1, \dots, m$ nužno moraju biti sadržane u V;

(4) za svaki $v \in \{1, \dots, p\}$ sve karike s indeksima $i_v+1, \dots, j_v$ moraju biti sadržane u nekom $\tilde{D}_j$ $(j \in \{1, \dots, k\})$;

(5) za svaki $v \in \{1, \dots, p-1\}$ karike s indeksima $j_v + 1, \dots, i_{v+1}$ moraju sve biti sadržane u U ili moraju sve biti sadržane u V.

Neka je

$$l := \min \{i \in \{0, \dots, m\} \mid F_i \not\subseteq U\}.$$

Uočimo da je $l \geq 1$, $F_{l-1} \subseteq U$ te $F_l \not\subseteq U$. Stoga slijedi da je $F_l \subseteq V$ ili $F_l \subseteq \tilde{D}_j$ za neki $j \in \{1, \dots, k\}$. Uočimo također da vrijedi $F_l \not\subseteq V$ jer ako bi imali da je $F_l \subseteq V$, onda bi zajedno sa $F_{l-1} \subseteq U$ imali da je $U \cap V \neq \emptyset$, što ne može biti. Dakle $F_l \subseteq \tilde{D}_j$, za neki $j \in \{1, \dots, k\}$.

Budući je $b \in F_m$ i $b \notin \tilde{D}_j$, imamo da je $l < m$.

Nadalje definirajmo

$$l' = \min \left\{ i \in \{l+1, \dots, m\} \mid F_i \not\subseteq \tilde{D}_j \right\}.$$

Tada je svaki od skupova $F_l, F_{l+1}, \dots, F_{l'-1}$ podskup od $\tilde{D}_j$, ali $F_{l'} \not\subseteq \tilde{D}_j$.

Pretpostavimo da je $F_{l'} \subseteq \tilde{D}_{j'}$ za neki $j' \in \{1, \dots, k\}$, $j' \neq j$. Budući je $\tilde{D}_j \cap \tilde{D}_{j'} = \emptyset$ imamo da je $F_{l'-1} \cap F_{l'} = \emptyset$, što je nemoguće. Dakle $F_{l'} \subseteq U$ ili $F_{l'} \subseteq V$.

Neka je

$$i_1 = l - 1 \quad \text{i} \quad j_1 = l' - 1.$$

Tada je $0 \leq i_1 < j_1 < m$ i imamo

$$F_0, \dots, F_{i_1} \subseteq U, \; F_{i_1+1}, \dots, F_{j_1} \subseteq \tilde{D}_j \text{ i } F_{j_1+1} \subseteq U \text{ ili } F_{j_1+1} \subseteq V.$$

Ako je $F_i \subseteq V$ za svaki $i \in \{j_1 + 1, \dots, m\}$, onda možemo uzeti $p = 1$. Tada brojevi i_1 i j_1 zadovoljavaju relacije (1)–(5).

U protivnom postoji $i \in \{j_1 + 1, \dots, m\}$ takav da $F_i \not\subseteq V$. Imamo dva slučaja.

Slučaj 1: $F_{j_1+1} \subseteq V$.

Neka je

$$l = \min \{i \in \{j_1 + 1, \ldots, m\} \mid F_i \not\subseteq V\}.$$

Tada su svi $F_{j_1+1}, \ldots, F_{l-1}$ sadržani u V i $F_l \not\subseteq V$. Kao i ranije možemo zaključiti da $F_l \not\subseteq U$. Stoga $F_l \subseteq \tilde{D}_{j'}$ za neki $j' \in \{1, \ldots, k\}$. Stavimo

$$l' = \min \left\{ i \in \{l, \ldots, m\} \mid F_i \not\subseteq \tilde{D}_{j'} \right\}.$$

Kao i ranije zaključujemo da vrijedi $F_{l'} \subseteq U$ ili $F_{l'} \subseteq V$. Sada stavimo

$$i_2 = l - 1 \quad mboxi \quad j_2 = l' - 1.$$

Vrijedi sljedeće:

$$F_0, \ldots, F_{i_1} \subseteq U,\ F_{i_1+1}, \ldots, F_{j_1} \subseteq \tilde{D}_j,\ F_{j_1+1}, \ldots, F_{i_2} \subseteq V,\ F_{i_2+1}, \ldots, F_{j_2} \subseteq \tilde{D}_{j'},$$

i

$$F_{j_2+1} \subseteq U \text{ ili } F_{j_2+1} \subseteq V.$$

Slučaj 2: $F_{j_1+1} \subseteq U$.

Na potpuno identičan način kao i ranije dobivamo brojeve i_2 i j_2 takve da vrijedi

$$j_1 < i_2 < j_2 < m$$

te

$$F_0, \ldots, F_{i_1} \subseteq U,\ F_{i_1+1}, \ldots, F_{j_1} \subseteq \tilde{D}_j,\ F_{j_1+1}, \ldots, F_{i_2} \subseteq U,\ F_{i_2+1}, \ldots, F_{j_2} \subseteq \tilde{D}_{j'}$$

i

$$F_{j_2+1} \subseteq U \text{ ili } F_{j_2+1} \subseteq V.$$

Ako je $F_i \subseteq V$ za svaki $i \in \{j_2 + 1, \ldots, m\}$ tada možemo uzeti $p = 2$ i brojevi $j_1 < i_2 < j_2 < m$ zadovoljavaju relacije (1)–(5).

U suprotnome ponavljamo postupak te dobivamo brojeve i_3 i j_3 takve da je $j_2 < i_3 < j_3 < m$, i takve da su sve karike s indeksima $j_2 + 1, \ldots, i_3$ sadržane u U ili da su sve sadržane u V, te takve da su sve karike s indeksima $i_3 + 1, \ldots, j_3$ sadržane u nekom $\tilde{D}_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$), a karika F_{j_3+1} je sadržana u U ili je sadržana u V.

Jasno je da u konačno mnogo koraka dobivamo tražene brojeve $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i_1, \ldots, i_p$ i $j_1, \ldots, j_p$ koji zadovoljavaju relacije (1)–(5).

Promatrajmo sada sljedeći niz skupova:

$$\begin{aligned} F_0, \ldots, F_{i_1}, F_{i_1+1} \cup \ldots \cup F_{j_1}, F_{j_1+1}, \ldots, F_{i_2}, \ldots, F_{i_v+1} \cup \ldots \cup F_{j_v}, \\ , F_{j_v+1}, \ldots, F_{i_{v+1}}, \ldots, F_{i_p+1} \cup \ldots \cup F_{j_p}, F_{j_p+1}, \ldots, F_m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Za svaki $v \in \{1, \ldots, p\}$ unija $F_{i_v+1} \cup \ldots \cup F_{j_v}$ je podskup od $\tilde{D}_j$ za neki $j \in \{1, \ldots, k\}$ te stoga kako je $\operatorname{diam}\left(\tilde{D}_j\right) < \epsilon$ imamo

$$\operatorname{diam}\left(F_{i_v+1} \cup \ldots \cup F_{j_v}\right) < \epsilon.$$

Iz relacije (3.3) zaključujemo da imamo kompaktan (U, V)-ϵ-lanac od a do b, koji prekriva K. Ovime je tvrdnja propozicije u potpunosti dokazana. $\square$

Korolar 3.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su U i V otvoreni i disjunktni skupovi u X. Stavimo*

$$S = X \setminus (U \cup V).$$

Pretpostavimo da je $K \subseteq X$ kontinuum lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Tada je $S \cap K$ nuldimenzionalan ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvoren (U, V)-ϵ-lanac $C_0, \dots, C_n$ koji pokriva K od a do b i takav da vrijedi $C_0 \subseteq U$ te $C_n \subseteq V$.

Dokaz. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoren (U, V)-ϵ-lanac $C_0, \dots, C_n$ koji pokriva K od a do b i takav da vrijedi $C_0 \subseteq U$ te $C_n \subseteq V$, onda kao i u propoziciji 3.1.5 zaključujemo da je $K \cap S$ nuldimenzionalan.

Pretpostavimo sada da je $K \cap S$ nuldimenzionalan. Neka je $\epsilon > 0$. Prema propoziciji 3.1.5 postoji kompaktan (U, V)-$\frac{\epsilon}{2}$-lanac $F_0, \dots, F_n$ koji pokriva K od a do b te koji ima svojstvo da je $F_0 \subseteq U$ i $F_n \subseteq V$. Prema lemi 3.1.1 postoji otvoren ϵ-lanac $\tilde{C}_0, \dots, \tilde{C}_n$ takav da je $F_i \subseteq \tilde{C}_i$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$. Sada ćemo definirati traženi lanac $C_0, \dots, C_n$ na sljedeći način:

$$C_i := \begin{cases} \tilde{C}_i \cap U, & F_i \subseteq U \\ \tilde{C}_i \cap V, & F_i \subseteq V \\ \tilde{C}_i, & F_i \cap S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Očito je $C_0, \dots, C_n$ otvoreni ϵ-lanac koji pokriva K od a do b. Nadalje, $C_0, \dots, C_n$ je (U, V)-lanac jer za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ imamo:

$$\begin{aligned} F_i \subseteq U \quad &\Longrightarrow \quad C_i = \tilde{C}_i \cap U \subseteq U \\ F_i \subseteq V \quad &\Longrightarrow \quad C_i = \tilde{C}_i \cap V \subseteq V. \end{aligned}$$

□

Propozicija 3.1.7. *Neka je X neprazan skup, te neka su U i V disjunktni podskupovi od X. Nadalje, neka je $C_0, \dots, C_n$ jednostavan (U, V)-lanac u X sa svojstvom da je $C_0 \subseteq U$ i $C_n \subseteq V$. Tada postoji $i_0 \in \{0, \dots, n-2\}$ takav da vrijedi:*

$$C_{i_0} \subseteq U \quad i \quad C_{i_0+2} \subseteq V.$$

Dokaz. Definirajmo broj i_0 na sljedeći način:

$$i_0 = \max \{i \in \{0, \dots, n\} \mid C_i \subseteq U\}.$$

Budući je $C_{i_0} \subseteq U$ i $C_n \subseteq V$, imamo da je $i_0 < n$ i $C_{i_0+1} \nsubseteq U$. Iz činjenice da je $U \cap V = \emptyset$, i činjenice da je $C_{i_0} \cap C_{i_0+1} \neq \emptyset$, slijedi da $C_{i_0+1} \nsubseteq V$. Stoga imamo da je $i_0 + 1 < n$. Dakle $i_0 \leq n - 2$.

Kako je $C_0, \dots, C_n$ (U, V)-lanac, to je $C_{i_0+2} \subseteq U$ ili $C_{i_0+2} \subseteq V$. Uočimo da $C_{i_0+2} \subseteq U$ ne može biti zbog načina na koji smo definirali broj i_0. Stoga vrijedi $C_{i_0+2} \subseteq V$. □

Pretpostavimo da je X neprazan skup te neka su $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_m)$ i $\mathcal{D} = (D_0, \ldots, D_k)$ konačni nizovi podskupova od X. Kažemo da $\mathcal{D}$ **profinjuje** $\mathcal{C}$ ako za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$ postoji neki $j \in \{0, \ldots, m\}$ takav da vrijedi $D_i \subseteq C_j$.

Lema 3.1.8. *Pretpostavimo da je X neprazan skup. Nadalje, pretpostavimo da su $C_0, \ldots, C_m$ i $D_0, \ldots, D_{m'}$ dva jednostavna lanca u X sa svojstvom da $D_0, \ldots, D_{m'}$ profinjuje lanac $C_0, \ldots, C_m$. Dodatno, pretpostavimo da su $i, j, k \in \{0, \ldots, m\}$ te $p, q \in \{0, \ldots, m'\}$ takvi da je*

$$i < k < j, \quad p < q$$

i

$$D_p \subseteq C_i, \quad D_q \subseteq C_j.$$

Tada postoji neki $r \in \{0, \ldots, m'\}$ sa svojstvom da je

$$p < r < q \quad i \quad D_r \subseteq C_k.$$

Dokaz. Neka je l maksimalni element skupa $\{p, \ldots, q\}$ koji ima svojstvo da je D_l sadržan u nekom od sljedećih skupova:

$$C_0, \ \ldots \ , \ C_i, \ \ldots \ , \ C_{k-1}.$$

Uočimo da je broj l dobro definiran jer je $D_p \subseteq C_i$.

Skup C_j je disjunktan sa svakim od skupova $C_0, \ldots, C_i, \ldots, C_{k-1}$. Stoga je i D_q također disjunktan sa svakim od tih skupova. Sada imamo da je D_q disjunktan s D_l. Stoga mora biti $p < l + 1 < q$. Neka je

$$r = l + 1.$$

Tada D_r nije sadržan u niti jednom od skupova $C_0, \ldots, C_i, \ldots, C_{k-1}$. Dakle, D_r mora stoga biti sadržan u nekom od skupova $C_k, \ldots, C_m$.

Pretpostavimo da je $D_r \subseteq C_v$ za neki $v \in \{k + 1, \ldots, m\}$. Uočimo da je C_v disjunktan sa svakim od skupova $C_0, \ldots, C_{k-1}$. Stoga imamo da je D_r disjunktan i sa svakim od skupova $C_0, \ldots, C_{k-1}$ te slijedi da je D_r disjunktan i sa D_l, to jest sa D_{r-1}. No to je nemoguće budući je $D_0, \ldots, D_{m'}$ jednostavan lanac.

Zaključujemo: $D_r \subseteq C_k$. □

Propozicija 3.1.9. *Neka je X neprazan skup te neka su U i V disjunktni podskupovi od X. Pretpostavimo da su $\mathcal{C} = (C_0, \ldots, C_n)$ i $\mathcal{D} = (D_0, \ldots, D_m)$ jednostavni (U, V)-lanci u X sa svojstvom da lanac $\mathcal{D}$ profinjuje lanac $\mathcal{C}$. Nadalje, pretpostavimo da je $D_0 \subseteq C_0 \subseteq U$, $D_m \subseteq C_n \subseteq V$ te da je $i_0 \in \{0, \ldots, n-2\}$ takav da vrijedi*

$$C_{i_0} \subseteq U \ \ i \ C_{i_0+2} \subseteq V.$$

Tada postoji $j_0 \in \{0, \ldots, m-2\}$ takav da je

$$D_{j_0} \subseteq U, \ D_{j_0+2} \subseteq V,$$

i takav da vrijedi

$$D_{j_0} \cup D_{j_0+1} \cup D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0} \cup C_{i_0+1} \cup C_{i_0+2}.$$

Dokaz. Za početak, pokažimo da vrijedi sljedeće:

$$\exists \ \ j \in \{0, \ldots, m\} \quad \text{takav da je} \quad D_j \subseteq C_{i_0}. \tag{3.4}$$

Uočimo da je relacija (3.4) istinita ukoliko je $i_0 = 0$ jer je $D_0 \subseteq C_0$. Nadalje, ukoliko je $i_0 \neq 0$ tada je $0 < i_0 < n$, pa prema lemi 3.1.8 postoji neki $j \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $D_j \subseteq C_{i_0}$.

Definirajmo:

$$j_0 := \max\left\{j \in \{0, \ldots, m\} \mid D_j \subseteq U \text{ i } (D_j \subseteq C_{i_0} \text{ ili } D_j \subseteq C_{i_0+1})\right\}.$$

Uočimo da je broj j_0 dobro definiran jer vrijedi relacija (3.4). Sada imamo:

$$D_{j_0} \subseteq U \text{ i } (D_{j_0} \subseteq C_{i_0} \text{ ili } D_{j_0} \subseteq C_{i_0+1}).$$

Budući je $D_m \subseteq V$ te su U i V disjunktni, imamo da je $j_0 < m-1$, to jest $j_0 \leq m-2$.

Pokažimo da vrijedi sljedeće:

$$D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0+1}. \tag{3.5}$$

Pretpostavimo suprotno. Uočimo da $D_{j_0+1} \nsubseteq C_{i_0}$ (vidi definiciju od j_0). Sada imamo da je

$$D_{j_0+1} \subseteq C_i$$

za neki $i \in \{0, \ldots, m\}$ takav da vrijedi

$$i \leq i_0 - 1 \text{ ili } i \geq i_0 + 2.$$

Ako je $i < i_0 - 1$, onda je $C_i \cap (C_{i_0} \cup C_{i_0+1}) = \emptyset$. Međutim to je kontradikcija sa

$$D_{j_0+1} \subseteq C_i, \ D_{j_0} \subseteq C_{i_0} \cup C_{i_0+1} \text{ i } D_{j_0} \cap D_{j_0+1} \neq \emptyset.$$

Potpuno analogno dobivamo da i ne može biti veći od $i_0 + 2$. Dakle:

$$i = i_0 - 1 \text{ ili } i = i_0 + 2.$$

Pretpostavimo da je $i = i_0+2$. Tada je $D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0+2}$ i budući je po pretpostavci propozicije $C_{i_0+2} \subseteq V$, imamo da je

$$D_{j_0+1} \subseteq V.$$

No kako je $D_{j_0} \subseteq U$ i budući je $D_{j_0} \cap D_{j_0+1} \neq \emptyset$ slijedi $U \cap V \neq \emptyset$. To je očito kontradikcija.

Dakle, $i = i_0 - 1$, to jest

$$D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0-1}.$$

Kako je $D_m \subseteq C_n$ i $j_0 + 1 < m$, to prema lemi 3.1.8 postoji neki $j \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $j_0 + 1 < j < m$ i takav da vrijedi

$$D_j \subseteq C_{i_0}.$$

Budući je $C_{i_0} \subseteq U$, imamo da je $D_j \subseteq U$ te stoga

$$D_j \subseteq U, \quad D_j \subseteq C_{i_0} \;\text{ i }\; j_0 + 1 < j.$$

No ovo je očito kontradikcija s definicijom broja j_0. Ovime je relacija (3.5) u potpunosti dokazana.

Uočimo da $D_{j_0+1} \not\subseteq U$. U protivnom imali bismo kontradikciju s definicijom od j_0. Nadalje,

$$D_{j_0+1} \not\subseteq V$$

jer je $D_{j_0} \subseteq U$. Kako je $\mathcal{D}$ (U, V)-niz, slijedi da je

$$D_{j_0+2} \subseteq U \;\text{ ili }\; D_{j_0+2} \subseteq V.$$

Pretpostavimo da je $D_{j_0+2} \subseteq U$. Kako $\mathcal{D}$ profinjuje $\mathcal{C}$, to postoji neki $i \in \{0, \ldots, m\}$ takav da je $D_{j_0+2} \subseteq C_i$. Imamo da je $D_{j_0+1} \cap D_{j_0+2} \neq \emptyset$. Stoga koristeći relaciju (3.5) koja nam kaže da je $D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0+1}$, imamo da vrijedi $C_i \cap C_{i_0+1} \neq \emptyset$ te slijedi

$$i = i_0 \text{ ili } i = i_0 + 1 \text{ ili } i = i_0 + 2.$$

Ako je $i = i_0 + 2$, tada je $D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0+2}$. Ovo, zajedno s pretpostavkom propozicije $C_{i_0+2} \subseteq V$, povlači da je $D_{j_0+2} \subseteq V$ što nije moguće jer je $D_{j_0+2} \subseteq U$. Dakle, $i = i_0$ ili $i = i_0 + 1$. Sada imamo:

$$D_{j_0+2} \subseteq U \text{ i } (D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0} \text{ ili } D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0+1})$$

što je naravno u kontradikciji s definicijom samog broja j_0. Dakle:

$$D_{j_0+2} \subseteq V.$$

Dokažimo sada sljedeće:

$$D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0+1} \cup C_{i_0+2}. \tag{3.6}$$

Sigurno je $D_{j_0+2} \subseteq C_i$ za neki $i \in \{0, \ldots, n\}$. Budući je $D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0+1}$, imamo da je $C_{i_0+1} \cap C_i \neq \emptyset$. To nam povlači da je $i = i_0$, $i = i_0 + 1$ ili $i = i_0 + 2$. Međutim, ako je $i = i_0$ imali bismo da je $D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0} \subseteq U$ što je u kontradikciji s $D_{j_0+2} \subseteq V$. Stoga relacija (3.6) zaista vrijedi.

Naposljetku možemo rezimirati da je definirani broj j_0 takav vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
&j_0 \in \{0, \ldots, m-2\}\,; \\
&D_{j_0} \subseteq U; \\
&D_{j_0+2} \subseteq V; \\
&D_{j_0} \subseteq C_{i_0} \cup C_{i_0+1}; \\
&D_{j_0+1} \subseteq C_{i_0+1}; \\
&D_{j_0+2} \subseteq C_{i_0+1} \cup C_{i_0+2}.
\end{aligned}$$

Ovime je propozicija u potpunosti dokazana. □

Propozicija 3.1.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su U i V otvoreni i disjunktni skupovi u (X, d). Stavimo:*

$$S = X \setminus (U \cup V) .$$

Nadalje, pretpostavimo da je $K \subseteq X$ te da je K, kao potprostor od (X, d), kontinuum lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Također pretpostavimo da je $S \cap K$ nuldimenzionalan. Neka je $C_0, \dots, C_n$ otvoren lanac koji pokriva K od a do b i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji kompaktan (U, V)-ϵ-lanac $D_0, \dots, D_m$ koji pokriva K od a do b, profinjuje lanac $C_0, \dots, C_n$ te koji ima svojstvo da je $D_0 \subseteq C_0$ i $D_m \subseteq C_n$.

Dokaz. Budući je K kompaktan skup i $\{C_0, \dots, C_n\}$ je otvoreni pokrivač od K, to postoji neki $\delta > 0$ takav da je δ Lebesgueov broj navedenog otvorenog pokrivača za K. Kako je $a \in C_0$ i $b \in C_m$, to postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je $B(a, r_1) \subseteq C_0$ i $B(b, r_2) \subseteq C_n$. Neka je μ definiran na sljedeći način:

$$\mu := \min \{\epsilon, \delta, r_1, r_2\} .$$

Tada prema propoziciji 3.1.5 postoji kompaktan (U, V)-μ-lanac $D_0, \dots, D_m$ u K koji pokriva K od a do b i koji zadovoljava da je $D_0 \subseteq U$ i $D_m \subseteq V$. Ako je $i \in \{0, \dots, m\}$, onda je $\operatorname{diam}(D_i) < \mu \leq \delta$ i prema tome mora postojati neki $j \in \{0, \dots, n\}$ takav da je

$$D_i \subseteq C_j.$$

Dakle konačan niz skupova $D_0, \dots, D_m$ profinjuje konačan niz $C_0, \dots, C_n$.

Imamo da je $a \in D_0$ i $\operatorname{diam}(D_0) < r_1$, te stoga $d(x, a) < r_1$ za svaki $x \in D_0$. Dakle $D_0 \subseteq B(a, r_1)$, te stoga imamo i $D_0 \subseteq C_0$. Potpuno analogno bismo dokazali da je $D_m \subseteq C_n$. $\square$

Lema 3.1.11. *Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor i neka su U i V dva otvorena i disjunktna skupa u (X, d). Neka je $a \in U$ i $b \in V$ te neka je skup S definiran sa:*

$$S := X \setminus (U \cup V) .$$

Nadalje, pretpostavimo da je K povezan skup u (X, d) takav da su točke $a, b \in K$ i neka je $C_0, \dots, C_m$ lanac u (X, d) koji pokriva K od a do b. Također pretpostavimo da je $i \in \{0, \dots, m-2\}$ takav da je $C_i \subseteq U$ i $C_{i+2} \subseteq V$. Tada je

$$C_{i+1} \cap S \neq \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da je $C_{i+1} \cap S = \emptyset$. Tada imamo da je $C_{i+1} \subseteq U \cup V$ te stoga slijedi da je

$$C_{i+1} = (C_{i+1} \cap U) \cup (C_{i+1} \cap V) .$$

Promatrajmo sada sljedeće skupove:

$$C_0, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1} \cap U \tag{3.7}$$

i

$$C_{i+1} \cap V, C_{i+2}, \ldots, C_m. \tag{3.8}$$

Svaki od skupova iz relacije (3.7) je disjunktan sa svakim od skupova iz relacije (3.8). Nadalje, svaki od promatranih skupova iz prethodnih dviju relacija je otvoren te oni zajedno pokrivaju čitav K.

Stavimo da je W_1 unija svih skupova iz relacije (3.7), a W_2 unija svih skupova iz relacije (3.8). Tada su skupovi W_1 i W_2 disjunktni i otvoreni te vrijedi da je $K \subseteq W_1 \cup W_2$. Uočimo da skup W_1 siječe skup K jer je $a \in W_1$ te da skup W_2 također siječe skup K jer je $b \in W_2$. No time očito dobivamo kontradikciju s pretpostavkom povezanosti skupa K. □

3.2. Separatori, augmentatori i lokatori

Na početku ovog potpoglavlja istaknimo da pojmovi *separatora*, *augmentatora* i *lokatora* koji će biti u nastavku definirani su nastali kao potreba da se što bolje istaknu neke tehnike koje će u idućem potpoglavlju (vidi 3.3.) biti od izuzetne važnosti.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $a \in X$ izračunljiva točka u (X, d, α). Koristeći propoziciju 1.1.5 lagano možemo zaključiti da je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid a \in I_i\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$, jer vrijedi:

$$a \in I_i \quad \Longleftrightarrow \quad d(a, \alpha_i) < \rho_i.$$

Budući je

$$a \in J_j \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, i \in [j] \ \text{ takav da je } \ a \in I_i,$$

lagano dobivamo da je i skup $\{j \in \mathbb{N} \mid a \in J_j\}$ također izračunljivo prebrojiv (za detalje čitatelj može vidjeti dokaz teorema 3.5 u [9]). Stoga vrijedi i sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2.1. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $a \in X$ izračunljiva točka u (X, d, α). Tada su sljedeći skupovi:*

$$\left\{l \in \mathbb{N} \mid a \in J_{(l)_0}\right\} \quad i \quad \left\{l \in \mathbb{N} \mid a \in J_{(l)_{\bar{l}}}\right\}$$

izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $v, w \in \mathbb{N}$. Prisjetimo se da pišemo $I_v \subseteq_{\mathrm{F}} I_w$ ukoliko je $d(\lambda_v, \lambda_w) + \rho_v < \rho_w$. Prethodna je relacija zapravo relacija među brojevima v i w, a ne među skupovima I_v i I_w. Napomenimo i ovdje da formalna sadržanost povlači takozvanu ,,običnu" sadržanost. Pojam formalne sadržanosti sada želimo, na neki način, proširiti i na veću klasu skupova, na c.e otvorene skupove. Prisjetimo se da je u izračunljivom metričkom prosatoru (X, d, α) skup U c.e. otvoren ako postoji neki izračunljivo prebrojiv skup $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $U = \bigcup_{i \in A} I_i$.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $U \subseteq X$ c.e. otvoren skup u (X, d, α). Pretpostavimo nadalje da je $A \subseteq \mathbb{N}$ izračunljivo prebrojiv skup za koji vrijedi da je $U = \bigcup_{i \in A} I_i$ te neka je $v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je I_v A-**sadržan** u skupu U i pišemo

$$I_v \subseteq_A U$$

ako postoji neki $i \in A$ takav da je $I_v \subseteq_{\mathrm{F}} I_i$. Uočimo da ukoliko je $I_v \subseteq_A U$, onda je očito i $I_v \subseteq U$. Nadalje, za $j \in \mathbb{N}$ kažemo da je J_j A-**sadržan** u U te pišemo

$$J_j \subseteq_A U$$

ukoliko je $I_v \subseteq_A U$ za svaki $v \in [j]$.

Neka su $a, u, v, w \in \mathbb{N}$. Stavimo:

$$J_{u,v,w} := J_u \cup J_v \cup J_w.$$

Kažemo da je J_a **formalno sadržan** u $J_{u,v,w}$ i pišemo

$$J_a \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}$$

ako za svaki $i \in [a]$ postoji neki $j \in [u] \cup [v] \cup [w]$ takav da je $I_i \subseteq_{\mathrm{F}} I_j$. Ako su $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je $J_{a,b,c}$ **formalno sadržan** u $J_{u,v,w}$ te pišemo

$$J_{a,b,c} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}$$

ako je

$$J_a \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}, \;\; J_b \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w} \;\; \text{i} \;\; J_c \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}.$$

Prema propoziciji 1.3.2(i) znamo da je skup

$$\Omega := \left\{(v, w) \in \mathbb{N}^2 \mid I_v \subseteq_{\mathrm{F}} I_w\right\} \tag{3.9}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Propozicija 3.2.2. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je A izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ i neka je $U = \bigcup_{i \in A} I_i$. Nadalje, neka je Γ podskup od $\mathbb{N}$ definiran sa:*

$$\Gamma = \{v \in \mathbb{N} \mid I_v \subseteq_A U\}.$$

Tada je skup Γ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je Ω skup definiran kao u relaciji (3.9). Tada za svaki $v \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\begin{aligned} v \in \Gamma &\iff I_v \subseteq_A U \\ &\iff \exists\, i \in A \;\text{ takav da je }\; I_v \subseteq_{\mathrm{F}} I_i \\ &\iff \exists\, i \in A \;\text{ takav da je }\; (v, i) \in \Omega. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi

$$\Gamma = \{v \in \mathbb{N} \mid \exists\, i \in \mathbb{N} \;\text{ takav da je }\; (v, i) \in \Omega \;\text{ i }\; i \in A\}.$$

Sada tvrdnja da je Γ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ slijedi iz propozicije 1.1.2(i). □

Propozicija 3.2.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, A izračunljivo prebrojiv skup u $\mathbb{N}$ te $U = \bigcup_{i \in A} I_i$. Nadalje stavimo:*

$$\tilde{\Gamma} := \{j \in \mathbb{N} \mid J_j \subseteq_A U\}.$$

Tada je $\tilde{\Gamma}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je Γ skup kao u propoziciji 3.2.2. Za $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$j \in \tilde{\Gamma} \iff J_j \subseteq_A U \iff I_v \subseteq_A U, \ \forall\, v \in [j] \iff [j] \subseteq \Gamma.$$

Dakle

$$\tilde{\Gamma} = \{j \in \mathbb{N} \mid [j] \subseteq \Gamma\}.$$

Uočimo da sada tvrdnja propozicije slijedi direktno iz propozicije 1.3.1(ii) uzimajući u obzir da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $j \mapsto [j]$ r.r.o. funkcija (da je navedena funkcija zaista r.r.o. vidi primjer 2.13 u [9] ili propoziciju 2.11 u [4]). $\square$

Propozicija 3.2.4. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je skup:*

$$\Theta := \left\{(a, b, c, u, v, w) \in \mathbb{N}^6 \mid J_{a,b,c} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}\right\}$$

izračunljivo prebrojiv.

Dokaz. Neka je Ω skup kao u relaciji (3.9). Stavimo

$$\Gamma := \{(a, u, v, w) \in \mathbb{N}^4 \mid J_a \subseteq_{\mathrm{F}} J_{u,v,w}\}.$$

Također definirajmo:

$$\Gamma' := \{(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4 \mid \exists\, j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in \Omega, \ \ j \in [u] \cup [v] \cup [w]\}.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $(u, v, w) \mapsto [u] \cup [v] \cup [w]$ r.r.o. funkcija (vidi propoziciju 2.18(iv) u [9]), to jednostavno iz propozicije 1.3.1(ii) možemo zaključiti da je skup Γ' izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^4$. Za sve $a, u, v, w \in \mathbb{N}$ imamo:

$$(a, u, v, w) \in \Gamma \iff (i, u, v, w) \in \Gamma' \ \forall\, i \in [a] \iff [a] \times \{u\} \times \{v\} \times \{w\} \subseteq \Gamma'.$$

Budući je funkcija $\mathbb{N}^4 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^4)$, $(a, u, v, w) \mapsto [a] \times \{u\} \times \{v\} \times \{w\}$ r.r.o. funkcija (vidi propoziciju 1.3.1(i) ili propoziciju 2.9 u [4]), te smo pokazali da je Γ' izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^4$, to odmah dobivamo da je i skup Γ izračunljivo prebrojiv.

Konačno, imamo da je

$$\Theta = A^{-1}(\Gamma) \cap B^{-1}(\Gamma) \cap C^{-1}(\Gamma),$$

gdje su $A, B, C : \mathbb{N}^6 \to \mathbb{N}^4$ funkcije definirane s:

$$\begin{aligned} A(a, b, c, u, v, w) &:= (a, u, v, w), \\ B(a, b, c, u, v, w) &:= (b, u, v, w), \\ C(a, b, c, u, v, w) &:= (c, u, v, w). \end{aligned}$$

Stoga jednostavno dobivamo, koristeći propoziciju 1.1.2(iii), da je Θ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^6$. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da su I_i i I_j **formalno disjunktni**, te pišemo $I_i \diamond I_j$, ako vrijedi sljedeće:

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j.$$

Uočimo odmah da ukoliko su I_i i I_j formalno disjunktni, onda vrijedi da je $I_i \cap I_j = \emptyset$. Također primijetimo da formalna disjunktnost nije relacija među skupovima I_i i I_j, već među brojevima i, j.

Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Kažemo da su J_a i J_b **formalno disjunktni**, i pišemo $J_a \diamond J_b$, ako su I_i i I_j formalno disjunktni za svaki $i \in [a]$ te za svaki $j \in [b]$. Ako su J_a i J_b formalno disjunktni, onda odmah slijedi da je i $J_a \cap J_b = \emptyset$.

Nadalje, neka je $l \in \mathbb{N}$. Prisjetimo se definicije niza $\mathcal{H}_l$:

$$\mathcal{H}_l = \left(J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}\right).$$

Kazat ćemo da broj l **predstavlja formalni lanac** ili, kraće, da je $\mathcal{H}_l$ **formalni lanac** ukoliko su $J_{(l)_i}$ i $J_{(l)_j}$ formalno disjunktni za sve $i, j \in \left\{0, \ldots, \bar{l}\right\}$ sa svojstvom da vrijedi $|i - j| > 1$.

Vrijedi sljedeća propozicija čiji dokaz slijedi naprosto korištenjem propozicije 1.1.5, propozicije 1.3.1 te propozicije 1.1.2 (za detalje dokaza čitatelj može pogledati propoziciju 4.6 u [4], ili propoziciju 8 u [8] te propoziciju 5.4 u [12]).

Propozicija 3.2.5. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada su sljedeći skupovi izračunljivo prebrojivi:*

$$\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid I_i \text{ i } I_j \text{ su formalno disjunktni}\right\},$$
$$\left\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid J_a \text{ i } J_b \text{ su formalno disjunktni}\right\},$$
$$\{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni lanac}\}.$$

Propozicija 3.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te pretpostavimo da je K izračunljiv skup u (X, d, α). Definirajmo:*

$$\Omega := \{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ pravilno pokriva } K\}.$$

Tada je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Dokaz. Uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ pokriva } K\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid J_{(l)_0} \cap K \neq \emptyset\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid J_{(l)_{\bar{l}}} \cap K \neq \emptyset\}. \quad (3.10)$$

Poznato je da je skup $\{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ pokriva } K\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ (vidi propoziciju 5.3 u [12]).

S druge strane, neka je $\Gamma := \{j \in \mathbb{N} \mid J_j \cap K \neq \emptyset\}$. Tada vrijedi sljedeće:

$$\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } I_i \cap K \neq \emptyset, \quad i \in [j]\}.$$

Kako je po pretpostavci skup K izračunljiv to je posebno K i izračunljivo prebrojiv zatvoren skup u (X, d, α). Stoga je skup $\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \cap K \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Sada nam propozicija 1.1.2(i) povlači da je Γ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Općenito je poznato da je za $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, presjek konačno mnogo izračunljivo prebrojivih podskupova od $\mathbb{N}^k$ ponovno izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^k$ (vidi propoziciju 2.5 u [4]). Relacija (3.10) nam sada jednostavno osigurava da je Ω izračunljivo prebrojiv skup kao presjek izračunljivo prebrojivih skupova. □

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $A \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$ te $\mu > 0$. Uvodimo sljedeću oznaku:

$$A \subseteq_\mu J_j$$

ukoliko vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} &A \subseteq J_j, \\ &I_i \cap A \neq \emptyset, \quad \forall\, i \in [j]\,, \\ &\rho_i < \mu, \quad \forall\, i \in [j]\,. \end{aligned}$$

Lema 3.2.7. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K neprazan kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Pretpostavimo da je $r > 0$. Tada postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq_r J_l$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je s pozitivan racionalan broj takav da je $s < r$. Nadalje, neka je $\mathcal{U} = \{B(\alpha_i, s) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač za metrički prostor (X, d). Budući je skup K kompaktan, to postoji neki $k \in \mathbb{N}$ te $i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq B(\alpha_{i_0}, s) \cup \ldots \cup B(\alpha_{i_k}, s)$, te možemo postići da svaka od navedenih kugli siječe skup K.

Neka je $a \in \mathbb{N}$ takav da je $s = q_a$. Nadalje, neka je $p \in \{0, \ldots, k\}$. Znamo da postoji neki $j_p \in \mathbb{N}$ takav da je $(i_p, a) = (\tau_1(j_p), \tau_2(j_p))$ (vidi relaciju (1.1) u poglavlju 1.). Sada imamo:

$$\left(\alpha_{i_p}, s\right) = \left(\alpha_{\tau_1(j_p)}, q_{\tau_2(j_p)}\right) = \left(\lambda_{j_p}, \rho_{j_p}\right).$$

Dakle:

$$\begin{aligned} &K \subseteq I_{j_0} \cup \ldots \cup I_{j_k}, \\ &I_{j_p} \cap K \neq \emptyset, \quad \forall\, p \in \{0, \ldots, k\}\,, \\ &\rho_{j_p} < r, \quad \forall\, p \in \{0, \ldots, k\}\,. \end{aligned}$$

Neka je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(j_0, \ldots, j_k) = ((l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}})$ (vidi relaciju (1.2)). Tada imamo:

$$K \subseteq I_{(l)_0} \cup \ldots \cup I_{(l)_{\bar{l}}} = J_l,$$

te za svaki $i \in [l]$ imamo:

$$I_i \cap K \neq \emptyset, \ \rho_i < r.$$

Dakle, zaista je $K \subseteq_r J_l$. □

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $A, B \subseteq X$ i $\mu > 0$. Kažemo da je broj μ (A, B)-**separator** ako za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$(A \subseteq_\mu J_i \ \text{ i } \ B \subseteq_\mu J_j) \implies J_i \diamond J_j.$$

Uočimo da ukoliko su A, B kompaktni skupovi u (X, d) te ukoliko je μ (A, B)-separator i $\mu' \in \langle 0, \mu \rangle$, onda je μ' također (A, B)-separator.

Lema 3.2.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su A i B neprazni podskupovi od X. Nadalje, neka je r pozitivan realan broj takav da vrijedi:*

$$r \leq \frac{1}{4} \cdot d(A, B).$$

Tada je r (A, B)-separator.

Dokaz. Neka su $j, j' \in \mathbb{N}$ takvi da je $A \subseteq_r J_j$ te $B \subseteq_r J_{j'}$. Nadalje, pretpostavimo da je $i \in [j]$ te da je $i' \in [j']$. Pokažimo da vrijedi sljedeće:

$$d(\lambda_i, \lambda_{i'}) > \rho_i + \rho_{i'}.$$

Pretpostavimo suprotno. Tada imamo da je $d(\lambda_i, \lambda_{i'}) \leq \rho_i + \rho_{i'}$. Uočimo da je $I_i \cap A \neq \emptyset$ te $I_{i'} \cap B \neq \emptyset$ i $\rho_i, \rho_{i'} < r$, jer po pretpostavci imamo da je $A \subseteq_r J_j$ i $B \subseteq_r J_{j'}$. Neka je $a \in A \cap I_i$ i neka je $b \in B \cap I_{i'}$. Tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} d(A, B) \leq d(a, b) &\leq \overbrace{d(a, \lambda_i)}^{<\rho_i} + \overbrace{d(\lambda_i, \lambda_{i'})}^{\leq \rho_i + \rho_{i'}} + \overbrace{d(\lambda_{i'}, b)}^{<\rho_{i'}} \\ &< \overbrace{\rho_i}^{<r} + (\rho_i + \rho_{i'}) + \overbrace{\rho_{i'}}^{<r} < 4r \leq d(A, B). \end{aligned}$$

Dakle $d(A, B) < d(A, B)$, što je očito kontradikcija.

Stoga imamo $d(\lambda_i, \lambda_{i'}) > \rho_i + \rho_{i'}$, pa zaključujemo da je $I_i \diamond I_{i'}$. Kako smo $i \in [j]$ i $i' \in [j']$ proizvoljno odabrali to zaista vrijedi $J_j \diamond J_{j'}$. Ovime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.2.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su A i B disjunktni i neprazni kompaktni skupovi u (X, d). Tada postoji neki $\mu > 0$ stakav da je μ (A, B)-separator.*

Dokaz. Stavimo:

$$\mu := \frac{1}{4} d(A, B).$$

Kako su skupovi A i B disjunktni te kompaktni to odmah imamo da je $\mu > 0$. Sada, prema lemi 3.2.8, imamo da je broj μ traženi (A, B)-separator. □

Lema 3.2.10. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $A \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$ i $r > 0$ takvi da vrijedi*

$$A \subseteq_r J_j.$$

Tada je

$$\operatorname{fdiam}(j) < \operatorname{diam}(A) + 4r.$$

Dokaz. Iz same definicije funkcije fdiam znamo da postoje $u, v, w \in [j]$ takvi da je:

$$\operatorname{fdiam}(j) = d(\lambda_u, \lambda_v) + 2\rho_w.$$

Neka je $a \in A \cap I_u$ te neka je $b \in A \cap I_v$. Takvi a i b zaista postoje jer je $A \subseteq_r J_j$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{fdiam}(j) &= d(\lambda_u, \lambda_v) + 2\rho_w \\
&\leq \overbrace{d(\lambda_u, a)}^{<\rho_u} + \overbrace{d(a, b)}^{\leq \operatorname{diam}(A)} + \overbrace{d(b, \lambda_v)}^{<\rho_v} + 2\rho_w \\
&< \overbrace{\rho_u}^{<r} + \operatorname{diam}(A) + \overbrace{\rho_v}^{<r} + 2\overbrace{\rho_w}^{<r} \\
&< \operatorname{diam}(A) + 4r.
\end{aligned}$$

□

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ izračunljivo prebrojiv skup te neka je

$$U = \bigcup_{i \in A} I_i.$$

Nadalje, neka je K kompaktan skup u (X, d) i neka je $\mu > 0$. Kažemo da je μ (K, A, U)-**augmentator** ako za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$K \subseteq_\mu J_j \implies J_j \subseteq_A U.$$

Uočimo da ukoliko je λ (K, A, U)-augmentator te ukoliko je $\lambda' \in \langle 0, \lambda \rangle$, onda je broj λ' također (K, A, U)-augmentator.

Lema 3.2.11. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{N}$ izračunljivo prebrojiv skup te neka je*

$$U = \bigcup_{i \in A} I_i.$$

Neka je nadalje K kompaktan skup u (X, d) takav da je $K \subseteq U$. Tada postoji neki $\mu > 0$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$(I_i \cap K \neq \emptyset \ \text{ i } \ \rho_i < \mu) \implies I_i \subseteq_A U. \tag{3.11}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da za svaki $\mu > 0$ postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $I_i \cap K \neq \emptyset$ i $\rho_i < \mu$ ali da $I_i \not\subseteq_A U$, to jest da $I_i \subseteq_A U$ ne vrijedi. Tada imamo sljedeće:

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, i_n \in \mathbb{N}) \left(I_{i_n} \cap K \neq \emptyset \ \text{ i } \ \rho_{i_n} < \frac{1}{2^n}, \ \text{ povlači } \ I_{i_n} \not\subseteq_{\mathrm{A}} U \right). \tag{3.12}$$

Za svaki prirodan broj n odaberimo neku točku $y_n \in I_{i_n} \cap K$. Tada je $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u K i budući je skup K kompaktan, to promatrani niz ima podniz $(y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ koji nužno mora konvergirati ka nekoj točki $z \in K$. Kako je prema pretpostavci $K \subseteq U$, to slijedi da je $z \in U$ i stoga postoji neki $a \in A$ takav da je $z \in I_a$. Imamo da je $d(\lambda_a, z) < \rho_a$. Stoga postoji neki $\varepsilon > 0$ takav da je

$$d(\lambda_a, z) + \varepsilon < \rho_a. \tag{3.13}$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
\rho_{i_{n_k}} + d\left(\lambda_{i_{n_k}}, \lambda_a\right) &\leq \rho_{i_{n_k}} + \overbrace{d\left(\lambda_{i_{n_k}}, y_{n_k}\right)}^{y_{n_k} \in B\left(\lambda_{i_{n_k}}, \rho_{i_{n_k}}\right)} + d\left(y_{n_k}, z\right) + d\left(z, \lambda_a\right) \\
&\leq \rho_{i_{n_k}} + \rho_{i_{n_k}} + d\left(y_{n_k}, z\right) + d\left(z, \lambda_a\right) \\
&< 2\frac{1}{2^{n_k}} + d\left(y_{n_k}, z\right) + d(z, \lambda_a). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2 \cdot \frac{1}{2^{n_k}} + d\left(y_{n_k}, z\right) < \varepsilon.$$

Tada prema relaciji (3.14) te relaciji (3.13) imamo da je

$$\rho_{i_{n_k}} + d\left(\lambda_{i_{n_k}}, \lambda_a\right) < \rho_a,$$

a to posebno znači da je $I_{i_{n_k}} \subseteq_A U$, što je u kontradikciji s relacijom (3.12). □

Propozicija 3.2.12. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ izračunljivo prebrojiv skup te stavimo*

$$U = \bigcup_{i \in A} I_i.$$

Pretpostavimo da je K kompaktan skup u (X, d) takav da je $K \subseteq U$. Tada postoji neki $\mu > 0$ takav da je μ (K, A, U)-augmentator.

Dokaz. Prema lemi 3.2.11 postoji neki broj $\mu > 0$ takav da relacija (3.11) vrijedi za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq_\mu J_j$. Tada za svaki $i \in [j]$ imamo da je $I_i \cap K \neq \emptyset$ te $\rho_i < \mu$ i stoga imamo da je $I_i \subseteq_A U$. Dakle $J_j \subseteq_A U$. Ovo upravo znači da je μ (K, A, U)-augmentator. □

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad \text{i} \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Nadalje, neka je $l \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathcal{H}_l$ **formalni** (U, A, V, B)**-niz** ako za svaki $i \in \mathbb{N}$, takav da je $i < \bar{l}$, vrijedi sljedeće:

$$J_{(l)_i} \subseteq_A U \ \text{ ili } \ J_{(l)_i} \subseteq_B V \ \text{ ili } \ J_{(l)_{i+1}} \subseteq_A U \ \text{ ili } \ J_{(l)_{i+1}} \subseteq_B V. \qquad (3.15)$$

Uočimo da ukoliko je $\mathcal{H}_l$ formalni (U, A, V, B)-niz, onda je $\mathcal{H}_l$ također i (U, V)-niz.

Propozicija 3.2.13. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo*

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad i \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Tada je skup

$$\Omega := \{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni } (U, A, V, B)\text{-niz}\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Dokaz. Prema propoziciji 3.2.3 skup

$$\tilde{\Gamma} := \{j \in \mathbb{N} \mid J_j \subseteq_A U\}$$

je izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Definirajmo skupove Γ_1, Γ_2, Γ_3 i Γ_4 na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\{(l, i) \mid J_{(l)_i} \subseteq_A U\right\} \\
\Gamma_2 &= \left\{(l, i) \mid J_{(l)_i} \subseteq_B V\right\} \\
\Gamma_3 &= \left\{(l, i) \mid J_{(l)_{i+1}} \subseteq_A U\right\} \\
\Gamma_4 &= \left\{(l, i) \mid J_{(l)_{i+1}} \subseteq_B V\right\}.
\end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi sljedeće (prisjetimo se, vidi poglavlje 1.1., da je $(l)_i$ po definiciji zapravo pokrata za $\sigma(l, i)$):

$$\Gamma_1 = \left\{(l, i) \mid (l)_i \in \tilde{\Gamma}\right\} = \left\{(l, i) \mid \sigma(l, i) \in \tilde{\Gamma}\right\} = \sigma^{-1}\left(\tilde{\Gamma}\right).$$

Sada propozicija 1.1.2(iii) odmah povlači da je skup Γ_1 izračunljivo prebroji. Na potpuno analogan način bismo zaključili da su i skupovi Γ_2, Γ_3 i Γ_4 također izračunljivo prebrojivi.

Za svaki $l \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\begin{aligned}
l \in \Omega &\iff \mathcal{H}_l \text{ je formalni } (U, V)\text{-niz} \\
&\iff \forall\, i \in \left\{0, \ldots, \bar{l} - 1\right\} \quad (l, i) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\
&\iff \left\{(l, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i < \bar{l}\right\} \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Definirajmo funkciju $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ na sljedeći način:

$$\Phi(l) = \left\{(l, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i < \bar{l}\right\}.$$

Tada je Φ r.r.o. funkcija (vidi primjer 2.12 u [9]). Prema relaciji (3.16) imamo da je

$$\Omega = \{l \in \mathbb{N} \mid \Phi(l) \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4\}.$$

Uočimo da nam sada propozicija 1.3.1(ii) povlači da je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad \text{i} \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Nadalje, neka je $K \subseteq X$ te neka su $a, b \in K$ i $l, i_0 \in \mathbb{N}$. Kažemo da je uređen par (l, i_0) (A, B)-**lokator** (obzirom na skup K i točke a i b) ukoliko vrijedi sljedeće:

a) $\mathcal{H}_l$ je formalni lanac,
b) $\mathcal{H}_l$ je formalni (U, A, V, B)-niz,
c) $\mathcal{H}_l$ pravilno pokriva K,
d) $i_0 \leq \bar{l} - 2$,
e) $J_{(l)_{i_0}} \subseteq_A U, \quad J_{(l)_{i_0+2}} \subseteq_B V$,
f) $J_{(l)_0} \subseteq_A U, \quad J_{(l)_{\bar{l}}} \subseteq_B V$,
g) $a \in J_{(l)_0}$ i $b \in J_{(l)_{\bar{l}}}$.

Reći ćemo da je lokator (l, i_0) ϵ-**lokator**, gdje je $\epsilon > 0$ pozitivan realan broj, ukoliko je

$$\text{fmesh}\,(l) < \epsilon.$$

Propozicija 3.2.14. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo*

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad i \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Pretpostavimo da su skupovi U i V disjunktni te neka je

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Nadalje, pretpostavimo da je $K \subseteq X$ kontinum lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Neka je (l, i_0) (A, B)-lokator. Tada je

$$J_{(l)_{i_0+1}} \cap S \neq \emptyset.$$

Dokaz. Budući $\mathcal{H}_l$ pravilno pokriva skup K, to postoje neki $a', b' \in K$ takvi da $\mathcal{H}_l$ prekriva K od a' do b'. Slijedi da je $a' \in U$ i $b' \in V$. Imamo da je $\mathcal{H}_l$ lanac, $i_0 \in \{0, \ldots, \bar{l} - 2\}$, $J_{(l)_{i_0}} \subseteq_A U$ i $J_{(l)_{i_0+2}} \subseteq_B V$. Dakle, $J_{(l)_{i_0}} \subseteq U$ te $J_{(l)_{i_0+2}} \subseteq V$. Koristeći lemu 3.1.11 zaključujemo da nužno mora biti

$$J_{(l)_{i_0+1}} \cap S \neq \emptyset.$$

□

Propozicija 3.2.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo*

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad i \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Nadalje, neka je K izračunljiv skup u (X, d, α) te neka su $a, b \in K$ izračunljive točke. Tada je skup

$$T = \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid (l, i_0) \text{ je } (A, B)\text{-lokator}\big\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Redom definiramo sljedećih sedam skupova:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni lanac}\big\} \\
T_2 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni } (U, A, V, B)\text{-niz}\big\} \\
T_3 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \text{ pravilno pokriva } K\big\} \\
T_4 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid i_0 \leq \bar{l} - 2\big\} \\
T_5 &= \Big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{(l)_{i_0}} \subseteq_A U \text{ i } J_{(l)_{i_0+2}} \subseteq_B V\Big\} \\
T_6 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{(l)_0} \subseteq_A U \text{ i } J_{(l)_{\bar{l}}} \subseteq_B V\big\}, \\
T_7 &= \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid a \in J_{(l)_0} \text{ i } b \in J_{(l)_{\bar{l}}}\big\}.
\end{aligned}$$

Prvo uočimo da vrijedi sljedeće:

$$T = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 \cap T_5 \cap T_6 \cap T_7.$$

Stoga, ukoliko pokažemo da su skupovi T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 i T_7 izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$, onda tvrdnja propozicije jednostavno slijedi iz činjenice da je konačan presjek izračunljivo prebrojivih skupova također izračunljivo prebrojiv skup (vidi propoziciju 2.5 u [4]).

Iz propozicije 3.2.5, propozicije 3.2.13 te propozicije 3.2.6 odmah imamo da su T_1, T_2 i T_3 izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$. Koristeći propoziciju 1.1.2(iii) zaključujemo da je skup T_4 izračunljivo prebrojiv. Nadalje, propozicija 3.2.3 povlači da su skupovi T_5 i T_6 izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$. Pokažimo da je skup

$$\Omega = \big\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \ a \in J_{(l)_0}\big\}$$

izračunljivo prebrojiv. Prema propoziciji 3.2.1 skup $\tilde{\Omega} = \big\{l \in \mathbb{N} \mid \ a \in J_{(l)_0}\big\}$ jest izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Neka je $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(l, i_0) := l$. Tada je f izračunljiva funkcija (projekcija na prvu koordinatu) te vrijedi:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\tilde{\Omega}) &= \{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \ f(l, i_0) \in \tilde{\Omega}\} \\
&= \{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \ l \in \tilde{\Omega}\} \\
&= \{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid \ a \in J_{(l)_0}\} \\
&= \Omega
\end{aligned}$$

Stoga je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ prema propoziciji 1.1.2(iii). Sada jednostavno možemo zaključiti da je i skup T_7 izračunljivo prebrojiv čime je ova propozicija u potpunosti dokazana. □

Propozicija 3.2.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo*

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad i \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Pretpostavimo da su skupovi U i V disjunktni. Nadalje, pretpostavimo da je $K \subseteq X$ kontinuum lančast od a do b, gdje je $a \in U$ te $b \in V$ i neka je

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Također pretpostavimo da je $K \cap S$ nuldimenzionalan. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje $l, i_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je (l, i_0) ϵ-(A, B)-lokator.

Dokaz. Propozicija 3.1.5 povlači da postoji kompaktan (U, V)-$\frac{\epsilon}{2}$-lanac $K_0, \dots, K_n$ koji pokriva K od a do b i koji zadovoljava da je $K_0 \subseteq U$ te $K_n \subseteq V$. Stavimo $\mathcal{K} := \{K_0, \dots, K_n\}$ te neka je

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{(L, L') \mid L, L' \in \mathcal{K},\ L \cap L' = \emptyset\}, \\ \mathcal{U} &:= \{L \in \mathcal{K} \mid L \subseteq U\}, \\ \mathcal{V} &:= \{L \in \mathcal{K} \mid L \subseteq V\}. \end{aligned}$$

Iz propozicije 3.2.9 znamo da za svaki $(L, L') \in \mathcal{D}$ postoji neki $\mu_{(L,L')} > 0$ takav da je $\mu_{(L,L')}$ (L, L')-separator. Također, prema propoziciji 3.2.12 imamo da za svaki $L \in \mathcal{U}$ postoji neki $\delta_L > 0$ takav da je δ_L (L, A, U)-augmentator. Ista propozicija povlači da za svaki $L \in \mathcal{V}$ postoji neki $\nu_L > 0$ takav da je ν_L (L, B, V)-augmentator. Definirajmo:

$$\begin{aligned} \mu &:= \min \left\{ \mu_{(L,L')} \mid (L, L') \in \mathcal{D} \right\} \\ \delta &:= \min \{\delta_L \mid L \in \mathcal{U}\} \\ \nu &:= \min \{\nu_L \mid L \in \mathcal{V}\}. \end{aligned}$$

Neka je

$$r := \min \left\{ \mu, \delta, \nu, \frac{\varepsilon}{8} \right\}.$$

Prema lemi 3.2.7 za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ postoji $j_i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_i \subseteq_r J_{j_i}. \tag{3.17}$$

Pretpostavimo da su $v, w \in \{0, \dots, n\}$ takvi da je $|v - w| > 1$. Tada je $K_v \cap K_w = \emptyset$ i budući je r (K_v, K_w)-separator slijedi da je

$$J_{j_v} \diamond J_{j_w}. \tag{3.18}$$

Neka je $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $K_i \subseteq U$. Jer je δ_{K_i} (K_i, A, U)-augmentator, $K_i \subseteq_r J_{j_i}$ te $r \leq \delta_{K_i}$, imamo da je $J_{j_i} \subseteq_A U$. Analogno, ako je $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $K_i \subseteq V$, onda je $J_{j_i} \subseteq_B V$. Stoga, za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$\begin{aligned} K_i \subseteq U &\implies J_{j_i} \subseteq_A U \\ K_i \subseteq V &\implies J_{j_i} \subseteq_B V. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Neka je sada $l \in \mathbb{N}$ takav prirodan broj za koji je:

$$\left((l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}}\right) = (j_0, \ldots, j_n).$$

Iz relacije (3.18) slijedi da je $\mathcal{H}_l$ formalni lanac. Relacija (3.17) povlači da $\mathcal{H}_l$ pokriva K od a do b. Nadalje, relacija (3.19) daje da je $\mathcal{H}_l$ formalan (U, A, V, B)-niz i da je $J_{(l)_0} \subseteq_A U$ te $J_{(l)_{\bar{l}}} \subseteq_B V$.

Budući je K povezan skup, imamo da je $K_0, \ldots, K_n$ jednostavan lanac i stoga prema propoziciji 3.1.7 postoji neki $i_0 \in \{0, \ldots, n-2\}$ takav da je $K_{i_0} \subseteq U$ i $K_{i_0+2} \subseteq V$. Dakle, $i_0 \in \left\{0, \ldots, \bar{l} - 2\right\}$ te prema relaciji (3.19) imamo da je

$$J_{(l)_{i_0}} \subseteq_A U \text{ i } J_{(l)_{i_0+2}} \subseteq_B V.$$

Uočimo da lema 3.2.10 povlači da za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ imamo da je

$$\operatorname{fdiam}(j_i) \leq \operatorname{diam}(K_i) + 4r < \frac{\epsilon}{2} + 4 \cdot \frac{\epsilon}{8} = \epsilon.$$

Stoga je

$$\operatorname{fmesh}(l) < \epsilon$$

te napokon možemo zaključiti da je (l, i_0) ϵ-(A, B)-lokator. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$ neki prirodni brojevi. Neka je K kompaktan skup u X takav da je $K \subseteq J_a \cup J_b \cup J_c$. Kažemo da je broj $\mu > 0$ (K, a, b, c)-**augmentator** ako za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$K \subseteq_\mu J_j \implies J_j \subseteq_{\mathrm{F}} J_{a,b,c}.$$

Lema 3.2.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Neka je K kompaktan skup u X takav da je $K \subseteq J_a \cup J_b \cup J_c$. Tada postoji neki pozitivan realan broj $\mu > 0$ koji je (K, a, b, c)-augmentator.*

Dokaz. Stavimo

$$A := [a] \cup [b] \cup [c] \subseteq \mathbb{N}.$$

Očito je A izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ (uočimo da je A konačan). Neka je

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i.$$

Nadalje, neka je $j \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$J_j \subseteq_{\mathrm{F}} J_{a,b,c} \iff J_j \subseteq_A U.$$

Uočimo da je zapravo $U = J_a \cup J_b \cup J_c$. Stoga je $K \subseteq U$ i propozicija 3.2.12 povlači da postoji neki $\mu > 0$ takav da je μ (K, A, U)-augmentator. Dakle, ako je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq_\mu J_j$, onda je $J_j \subseteq_A U$, to jest ako je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq_\mu J_j$, onda je $J_j \subseteq_{\mathrm{F}} J_{a,b,c}$. To posebno znači da je μ (K, a, b, c)-augmentator. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad \text{i} \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Nadalje, neka je $K \subseteq X$, $a, b \in K$, $l, i_0, p, j_0 \in \mathbb{N}$ te $\varepsilon > 0$. Kažemo da je uređeni par (p, j_0) $\frac{\epsilon}{2}$-**lokator** za uređeni par (l, i_0) (obzirom na skupove A, B, K i točke a i b) te pišemo

$$(p, j_0)_{\frac{\epsilon}{2}} \preceq (l, i_0)\,,$$

ukoliko je (p, j_0) $\frac{\epsilon}{2}$-lokator, (l, i_0) ϵ-lokator i vrijedi

$$J_{(p)_{j_0},(p)_{j_0+1},(p)_{j_0+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0},(l)_{i_0+1},(l)_{i_0+2}}.$$

Propozicija 3.2.18. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$. Stavimo*

$$U := \bigcup_{i \in A} I_i \quad \textit{i} \quad V := \bigcup_{j \in B} I_j.$$

Pretpostavimo da su skupovi U i V disjunktni te neka je

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Nadalje, neka su točke $a, b \in X$ takve da je $a \in U$ i $b \in V$. Također, neka su $l, i_0 \in \mathbb{N}$ te neka je $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo da je $K \subseteq X$ kontinuum lančast od a do b i pretpostavimo da je $K \cap S$ nuldimenzionalan. Neka je (l, i_0) ε-lokator (obzirom na skup K te točke a i b). Tada postoje $p, j_0 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi:

$$(p, j_0)_{\frac{\epsilon}{2}} \preceq (l, i_0)\,.$$

Dokaz. Kako je (l, i_0) ϵ-lokator, to je $J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}$ otvoreni lanac koji pokriva K od a do b. Posebno je stoga familija

$$\mathcal{F} = \left\{ J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}} \right\}$$

otvoreni pokrivač od K. Neka je λ Lebesgueov broj od $\mathcal{F}$ za K. Neka je nadalje $s > 0$ takav da

$$B(a, s) \subseteq J_{(l)_0} \text{ i } B(b, s) \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}. \tag{3.20}$$

Neka je $K_0, \ldots, K_m$ kompaktan (U, V)-min$\left\{\lambda, s, \frac{\epsilon}{4}\right\}$-lanac koji pokriva K od a do b i takav da je $K_0 \subseteq U$ te $K_m \subseteq V$. Takav lanac zaista postoji prema propoziciji 3.1.5. Uočimo da $K_0, \ldots, K_m$ profinjuje $J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}$ jer je $\operatorname{diam} K_i < \lambda$ za svaki

$i \in \{0, \ldots, m\}$. Iz relacije (3.20) te činjenice da je $\operatorname{diam} K_0 < s$, $\operatorname{diam} K_m < s$ slijedi da je

$$K_0 \subseteq J_{(l)_0} \text{ i } K_m \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}.$$

Uočimo da su $K_0, \ldots, K_m$ i $J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}$ dva jednostavna lanca jer je K povezan. Budući je $J_{(l)_0} \subseteq_A U$ i $J_{(l)_{\bar{l}}} \subseteq_B V$, imamo da je $K_0 \subseteq U$ te $K_m \subseteq V$. Prema propoziciji 3.1.9 postoji $j_0 \in \{0, \ldots, m-2\}$ takav da je

$$K_{j_0} \subseteq U, \ K_{j_0+2} \subseteq V$$

i takav da je

$$K_{j_0} \cup K_{j_0+1} \cup K_{j_0+2} \subseteq J_{(l)_{i_0}} \cup J_{(l)_{i_0+1}} \cup J_{(l)_{i_0+2}}.$$

Prema lemi 3.2.17 postoje μ_0 koji je $\left(K_{j_0}, (l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}\right)$-augmentator, μ_1 koji je $\left(K_{j_0+1}, (l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}\right)$-augmentator te μ_2 koji je $\left(K_{j_0+2}, (l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}\right)$-augmentator. Stavimo

$$\mu := \min\left\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\right\}.$$

Kao i u dokazu propozicije 3.2.16 možemo pronaći neki broj $r > 0$ takav da za sve $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ vrijede sljedeće implikacije:

$$\begin{aligned}
&a) \ \ K_i \cap K_j = \emptyset \implies r \ \text{ je } (K_i, K_j) - \text{ separator} \\
&b) \ \ K_i \subseteq U \implies r \ \text{ je } (K_i, A, U) - \text{ augmentator} \\
&c) \ \ K_i \subseteq V \implies r \ \text{ je } (K_i, B, V) - \text{ augmentator} \\
&d) \ \ r < \min\left\{\mu, \frac{\varepsilon}{16}\right\}.
\end{aligned}$$

Prema lemi 3.2.7 za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$ možemo odabrati neki $k_i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_i \subseteq_r J_{k_i}.$$

Neka je $p \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\left((p)_0, \ldots, (p)_{\bar{p}}\right) = (k_0, \ldots, k_m).$$

Kao i u dokazu propozicije 3.2.16, možemo zaključiti da je (p, j_0) $\frac{\epsilon}{2}$-lokator. Kako je broj r $\left(K_{j_0}, (l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}\right)$-augmentator te je $K_{j_0} \subseteq_r J_{k_{j_0}}$, to jest $K_{j_0} \subseteq_r J_{(p)_{j_0}}$, imamo da je

$$J_{(p)_{j_0}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}}.$$

Potpuno analogno možemo zaključiti da je:

$$J_{(p)_{j_0+1}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}},$$

te da je:

$$J_{(p)_{j_0+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}}.$$

Stoga imamo:

$$J_{(p)_{j_0}, (p)_{j_0+1}, (p)_{j_0+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0}, (l)_{i_0+1}, (l)_{i_0+2}}$$

te smo time pokazali da je (p, j_0) $\frac{\epsilon}{2}$-lokator za (l, i_0). $\square$

3.3. Potpuno nepovezan presjek

Za topološki prostor X kažemo da je **potpuno nepovezan** ako je svaka komponenta povezanosti od X jednočlan skup. Drugim riječima možemo kazati da je X potpuno nepovezan ako su jedini povezani podskupovi od X jednočlani skupovi.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su U i V dva disjunktna izračunljivo prebrojiva otvorena skupa u (X, d, α) i neka je $K \subseteq X$ kontinuum koji je lančast od a do b, gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Stavimo

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

U ovom poglavlju nam je cilj istražiti podrobnije sljedeću implikaciju:

$$K \text{ izračunljiv } \Rightarrow K \text{ siječe } S \text{ u izračunljivoj točki,} \tag{3.21}$$

to jest želimo vidjeti uz koje dodatne uvjete je navedena implikacija (3.21) istinita.

Dokazat ćemo da je implikacija (3.21) istinita ukoliko pretpostavimo da je skup $K \cap S$ potpuno nepovezan. Također, vidjet ćemo kako nam ovaj rezultat povlači da je implikacija (3.21) također istinita ukoliko pretpostavimo da je K luk (u tom slučaju pretpostavka da je $K \cap S$ potpuno nepovezan će naprosto isčeznuti, to jest neće nam uopće biti potrebna).

Ideja koja se krije u pozadini dokaza za navedeni rezultat sastoji se u tome da iskoristimo tehniku (U, V)-lanaca. Preciznije, htjeli bismo iskoristiti činjenicu da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan (U, V)-ε-lanac u (X, d) koji pokriva navedeni K. Upravo je to razlog zašto nam je potrebna pretpostavka da je skup $K \cap S$ potpuno nepovezan. Naime, prema propoziciji 3.1.5 te korolaru 3.1.6, moguće je za svaki $\varepsilon > 0$ pokriti K s kompaktnim/otvorenim (U, V)-ε-lancem ako i samo ako je $K \cap S$ nuldimenzionalan. No, nuldimenzionalnost skupa $K \cap S$ ekvivalentna je s njegovom potpunom nepovezanošću. Ta je činjenica zapravo posljedica sljedeće tvrdnje.

Propozicija 3.3.1. *Pretpostavimo da je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada je (X, d) nuldimenzionalan ako i samo ako je (X, d) potpuno nepovezan.*

Zaista, ako je (X, d) nuldimenzionalan prostor, tada prema propoziciji 3.1.4 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo u parovima disjunktnih otvorenih skupova čiji su dijametri manji od ε i koji pokrivaju skup X, a to znači da za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $x \in X$ postoji separacija (A, B) od (X, d) takva da je $x \in A$ i $\operatorname{diam} A < \varepsilon$. To očito povlači da su jedini povezani podskupovi u (X, d) jednočlani skupovi. Obratno, nije očito da potpuna nepovezanost metričkog prostora (X, d) povlači i njegovu nuldimenzionalnost. Teorem (6.C.4) u [6] (vidjeti također i [7]) nam omogućava da dođemo do traženog zaključka. Naime, prema tom teoremu, ukoliko pretpostavimo da je metrički prostor (X, d) potpuno nepovezan, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo u parovima disjunktnih otvorenih skupova čiji su dijametri manji od ε i koji pokrivaju X. Dakle, možemo zaključiti da je metrički prostor (X, d) nuldimenzionalan (propozicija 3.1.4).

Stoga nam propozicija 3.3.1, propozicija 3.1.5 te korolar 3.1.6 impliciraju da je pretpostavka potpune nepovezanosti na skup $K \cap S$ zaista nužna ukoliko želimo koristiti činjenicu da je za proizvoljan $\varepsilon > 0$ moguće pokriti K s kompaktnim/otvorenim (U, V)-ε-lancem.

Prije nego u potpunosti opišemo glavni rezultat ovog poglavlja, navodimo jednostavnu činjenicu iz teorije izračunljivih funkcija koju ćemo koristiti u dokazu glavnog teorema. Dokaz se svodi na korištenje takozvane *primitivne rekurzije* (vidi uvodno poglavlje u [9]). Također za detalje dokaza čitatelj može pogledati dokaz leme 3.11 u [9].

Propozicija 3.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $T \subseteq \mathbb{N}^k$ i $a \in T$. Pretpostavimo da je $\varphi\colon T \to \mathbb{N}^k$ parcijalno izračunljiva funkcija takva da je $\varphi(T) \subseteq T$. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana ovako:*

$$\begin{aligned} &f(0) = a, \\ &f(y+1) = \varphi(f(y)). \end{aligned}$$

Tada je f izračunljiva funkcija.

Teorem 3.3.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su U i V dva disjunktna izračunljivo prebrojiva otvorena skupa u X. Stavimo:*

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Pretpostavimo da je K kontinuum u X lančast od točke a do točke b, gdje je $a \in U$ i $b \in V$ te neka su točke a i b izračunljive. Također, pretpostavimo da je K izračunljiv skup i da je $K \cap S$ potpuno nepovezan. Tada skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

Dokaz. Neka su A i B izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$ takvi da je

$$U = \bigcup_{i \in A} I_i \quad \text{i} \quad V = \bigcup_{i \in B} I_i.$$

Stavimo:

$$T := \left\{(l, i_0) \in \mathbb{N}^2 \mid (l, i_0) \text{ je lokator}\right\}.$$

Napomenimo ovdje, da ukoliko kažemo da je (l, i_0) lokator, onda mislimo da je (l, i_0) jedan (A, B)-lokator obzirom na skup K te točke a i b. Neka je nadalje Ω skup svih $(l, i_0, p, j_0) \in \mathbb{N}^4$ tako da vrijede sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} &a) \quad (l, i_0) \text{ i } (p, j_0) \text{ su lokatori,} \\ &b) \quad J_{(p)_{j_0},(p)_{j_0+1},(p)_{j_0+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0},(l)_{i_0+1},(l)_{i_0+2}}, \\ &c) \quad \operatorname{fmesh}(p) < \frac{3}{4} \operatorname{fmesh}(l). \end{aligned}$$

Ako je $(l, i_0) \in T$ tada je (l, i_0) lokator i stoga je posebno (l, i_0) i $\frac{3}{2} \operatorname{fmesh}(l)$-lokator. Prema propoziciji 3.2.18 postoji neki $(p, j_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da vrijedi

$$(p, j_0)_{\frac{3}{4} \operatorname{fmesh}(l)} \preceq (l, i_0).$$

Budući je (p, j_0) jedan $\frac{3}{4} \operatorname{fmesh}(l)$-lokator za uređeni par (l, i_0), to imamo da je

$$J_{(p)_{j_0},(p)_{j_0+1},(p)_{j_0+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{i_0},(l)_{i_0+1},(l)_{i_0+2}}.$$

Također, kako imamo da je (p, j_0) $\frac{3}{4}$ fmesh (l) -lokator to vrijedi da je

$$\operatorname{fmesh}(p) < \frac{3}{4} \operatorname{fmesh}(l).$$

Dakle, za svaki $\mathbf{x} = (l, i_0) \in T$ postoji neki $\mathbf{y} = (p, j_0) \in T$ takav da je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega$. Stoga, prema propoziciji 1.1.2(ii), postoji parcijalno izračunljiva funkcija $\varphi \colon T \to \mathbb{N}^2$ takva da je $\varphi(T) \subseteq T$ i takva da vrijedi $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \Omega$ za svaki $\mathbf{x} \in T$.

Fiksirajmo neki $(a_0, b_0) \in T$. To možemo napraviti jer prema propoziciji 3.2.16 te propoziciji 3.3.1 imamo da je skup T neprazan. Neka je $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana na sljedeći način:

$$f(0) = (a_0, b_0), \ f(k+1) = \varphi(f(k)).$$

Uočimo da nam propozicija 3.3.2 odmah povlači da je f izračunljiva funkcija. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$(f(k), \varphi(f(k))) \in \Omega,$$

to jest

$$(f(k), f(k+1)) \in \Omega. \tag{3.22}$$

Neka su $l \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ te $i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Tada su l i i izračunljive jer je f izračunljiva funkcija. Prema relaciji (3.22) za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$(l(k), i(k), l(k+1), i(k+1)) \in \Omega,$$

te stoga imamo da vrijede sljedeće tvrdnje:

a) $(l(k), i(k))$ i $(l(k+1), i(k+1))$ su lokatori,

b) $J_{(l(k+1))_{i(k+1)}, (l(k+1))_{i(k+1)+1}, (l(k+1))_{i(k+1)+2}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l(k))_{i(k)}, (l(k))_{i(k)+1}, (l(k))_{i(k)+2}}$,

c) $$\operatorname{fmesh}(l(k+1)) < \frac{3}{4} \operatorname{fmesh}(l(k)). \tag{3.23}$$

Za $k \in \mathbb{N}$ neka je $E(k)$ skup definiran s:

$$E(k) := J_{(l(k))_{i(k)}} \cup J_{(l(k))_{i(k)+1}} \cup J_{(l(k))_{i(k)+2}}.$$

Uočimo da iz leme 3.2.14 odmah imamo da je

$$J_{(l(k))_{i(k)+1}} \cap S \neq \emptyset. \tag{3.24}$$

Također uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\operatorname{diam}(E(k)) \leq 3 \operatorname{fmesh}(l(k)),$$

te kako je $\operatorname{fmesh}(l(k)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \operatorname{fmesh}(l(0))$, što jasno slijedi iz relacije (3.23), imamo da je zapravo

$$\operatorname{diam}(E(k)) \leq 3 \left(\frac{3}{4}\right)^k \operatorname{fmesh}(l(0)). \tag{3.25}$$

Stoga

$$\operatorname{diam}(E(k)) \to 0 \text{ kada } k \to \infty. \tag{3.26}$$

Jer je $E(k+1) \subseteq E(k)$ vrijedi da je

$$\operatorname{Cl}(E(k+1)) \subseteq \operatorname{Cl}(E(k)),$$

te je stoga

$$K \cap \operatorname{Cl}(E(k+1)) \subseteq K \cap \operatorname{Cl}(E(k)).$$

Općenito nam povezanost skupa K povlači da ukoliko je (p, j_0) lokator, onda svaki od skupova $J_{(p)_0}, \ldots, J_{(p)_{\overline{p}}}$ nužno mora sijeći skup K. Stoga je za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $K \cap \operatorname{Cl}(E(k))$ neprazan i zatvoren u K te $\operatorname{diam}(K \cap \operatorname{Cl}(E(k)))$ teži k 0 kada k pustimo da teži k ∞. Budući je K kompaktan, skupovi $K \cap \operatorname{Cl}(E(k))$, $k \in \mathbb{N}$, imaju neprazan presjek, što slijedi iz Cantorovog teorema o presjeku (vidi teorem 4.13 u [27]). Dakle, postoji neki $x \in X$ takav da je

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K \cap \operatorname{Cl}(E(k)).$$

Tvrdimo da je $x \in S$. U protivnom, jer je S zatvoren, mora postojati neki $r > 0$ takav da je $B(x, r) \subseteq X \setminus S$. Iz relacije (3.26) znamo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam}(\operatorname{Cl}(E(k))) < r$ i kako je $x \in \operatorname{Cl}(E(k))$ imamo da je

$$\operatorname{Cl}(E(k)) \subseteq B(x, r) \subseteq X \setminus S.$$

Stoga je i

$$E(k) \cap S = \emptyset.$$

No ovo je u kontradikciji s relacijom (3.24). Dakle, zaista je $x \in K \cap S$.

No x je također i izračunljiva točka. Naime, iz same definicije skupova $E(k)$, J_j te I_i, znamo da postoji izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_{f(k)} \in E(k)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Sada nam relacija (3.25) povlači da je

$$d\left(x, \alpha_{f(k)}\right) \leq 3 \left(\frac{3}{4}\right)^k \operatorname{fmesh}(l(0)), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Odaberimo $M \in \mathbb{N}$ takav da je $3\left(\frac{3}{4}\right)^M \operatorname{fmesh}(l(0)) < 1$. Tada je

$$d\left(x, \alpha_{f(3k+M)}\right) < 2^{-k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

te stoga zaista imamo da je x izračunljiva točka. Dakle, zaključujemo da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku. □

U sljedećem teoremu, u kojem ćemo iskoristiti prethodni rezultat, pretpostavka potpune nepovezanosti nam uopće neće biti potrebna. Ovaj rezultat je zapravo bio i motivacija koja nas je vodila da razvijemo tehniku (U, V)-lanaca koja je usko povezana, kao što smo vidjeli, s potpunom nepovezanošću. Napomenimo ovdje još jednom da pod pojmom *luka* podrazumijevamo topološki prostor koji je homeomorfan jediničnom intervalu $[0, 1]$ (vidi [20, 21]) .

Teorem 3.3.4. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su U i V dva disjunktna izračunljivo prebrojivo otvorena skupa u X. Stavimo:*

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Nadalje, pretpostavimo da je A luk u X s krajnjim točkama a i b gdje je $a \in U$ i $b \in V$. Također pretpostavimo da je A izračunljiv skup te da su točke a i b izračunljive. Tada skup $A \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

Dokaz. Budući je A luk s krajnjim točkama a i b, imamo da je A kontinuum lančast od točke a do točke b (vidi [21]). Sada, ukoliko je $A \cap S$ potpuno nepovezan, onda $A \cap S$ sadrži izračunljivu točku prema teoremu 3.3.3.

Pretpostavimo da $A \cap S$ nije potpuno nepovezan. Tada postoji neki skup C koji sadrži barem dvije točke te koji je povezan u $A \cap S$. Uočimo da je tada C također povezan i u A. Tvrdimo da postoji neprazan otvoren skup W u A takav da je $W \subseteq C$.

Naravno, ta tvrdnja slijedi iz činjenice da je A homeomorfan sa $[0, 1]$. Naime, ako je D povezan skup u $[0, 1]$ koji sadrži više od jedne točke, onda za sve $x, y \in D$, $x < y$, imamo da je također i $[x, y] \subseteq D$ te je stoga otvoreni interval $\langle x, y \rangle$ neprazan otvoren skup u $[0, 1]$ koji je sadržan u skupu D.

Budući je A po pretpostavci teorema izračunljiv skup, to nužno postoji neki izračunljiv niz u (X, d, α) koji je gust u A (vidi propoziciju 3.3 u [11]). Posebno je i skup svih izračunljivih točaka u (X, d, α) koje leže u A gust u A te stoga nužno mora postojati izračunljiva točka c takva da je $c \in W$. Slijedi da je $c \in C$ i budući je $C \subseteq A \cap S$, imamo da je $c \in A \cap S$. $\square$

Primijetimo da smo u teoremu 3.3.3 koristili pretpostavku da je K kontinuum lančast od točke a do točke b, gdje je $a \in U$ i $b \in V$. Također, u teoremu 3.3.4 pretpostavka je bila da je A luk s krajnjim točkama a i b gdje je točka $a \in U$, a točka $b \in V$. Prirodno se postavlja pitanje može li se ta pretpostavka oslabiti. U idućem poglavlju ćemo pokazati da je to moguće na način da samo pretpostavimo da K i A sijeku oba skupa U i V.

Tehnika (U, V)-lanaca koju smo koristili u dokazu teorema 3.3.3 opravdava pretpostavku koju smo u teoremu nužno morali koristiti, a odnosi se na to da skup $K \cap S$ mora biti potpuno nepovezan (vidi propoziciju 3.3.1, propoziciju 3.1.5 te korolar 3.1.6).

Vidjeli smo kroz teorem 3.3.4 da se ta pretpostavka može izostaviti ukoliko pretpostavimo da je skup K luk. Uočimo da je ključna stvar u dokazu teorema 3.3.4 bila činjenica da svaki povezan podskup od K koji ima barem dvije točke također mora imati i neprazan interior u K. Stoga, uz pretpostavku da je K luk, ukoliko skup $K \cap S$ nije potpuno nepovezan, onda interior od $K \cap S$ u K je neprazan te smo time osigurali da navedeni presjek također sadrži i izračunljivu točku.

Općenito, iz same činjenice da skup $K \cap S$ nije potpuno nepovezan ne možemo zaključiti da je i interior od $K \cap S$ u K neprazan. U tu svrhu navodimo sljedeći primjer.

Primjer 3.3.5. Definirajmo skupove L, M i R na sljedeći način:

$$\begin{aligned} L &:= \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \mid x \in [-1, 0\rangle \right\}, \\ M &:= \{0\} \times [-1, 1], \\ R &:= \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \mid x \in \langle 0, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Stavimo $a = (-1, \sin(-1))$, $b = (1, \sin 1)$ te $K = L \cup M \cup R$. Tada je K kontinuum u $\mathbb{R}^2$ koji je lančast od točke a do točke b. Definirajmo redom sljedeće skupove:

$$\begin{aligned} U &:= \langle -\infty, 0\rangle \times \mathbb{R}, \\ V &:= \langle 0, \infty\rangle \times \mathbb{R}, \\ S &:= \mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V). \end{aligned}$$

Uočimo da su U i V disjunktni otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^2$ te da je $a \in U$, $b \in V$. Očito je $K \cap S = M$. Također, primijetimo da za svaki $x \in M$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji neki $y \in L$, te postoji neki $z \in R$, sa svojstvom da je $d(x, y) < \varepsilon$ i $d(x, z) < \varepsilon$ (gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$), što nam pokazuje da je interior skupa M u K prazan. Dakle, $K \cap S$ nije potpuno nepovezan, ali interior od $K \cap S$ u K je prazan.

Uočimo da bismo također isti zaključak dobili da uzmemo $L = [-1, 0] \times \{-1\}$ te $a = (-1, -1)$.

3.4. Povezan presjek i poluizračunljivost

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Pretpostavimo da su U i V disjunktni izračunljivo prebrojivi skupovi te neka je K izračunljiv skup u (X, d, α). Stavimo, kao i do sada

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

Pretpostavimo da je K kontinuum lančast od $a \in U$ to $b \in V$. Glavni rezultat prethodnog poglavlja (vidi teorem 3.3.3) nam je rekao da $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko je skup $K \cap S$ potpuno nepovezan. Cilj ovog poglavlja jest pronaći neke druge uvjete uz koje bi skup $K \cap S$ sadržavao izračunljivu točku.

Pretpostavimo sada da je skup $K \cap S$ povezan. Uočimo da je takva pretpostavka potpuna suprotnost pretpostavci potpune nepovezanosti. Što u tom slučaju možemo kazati o $K \cap S$ te o izračunljivim točkama u promatranom skupu $K \cap S$?

Budući je $K \cap S$ kompaktan, imamo da je $K \cap S$ kontinuum i kao potkontinuum lančastog kontinuuma K, $K \cap S$ je također lančasti kontinuum. Kako su lukovi prirodni predstavnici lančastih kontinuuma, logično je postaviti sljedeće pitanje: što se može kazati o izračunljivim točkama u skupu $K \cap S$ u slučaju kada je $K \cap S$ luk? Nasuprot slučaju kada je K luk (vidi teorem 3.3.4), u slučaju kada je $K \cap S$ luk ne možemo tako jednostavno zaključiti da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku samo zato što su izračunljive točke guste u K. Naime, interior skupa $K \cap S$ u K može biti prazan (vidi primjer 3.3.5).

Ipak, i u ovom slučaju kada je $K \cap S$ luk, dokazat ćemo da $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku. Štoviše, dokazat ćemo i općenitiji rezultat. Ovo poopćenje ćemo opisati kroz sljedeće dvije tvrdnje:

- tvrdnja vrijedi ne samo kada je $K \cap S$ luk, već također i kada je $K \cap S$ bilo koji dekompozabilan kontinuum;
- također, tvrdnja vrijedi ne samo u slučaju kada je skup A oblika $K \cap S$, već i za proizvoljan poluizračunljiv skup A. Dakle, svaki poluizračunljiv skup A koji je dekompozabilan lančasti kontinuum nužno sadrži izračunljivu točku (vidjet ćemo da je u našem slučaju $K \cap S$ uvijek poluizračunljiv skup).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Prisjetimo se definicije koja kaže da je S *poluizračunljiv* u (X, d, α) ako je

$$\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Također za skup S kazali smo da je *koizračunljivo prebrojiv* (co-c.e.) u (X, d, α) ukoliko je $X \setminus S$ c.e. otvoren skup u (X, d, α). Uočimo da su co-c.e. skupovi po definiciji zatvoreni. Također, možemo primijetiti da je skup $X \setminus (U \cup V)$ co-c.e. ukoliko su U i V c.e. otvoreni.

Postoji veza između poluizračunljivih skupova i co-c.e. skupova (prisjetimo se relacije (1.7) u uvodnom poglavlju ove disertacije). Svaki poluizračunljiv skup nužno mora biti i co-c.e. (vidi [12]). S druge strane, co-c.e. skup ne treba biti poluizračunljiv, čak ni u slučaju kada je kompaktan. Naime, postoji izračunljiv metrički prostor (X, d, α) te točka $x \in X$ koja nije izračunljiva, ali takva da je $\{x\}$ co-c.e. skup (vidi primjer 3.2 u [11]), iz čega jednostavno možemo zaključiti da skup $\{x\}$ nije poluizračunljiv. Ipak, ukoliko pretpostavimo da je ambijentni izračunljiv metrički prostor *lokalno izračunljiv*, onda u njemu svaki kompaktan co-c.e. skup nužno mora biti i poluizračunljiv(vidi [12]). Napomenimo samo da je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) **lokalno izračunljiv** ako za svaki kompaktan skup A u (X, d) postoji neki izračunljiv skup K u (X, d, α) takav da vrijedi $A \subseteq K$ (vidi na primjer [1]).

Lema 3.4.1. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je K poluizračunljiv skup u (X, d, α). Tada su skupovi*

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_i \cup J_j\},$$

i

$$\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid K \subseteq J_i \cup J_j \cup J_k\}$$

izračunljivo prebrojivi.

Dokaz. Znamo da je unija dvije r.r.o. funkcije također r.r.o. funkcija (vidi propoziciju 2.18(iv) u [9]). Dakle, $\Phi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana s

$$\Phi(i, j) := [i] \cup [j], \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

je r.r.o. funkcija. Nadalje, uočimo da je za sve $i, j \in \mathbb{N}$, $\Phi(i,j) \neq \emptyset$. Stoga za sve $i, j \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Phi(i,j) = [l].$$

Prema propoziciji 1.3.1(iii) znamo da je skup

$$\Omega := \{(i,j,l) \in \mathbb{N}^3 \mid \ \Phi(i,j) = [l]\}$$

izračunljiv podskup od $\mathbb{N}^3$. Kako je Ω izračunljiv skup, to za sve $i, j \in \mathbb{N}$ možemo na efektivan način pronaći broj $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(i,j) = [l]$. Dakle postoji neka izračunljiva funkcija $f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$[i] \cup [j] = [f(i,j)], \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}\,.$$

Stoga je:

$$J_i \cup J_j = J_{f(i,j)}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}\,.$$

Kako je po pretpostavci leme skup K poluizračunljiv, to sada jednostavno, primjenom propozicije 1.1.2(iii), slijedi da je skup $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid K \subseteq J_i \cup J_j\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Analogno bismo pokazali da je i skup $\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \mid K \subseteq J_i \cup J_j \cup J_k\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$. □

Propozicija 3.4.2. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je K poluizračunljiv skup, a S co-c.e. skup u (X, d, α). Tada je $K \cap S$ poluizračunljiv.*

Dokaz. Ukoliko je $S = X$, tada je tvrdnja očita jer je po pretpostavci skup K poluizračunljiv. Pretpostavimo stoga da je $S \neq X$. Koristeći propoziciju 1.3.1 te samu definiciju c.e. otvorenog skupa možemo zaključiti da postoji neka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi sljedeće (za detalje vidi dokaz leme 3.16 u [9]):

$$X \setminus S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{f(i)} \ \text{ i } \ J_{f(i)} \subseteq J_{f(i+1)}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Želimo pokazati da je skup

$$\{j \in \mathbb{N} \mid K \cap S \subseteq J_j\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Neka je stoga $j \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $K \cap S \subseteq J_j$. Tada je

$$K \setminus J_j \subseteq X \setminus S. \tag{3.28}$$

Relacija (3.28) zajedno sa činjenicom da je skup $K \setminus J_j$ kompaktan, sada povlači (vidi također relaciju ((3.27))) da postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $K \setminus J_j \subseteq J_{f(i)}$. Stoga imamo da je

$$K \subseteq J_{f(i)} \cup J_j. \tag{3.29}$$

Obratno, ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da relacija (3.29) vrijedi, onda je $K \cap S \subseteq J_j$ jer je $S \cap J_{f(i)} = \emptyset$.

Dakle imamo zaključak da je $K \cap S \subseteq J_j$ ako i samo ako postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da relacija (3.29) vrijedi.

No kako je skup svih $(j, i) \in \mathbb{N}^2$ takvih da relacija (3.29) vrijedi izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ (vidi lemu 3.4.1 te propoziciju 1.1.2(iii)), to nam sada propozicija 1.1.2(i) povlači da je zaista skup $\{j \in \mathbb{N} \mid K \cap S \subseteq J_j\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Ovime smo pokazali u potpunosti da je skup $K \cap S$ poluizračunljiv u (X, d, α). □

Ukoliko još jednom promotrimo pretpostavke teorema 3.3.3, uočit ćemo da promatramo izračunljiv metrički prostor (X, d, α) te dva disjunktna izračunljivo prebrojivo otvorena skupa U i V u (X, d, α). Primijetimo da iz same definicije skupa $S = X \setminus (U \cup V)$ proizlazi da je S co-c.e. skup te smo nadalje imali pretpostavku da je skup K izračunljiv u (X, d, α) iz čega jasno zaključujemo da je K također i poluizračunljiv. Stoga, prema propoziciji 3.4.2 imamo da je skup $K \cap S$ poluizračunljiv skup. Prirodno je dakle sada razmišljati o izračunljivosti poluizračunljivih skupova.

Općenito je poznato da neprazan poluizračunljiv skup ne treba sadržavati niti jednu izračunljivu točku. Naime, možemo promatrati nenegativnu izračunljivu funkciju $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ koja ima nultočke ali joj niti jedna nultočka nije izračunljiva. Takva funkcija zaista postoji (vidi [24]). Označimo sa $\Gamma(f)$ graf funkcije f, to jest skup:

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Stavimo $S := \mathbb{R} \times \{0\}$. Tada se može pokazati da su $\Gamma(f)$ i S izračunljivo zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^2$ (vidi naprimjer [9, 4]). Promatrajmo nadalje skup $\Gamma(f) \cap S$. Kako se navedeni skup sastoji od svih točaka $(x, 0)$, gdje je x nultočka funkcije f, zaključujemo da je $\Gamma(f) \cap S$ neprazan podskup od $\mathbb{R}^2$ koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. Nadalje, skup $\Gamma(f) \cap S$ je poluizračunljiv, što je zapravo posljedica propozicije 3.4.2 (također čitatelj može vidjeti i [9]). Dakle zaista postoji poluizračunljiv skup koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku. U izvjesnom smislu, postoje stoga poluizračunljivi skupovi koji su veoma daleko od toga da budu izračunljivi.

Ipak, neki dodatni uvjeti mogu nam osigurati da poluizračunljivi skupovi postanu izračunljivi ili da barem sadrže izračunljivu točku (vidi [19, 1, 8, 12, 5]). U ovome radu, vođeni teoremom 3.3.3, posebice smo zainteresirani promatrati slučaj kada je poluizračunljiv skup zapravo lančasti kontinuum. Niti u ovom slučaju ne treba poluizračunljiv skup biti izračunljiv, čak niti ako se usredotočimo na lukove (vidi [19]). Rezultati koji su napravljeni u članku [8] daju nam neke uvjete uz koje poluizračunljiv lančasti kontinuum postaje izračunljiv ili barem sadrži izračunljivu točku. U radu [11] rezultati iz članka [8] su opisani u općenitijem obliku te se mogu izrazati na sljedeći način: ako je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor koji je lokalno izračunljiv te ako je S poluizračunljiv lančasti kontinuum u (X, d, α) tada vrijedi:

(1) ukoliko je S *dekompozabilan*, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neki izračunljivi potkontinuum S' od S takav da je $\rho(S, S') < \varepsilon$, gdje nam ρ predstavlja Hausdorffovu metriku (posebno to znači da skup S nužno mora sadržavati izračunljivu točku);

(2) ukoliko je S kontinuum lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke, onda S mora biti izračunljiv.

Napomenimo ovdje da je kontinuum K **dekompozabilan** ukoliko postoje dva prava potkontinuuma K_1 i K_2 od K takva da je $K_1 \cup K_2 = K$ (pravi potkontinuum naprosto znači da $K_1 \neq K$ te da je $K_2 \neq K$). Ukoliko kontinuum nije dekompozabilan, onda ćemo kazati da je **indekompozabilan**. Na primjer, segment $[0, 1]$ je očito dekompozabilan kontinuum. Stoga je svaki luk također dekompozabilan. Nadalje, na primjer za kontinuum K definiran u primjeru 3.3.5 se također može pokazati da je dekompozabilan. S druge je strane mnogo teže naći primjere indekompozabilnih kontinuuma (ne računajući prostore koji sadrže samo jednu točku - takvi prostori su očito indekompozabilni). Neki netrivijalni primjeri indekompozabilnih kontinuuma se mogu naći u [21] (vidi primjer 1.10).

Uočimo da je rezultat opisan kroz relaciju (1) važan sa stanovišta problema koji se proučava kroz ovu doktorsku disertaciju, a riječ je o pitanju pronalaska uvjeta uz koje skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko je K izračunljiv lančasti kontinuum te ukoliko je $S = X \setminus (U \cup V)$, gdje su U i V c.e. otvoreni skupovi. U posebnom slučaju kada je $K \cap S$ dekompozabilan kontinuum tvrdnja (1) (zajedno s propozicijom 3.4.2) povlači da $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku, no ipak uz dodatan uvjet da je izračunljiv metrički prostor *lokalno izračunljiv*.

Naš je cilj sada da nekako pokušamo pokazati da se pretpostavka lokalne izračunljivosti koja je postavljena na izračunljiv metrički prostor (X, d, α) može maknuti iz gore navedenih rezultata, to jest želimo pokazati da rezultati (1) te (2) vrijede u proizvoljnom izračunljivom metričkom prostoru. Da bismo to postigli, iskoristit ćemo neke ideje koje su razvijene u radu [8] (teorem 42 i teorem 44).

Pretpostavimo da su A i B skupovi. Za konačan niz skupova $C_0, \dots, C_m$ kažemo da je (A, B)-**direktan** ako postoje neki $i, j \in \{0, \dots, m\}$ takvi da je

$$C_i \cap A \neq \emptyset, \quad B \cap C_j \neq \emptyset$$

i

$$\max\{i \in \{0, \dots, m\} \mid C_i \cap A \neq \emptyset\} + 1 < \min\{j \in \{0, \dots, m\} \mid B \cap C_j \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.4.3. *Pretpostavimo da je (K, d) lančasti kontinuum. Neka su K_1 i K_2 potkontinuumi od K takvi da je $K = K_1 \cup K_2$. Nadalje, pretpostavimo da su A i B neprazni zatvoreni skupovi u (K, d) takvi da je $A \subseteq K_1 \setminus K_2$ i $B \subseteq K_2 \setminus K_1$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan $\varepsilon-$lanac u (K, d) koji pokriva K i koji je (A, B)-direktan.*

Dokaz. Uočimo da su skupovi A, B, K_1 i K_2 kompaktni te je po pretpostavci $A \cap K_2 = \emptyset$ i $B \cap K_1 = \emptyset$. Stoga su brojevi $r_1 := d(A, K_2)$ i $r_2 := d(B, K_1)$ pozitivni. Stavimo

$$r := \min\{r_1, r_2\}.$$

Tada za svaki $S \subseteq K$ takav da je $\operatorname{diam} S < r$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$(S \cap A \neq \emptyset \Rightarrow S \cap K_2 = \emptyset) \quad \text{i} \quad (S \cap B \neq \emptyset \Rightarrow S \cap K_1 = \emptyset). \tag{3.30}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 3.1.3 postoji kompaktan $\min\{\varepsilon, r\}$-lanac $D_0, \dots, D_m$ u (K, d) koji pokriva K. Kako je (K, d) po pretpostavci povezan to je $D_0, \dots, D_m$

jednostavan lanac. Neka je i_0 najmanji $i \in \{0, \dots, m\}$ takav da D_i siječe skup A ili skup B. Imamo dva slučaja:

- $D_{i_0} \cap A \neq \emptyset$

ili

- $D_{i_0} \cap B \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da je $D_{i_0} \cap A \neq \emptyset$. Tvrdimo da je tada $D_0, \dots, D_m$ (A, B)-direktan. Pretpostavimo suprotno. Neka je

$$v := \max\{i \in \{0, \dots, m\} \mid D_i \cap A \neq \emptyset\} \text{ i } w := \min\{j \in \{0, \dots, m\} \mid D_j \cap B \neq \emptyset\}.$$

Tada je $w \leq v + 1$. Prema relaciji (3.30) imamo da je

$$D_{i_0} \cap K_2 = \emptyset, \ D_v \cap K_2 = \emptyset \text{ i } D_w \cap K_1 = \emptyset. \tag{3.31}$$

To posebno znači da je $w \neq v + 1$. Naime, kada bi imali da je $w = v + 1$ onda bi imali da je $D_v \cap D_w \neq \emptyset$, te bi stoga prema relaciji (3.31) postojala neka točka u K koja ne bi ležala niti u skupu K_1 niti u skupu K_2, što je nemoguće jer je prema pretpostavci $K = K_1 \cup K_2$. Dakle, zaista je $w < v + 1$, to jest $w \leq v$. No, istim načinom zaključivanja dobivamo da je $w < v$. Prema definiciji od i_0 imamo da je $i_0 \leq w$ te opet zaključujemo analogno da je zapravo $i_0 < w$. Stoga imamo da je $i_0 < w < v$ te slijedi da su

$$D_0 \cup \dots \cup D_{w-1} \text{ i } D_{w+1} \cup \dots \cup D_v$$

dva disjunktna zatvorena skupa u (K, d) koji pokrivaju K_1 (vidi relaciju (3.31)) i takvi da svaki od tih skupova siječe skup K_1 (naime imamo da je $D_{i_0} \cap A \neq \emptyset$ i $D_v \cap A \neq \emptyset$). No to je nemoguće jer je po pretpostavci skup K_1 povezan. Dakle, zaista imamo da je $D_0, \dots, D_m$ (A, B)-direktan.

Pretpostavimo sada da je $D_{i_0} \cap B \neq \emptyset$. Na potpuno analogan način dolazimo do toga je $D_0, \dots, D_m$ (B, A)-direktan. Ovime smo pokazali da je konačan niz skupova $D_m, \dots, D_0$ traženi kompaktan ε-lanac koji je (A, B)-direktan. □

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $u, v \in \mathbb{N}$. Kažemo da je J_u **formalno sadržan** u J_v i pišemo $J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$ ako za svaki $i \in [u]$ postoji neki $j \in [v]$ takav da je $I_i \subseteq_{\mathrm{F}} I_j$. Uočimo da je $J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$ ako i samo ako je $J_u \subseteq_{[v]} U$, gdje je $U = J_v$. Nadalje, ako su $l, v \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je $\mathcal{H}_l$ **formalno sadržan** u J_v te pišemo $\mathcal{H}_l \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$ ako je $J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$ za svaki $u \in [l]$. Naposljetku, ukoliko su $l, l' \in \mathbb{N}$, onda kažemo da $\mathcal{H}_l$ **formalno profinjuje** $\mathcal{H}_{l'}$ te pišemo $\mathcal{H}_l \leq \mathcal{H}_{l'}$ ako za svaki $i \in [l]$ postoji neki $j \in [l']$ takav da je $J_i \subseteq_{\mathrm{F}} J_j$.

Propozicija 3.4.4. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada su sljedeći skupovi*

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v\}, \\ \Omega_2 &:= \{(l, v) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \subseteq_{\mathrm{F}} J_v\}, \\ \Omega_3 &:= \{(l, l') \in \mathbb{N}^2 \mid \mathcal{H}_l \leq \mathcal{H}_{l'}\} \end{aligned}$$

izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Označimo sa Ω sljedeći skup:

$$\Omega := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid \ I_i \subseteq_F I_j\}.$$

Tada je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ (vidi propoziciju 1.3.2(i)). Nadalje, neka je Ω_1' skup definiran s:

$$\Omega_1' := \{(i,v) \in \mathbb{N}^2 \mid \ \exists\, j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i,j) \in \Omega,\ j \in [v]\}.$$

Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $v \mapsto [v]$ r.r.o. funkcija to nam propozicija 1.3.1(ii) povlači da je skup Ω_1' izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Sada možemo uočiti:

$$(u,v) \in \Omega_1 \iff (i,v) \in \Omega_1',\ \forall\, i \in [u] \iff [u] \times \{v\} \subseteq \Omega_1'. \tag{3.32}$$

Funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, $(u,v) \mapsto [u] \times \{v\}$ je r.r.o. funkcija (vidi propoziciju 2.9 u [4]). Pokazali smo da je skup Ω_1' izračunljivo prebrojiv. Stoga nam sada relacija (3.32) te propozicija 1.3.1(ii) povlače da je skup Ω_1 izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Nadalje, prema lemi 2.10 u [9] postoji izračunljiva funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$J_{f(l)} = \mathcal{H}_l, \quad \forall\, l \in \mathbb{N}\,.$$

Vrijedi stoga sljedeće:

$$\begin{aligned}
(l,v) \in \Omega_2 \quad &\iff \quad \mathcal{H}_l \subseteq_{\mathrm{F}} J_v \\
&\iff \quad J_{f(l)} \subseteq_{\mathrm{F}} J_v \\
&\iff \quad (f(l),v) \in \Omega_1.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Možemo definirati izračunljivu funkciju $F\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ tako da stavimo:

$$F(l,v) := (f(l),v), \quad \forall\, (l,v) \in \mathbb{N}^2\,.$$

Tada je prema relaciji (3.33)

$$(l,v) \in \Omega_2 \quad \iff \quad F(l,v) \in \Omega_1.$$

Dakle imamo da je

$$\Omega_2 = F^{-1}(\Omega_1),$$

iz čega lagano, koristeći propoziciju 1.1.2(iii), zaključujemo da je skup Ω_2 izračunljivo prebrojiv.

Da bismo pokazali da je skup Ω_3 izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ prvo ćemo definirati sljedeći skup:

$$\Omega_3' := \{(i,l') \in \mathbb{N}^2 \mid \ \exists\, j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i,j) \in \Omega_1,\ j \in [l']\}.$$

Analogno kao što smo zaključili da je skup Ω_1' izračunljivo prebrojiv zaključujemo sada da je i skup Ω_3' također izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Uočimo:

$$(l,l') \in \Omega_3 \iff (i,l') \in \Omega_3',\ \forall\, i \in [l] \iff [l] \times \{l'\} \subseteq \Omega_3'. \tag{3.34}$$

Iz relacije (3.34) te propozicije 1.3.1(ii) zaključujemo da je skup Ω_3 izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. $\square$

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ stavimo:

$$\widehat{J}_j = \bigcup_{i \in [j]} \widehat{I}_i.$$

Prisjetimo se da smo za $i \in \mathbb{N}$ definirali $\widehat{I}_i = \widehat{B}(\lambda_i, \rho_i)$. Uočimo sljedeće: ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da su I_i i I_j formalno disjunktni, onda je $\widehat{I}_i \cap \widehat{I}_j = \emptyset$. Kao posljedicu dobivamo da ukoliko su $u, v \in \mathbb{N}$ takvi da su J_u i J_v formalno disjunktni, onda je $\widehat{J}_u \cap \widehat{J}_v = \emptyset$. Nadalje, ako je $I_i \subseteq_{\mathrm{F}} I_j$, onda je i $\widehat{I}_i \subseteq I_j$. Dakle, ako je $J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$, onda je i $\widehat{J}_u \subseteq J_v$.

Jasno je da je za svaki $j \in \mathbb{N}$ skup $\widehat{J}_j$ zatvoren u (X, d) i budući je očito $J_j \subseteq \widehat{J}_j$, imamo da je i $\mathrm{Cl}(J_j) \subseteq \widehat{J}_j$. Vrijedi stoga sljedeća propozicija.

Propozicija 3.4.5. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $l, l', u, v \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) ako je $J_u \subseteq_{\mathrm{F}} J_v$, onda je $\mathrm{Cl}(J_u) \subseteq J_v$;

(ii) ako je $\mathcal{H}_l \leq \mathcal{H}_{l'}$, onda konačni niz skupova $\mathrm{Cl}(J_{(l)_0}), \dots, \mathrm{Cl}(J_{(l)_{\bar{l}}})$ profinjuje konačni niz $J_{(l')_0}, \dots, J_{(l')_{\overline{l'}}}$.

Prisjetimo se definicije skupa Λ_i za $i \in \mathbb{N}$ iz uvodnog dijela (vidi poglavlje 1.1.):

$$\Lambda_i := \{\alpha_{(i)_0}, \dots, \alpha_{(i)_{\bar{i}}}\}.$$

Skupove Λ_i koristit ćemo u sljedećoj lemi da bismo dokazali izračunljivost izvjesnog skupa. Štoviše, čitatelja upućujemo da obrati pažnju na propoziciju 1.1.8 iz uvodnog dijela. Naime, prema navedenoj propoziciji, a u kontekstu Hausdorffove metrike, neprazan kompaktan skup K u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) jest poluizračunljiv i c.e. zatvoren ako i samo ako postoji neka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\rho(S, \Lambda_{f(k)}) < 2^{-k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ovaj koncept ponavljamo iz razloga što smo do sada u ovom poglavlju izračunljivost skupa opisivali pomoću poluizračunljivosti i izračunljive prebrojivosti, no u sljedećoj lemi ćemo izračunljivost skupa opisati pomoću koncepta Hausdorffove metrike.

Lema 3.4.6. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je S neprazan kompaktan skup u (X, d). Nadalje, pretpostavimo da postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{fdiam}(f(k)) < 2^{-k}$, $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_{f(k)}$ i svaki od skupova u konačnom nizu $\mathcal{H}_{f(k)}$ siječe skup S. Tada je S izračunljiv skup.*

Dokaz. Iz same definicije niza skupova (J_j) možemo zaključiti da postoji neka izračunljiva funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\alpha_{g(j)} \in J_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Kako je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $l \mapsto \{g((l)_0), \dots, g((l)_{\bar{l}})\} = g([l])$ r.r.o. to postoji neka izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $[\varphi(l)] = g([l])$ za svaki $l \in \mathbb{N}$ (vidi propoziciju 1.3.1, sličan argument smo koristili i u dokazu leme 3.4.1). Neka je $l \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\Lambda_{\varphi(l)} = \{\alpha_{g((l)_0)}, \dots, \alpha_{g((l)_{\bar{l}})}\}$$

te zaključujemo da vrijedi sljedeće: $\Lambda_{\varphi(l)} \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l$ i svaki skup u konačnom nizu $\mathcal{H}_l$ siječe $\Lambda_{\varphi(l)}$. Iz pretpostavke same leme zaključujemo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće: za svaki $x \in S$ postoji neki $y \in \Lambda_{\varphi(f(k))}$ takav da je $d(x, y) < 2^{-k}$ i za svaki $y \in \Lambda_{\varphi(f(k))}$ postoji neki $x \in S$ takav da je $d(y, x) < 2^{-k}$.

Stoga je $\rho(S, \Lambda_{\varphi(f(k))}) \leq 2^{-k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, te smo time pokazali da je S izračunljiv skup. $\square$

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv lančasti kontinuum te neka su K_1 i K_2 potkontinuumi od S čija je unija jednaka skupu S i pretpostavimo da je $a \in K_1 \setminus K_2$, a $b \in K_2 \setminus K_1$. Ukoliko dodatno pretpostavimo da ambijentni prostor (X, d, α) ima svojstvo kompaktnih zatvorenih kugli te svojstvo efektivnog pokrivanja, onda je poznato da možemo pronaći izračunljive točke a' i b' koje su po volji blizu točkama a i b te možemo pronaći izračunljiv potkontinuum S' od S koji je lančast od točke a' do točke b' (vidi teorem 42 u [8]). Ukoliko izračunljiv metrički prostor(X, d, α) ima svojstvo kompaktnih zatvorenih kugli te svojstvo efektivnog pokrivanja, onda je (X, d, α) lokalno izračunljiv (vidi [11]). U dokazu teorema koji slijedi (vidi teorem 3.4.7) koristit ćemo neke ideje koje su razvijene u dokazu teorema 42 u [8], ali ćemo se također osloniti i na tehnike koje smo razvili u poglavlju 3.2. (separatori, augmentatori i lokatori). Na samom početku trebamo sljedeću definiciju.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $p, l, q \in \mathbb{N}$. Kažemo da je uređena trojka (p, l, q) **formalni lanac** (odnosno da predstavlja formalni lanac) ukoliko vrijedi sljedeće:

(i) J_p i $J_{(l)_i}$ su formalno disjunktni za svaki $i \in \{1, \dots, \bar{l}\}$;

(ii) $\mathcal{H}_l$ je formalni lanac;

(iii) $J_{(l)_i}$ i J_q su formalno disjunktni za svaki $i \in \{0, \dots, \bar{l} - 1\}$.

Ukoliko je (p, l, q) formalni lanac, onda je očito

$$J_p, J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}, J_q$$

lanac. Koristeći propoziciju 3.2.5 te tehniku r.r.o. funkcija nije teško zaključiti da je skup svih uređenih trojki $(p, l, q) \in \mathbb{N}^3$, koje predstavljaju formalne lance izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$.

Teorem 3.4.7. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S poluizračunljiv skup u (X, d, α) koji je kao potprostor od (X, d) lančasti kontinuum. Neka su K_1 i K_2 potkontinuumi od S takvi da je $S = K_1 \cup K_2$ te neka je $a \in K_1 \setminus K_2$ i $b \in K_2 \setminus K_1$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje izračunljive točke $a', b' \in S$ takve da je $d(a, a') < \varepsilon$, $d(b, b') < \varepsilon$ te postoji izračunljiv potkontinuum od S koji je lančast od točke a' do točke b'.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Stavimo

$$r := \frac{1}{4} \min\{\varepsilon, d(a, K_2), d(b, K_1), 1\}.$$

Za svaki $x \in S \setminus B(a, 2r)$ postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in I_i$, te takav da je $I_i \cap B(a, r) = \emptyset$. Kako je skup $S \setminus B(a, 2r)$ kompaktan, to zaključujemo da postoji konačno mnogo racionalnih otvorenih kugli koje pokrivaju $S \setminus B(a, 2r)$ i imaju svojstvo da niti jedna od njih ne siječe skup $B(a, r)$. Dakle, postoji neki $\tilde{b} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$S \setminus B(a, 2r) \subseteq J_{\tilde{b}} \text{ i } J_{\tilde{b}} \cap B(a, r) = \emptyset. \tag{3.35}$$

Na potpuno analogan način dolazimo do broja $\tilde{a} \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi sljedeće:

$$S \setminus B(b, 2r) \subseteq J_{\tilde{a}} \text{ i } J_{\tilde{a}} \cap B(b, r) = \emptyset. \tag{3.36}$$

Kako je $B(a, 2r) \cap K_2 = \emptyset$, imamo da je $K_2 \subseteq J_{\tilde{b}}$. Slično je i $K_1 \subseteq J_{\tilde{a}}$. Stoga imamo da je

$$S \setminus J_{\tilde{b}} \subseteq K_1 \setminus K_2 \quad \text{i} \quad S \setminus J_{\tilde{a}} \subseteq K_2 \setminus K_1. \tag{3.37}$$

Također iz relacije (3.35) te relacije (3.36) zaključujemo da je $a \in S \setminus J_{\tilde{b}}$ i $b \in S \setminus J_{\tilde{a}}$.

Ideja koja se krije u pozadini konstrukcije traženog potkontinuuma jest da promatramo lance koji pokrivaju skup S i koji su $(S \setminus J_{\tilde{b}}, S \setminus J_{\tilde{a}})$-direktni. Ukoliko je $\mathcal{C}$ jedan takav lanac, onda je $\mathcal{C}$ oblika $U_0, \dots, U_p, C_0, \dots, C_m, V_0, \dots, V_q$, gdje su $U_0, \dots, U_p, C_0, \dots, C_m$ sadržani u $J_{\tilde{a}}$, a $C_0, \dots, C_m, V_0, \dots, V_q$ sadržani u $J_{\tilde{b}}$. Mi ćemo konstruirati niz takvih lanaca te ćemo dokazati da je presjek unije središnjih (unutarnjih) karika $C_0 \cup \dots \cup C_m$ traženi potkontinuum. Da bi konstrukcija bila jednostavnija za razumijeti te čitatelju očitija, promatrati ćemo lance u obliku $U, C_0, \dots, C_m, V$.

Neka je Ω_1 skup svih uređenih trojki $(p, l, q) \in \mathbb{N}^3$ takvih da je

$$S \subseteq J_p \cup (\bigcup \mathcal{H}_l) \cup J_q. \tag{3.38}$$

Tada je Ω_1 izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$. Naime, (vidi lemu 33 u [8]) postoji izračunljiva funkcija $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $J_{\zeta(l)} = \bigcup \mathcal{H}_l$ za svaki $l \in \mathbb{N}$. Stoga je $(p, l, q) \in \Omega_1$ ako i samo ako je $S \subseteq J_p \cup J_{\zeta(l)} \cup J_q$. Sada tvrdnja da je Ω_1 izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^3$ slijedi iz leme 3.4.1.

Nadalje, neka je Ω_2 skup svih uređenih trojki $(p, l, q) \in \mathbb{N}^3$ takvih da je (p, l, q) formalni lanac. Neka je Ω_3 skup svih uređenih trojki $(p, l, q) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi sljedeće:

$$J_p \subseteq_{\mathrm{F}} J_{\tilde{a}}, \quad \mathcal{H}_l \subseteq_{\mathrm{F}} J_{\tilde{a}}, \quad \mathcal{H}_l \subseteq_{\mathrm{F}} J_{\tilde{b}} \text{ i } J_q \subseteq_{\mathrm{F}} J_{\tilde{b}}. \tag{3.39}$$

Uočimo da propozicija 3.4.4 povlači da je skup Ω_3 izračunljivo prebrojiv.

Neka je Ω skup svih $l \in \mathbb{N}$ za koji postoje $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $(p, l, q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. Prema propoziciji 1.1.2(i) imamo da je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Konačno, neka je Γ skup svih uređenih parova $(l, l') \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi sljedeće:

(i) $l, l' \in \Omega$;

(ii) $\mathcal{H}_{l'} \leq \mathcal{H}_l$;

(iii) $J_{(l')_0} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_0}$, $J_{(l')_{\overline{l'}}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{\overline{l}}}$;

(iv) $\text{fmesh}(l') < \frac{1}{2}\,\text{fmesh}(l)$.

Primijetimo da propozicij 3.4.4 i 1.1.5 povlače da je Γ izračunljivo prebrojiv skup.

Prvo ćemo pokazati da postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$l \in \Omega,\ \text{fmesh}(l) < r,\ d(a, J_{(l)_0}) < 3r \text{ i } d(b, J_{(l)_{\bar{l}}}) < 3r. \tag{3.40}$$

Prema lemi 3.4.3 te relaciji (3.37) postoji jednostavan kompaktan $\frac{r}{2}$-lanac $D_0, \ldots, D_m$ u S koji pokriva S i koji je $(S \setminus J_{\tilde{b}}, S \setminus J_{\tilde{a}})$-direktan. Stavimo:

$$\begin{aligned} v &:= \max\{i \in \{0, \ldots, m\} \mid D_i \cap (S \setminus J_{\tilde{b}}) \neq \emptyset\}, \\ w &:= \min\{j \in \{0, \ldots, m\} \mid D_j \cap (S \setminus J_{\tilde{a}}) \neq \emptyset\}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Iz same definicije slijedi da su karike $D_0, \ldots, D_{w-1}$ sadržane u $J_{\tilde{a}}$ i da su karike $D_{v+1}, \ldots, D_m$ sadržane u $J_{\tilde{b}}$. Posebno, karike $D_{v+1}, \ldots, D_{w-1}$ su sadržane i u $J_{\tilde{a}}$ i u $J_{\tilde{b}}$. Promatrajmo sljedeći lanac:

$$D_0 \cup \cdots \cup D_v, D_{v+1}, \ldots, D_{w-1}, D_w \cup \cdots \cup D_m.$$

Koristeći tehniku separatora i augmentatora (propozicija 3.2.9, propozicija 3.2.12 te lema 3.2.10) dobivamo da postoje $p, t_1, \ldots, t_{w-v-1}, q \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

- $D_0 \cup \cdots \cup D_v \subseteq J_p$, $D_{v+1} \subseteq J_{t_1}$, $\ldots$, $D_{w-1} \subseteq J_{t_{w-v-1}}$, $D_w \cup \cdots \cup D_m \subseteq J_q$,
- $J_p \subseteq_{\text{F}} J_{\tilde{a}}$, $J_q \subseteq_{\text{F}} J_{\tilde{b}}$ i svaka od karika J_{t_1}, $\ldots$, $J_{t_{w-v-1}}$ je formalno sadržana i u $J_{\tilde{a}}$ i u $J_{\tilde{a}}$,
- svaka od karika $J_{t_1}, \ldots, J_{t_{w-v-1}}$ ima formalni dijametar manji od r,
- elementi koji nisu susjedni u konačnom nizu $J_p, J_{t_1}, \ldots, J_{t_{w-v-1}}, J_q$ su formalno disjunktni.

Sada uzmimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(t_1, \ldots, t_{w-v-1}) = ((l)_0, \ldots, (l)_{\bar{l}})$ i imamo da je $(p, l, q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. Dakle, imamo da je $l \in \Omega$. Jasno je da je $\text{fmesh}(l) < r$. Ostaje nam još provjeriti da je $d(a, J_{(l)_0}) < 3r$ i da je $d(b, J_{(l)_{\bar{l}}}) < 3r$. Uočimo da je dovoljno pokazati da je $d(a, D_{v+1}) < 3r$ i da je $d(b, D_{w-1}) < 3r$.

Imamo da je $D_v \cap (S \setminus J_{\tilde{b}}) \neq \emptyset$ (što vidimo iz same definicije broja v) te vrijedi da je $S \setminus J_{\tilde{b}} \subseteq B(a, 2r)$ (vidi relaciju (3.35)). Stoga imamo da je $D_v \cap B(a, 2r) \neq \emptyset$. Ovo, zajedno sa činjenicom da je $D_v \cap D_{v+1} \neq \emptyset$ te činjenicom da je $\operatorname{diam} D_v < r$, daje da je zaista $d(a, D_{v+1}) < 3r$. Analogno dobivamo da je i $d(b, D_{w-1}) < 3r$.

Dokažimo sada sljedeće: za svaki $l \in \Omega$ postoji neki $l' \in \Omega$ takav da je $(l, l') \in \Gamma$.

Neka je $l \in \Omega$. Tada postoje neki $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $(p, l, q) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$. Neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača

$$\left\{J_p, J_{(l)_0}, \ldots, J_{(l)_{\bar{l}}}, J_q\right\}$$

za S. Postoji jednostavan kompaktan $\min\{\lambda, \frac{\text{fmesh}(l)}{4}\}$-lanac $D_0, \ldots, D_m$ u S koji pokriva S i koji je $(S \setminus J_{\tilde{b}}, S \setminus J_{\tilde{a}})$-direktan. Neka su v i w brojevi definirani relacijom (3.41). Imamo da skup D_v siječe skup $S \setminus J_{\tilde{b}}$ i budući je $\operatorname{diam} D_v < \lambda$, D_v je sadržan u nekom od skupova J_p, $J_{(l)_0}$, $\dots$, $J_{(l)_{\bar{l}}}$, J_q (to vrijedi jer je λ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača $\{J_p, J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}, J_q\}$). No, prema relaciji (3.39) svaki od skupova $J_{(l)_0}$, $\dots$, $J_{(l)_{\bar{l}}}$, J_q je sadržan u $J_{\tilde{b}}$. Stoga nužno mora biti $D_v \subseteq J_p$. Analogno zaključujemo da je $D_w \subseteq J_q$.

Kako $a \notin J_{\tilde{b}}$, iz relacije (3.38) i relacije (3.39) zaključujemo da je $a \in J_p$. Također zaključujemo da je $b \in J_q$. To znači da skupovi J_p i J_q sijeku skup S i stoga nam sada povezanost skupa S povlači da je nužno $J_p, J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}, J_q$ jednostavan lanac (i svaka karika ovog lanca siječe skup S; zapravo imamo da je $J_p \cap S, J_{(l)_0} \cap S, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S, J_q \cap S$ jednostavan lanac).

Imamo da je $v < w$, $D_v \subseteq J_p$ te $D_w \subseteq J_q$. Iz leme 3.1.8 slijedi da postoji neki $i \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $v < i < w$ i takav da je $D_i \subseteq J_{(l)_0}$. Neka je v' najveći takav i. Sada imamo da je $v' < w$, $D_{v'} \subseteq J_{(l)_0}$, $D_w \subseteq J_q$ te iz leme 3.1.8 slijedi da postoji $i \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $v' \leq i < w$ i takav da je $D_i \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}$. Neka je nadalje w' najmanji takav i. Imamo sljedeći zaključak: $v < v' \leq w' < w$,

$$D_{v'} \subseteq J_{(l)_0} \quad \text{i} \quad D_{w'} \subseteq J_{(l)_{\bar{l}}}.$$

Neka je $i \in \{0, \dots m\}$ takav da je $v' < i < w'$. Tvrdimo da je skup D_i sadržan u nekom od skupova $J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}$. U protivnom, imamo da je $D_i \subseteq J_p$ ili da je $D_i \subseteq J_q$. Ako je $D_i \subseteq J_p$, onda primjena leme 3.1.8 daje broj j takav da je $i < j \leq w'$, te takav da je $D_j \subseteq J_{(l)_0}$. Ovo pak zajedno sa činjenicom da je $v' < j$, daje kontradikciju s izborom broja v'. Analogno dobivamo da nas i $D_i \subseteq J_q$ vodi na kontradikciju.

Stoga imamo da lanac $D_{v'}, \dots, D_{w'}$ profinjuje lanac $J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}}$. Promatrajmo sada lanac

$$D_0 \cup \dots \cup D_{v'-1}, D_{v'}, \dots, D_{w'}, D_{w'+1} \cup \dots \cup D_m.$$

Postupajući slično kao i ranije dobivamo brojeve $p', l', q' \in \mathbb{N}$ takve da je $(p', l', q') \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, $\mathcal{H}_{l'} \leq \mathcal{H}_l$, $J_{(l')_0} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_0}$, $J_{(l')_{\overline{l'}}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{\bar{l}}}$ i $\mathrm{fmesh}(l') < \frac{1}{2}\,\mathrm{fmesh}(l)$. Dakle imamo da je $(l, l') \in \Gamma$.

Također primijetimo da imamo i sljedeću jednostavnu činjenicu:

$$\text{ako je } l \in \Omega, \text{ onda je } J_{(l)_0} \cap S, \dots, J_{(l)_{\bar{l}}} \cap S \text{ jednostavan lanac.} \tag{3.42}$$

Stoga, za svaki $l \in \Omega$ postoji neki $l' \in \Omega$ takav da je $(l, l') \in \Gamma$ i time propozicija 1.1.2(ii) povlači da postoji parcijalno izračunljiva funkcija $\varphi : \Omega \to \mathbb{N}$ takva da je $\varphi(\Omega) \subset \Omega$ i takva da vrijedi $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$ za svaki $x \in \Omega$.

Fiksirajmo neki $l \in \mathbb{N}$ takav da relacija (3.40) vrijedi. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$f(0) = l, \quad f(k+1) = \varphi(f(k)).$$

Tada propozicija 3.3.2 povlači da je f izračunljiva funkcija. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo da je $(f(k), f(k+1)) \in \Gamma$ i stoga je

$$\mathcal{H}_{f(k+1)} \leq \mathcal{H}_{f(k)}, \quad J_{(f(k+1))_0} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(f(k))_0}, \quad J_{(f(k+1))_{\overline{f(k+1)}}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(f(k))_{\overline{f(k)}}} \tag{3.43}$$

te je $\mathrm{fmesh}(f(k+1)) < \frac{1}{2}\,\mathrm{fmesh}(f(k))$. Budući je $\mathrm{fmesh}(f(0)) = \mathrm{fmesh}(l) < r < 1$, dobivamo da je

$$\mathrm{fmesh}(f(k)) < 2^{-k},$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Za $k \in \mathbb{N}$ neka su $m_k \in \mathbb{N}$ i $C_0^k, \ldots, C_{m_k}^k$ takvi da je

$$\mathcal{H}_{f(k)} = (C_0^k, \ldots, C_{m_k}^k).$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo da je $\mathrm{mesh}\,\mathcal{H}_{f(k)} < 2^{-k}$. Iz relacije (3.43), te propozicije 3.4.5, vrijedi sljedeće:

a) $(\mathrm{Cl}(C_0^{k+1}), \ldots, \mathrm{Cl}(C_{m_{k+1}}^{k+1}))$ profinjuje $(C_0^k, \ldots, C_{m_k}^k)$,

b) $\mathrm{Cl}(C_0^{k+1}) \subseteq C_0^k$,

c) $\mathrm{Cl}(C_{m_{k+1}}^{k+1})) \subseteq C_{m_k}^k$.

Prema relaciji (3.42) imamo da je

$$\left((C_0^k \cap S, \ldots, C_{m_k}^k \cap S)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

niz otvorenih jednostavnih lanaca u S. Kako je S kompaktan, to imamo da su zatvorene kugle u S također kompaktne. Stoga sada lema 41 u [8] povlači da je skup K definiran s:

$$K := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{Cl}(C_0^k \cap S) \cup \cdots \cup \mathrm{Cl}(C_{m_k}^k \cap S)\right), \tag{3.44}$$

kontinuum u S koji je lančast od točke a' do točke b', gdje je $a' \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(C_0^k \cap S)$ i $b' \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(C_{m_k}^k \cap S)$.

Dakle, imamo da je $a' \in J_{(f(k))_0}$, $b' \in J_{(f(k))_{\overline{f(k)}}}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga zaključujemo (koristeći funkciju g iz dokaza leme 3.4.6) da su a' i b' izračunljive točke. S druge strane, za svaki $k \in \mathbb{N}$ iz relacije (3.44) imamo da je $K \subseteq \mathcal{H}_{f(k)}$, i kako je K povezan skup, te prva i zadnja karika lanca $\mathcal{H}_{f(k)}$ sijeku K (u točkama a' i b'), zaključujemo da svaka karika navedenog lanca mora sijeći skup K. Stoga je K izračunljiv (vidi lemu 6.6 u [14]).

Ostaje nam još pokazati da je $d(a, a') < \varepsilon$ te da je $d(b, b') < \varepsilon$. Imamo da je $a' \in J_{(f(0))_0} = J_{(l)_0}$ i da je $\mathrm{diam}\, J_{(l)_0} < r$, jer je $\mathrm{fmesh}(l) < r$ (vidi relaciju (3.40)). Nadalje, prema relaciji (3.40), imamo da je $d(a, J_{(l)_0}) < 3r$ i stoga zaključujemo da je $d(a, a') < 4r$. Dakle, zaista je $d(a, a') < \varepsilon$. Analogno dobivamo da je i $d(b, b') < \varepsilon$. □

Sljedeći rezultat jest direktna posljedica teorema 3.4.7 (vidi također korolar 43 u [8]).

Korolar 3.4.8. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je S poluizračunljiv luk u (X, d, α). Tada za sve $a, b \in S$, te svaki $\varepsilon > 0$, postoje različite izračunljive točke $a', b' \in S$ takve da je $d(a, a') < \varepsilon$, $d(b, b') < \varepsilon$, i takve da je podluk od S koji je određen točkama a' i b' izračunljiv.*

Poznato je općenito da poluizračunljiv lančasti kontinuum ne treba biti izračunljiv. Štoviše, postoji poluizračunljiv luk u $\mathbb{R}$ koji nije izračunljiv (vidi [19]). Ipak, poluizračunljiv luk uvijek sadrži izračunljivu točku. Zapravo, izračunljive točke su guste u njemu (vidi korolar 3.4.8). Ta činjenica također vrijedi i za proizvoljan poluizračunljiv lančasti kontinuum koji je dekompozabilan. Ova posljednja tvrdnja posljedica je sljedećeg teorema i zapravo je taj rezultat glavni rezultat ovog poglavlja. On je posljedica teorema 3.4.7 i može se dokazati na potpuno analogan način kao teorem 44 u [8].

Teorem 3.4.9. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je S poluizračunljiv skup u (X, d, α). Nadalje, pretpostavimo da je S dekompozabilan lančasti kontinuum. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izračunljiv potkontinuum K od S takav da je $\rho(S, K) < \varepsilon$. Štoviše, K možemo odabrati tako da bude lančast od točke a do točke b, gdje su a i b izračunljive točke.*

Neka je X topološki prostor te neka je C komponenta povezanosti od X. Tada je C zatvoren skup u X (vidi [6]). Ukoliko je C također i otvoren skup, onda kažemo da je C **izolirana komponenta povezanosti** od X.

Ukoliko je X kompaktan topološki prostor, onda je svaka komponenta povezanosti od X također i kontinuum (dekompozabilan ili indekompozabilan).

Teorem 3.4.10. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ co-c.e. skup te neka je $K \subseteq X$ poluizračunljiv lančasti kontinuum. Nadalje, pretpostavimo da $K \cap S$ ima izoliranu dekompozabilnu komponentu povezanosti C. Tada C sadrži izračunljivu točku. Štoviše, C se može aproksimirati po volji dobro izračunljivim potkontinuumom (posebno su stoga izračunljive točke guste u C).*

Dokaz. Kako je C po pretpostavci teorema izolirana komponenta povezanosti, imamo da su C i $(K \cap S) \setminus C$ zatvoreni u $K \cap S$. Stoga su navedeni skupovi i kompaktni u (X, d). Slijedi da postoji neki $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(K \cap S) \setminus C \subseteq J_j \quad \text{i} \quad J_j \cap C = \emptyset.$$

To nam povlači sljedeće:

$$C = (K \cap S) \setminus J_j. \tag{3.45}$$

Poznato je da ukoliko je T poluizračunljiv skup, onda je i $T \setminus J_j$ također poluizračunljiv (vidi lemu 3.3 u [12]). Stoga nam relacija (3.45) i propozicija 3.4.2 povlače da je C poluizračunljiv skup u (X, d, α). Kao potkontinuum od K, C je lančast. Sada nam tvrdnja teorema slijedi iz teorema 3.4.9. □

Posebno nam prethodni teorem kaže da ukoliko je S co-c.e. skup i K poluizračunljiv lančasti kontinuum te ukoliko je skup $K \cap S$ dekompozabilan kontinuum, onda $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

Uočimo da je teorem 3.4.9 poopćenje tvrdnje (1). Pokažimo sada da se i tvrdnja (2) može poopćiti na proizvoljan izračunljiv metrički prostor. Štoviše, pokazat ćemo da analogna generalizacija vrijedi i za cirkularno lančaste kontinuume.

Neka je X proizvoljan skup te neka su $C_0, \dots, C_m$ neprazni podskupovi od X. Kažemo da je konačan niz $C_0, \dots, C_m$ **cirkularni lanac** u X ako za sve $i, j \in \{0, \dots, m\}$ vrijedi sljedeće:

$$1 < |i - j| < m \implies C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Uočimo da je cirkularni lanac $C_0, \dots, C_m$ lanac ako i samo ako je $C_0 \cap C_m = \emptyset$. Također uočimo sljedeće: ako je $C_0, \dots, C_m$ cirkularni lanac (gdje je $m \geq 1$) i ako je $i \in \{0, \dots, m\}$, onda je $C_{i+1}, \dots, C_m, C_0, \dots, C_{i-1}$ lanac.

Za konačan niz podskupova od X $C_0, \dots, C_m$ kažemo da je **jednostavan cirkularni lanac** u X ukoliko vrijedi:

$$1 < |i - j| < m \iff C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \forall\, i, j \in \{0, \dots, m\}.$$

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\varepsilon > 0$. Tada se pojmovi (jednostavnog) cirkularnog ε-lanca, kompaktnog (jednostavnog) cirkularnog lanca i otvorenog (jednostavnog) cirkularnog lanca definiraju potpuno analogno kao i u slučaju za lance.

Za kontinuum (X, d) kažemo da je **cirkularno lančast** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neki otvoren jednostavan cirkularni ε-lanac u (X, d) koji pokriva X (vidi [3, 21]).

Iduća propozicija koju navodimo se može dokazati potpuno analogno kao i propozicija 3.1.2.

Propozicija 3.4.11. *Neka je (X, d) kontinuum. Tada je (X, d) cirkularno lančast ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neki kompaktan jednostavan cirkularan ε-lanac u (X, d) koji pokriva X.*

Primijetimo da je jedinična kružnica $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ primjer cirkularno lančastog kontinuuma. Štoviše, svaka topološka kružnica (to jest prostor koji je homeomorfan sa S^1) je očito također cirkularno lančasti kontinuum (vidi primjer 3.3 u [9]).

Ukoliko je S poluizračunljiva topološka kružnica u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), onda je nužno S izračunljiv skup (vidi [12, 19]). Postavlja se stoga sljedeće pitanje: vrijedi li također takva tvrdnja ako pretpostavimo da je S proizvoljan cirkularno lančasti kontinuum, odnosno mora li proizvoljan poluizračunljiv cirkularno lančasti kontinuum nužno biti i izračunljiv? Članci [8, 11] nam pokazuju da je odgovor na prethodno postavljeno pitanje potvrdan ukoliko dodatno pretpostavimo da je (X, d, α) lokalno izračunljiv metrički prostor, te ukoliko pretpostavimo da skup S nije lančast. Ova pretpostavka da nam skup S nije lančast se može na prvi pogled učiniti dosta čudnom, no poznato je da postoje kontinuumi koji su istodobno i cirkularno lančasti i lančasti (vidi [3, 21]). Ipak, takva se situacija pojavljuje za takozvane ,,neobične" prostore. Naime (vidi [3]), lančasti kontinuum K je ujedno i cirkularno lančast ako i samo ako je K indekompozabilan ili 2-indekompozabilan. Da je kontinuum K **2-indekompozabilan** naprosto znači da je dekompozabilan i da ne postoje potkontinuumi K_1, K_2 i K_3 od K koji u uniji daju čitav K i takvi da vrijedi $K_1 \nsubseteq K_2 \cup K_3$, $K_2 \nsubseteq K_1 \cup K_3$ i $K_3 \nsubseteq K_1 \cup K_2$.

Naš je cilj sada pokazati da se pretpostavka lokalne izračunljvosti koja je zadana na izračunljiv metrički prostor (X, d, α) može izostaviti. Dokazat ćemo da tvrdnja

(2) također vrijedi u bilo kojem izračunljivom metričkom prostoru (prisjetimo se da poluizračunljiv lančasti kontinuum ne treba biti i izračunljiv).

Teorem 3.4.12. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup.*

(i) Ukoliko je S lančast od točke a do točke b, gdje su a i b izračunljive točke, onda je S izračunljiv skup.

(ii) Ukoliko je S cirkularno lančast, ali nije lančast, onda je S izračunljiv.

Dokaz. (i) Neka je Ω skup svih $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi sljedeće:

a) $\mathcal{H}_l$ pokriva S,
b) $\mathcal{H}_l$ je formalni lanac,
c) $a \in J_{(l)_0}$, $b \in J_{(l)_{\bar{l}}}$,
d) $\text{fdiam}(l) < 2^{-k}$.

Prema propoziciji 5.3 u [12] te prema propozicijama 3.2.5, 3.2.1, 1.3.3 i 1.1.5 skup Ω je izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Koristeći propoziciju 3.1.2, propoziciju 3.2.9 te lemu 3.2.10 zaključujemo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, l) \in \Omega$. Stoga prema propoziciji 1.1.2(ii) postoji neka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, f(k)) \in \Omega \tag{3.46}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Relacija (3.46) nam povlači da je $\mathcal{H}_{f(k)}$ lanac koji pokriva S i takav da njegova prva i zadnja karika sijeku skup S. Kako je skup S povezan to imamo da svaka karika lanca $\mathcal{H}_{f(k)}$ nužno mora sijeći S. Nadalje, $\text{fdiam}(f(k)) < 2^{-k}$. Ovo nam, zajedno sa lemom 3.4.6, daje da je skup S izračunljiv.

(ii) Neka je $l \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathcal{H}_l$ formalni cirkularni lanac ako za sve $i, j \in \{0, \ldots, \bar{l}\}$ vrijedi sljedeće:

$$1 < |i - j| < \bar{l} \implies J_{(l)_i} \text{ i } J_{(l)_j} \text{ su formalno disjunktni.}$$

Koristeći propoziciju 3.2.5 te propoziciju 1.3.1 nije teško zaključiti da je skup

$$\{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalni cirkularni lanac}\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ (za detalje vidi propoziciju 32 u [8]). Nadalje, koristeći propoziciju 3.4.11, propoziciju 3.2.9 te lemu 3.2.10, možemo zaključiti da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{H}_l$ formalni cirkularni lanac koji pokriva S i takav da je $\text{fdiam}(l) < \varepsilon$.

Kako po pretpostavci S nije lančast, to nam propozicija 3.1.3 povlači da postoji neki $k_0 \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: ne postoji otvoreni 2^{-k_0}-lanac u S koji pokriva S.

Neka je Ω skup svih $(k,l) \in \mathbb{N}$ takvih da vrijedi sljedeće:

$a)$ $\mathcal{H}_l$ pokriva S,
$b)$ $\mathcal{H}_l$ je formalni cirkularni lanac,
$c)$ $\text{fdiam}(l) < 2^{-(k+k_0)}$.

Tada je Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ i za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $(k,l) \in \Omega$. Stoga, prema propoziciji 1.1.2(ii), postoji neka izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, f(k)) \in \Omega$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Imamo da je $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_{f(k)}$ i $\text{fdiam}(f(k)) < 2^{-k}$. Prema lemi 3.4.6 biti će dovoljno pokazati da svaka karika od $\mathcal{H}_{f(k)}$ siječe skup S. Imamo:

$$\mathcal{H}_{f(k)} = (C_0, \dots, C_m).$$

Uočimo da su $C_0, \dots, C_m$ otvoreni skupovi u (X,d) dijametra manjeg od $2^{-(k+k_0)}$, posebno dijametra manjeg od 2^{-k_0}. Pretpostavimo da postoji neki $i \in \{0, \dots, m\}$ takav da je $S \cap C_i = \emptyset$. Tada je $C_{i+1}, \dots, C_m, C_0, \dots, C_{i-1}$ lanac koji pokriva S. Promatrajmo sljedeći konačni niz skupova

$$C_{i+1} \cap S, \dots, C_m \cap S, C_0 \cap S, \dots, C_{i-1} \cap S.$$

Ovi su skupovi otvoreni u S i ukoliko iz promatranog niza uklonimo one skupove koji su prazni dobit ćemo otvoreni 2^{-k_0}-lanac u S koji pokriva S. Ali to je kontradikcija s izborom broja k_0.

Dakle svaka karika od $\mathcal{H}_{f(k)}$ nužno siječe S i ovime je teorem u potpunosti dokazan. $\square$

Uočimo da nam teoremi 3.4.7 i 3.4.9 daju izvjesne uvjete pod kojima poluizračunljiv lančasti kontinuum sadrži u sebi izračunljiv potkontinuum. Tehnika koju smo koristili u dokazu teorema 3.4.7 se može prilagoditi za dokaz sljedećeg rezultata koji će nam također dati neke dovoljne uvjete za egzistenciju izračunljivog potkontinuuma.

Teorem 3.4.13. *Neka je (X,d,α) izračunljiv metrički prostor i neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv lančasti kontinuum. Pretpostavimo da su $a, b \in S$ izračunljive točke, te da je $a \neq b$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje izračunljive točke $a', b' \in S$ takve da je $d(a,a') < \varepsilon$, $d(b,b') < \varepsilon$ te postoji izračunljiv potkontinuum K od S koji je lančast od točke a' do točke b'.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je Ω' skup svih $(p,l,q) \in \mathbb{N}^3$ takvih da vrijedi sljedeće:

$$S \subseteq J_p \cup (\bigcup \mathcal{H}_l) \cup J_q, \quad (p,l,q) \text{ je formalni lanac}, \quad a \in J_p \text{ i } b \in J_q.$$

Kao i u dokazu teorema 3.4.7 zaključujemo da je Ω' izračunljivo prebrojiv skup. Neka je Ω skup svih $l \in \mathbb{N}$ za koji postoje $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je $(p,l,q) \in \Omega'$. Tvrdimo da postoji neki $l_0 \in \Omega$ takav da je $\text{fdiam}(l_0) < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$, $d(a, J_{(l_0)_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $d(b, J_{(l_0)_{\overline{l_0}}}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Neka je $r := \frac{1}{2}\min\{d(a,b), 1, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Neka je $D_0, \dots, D_m$ kompaktan jednostavan r-lanac u S koji pokriva S. Postoje $i, j \in \{0, \dots, m\}$ takvi da je $a \in D_i$ i $b \in D_j$. Možemo pretpostaviti da je $i \leq j$ (u protivnom samo promatramo lanac $D_m, \dots, D_0$). Uočimo da je $i \neq j$ te da je $i + 1 \neq j$ (inače bismo imali da je $d(a,b) < 2r$ što je u suprotnosti sa izborom broja r). Dakle, zaista je $i+1 < j$. Promatrajmo kompaktan lanac

$$D_0 \cup \cdots \cup D_i, D_{i+1}, \dots, D_{j-1}, D_j \cup \cdots \cup D_m.$$

Kao i u dokazu teorema 3.4.7 dolazimo do brojeva $p, l_0, q \in \mathbb{N}$ takvih da je (p, l_0, q) formalni lanac, $D_0 \cup \cdots \cup D_i \subseteq J_p$, $D_{i+1}, \dots, D_{j-1}$ su sadržani u $J_{(l_0)_0}, \dots, J_{(l_0)_{\overline{l_0}}}$ redom, $D_j \cup \cdots \cup D_m \subseteq J_q$ i $\operatorname{fdiam}(l_0) < 2r$. Dakle $(p, l_0, q) \in \Omega'$. Stoga je $l_0 \in \Omega$ i vrijedi da je $\operatorname{fdiam}(l_0) < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Kako je $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, imamo da je $d(a, D_{i+1}) < r \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Stoga je i $d(a, J_{(l_0)_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Također, vrijedi da je $d(b, J_{(l_0)_{\overline{l_0}}}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Neka je Γ skup svih $(l, l') \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijedi sljedeće:

$$l, l' \in \Omega, \quad \mathcal{H}_{l'} \leq \mathcal{H}_l, \quad \operatorname{fdiam}(l') < \frac{1}{2}\operatorname{fdiam}(l), \quad J_{(l')_0} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_0} \;\text{ i }\; J_{(l')_{\overline{l'}}} \subseteq_{\mathrm{F}} J_{(l)_{\overline{l}}}.$$

Neka je $l \in \Omega$. Tvrdimo da postoji neki $l' \in \Omega$ takav da je $(l, l') \in \Gamma$.

Neka je $\lambda > 0$ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača $\left\{J_p, J_{(l)_0}, \dots, J_{(l)_{\overline{l}}}, J_q\right\}$ za S. Postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je $B(a, r_1) \subseteq J_p$ i $B(b, r_2) \subseteq J_q$. Stavimo

$$r := \min\left\{\lambda, \frac{\operatorname{fmesh}(l)}{4}, \frac{d(a,b)}{2}, r_1, r_2\right\},$$

te uzmimo kompaktan jednostavan r-lanac $D_0, \dots, D_m$ u S koji pokriva S. Odaberimo $i, j \in \{0, \dots, m\}$ takve da je $a \in D_i$ i $b \in D_j$. Možemo pretpostaviti da je $i + 1 < j$. Kako je $\operatorname{diam} D_i < r$ i $B(a, r) \subseteq J_p$, imamo da je $D_i \subseteq J_p$. Slično dobivamo da je i $D_j \subseteq J_q$. Nastavljamo dalje kao i u dokazu teorema 3.4.7. Koristeći lemu 3.1.8 dolazimo do brojeva $v, w \in \{0, \dots, m\}$ takvih da vrijedi

$$i < v \leq w < j, \; D_v \subseteq J_{(l)_0}, \; D_w \subseteq J_{(l)_{\overline{l}}} \text{ i } D_v, \dots, D_w \text{ profinjuje } \mathcal{H}_l.$$

Iz ovoga zaključujemo da postoji neki $l' \in \Omega$ takav da je $(l, l') \in \Gamma$.

Stoga postoji izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $f(0) = l_0$ i takva da je $(f(k), f(k+1)) \in \Gamma$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Uočimo da nam sama definicija skupa Ω' povlači da je za svaki $l \in \Omega$

$$J_{(l)_0} \cap S, \dots, J_{(l)_{\overline{l}}} \cap S$$

jednostavan lanac. Sada, kao i u dokazu teorema 3.4.7 zaključujemo da je

$$K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\operatorname{Cl}(J_{(f(k))_0} \cap S) \cup \cdots \cup \operatorname{Cl}(J_{(f(k))_{\overline{f(k)}}} \cap S)\right)$$

izračunljiv potkontinuum od S koji je lančast od točke a' do točke b', gdje su a' i b' izračunljive točke takve da je $a' \in J_{(l_0)_0}$ i $b' \in J_{(l_0)_{\overline{l_0}}}$. Odavde jednostavno slijedi da je $d(a, a') < \varepsilon$ te da je $d(b, b') < \varepsilon$. $\square$

Koristeći teorem 3.4.13 i korolar 3.4.8 dolazimo do općenitijih tvrdnji od onih koje smo dokazali u teoremu 3.3.3 i teoremu 3.3.4.

Teorem 3.4.14. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su U i V disjunktni c.e. otvoreni skupovi u (X, d, α). Stavimo*

$$S := X \setminus (U \cup V).$$

(i) Pretpostavimo da je $K \subseteq X$ poluizračunljiv lančasti kontinuum takav da je $K \cap S$ potpuno nepovezan te takav da K siječe i U i V u izračunljivim točkama. Tada $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

(ii) Pretpostavimo da je $K \subseteq X$ izračunljiv lančasti kontinuum takav da je $K \cap S$ potpuno nepovezan te takav da K siječe U i V. Tada $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

(iii) Pretpostavimo da je $A \subseteq X$ poluizračunljiv luk takav da A siječe U i V. Onda $A \cap S$ sadrži izračunljivu točku.

Dokaz. (i) Neka su $a \in K \cap U$ i $b \in K \cap V$ izračunljive točke. Koristeći teorem 3.4.13 zaključujemo da postoje $a' \in U$ te $b' \in V$ i izračunljiv potkontinuum K' od K koji je lančast od točke a' do točke b'. Kako je $K' \cap S \subseteq K \cap S$, imamo da je i $K' \cap S$ potpuno nepovezan te prema teoremu 3.3.3 nužno slijedi da $K' \cap S$ sadrži izračunljivu točku. Stoga i $K \cap S$ također sadrži izračunljivu točku.

(ii) Kako je K izračunljiv, to su izračunljive točke guste u skupu K (vidi uvodno poglavlje u [11]). Stoga K siječe U i V u izračunljivim točkama. Zaključujemo dakle da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku prema teoremu 3.3.3.

(iii) Kako A siječe skupove U i V to postoji neka točka $a \in A \cap U$ te neka točka $b \in A \cap V$. Budući su po pretpostavci skupovi U i V otvoreni to postoje $\varepsilon_1 > 0$ i $\varepsilon_2 > 0$ takvi da je

$$B(a, \varepsilon_1) \subseteq U \quad \text{i} \quad B(b, \varepsilon_2) \subseteq V.$$

Neka je $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tada iz korolara 3.4.8 slijedi da postoje izračunljive točke $a', b' \in A$ takve da je $d(a, a') < \varepsilon$, $d(b, b') < \varepsilon$ te postoji izračunljiv podluk A' od A čije su krajnje točke a' i b'. Kako je $d(a, a') < \varepsilon$ te $d(b, b') < \varepsilon$ to odmah imamo da je točka $a' \in U$ i točka $b' \in V$. Sada nam teorem 3.3.4 povlači da skup $A' \cap S$ sadrži izračunljivu točku. Stoga i skup $A \cap S$ sadrži izračunljivu točku, što je i trebalo pokazati. □

Ovim rezultatom zaključit ćemo ovo poglavlje. U nastavku ćemo se ukratko osvrnuti na neka otvorena pitanja koja su se prirodno pojavila kroz teoreme koje smo prezentirali kroz cjelokupno poglavlje.

3.5. Neka otvorena pitanja

Središnje pitanje ovog poglavlja bilo je treba li izračunljiv luk K čije krajnje točke leže u disjunktnim c.e. otvorenim skupovima U i V (jasno u nekom izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α)) siječi komplement $S = X \setminus (U \cup V)$ u izračunljivoj točki. Budući su lančasti kontinuumi prirodno poopćenje lukova, mi smo se koncentrirali na slučaj kada je skup K lančasti kontinuum te smo tražili neke uvjete uz koje bi skup $K \cap S$ sadržavao izračunljivu točku.

Jedan od glavnih rezultat u ovom ovom dijelu doktorske disertacije (poglavlje 3.) bio je da $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko pretpostavimo da K siječe U i V te ukoliko pretpostavimo da je $K \cap S$ potpuno nepovezan. Ukoliko se okrenemo osnovnom slučaju kada je A izračunljiv luk te pretpostavimo da je $A \cap S \neq \emptyset$, onda znamo da $A \cap S$ ne treba sadržavati izračunljivu točku (vidi primjer 1 u [14]). No, ovakva se situacija može dogoditi jedino ukoliko je $A \cap S$ potpuno nepovezan. Stoga je potpuna nepovezanost jedini problem da izračunljiv luk A siječe S u izračunljivoj točki (ukoliko A ne siječe i U i V). Zanimljivo je da se pretpostavka potpune nepovezanosti upravo nametnula kao ključna pretpostavka koju trebamo da bismo dokazali da lančasti kontinuum K koji siječe U i V mora siječi S u izračunljivoj točki i nije jasno što se može zaključiti ukoliko uklonimo tu pretpostavku.

Ukoliko je K luk, onda smo vidjeli da se pretpostavka potpune nepovezanosti skupa $K \cap S$ može naprosto odbaciti, ali možemo li to isto napraviti i u slučaju općenitih lančastih kontinuuma? Stoga se nameće sljedeće otvoreno pitanje: vrijede li tvrdnje teorema 3.3.3 i teorema 3.4.14 ((i) i (ii)) bez dodatne pretpostavke da je skup $K \cap S$ potpuno nepovezan?

Izazov koji se javlja pri proučavanju općenitog lančastog kontinuuma K je taj da povezani podskupovi od K koji sadrže barem dvije točke mogu imati prazne interiore u K (što jasno nije bio slučaj kada smo pretpostavili da je K luk). Ipak, postoje neki uvjeti koji nam omogućavaju da zaključimo da potkontinuum od K sadrži izračunljivu točku. Kako smo imali da je $K \cap S$ poluizračunljiv skup i kako je svaki potkontinuum lančastog kontinuuma i sam lančast, prirodno smo se pitali što se može kazati o izračunljivim točkama u poluizračunljivim lančastim kontinuumima.

Pokazali smo da poluizračunljiv lančasti kontinuum L možemo po volji dobro aproksimirati izračunljivim potkontinuumom (što nam posebno znači da L sadrži izračunljivu točku), ali uz pretpostavku da je L dekompozabilan. To nam povlači da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku ukoliko je $K \cap S$ povezan i dekompozabilane (i općenitije, ukoliko $K \cap S$ ima izoliranu i dekompozabilnu komponentu povezanosti).

Kao što vidimo, u ovim razmatranjima smo koristili neke dodatne pretpostavke te je svakako bitno pitanje koje su od tih pretpostavki zaista nužne. Jedno od temeljnih otvorenih pitanja jest sljedeće: vrijedi li tvrdnja teorema 3.4.9 bez pretpostavke da je lančasti kontinuum dekompozabilan?

Možemo se ovdje pitati čak i elementarnije otvoreno pitanje: ukoliko je L poluizračunljiv lančasti kontinuum mora li onda L sadržavati izračunljivu točku? Ako pretpostavimo da je L dekompozabilan, onda znamo da su izračunljive točke guste u L, štoviše L je ,,skoro izračunljiv" (u smislu teorema 3.4.9). S druge pak strane, indekompozabilni kontinuumi su sami po sebi veoma neobični, pa primjer indekompozabilnog lančastog kontinuuma koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku ne bi bio iznenađujući (povezano s time vidi [18]).

Kako je svaki indekompozabilan lančasti kontinuum ujedno i cirkularno lančast (vidi [3]), u kontekstu teorema 3.4.12(ii) svakako se ima smisla pitati sljedeće: treba li poluizračunljiv indekompozabilan lančasti kontinuum biti izračunljiv? Još direktnije otvoreno pitanje koje si možemo ovdje postaviti jest: da li je svaki poluizračunljiv cirkularno lančasti kontinuum ujedno i izračunljiv?

Ako želimo razmišljati o protuprimjeru za tvrdnju teorema 3.3.3 u kojem bi pretpostavili da je $K \cap S$ povezan, onda skup $K \cap S$ nužno mora biti indekompozabilan kontinuum.

Istaknimo ovdje, za kraj ovog poglavlja, da izračunljiv lančasti kontinuum K u ravnini $\mathbb{R}^2$ koji siječe donju i gornju poluravninu nužno mora sijeći skup $S = \mathbb{R} \times \{0\}$ u izračunljivoj točki (bez dodatne pretpostavke da je $K \cap S$ potpuno nepovezan). Naime, ta činjenica nam sada slijedi iz teorema 3.4.14(ii) i činjenice da su izračunljive točke guste u skupu S te činjenice da netrivijalni povezan podskup od S nužno ima neprazan interior u S.

Poglavlje 4.

Varšavski disk i poluizračunljivost

Za početak ćemo ukratko opisati predmet proučavanja u ovom poglavlju. Općenito, želimo istraživati (pronaći) neke uvjete koji bi nam omogućili da poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru postane izračunljiv. Pri samom opisu tih uvjeta topologija može igrati važnu ulogu. Poznato je da postoji poluizračunljiv skup u $\mathbb{R}$ koji ne sadrži niti jednu izračunljivu točku (vidi primjer 2.6 u [9]). Dakle, poluizračunljivi skupovi mogu biti veoma daleko od toga da budu izračunljivi. Stoga je istraživanje uvjeta uz koje poluizračunljivi skupovi postaju izračunljivi općenito važno za područje izračunljive analize. Možemo uočiti da ovo poglavlje predstavlja svojevrsni nastavak prethodnog poglavlja 3., to jest posebno nastavak potpoglavlja 3.4..

Važan doprinos u istraživanju uvjeta koji nam omogućavaju da implikacija

$$S \text{ poluizračunljiv} \implies S \text{ izračunljiv} \tag{4.1}$$

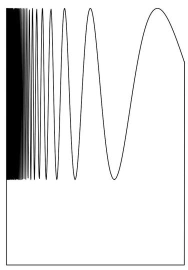
bude istinita, dao je Miller (vidi [19]) pokazavši da implikacija (4.1) vrijedi ukoliko je S topološka sfera. Poslije, se pokazalo (vidi [10]) da ovaj rezultat ne vrijedi samo ukoliko za ambijentni prostor uzmemo izračunljiv euklidski prostor, već i u općenitim izračunljivim metričkim prostorima. Općeniti rezultat je dokazan u [12] koji kaže da implikacija (4.1) vrijedi u proizvoljnom izračunljivom metričkom prostoru ukoliko pretpostavimo da je skup S kompaktna mnogostrukost.

No, s druge strane, ukoliko je S luk, onda implikacija (4.1) ne treba biti istinita. Štoviše, nije istinita čak ni u slučaju kada za S uzmemo segment u $\mathbb{R}$ (vidi [19]). Ali ako pretpostavimo da je S luk s izračunljivim krajnjim točkama, onda implikacija (4.1) vrijedi. Općenitije, ukoliko je S ćelija čija je rubna sfera izračunljiv skup, onda implikacija (4.1) vrijedi (vidi [19, 10]). Pod pojmom n-ćelije podrazumijevamo skup koji je homeomorfan sa $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$. Zapravo, implikacija (4.1) vrijedi kad god je S kompaktna mnogostrukost s rubom uz uvjet da je ∂S izračunljiv skup (vidi [12]). Stoga, ukoliko je S poluizračunljiva kompaktna mnogostrukost s rubom, onda vrijedi sljedeća implikacija:

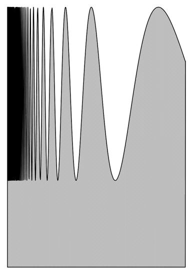
$$\partial S \text{ izračunljiv} \implies S \text{ izračunljiv}. \tag{4.2}$$

Dakle, ako pretpostavimo da je S poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) te ukoliko je S topološki 2-disk ($S \cong \mathbb{B}^2$) i ako pretpostavimo da je rub, to jest topološka kružnica od S izračunljiv skup, onda je S izračunljiv skup jer na S možemo gledati kao na poluizračunljivu 2-mnogostrukost s izračunljivim rubom.

Ovaj nas rezultat motivira da promatramo sljedeću situaciju. Pretpostavimo da je S poluizračunljiv skup koji je homeomorfan varšavskom disku te pretpostavimo da je ,,rub" od S, to jest varšavska kružnica od S, izračunljiv skup. Treba li tada skup S biti izračunljiv? Pod pojmom varšavskog diska (vidi [21]) podrazumijevamo područje ravnine koje je omeđeno s varšavskom kružnicom (zajedno s varšavskom kružnicom). Slika 2 nam opisuje varšavsku kružnicu, a slika 3 varšavski disk. Štoviše, mi ćemo pod pojmom varšavskog diska podrazumijevati bilo koji prostor koji je homeomorfan sa standardnim varšavskim diskom (u ravnini $\mathbb{R}^2$).



Slika 2.



Slika 3.

Iako nam na prvi pogled varšavska kružnica izgleda slično kao topološka kružnica, varšavska se kružnica bitno razlikuje od same topološke kružnice. Također, iako nam se može učiniti sličnim, varšavski se disk razlikuje od topološkog 2-diska jer varšavski disk nije mnogostrukost.

Poznato je da poluizračunljiv kontinuum S koji je lančast od točke a do točke b, gdje su a i b izračunljive točke nužno mora biti i izračunljiv (vidi [8, 14]). Stoga se ima smisla pitati uz koje uvjete implikacija (4.2) vrijedi čak i za skupove koji nisu mnogostrukosti (s rubom). Ukoliko nam S nije mnogostrukost, ali na neki način sliči na mnogostrukost, onda možemo izvjestan potprostor od S prozvati njegovim rubom te se u tom kontekstu ima smisla pitati vrijedi li implikacija (4.2) i za takvu klasu skupova. U ovom poglavlju ćemo se koncentrirati na slučaj kada je S varšavski disk, a ∂S njegova rubna varšavska kružnica.

Glavni rezultat ovog dijela doktorske disertacije biti će pokazati da u proizvoljnom izračunljivom metričkom prostoru implikacija (4.2) vrijedi ukoliko pretpostavimo da je S varšavski disk, a ∂S njegova rubna varšavska kružnica.

Ideja koja će se prožimati kroz dokaz glavnog rezultata sastojat će se u tome da aproksimiramo varšavski disk s 2-ćelijom te da pokušamo prilagoditi, za naše potrebe, neke tehnike koje su razvijene u radu [10].

Ovo poglavlje, zajedno s glavnim rezultatom kojeg ćemo prezentirati, te tehnikama koje ćemo razviti da bismo dokazali glavni rezultat, trebali bi pridonijeti boljem razumijevanju odnosa koji se neminovno javlja između topologije i izračunljivosti. Štoviše, kroz ovo poglavlje cilj nam je također bolje shvatiti važnost takozvanog ,,rubnog" uvjeta (u kontekstu implikacije (4.2)).

4.1. Neke preliminarne oznake

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kao i do sada, i u ovm poglavlju ćemo za formalnu disjunktnost koristit oznaku $-\diamond-$. Ovime naglašavamo da je formalna disjunktnost relacija među brojevima, a ne među skupovima. Dakle, ukoliko su I_i i I_j formalno disjunktni, onda ćemo pisati $I_i \diamond I_j$. Također uočimo da ukoliko je $I_i \diamond I_j$, onda je i $\mathrm{Cl}(I_i) \cap \mathrm{Cl}(I_j) = \emptyset$.

Nadalje, potpuno analogno, ukoliko su J_i i J_j formalno disjunktni, onda pišemo $J_i \diamond J_j$. Očito je da $J_i \diamond J_j$ povlači da je $\mathrm{Cl}(J_i) \cap \mathrm{Cl}(J_j) = \emptyset$.

Neka je $A \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$ te $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. U ovom poglavlju, kao i u prethodnom, koristimo oznaku $A \subseteq_\lambda J_j$ ukoliko vrijedi sljedeće:

$$A \subseteq J_j \text{ i } (I_i \cap A \neq \emptyset \text{ te } \rho_i < \lambda \text{ za svaki } i \in [j]).$$

Uočimo da nam $A \subseteq_\lambda J_j$ i $\lambda \leq \lambda'$ povlači da je $A \subseteq_{\lambda'} J_j$.

Vrijedi sljedeća lema (vidi lemu 4.6, lemu 4.7 i lemu 4.8 u [5]).

Lema 4.1.1. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor.*

(1) Ako su A i B neprazni, disjunktni te kompaktni skupovi u (X, d), onda postoji neki $\lambda > 0$ takav da za sve $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, te $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$A' \subseteq_\lambda J_{j_1} \text{ i } B' \subseteq_\lambda J_{j_2} \Longrightarrow J_{j_1} \diamond J_{j_2}.$$

(2) Ako su $A_1, \dots, A_n$ neprazni kompaktni skupovi u (X, d) i ako je $r > 0$, onda postoje neki $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$A_1 \subseteq_r J_{j_1} \ \dots, \ A_n \subseteq_r J_{j_n},$$

i takvi da za sve $p, q \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi sljedeće:

$$A_p \cap A_q = \emptyset \implies J_{j_p} \diamond J_{j_q}.$$

(3) Ako su $A \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$, te $\lambda > 0$, takvi da je $A \subseteq_\lambda J_j$, onda je

$$\mathrm{fdiam}(j) < 4\lambda + \mathrm{diam}\, A.$$

Primijetimo da je tvrdnja prethodne leme 4.1.1(3) ista kao i tvrdnja leme 3.2.10, koja je dokazana u prethodnom poglavlju (vidi poglavlje 3.). Ovdje tu tvrdnju još jednom ponavljamo, više zbog potpunosti te želje da čitatelju ove disertacije bude lakše pratiti materiju koja slijedi u nastavku.

4.2. Varšavski disk i 2-lanci

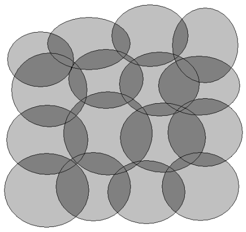
Neka je $m \in \mathbb{N}$. Kao i u uvodnom poglavlju stavimo $\mathbb{N}_m = \{0, \dots, m\}$ te definirajmo $\mathbb{N}_m^2 := \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m$. Za $a, b \in \mathbb{N}_m^2$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, neka je

$$\rho(a, b) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \tag{4.3}$$

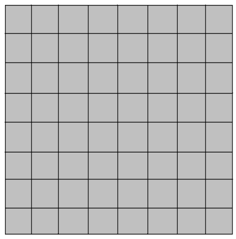
Neka je X skup, te neka je $m \in \mathbb{N}$. Za funkciju $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ kažemo da je 2-**lanac** u X ukoliko je

$$C_a \cap C_b \neq \emptyset \Longleftrightarrow \rho(a,b) \leq 1, \tag{4.4}$$

za sve $a, b \in \mathbb{N}_m^2$. Ovdje ćemo prirodno $C(a)$ označavati sa C_a . Kažemo da je m **duljina** od C. Slika 4 nam daje primjer 2-lanca duljine 3, a slika 5 nam demonstrira 2-lanac duljine 7.



Slika 4.



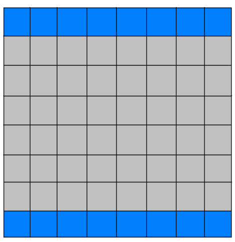
Slika 5.

Ukoliko je X skup, $m \in \mathbb{N}$ te $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ funkcija, onda koristimo sljedeću notaciju:

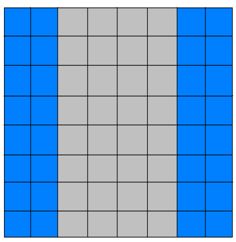
$$\partial^{\leftarrow} C = \bigcup_{i=0} C_{i,j}, \quad \partial^{\rightarrow} C = \bigcup_{i=m} C_{i,j}, \quad \partial^{\downarrow} C = \bigcup_{j=0} C_{i,j}, \quad \partial^{\uparrow} C = \bigcup_{j=m} C_{i,j},$$

$$\partial^{\leftleftarrows} C = \bigcup_{i=0,1} C_{i,j}, \quad \partial^{\rightrightarrows} C = \bigcup_{i=m-1,m} C_{i,j}, \quad \partial^{\downdownarrows} C = \bigcup_{j=0,1} C_{i,j}, \quad \partial^{\upuparrows} C = \bigcup_{j=m-1,m} C_{i,j}.$$

Za lanac C prikazan na slici 5, plava pruga na dnu slike 6 predstavlja $\partial^{\downarrow} C$, plava pruga na vrhu slike 6 predstavlja $\partial^{\uparrow} C$, dvije lijeve pruge na slici 7 predstavljaju skup $\partial^{\leftleftarrows} C$, dok dvije plave pruge koje leže na desnoj strani slike 7 predstavljaju $\partial^{\rightrightarrows} C$.



Slika 6.



Slika 7.

Također definiramo:

$$\partial C := \partial^{\leftarrow} C \cup \partial^{\rightarrow} C \cup \partial^{\downarrow} C \cup \partial^{\uparrow} C.$$

Sa $\bigcup C$ označit ćemo skup $\bigcup_{a \in \mathbb{N}_m^2} C_a$, te ćemo kazati da C **pokriva** A, gdje je $A \subseteq X$, ukoliko je $A \subseteq \bigcup C$.

Neka je (X,d) metrički prostor i neka je $C : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(X)$ neki 2-lanac u X. Kažemo da je C **otvoren** u (X,d) ukoliko je C_a otvoren skup u (X,d) za svaki $a \in \mathbb{N}_m^2$. Također, kažemo da je C **kompaktan** u (X,d) ako je C_a kompaktan skup u (X,d) za svaki $a \in \mathbb{N}_m^2$. Nadalje, kažemo da je C ε-2-lanac u (X,d), gdje je $\varepsilon > 0$, ako je $\operatorname{diam} C_a < \varepsilon$ za svaki $a \in \mathbb{N}_m^2$.

Definiramo sljedeća četiri skupa:

$$\begin{aligned} W^{\uparrow} &:= (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in \langle 0,1]\}, \\ W^{\rightarrow} &:= \{1\} \times [-2, \sin 1], \\ W^{\downarrow} &:= [0,1] \times \{-2\}, \\ W^{\leftarrow} &:= \{0\} \times [-2,-1]. \end{aligned}$$

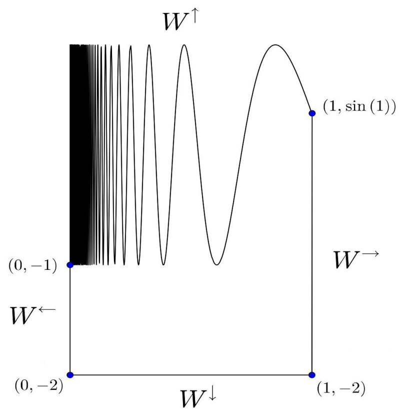
Neka je

$$W := W^{\uparrow} \cup W^{\rightarrow} \cup W^{\downarrow} \cup W^{\leftarrow}$$

i neka je D dio ravnine $\mathbb{R}^2$ koji je omeđen sa W, to jest

$$D := (\{0\} \times [-2,1]) \cup \{(x,y) \mid x \in \langle 0,1], -2 \leq y \leq \sin \frac{1}{x}\}.$$

Tada ćemo svaki prostor koji je homeomorfan sa W nazivati **varšavskom kružnicom**, a svaki prostor koji je homeomorfan sa D **varšavskim diskom** (vidi [21]).



Slika 8.

Pretpostavimo da je X varšavski disk. Neka je $f : D \to X$ pripadni homeomorfizam. Tada ćemo $f(W)$ zvati **rubnom varšavskom kružnicom** skupa D. Uočimo da nam ova definicija ne ovisi o izboru homeomorfizma f jer se $f(W)$ sastoji od svih točaka $x \in X$ koje nemaju okolinu u X koja je homeomorfna sa $\mathbb{R}^2$ (naime W se sastoji od svih točaka iz D koje nemaju takvu okolinu u D). Zaista, neka je $g\colon D \to X$ proizvoljan homeomorfizam, te neka je x proizvoljna točka iz skupa $g(W) = \{g(y) \mid \ y \in W\}$. Pretpostavimo da postoji neka otvorena okolina U_x točke x u varšavskom disku X koja je homeomorfna sa $\mathbb{R}^2$. Označimo sa h pripadni homeomorfizam. Promatrajmo skup V definiran s $g^{-1}(U_x)$. Tada je V otvorena okolina točke $g^{-1}(x) \in W$ u D. Kako je U_x otvoren skup u X, i V otvoren skup u D, to je $g_V \colon V \to U_x$, restrikcija preslikavanja g na skup V, također homeomorfizam. Stoga imamo da je skup V homeomorfan sa $\mathbb{R}^2$ preko preslikavanja $H := h \circ g$. Iz opće topologije poznat je teorem o invarijantnosti domene (vidi literaturu pod [27]) koji kaže da ukoliko je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ i $F \colon U \to \mathbb{R}^n$ injektivno i neprekidno preslikavanje, onda skup $F(U)$ nužno mora biti otvoren i preslikavanje F je homeomorfizam između skupa U i $F(U)$. Stoga, primjenom teorema o invarijantnosti domene na preslikavanje H^{-1} dobivamo da skup V mora biti otvoren u čitavom $\mathbb{R}^2$ (ne samo u skupu D). No iz same definicije skupa W uočavamo da nas prethodni zaključak vodi na kontradikciju jer ukoliko bi V bio otvoren u $\mathbb{R}^2$, onda bi postojao neki $\varepsilon > 0$ takav da je

$$B(g^{-1}(x), \varepsilon) \subseteq V \subseteq D, \tag{4.5}$$

a sama definicija skupa W povlači da $B(g^{-1}(x), \varepsilon)$ mora sijeći i skup $\mathbb{R}^2 \setminus D$ (svaka točka skupa W je gomilište skupa $\mathbb{R}^2 \setminus D$) što je jasno u suprotnosti sa relacijom (4.5).

Označimo sa $I = [0, 1]$ te neka je $I^2 = I \times I$. Nadalje, označimo redom skupove:

$$\begin{aligned}
\partial^{\leftarrow} I^2 &= \{0\} \times I, \\
\partial^{\rightarrow} I^2 &= \{1\} \times I, \\
\partial^{\downarrow} I^2 &= I \times \{0\}, \\
\partial^{\uparrow} I^2 &= I \times \{1\}.
\end{aligned}$$

Također neka je $\partial I^2 := (I \times \{0, 1\}) \cup (\{0, 1\} \times I)$.

Propozicija 4.2.1. *Neka su U_1, U_2, U_3 i U_4 otvoreni skupovi u D takvi da vrijedi sljedeće:*

$$W^{\leftarrow} \subseteq U_1,\ W^{\uparrow} \subseteq U_2,\ W^{\rightarrow} \subseteq U_3 \text{ i } W^{\downarrow} \subseteq U_4. \tag{4.6}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji kompaktan ε-2-lanac C u D koji pokriva D, takav da je $W^{\leftarrow} \subseteq \partial^{\leftarrow} C$, $W^{\rightarrow} \subseteq \partial^{\rightarrow} C$, $W^{\downarrow} \subseteq \partial^{\downarrow} C$, $W^{\uparrow} \subseteq \partial^{\uparrow} C$, i takav da vrijedi:

$$\partial^{\leftleftarrows} C \subseteq U_1,\ \partial^{\upuparrows} C \subseteq U_2,\ \partial^{\rightrightarrows} C \subseteq U_3 \quad \text{i} \quad \partial^{\downdownarrows} C \subseteq U_4. \tag{4.7}$$

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}$ stavimo:

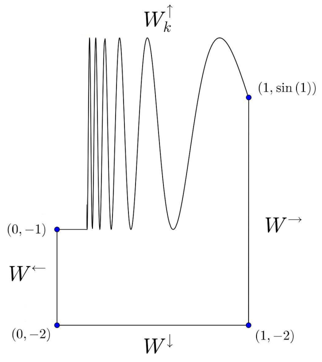
$$a_k := \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} \quad \text{i} \quad b_k := \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Primijetimo da je funkcija $f \colon [a_k, b_k] \to [-1, 1]$ definirana s $f(x) := \sin \frac{1}{x}$, rastuća bijekcija. Za $k \in \mathbb{N}$ neka je

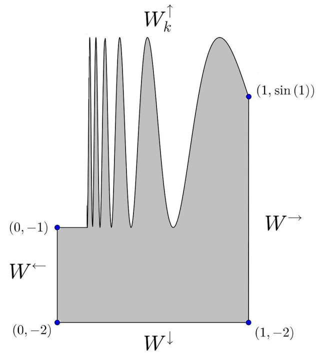
$$W_k^{\uparrow} := ([0, a_k] \times \{-1\}) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in [a_k, 1]\}, \quad W_k := W_k^{\uparrow} \cup W^{\rightarrow} \cup W^{\downarrow} \cup W^{\leftarrow},$$

i neka je

$$D_k := ([0, a_k] \times [-2, -1]) \cup \{(x, y) \mid x \in [a_k, 1], -2 \leq y \leq \sin \frac{1}{x}\}.$$



Slika 9. W_k



Slika 10. D_k

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kako je W_k homeomorfan s jediničnom kružnicom, odaberimo homeomorfizam $h : \partial I^2 \to W_k$ takav da je

$$h(\partial^{\leftarrow} I^2) = W^{\leftarrow},\ h(\partial^{\rightarrow} I^2) = W^{\rightarrow},\ h(\partial^{\downarrow} I^2) = W^{\downarrow} \text{ i } h(\partial^{\uparrow} I^2) = W_k^{\uparrow}.$$

Prema Schönfliesovom teoremu (vidi [26]) h se može proširiti do homeomorfizma $H : I^2 \to D_k$.

Neka je $m \in \mathbb{N}$, te neka je $F : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(I^2)$ preslikavanje definirano sa:

$$F(i,j) := \left[\frac{i}{m+1}, \frac{i+1}{m+1}\right] \times \left[\frac{j}{m+1}, \frac{j+1}{m+1}\right], \quad \forall\ i,j \in \mathbb{N}_m.$$

Tada je F kompaktan $\frac{2}{m+1}$-2-lanac u I^2 koji pokriva I^2, te takav da je $\partial^{\leftarrow} I^2 \subseteq \partial^{\leftarrow} F$, $\partial^{\rightarrow} I^2 \subseteq \partial^{\rightarrow} F$, $\partial^{\downarrow} I^2 \subseteq \partial^{\downarrow} F$ i $\partial^{\uparrow} I^2 \subseteq \partial^{\uparrow} F$.

Neka je $G : \mathbb{N}_m^2 \to \mathcal{P}(D)$ preslikavanje definirano sa:

$$G_a := H(F_a), \quad \forall\ a \in \mathbb{N}_m^2.$$

Tada je G kompaktan 2-lanac u D_k koji pokriva D_k te takav da je $W^{\leftarrow} \subseteq \partial^{\leftarrow} G$, $W^{\rightarrow} \subseteq \partial^{\rightarrow} G$, $W^{\downarrow} \subseteq \partial^{\downarrow} G$ i $W_k^{\uparrow} \subseteq \partial^{\uparrow} G$. Kako je H uniformno neprekidna funkcija, to možemo odabrati dovoljno veliki m takav da je G $\frac{\varepsilon}{2}$-2-lanac.

Sada ćemo ,,proširiti" G do lanca koji će pokrivati čitav D. Za $x \in \mathbb{R}^2$ stavimo

$$V_x := \{x + t(-1,1) \mid t \in [0, b_k]\}.$$

Uočimo da je V_x zapravo segment s krajnjim točkama x i $x + b_k(-1,1)$. Očito je $\operatorname{diam} V_x = b_k\sqrt{2}$. Nije teško dokazati da je za proizvoljan kompaktan skup K u $\mathbb{R}^2$ skup

$$\bigcup_{x \in K} V_x$$

također kompaktan.

Promatrajmo podluk L od $W_k^{\uparrow}$ definiran sa:

$$L := ([0, a_k] \times \{-1\}) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in [a_k, b_k]\}.$$

Uočimo da za sve $x, y \in L$, takve da je $x \neq y$, imamo da $(-1, 1)$ ne može biti vektor smjera pravca koji je određen točkama x i y. Stoga za sve takve x i y imamo da je $V_x \cap V_y = \emptyset$. Nadalje, imamo da je

$$[0, a_k] \times [-1, 1] \subseteq \bigcup_{x \in L} V_x.$$

Stoga je i $D \setminus D_k \subseteq \bigcup_{x \in L} V_x$.

Jasno je da je $L \subseteq \partial^{\uparrow} G$. Ako je $i \in \mathbb{N}_m$ takav da $G_{i,m}$ siječe L, onda stavimo

$$C_{i,m} := \left(G_{i,m} \cup \bigcup_{x \in L \cap G_{i,m}} V_x \right) \cap D.$$

Za sve ostale $i, j \in \mathbb{N}_m$ neka je $C_{i,j} := G_{i,j}$. Uočimo da je C 2-lanac jer za $a, b \in \mathbb{N}_m^2$, imamo da je $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ ako i samo ako je $G_a \cap G_b \neq \emptyset$. Skup C je također kompaktan 2-lanac u D koji pokriva D. Za dovoljno veliki k imamo da je C ε-2-lanac. Također, iz same konstrukcije imamo da je $W^{\uparrow} \subseteq \partial^{\uparrow} C$, te da je $\partial^{\leftarrow} C = \partial^{\leftarrow} G$, $\partial^{\leftarrow} C = \partial^{\leftarrow} G$ i $\partial^{\rightarrow} C = \partial^{\rightarrow} G$.

Iz konstrukcije vrijedi da ako je $r > 0$, takav da je C r-2-lanac, onda je svaka točka od $\partial^{\leftleftarrows} C$ $2r$-blizu nekoj točki od $W^{\leftarrow}$, svaka točka od $\partial^{\upuparrows} C$ je $2r$-blizu nekoj točki od $W^{\uparrow}$, svaka točka od $\partial^{\rightrightarrows} C$ je $2r$-blizu nekoj točki od $W^{\rightarrow}$ i svaka točka od $\partial^{\downdownarrows} C$ je $2r$-blizu nekoj točki od $W^{\downarrow}$. Stoga će nam ta činjenica za dovoljno mali r zajedno s pretpostavkom propozicije (vidi (4.6)), zaista implicirati da vrijedi (4.7). $\square$

Sljedeća tvrdnja će nam biti od presudne važnosti u samom dokazu našeg glavnog rezultata (za dokaz sljedeće tvrdnje čitatelja upućujemo na teorem 1.8.1 u [7], te na korolar 3.2 u [10]).

Teorem 4.2.2. *Pretpostavimo da su U_1, U_2, U_3 i U_4 otvoreni skupovi u I^2 takvi da je $U_1 \cap U_3 = \emptyset$, $U_2 \cap U_4 = \emptyset$, i takvi da je*

$$U_1 \cap \partial^{\rightarrow} I^2 = \emptyset, \quad U_3 \cap \partial^{\leftarrow} I^2 = \emptyset, \quad U_2 \cap \partial^{\downarrow} I^2 = \emptyset \quad i \quad U_4 \cap \partial^{\uparrow} I^2 = \emptyset.$$

Tada

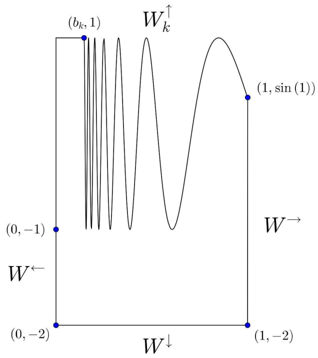
$$I^2 \nsubseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Od sada pa nadalje, neka je $b_k := \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ i neka su:

$$W_k^{\uparrow} := (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([0, b_k] \times \{1\}) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in [b_k, 1]\}, \tag{4.8}$$

$$W_k := W_k^{\uparrow} \cup W^{\rightarrow} \cup W^{\downarrow} \cup W^{\leftarrow},$$

$$D_k := ([0, b_k] \times [-2, 1]) \cup \{(x, y) \mid x \in [b_k, 1], -2 \leq y \leq \sin \frac{1}{x}\}.$$



Slika 11. W_k

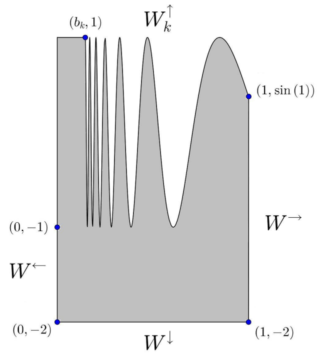


Figure 12. D_k

Uočimo da se ove prethodne definicije razlikuju od onih u dokazu propozicije 4.2.1. Također primijetimo da niz skupova (D_k) konvergira ka skupu D obzirom na Hausdorffovu metriku (na familiji svih nepraznih kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^2$).

Lema 4.2.3. *Pretpostavimo da su V_1, V_2, V_3 i V_4 otvoreni skupovi u D takvi da je*

$$V_1 \cap V_3 = \emptyset \quad i \quad V_2 \cap V_4 = \emptyset,$$

i takvi da je

$$V_1 \cap W^{\rightarrow} = \emptyset, \quad V_3 \cap W^{\leftarrow} = \emptyset, \quad V_2 \cap W^{\downarrow} = \emptyset \quad i \quad V_4 \cap W^{\uparrow} = \emptyset.$$

Tada

$$D \nsubseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\mathcal{U} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ otvoreni pokrivač od D. Kako je D kompaktan, to postoji Lebesgueov broj λ za otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$. Nadalje, kompaktnost od D nam također povlači da postoji konačna familija $\mathcal{F}$ kompaktnih podskupova od D takva da je $D = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, i takva da je $\operatorname{diam} F < \lambda$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Za $i \in \{1,2,3,4\}$ stavimo:

$$K_i := \bigcup_{F \in \mathcal{F},\ F \subseteq V_i} F.$$

Tada su K_1, K_2, K_3 i K_4 kompaktni podskupovi od D, $K_i \subseteq V_i$ za svaki $i \in \{1,2,3,4\}$ i $D = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Kako je $K_i \subseteq V_i$ za svaki $i \in \{1,2,3,4\}$, imamo da je $K_1 \cap K_3 = \emptyset$, $K_2 \cap K_4 = \emptyset$,

$$K_1 \cap W^{\rightarrow} = \emptyset, \quad K_3 \cap W^{\leftarrow} = \emptyset, \quad K_2 \cap W^{\downarrow} = \emptyset \text{ i } K_4 \cap W^{\uparrow} = \emptyset.$$

Općenito se iz topologije zna da ukoliko je $\mathcal{G}$ konačna familija kompaktnih skupova u metričkom prostoru (X,d), onda za svaki $K \in \mathcal{G}$ postoji neki otvoren skup U_K u (X,d) takav da je $K \subseteq U_K$, i takav da vrijedi sljedeće: ako su $K, L \in \mathcal{G}$, $K \cap L = \emptyset$, onda je i $U_K \cap U_L = \emptyset$. Primijenimo ovu navedenu činjenicu na familiju $\{K_1, K_2, K_3, K_4, W^{\leftarrow}, W^{\rightarrow}, W^{\downarrow}, W^{\uparrow}\}$. Dobivamo otvorene podskupove U_1, U_2, U_3,

U_4 i Ω od $\mathbb{R}^2$ takve da je $K_i \subseteq U_i$ za svaki $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $W^\uparrow \subseteq \Omega$ te $U_1 \cap U_3 = \emptyset$, $U_2 \cap U_4 = \emptyset$,

$$U_1 \cap W^\rightarrow = \emptyset, \quad U_3 \cap W^\leftarrow = \emptyset, \quad U_2 \cap W^\downarrow = \emptyset, \tag{4.9}$$

$$U_4 \cap \Omega = \emptyset. \tag{4.10}$$

Slijedi:

$$D \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4. \tag{4.11}$$

Imamo da je $(0, 1) \in \Omega$ (jer je $(0, 1) \in W^\uparrow$). Stoga postoji neki $r > 0$ takav da je $B((0, 1), r) \subseteq \Omega$. Slijedi da je $[0, \frac{r}{2}] \times \{1\} \subseteq \Omega$. Skup $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ je otvoren te D_k konvergira prema skupu D u Hausdorffovoj metrici (na familiji svih nepraznih i kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}^2$). Ovo nam, zajedno sa (4.11), povlači da postoji neki $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$D_k \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4. \tag{4.12}$$

Štoviše, broj k možemo odabrati tako da je $b_k < \frac{r}{2}$. Stoga je $[0, b_k] \times \{1\} \subseteq \Omega$, te nam sada (4.10) povlači da je

$$([0, b_k] \times \{1\}) \cap U_4 = \emptyset. \tag{4.13}$$

Kako je $W^\uparrow \subseteq \Omega$, to iz (4.10) imamo da je $U_4 \cap W^\uparrow = \emptyset$. Koristeći tu činjenicu, te (4.13) i definiciju od $W_k^\uparrow$ (vidi (4.8)), zaključujemo da je

$$U_4 \cap W_k^\uparrow = \emptyset. \tag{4.14}$$

Neka je $h : W_k \to \partial I^2$ homeomorfizam takav da je $h(W_k^\uparrow) = \partial^\uparrow I^2$, $h(W^\leftarrow) = \partial^\leftarrow I^2$, $h(W^\downarrow) = \partial^\downarrow I^2$ i $h(W^\rightarrow) = \partial^\rightarrow I^2$. Neka je $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizam koji proširuje h. Imamo da je $H(D_k) = I^2$. Jasno je da je $H(U_1) \cap H(U_3) = \emptyset$, $H(U_2) \cap H(U_4) = \emptyset$, te relacije (4.12), (4.9) i (4.14) povlače da je

$$I^2 \subseteq H(U_1) \cup H(U_2) \cup H(U_3) \cup H(U_4),$$

$$H(U_1) \cap \partial^\rightarrow I^2 = \emptyset, \quad H(U_3) \cap \partial^\leftarrow I^2 = \emptyset, \quad H(U_2) \cap \partial^\downarrow I^2 = \emptyset \ \text{ i } \ H(U_4) \cap \partial^\uparrow I^2 = \emptyset.$$

No, ovo je u kontradikciji sa samim teoremom 4.2.2. □

4.3. Formalni 2-lanci

Proizvoljnu funkciju $a\colon \mathbb{N}_m^2 \to \mathbb{N}$ zvat ćemo **konačnim 2-nizom** u $\mathbb{N}$.

Neka su $\Sigma : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ i $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljive funkcije koje zadovoljavaju sljedeće: za svaki konačan 2 niz a u $\mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je niz a jednak funkciji

$$\mathbb{N}_{\nu(l)}^2 \to \mathbb{N}, \quad (i, j) \mapsto \Sigma(l, i, j).$$

Takve funkcije zaista postoje (vidi članak [12], stranica 11, poglavlje 5).

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $l \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $\mathcal{H}_l : \mathbb{N}_{\nu(l)}^2 \to \mathcal{P}(X)$ sa $(\mathcal{H}_l)(i, j) = J_{\Sigma(l,i,j)}$. Dakle

$$\mathcal{H}_l = \left(J_{\Sigma(l,i,j)}\right)_{0 \leq i,j \leq \nu(l)}.$$

Neka je $l \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathcal{H}_l$ **formalni 2-lanac** ako za sve $i, j, i', j' \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ vrijede sljedeće implikacije (usporedi s definicijom formalnog lanca iz poglavlja 3.):

$$\rho((i,j),(i',j')) \leq 1 \implies J_{\Sigma(l,i,j)} \cap J_{\Sigma(l,i',j')} \neq \emptyset;$$
$$\rho((i,j),(i',j')) > 1 \implies J_{\Sigma(l,i,j)} \diamond J_{\Sigma(l,i',j')}.$$

Za $l \in \mathbb{N}$ označimo sa $\cup\mathcal{H}_l$ sljedeći skup:

$$\bigcup \mathcal{H}_l = \bigcup_{0 \leq i,j \leq \nu(l)} J_{\Sigma(l,i,j)}.$$

Nadalje, za $l \in \mathbb{N}$ neka je

$$\partial\mathcal{H}_l = \bigcup_{0 \leq j \leq \nu(l)} J_{\Sigma(l,0,j)} \cup \bigcup_{0 \leq j \leq \nu(l)} J_{\Sigma(l,\nu(l),j)} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq \nu(l)} J_{\Sigma(l,i,0)} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq \nu(l)} J_{\Sigma(l,i,\nu(l))}.$$

Definirajmo funkciju fmesh : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\text{fmesh}(l) := \max_{0 \leq i,j \leq \nu(l)} \text{fdiam}(\Sigma(l,i,j)).$$

Napominjemo da se radi o sličnoj funkciji koju smo definirali u poglavlju 1. (potpoglavlje 1.3.), ali ne i istoj funkciji fmesh iz potpoglavlja 1.3., iako koristimo iste oznake. Znamo da je takva funkcija izračunljiva (vidi propoziciju 5.4(i) u [12]). Neka su $l, p \in \mathbb{N}$. Redom uvodimo sljedeće oznake:

$\partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p$ ako je $J_{\Sigma(l,i,j)} \diamond J_p$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takve da je $i = 0$ ili $i = 1$;

$\partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p$ ako je $J_{\Sigma(l,i,j)} \diamond J_p$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takve da je $i = \nu(l)$ ili $i+1 = \nu(l)$;

$\partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p$ ako je $J_{\Sigma(l,i,j)} \diamond J_p$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takve da je $j = 0$ ili $j = 1$;

$\partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p$ ako je $J_{\Sigma(l,i,j)} \diamond J_p$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takve da je $j = \nu(l)$ ili $j+1 = \nu(l)$.

Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, te neka je S poluizračunljiv skup u (X, d, α). Kako postoji izračunljiva funkcija $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $l \in \mathbb{N}$, skup $J_{\zeta(l)}$ jednak uniji od $\mathcal{H}_l$ (vidi propoziciju 5.2 u [12]), to lagano dobivamo da je skup

$$\{l \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Također, kako postoji izračunljiva funkcija $\zeta'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je za svaki $l \in \mathbb{N}$ $J_{\zeta'(l)}$ jednak $\partial\mathcal{H}_l$ (vidi propoziciju 5.2 u [12]), to imamo da je skup:

$$\{l \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \partial\mathcal{H}_l\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Nadalje, propozicija 5.4(ii) u [12] nam daje da je skup

$$\{l \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_l \text{ je formalan } 2 - \text{lanac}\}$$

izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Ova posljednja tvrdnja se dobije korištenjem propozicije 1.3.1(i) te činjenice da su skupovi $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \cap J_j \neq \emptyset\}$ i $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \diamond J_j\}$ (vidi propoziciju 3.2.5) izračunljivo prebrojiv podskupovi od $\mathbb{N}^2$. Da je skup $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \cap J_j \neq \emptyset\}$ izračunljivo prebrojiv proizlazi iz propozicije 1.3.2(ii).

Propozicija 4.3.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada su skupovi $\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\}$, $\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\}$, $\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\}$ i $\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\}$ izračunljivo prebrojivi.*

Dokaz. Označimo sa Ω sljedeći skup:

$$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid J_i \diamond J_j\}.$$

Tada je prema propoziciji 3.2.5 skupΩ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$. Nadalje definirajmo:

$$\begin{aligned}
A &:= \{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\},\\
B &:= \{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{\Sigma(l,0,j)} \diamond J_p,\ \forall\, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}\},\\
C &:= \{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid J_{\Sigma(l,1,j)} \diamond J_p,\ \forall\, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}\}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je za $l, p \in \mathbb{N}$

$$(l,p) \in A \iff (l,p) \in B \cup C. \tag{4.15}$$

Pokažimo da je skup B izračunljivo prebrojiv. Neka su $l, p \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi: $(l,p) \in B$ ako i samo ako je $(\Sigma(l,0,j), p) \in \Omega$ za svaki $j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$. Dakle, za $l, p \in \mathbb{N}$ imamo da vrijedi sljedeće:

$$(l,p) \in B \iff \{(\Sigma(l,0,j), p) \mid\ j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}\} \subseteq \Omega. \tag{4.16}$$

Jednostavnom primjenom propozicije 1.3.1(i) i (ii) dobivamo da je skup B izračunljivo prebrojiv. Analogno bismo pokazali da je i skup C izračunljivo prebrojiv. Tada je i skup $B \cup C$ izračunljivo prebrojiv kao unija dva izračunljivo prebrojiva skupa (vidi propoziciju 2.5 u [4]). Sada nam relacija (4.15) povlači da je skup A izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Potpuno analogno bismo pokazali da su i sljedeći skupovi izračunljivo prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}
&\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\},\\
&\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\},\\
&\{(l,p) \in \mathbb{N}^2 \mid \partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_p\}
\end{aligned}$$

□

4.4. Poluizračunljiv varšavski disk

U nastavku dokazujemo glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorem 4.4.1. *Pretpostavimo da je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor i neka je $S \subseteq X$ poluizračunljiv skup u (X, d, α), koji je kao potprostor od (X, d) varšavski disk čija je rubna varšavska kružnica također poluizračunljiv skup. Tada je skup S izračunljiv.*

Dokaz. Neka je $f : D \to S$ pripadni homeomorfizam. Prema lemi 4.1.1(2) postoje neki $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$f(W^{\leftarrow}) \subseteq J_{j_1}, \quad f(W^{\uparrow}) \subseteq J_{j_2}, \quad f(W^{\rightarrow}) \subseteq J_{j_3} \;\text{ i }\; f(W^{\downarrow}) \subseteq J_{j_4} \tag{4.17}$$

te takvi da vrijedi:

$$J_{j_1} \diamond J_{j_3} \quad \text{i} \quad J_{j_2} \diamond J_{j_4}.$$

Stoga slijedi da je

$$\mathrm{Cl}(J_{j_1}) \cap \mathrm{Cl}(J_{j_3}) = \emptyset \;\text{ i }\; \mathrm{Cl}(J_{j_2}) \cap \mathrm{Cl}(J_{j_4}) = \emptyset,$$

te iz leme 4.1.1(1) zaključujemo da postoji neki $\lambda > 0$ takav da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeće implikacije:

$$(A \subseteq \mathrm{Cl}(J_{j_1}) \cap S,\; B \subseteq \mathrm{Cl}(J_{j_3}) \cap S,\; A \subseteq_{\lambda} J_i,\; B \subseteq_{\lambda} J_j) \implies J_i \diamond J_j; \tag{4.18}$$

$$(A \subseteq \mathrm{Cl}(J_{j_2}) \cap S,\; B \subseteq \mathrm{Cl}(J_{j_4}) \cap S,\; A \subseteq_{\lambda} J_i,\; B \subseteq_{\lambda} J_j) \implies J_i \diamond J_j. \tag{4.19}$$

Prema lemi 4.1.1(2) postoje neki $j_1', j_2', j_3', j_4' \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\mathrm{Cl}(J_{j_p}) \cap S \subseteq_{\lambda} J_{j_p'}, \quad \forall\, p \in \{1, 2, 3, 4\}. \tag{4.20}$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon = 2^{-k}$. Koristeći propoziciju 4.2.1 i činjenicu da je f homeomorfizam te uniformno neprekidna funkcija, zaključujemo da postoji kompaktan $\frac{\varepsilon}{2}$-2-lanac K u S koji pokriva S i takav da vrijedi sljedeće:

$$f(W^{\leftarrow}) \subseteq \partial^{\leftarrow} K, \;\; f(W^{\rightarrow}) \subseteq \partial^{\rightarrow} K, \;\; f(W^{\downarrow}) \subseteq \partial^{\downarrow} K, \;\; f(W^{\uparrow}) \subseteq \partial^{\uparrow} K, \tag{4.21}$$

$$\partial^{\leftleftarrows} K \subseteq J_{j_1},\; \partial^{\upuparrows} K \subseteq J_{j_2},\; \partial^{\rightrightarrows} K \subseteq J_{j_3},\; \partial^{\downdownarrows} K \subseteq J_{j_4}. \tag{4.22}$$

Označimo sa m duljinu od K. Kako su skupovi $K_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq m$, kompaktni to nam primjena leme 4.1.1(2) na te skupove, te broj $r := \min\{\frac{\varepsilon}{8}, \lambda\}$, daje brojeve $l_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq m$, takve da je

$$K_{i,j} \subseteq_r J_{l_{i,j}}, \tag{4.23}$$

te takve da je $J_{l_a} \diamond J_{l_b}$ za sve $a, b \in \mathbb{N}_m^2$ za koje je $\rho(a, b) > 1$. Posebno imamo da je $K_{i,j} \subseteq_{\lambda} J_{l_{i,j}}$. Ovo nam za $i = 0$ ili $i = 1$, zajedno sa relacijama (4.22), (4.20) i (4.18), daje da vrijedi $J_{l_{i,j}} \diamond J_{j_3'}$. Analogno, koristeći također relaciju (4.19), dobivamo da je $J_{l_{i,j}} \diamond J_{j_1'}$ za $i = m-1, m$, $J_{l_{i,j}} \diamond J_{j_2'}$ za $j = 0, 1$ i $J_{l_{i,j}} \diamond J_{j_4'}$ za $j = m-1, m$. Nadalje, relacija (4.23) i lema 4.1.1(3) nam povlače da je

$$\mathrm{fdiam}(l_{i,j}) < 4r + \mathrm{diam}(K_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_m.$$

Odaberimo neki $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\nu(l) = m$ i $\Sigma(l, i, j) = l_{i,j}$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_m$. Prisjetimo se da smo stavili $\varepsilon = 2^{-k}$. Relacija (4.21) nam povlači da je $f(W) \subseteq \partial K$. Vrijede stoga sljedeći zaključci:

(i) $\mathcal{H}_l$ je formalni 2-lanac;

(ii) $\mathrm{fmesh}(l) < 2^{-k}$;

(iii) $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l$;

(iv) $f(W) \subseteq \partial \mathcal{H}_l$

(v) $\partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_{j_3'}$, $\partial^{\rightrightarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_{j_1'}$, $\partial^{\downdownarrows}\mathcal{H}_l \diamond J_{j_2'}$ i $\partial^{\upuparrows}\mathcal{H}_l \diamond J_{j_4'}$.

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da svojstva (i)-(v) vrijedi.

Pretpostavimo sada da su $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da svojstva (i)-(v) vrijede. Neka je $m = \nu(l)$. Za $i, j \in \mathbb{N}_m$ stavimo $C_{i,j} := J_{\Sigma(l,i,j)}$. Tvrdimo da je $C_{i,j} \cap S \neq \emptyset$ ako je $1 < i, j < m-1$. Pretpostavimo suprotno, to jest da je

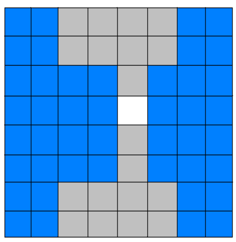
$$C_{p,q} \cap S = \emptyset \tag{4.24}$$

za neke $p, q \in \mathbb{N}_m$ takve da vrijedi $1 < p, q < m-1$. Definirajmo:

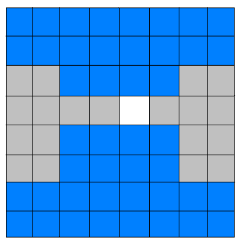
$$U_1 = \left(\bigcup_{\substack{1<i<p \\ 1<j<m-1}} C_{i,j} \right) \cup \partial^{\leftleftarrows} C, \qquad U_3 = \left(\bigcup_{\substack{p<i<m-1 \\ 1<j<m-1}} C_{i,j} \right) \cup \partial^{\rightrightarrows} C,$$

$$U_2 = \left(\bigcup_{\substack{q<j<m-1 \\ 1<i<m-1}} C_{i,j} \right) \cup \partial^{\upuparrows} C, \qquad U_4 = \left(\bigcup_{\substack{1<j<q \\ 1<i<m-1}} C_{i,j} \right) \cup \partial^{\downdownarrows} C.$$

Obratite pažnju na slike 13 i 14. Ako je C lanac koji je prikazan na slici 5, i ako nam bijeli kvadratić predstavlja kariku $C_{p,q}$, tada nam plave karike na slici 13 predstavljaju skupove U_1 i U_3, a plave karike na slici 14 nam predstavljaju skupove U_2 i U_4.



Slika 13.



Slika 14.

Skupovi U_1, U_2, U_3 i U_4 su očito otvoreni u (X, d). Kako vrijedi svojstvo (iii), te smo pretpostavili da je relacija (4.24) istinita, to imamo da je

$$S \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4. \tag{4.25}$$

Tvrdimo da je

$$U_1 \cap f(W^{\rightarrow}) = \emptyset. \tag{4.26}$$

Imamo da je $\partial^{\leftleftarrows}\mathcal{H}_l = \partial^{\leftleftarrows} C$ i iz svojstva (v) vrijedi da je $\partial^{\leftleftarrows} C \cap J_{j_3'} = \emptyset$. S druge strane, relacije (4.17) i (4.20) nam povlače da je $f(W^{\rightarrow}) \subseteq J_{j_3'}$. Dakle vrijedi da je $\partial^{\leftleftarrows} C \cap f(W^{\rightarrow}) = \emptyset$. Nadalje, kako je $C = (C_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m}$ 2-lanac, što nam slijedi iz relacije (i), imamo da je $\left(\bigcup_{\substack{1<i<p \\ 1<j<m-1}} C_{i,j}\right) \cap \partial C = \emptyset$. Jasno je da je $f(W^{\rightarrow}) \subseteq f(W)$ i da je $\partial \mathcal{H}_l = \partial C$. Stoga nam svojstvo (iv) implicira da je $f(W^{\rightarrow}) \subseteq \partial C$. Dakle, imamo da je $\left(\bigcup_{\substack{1<i<p \\ 1<j<m-1}} C_{i,j}\right) \cap f(W^{\rightarrow}) = \emptyset$, te stoga zaključujemo da relacija (4.26) vrijedi. Analogno dobivamo da vrijedi i:

$$U_2 \cap f(W^{\downarrow}) = \emptyset, \quad U_3 \cap f(W^{\leftarrow}) = \emptyset \ \text{ i } \ U_4 \cap f(W^{\uparrow}) = \emptyset. \tag{4.27}$$

Jer je $C = (C_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m}$ 2-lanac, imamo da je

$$U_1 \cap U_3 = \emptyset \ \text{ i } \ U_2 \cap U_4 = \emptyset. \tag{4.28}$$

Relacije (4.25), (4.26), (4.27) i (4.28) nam povlače da je

$$D \subseteq f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup f^{-1}(U_3) \cup f^{-1}(U_4),$$

$$f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_3) = \emptyset, \quad f^{-1}(U_2) \cap f^{-1}(U_4) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(U_1) \cap W^{\rightarrow} = \emptyset, \ f^{-1}(U_2) \cap W^{\downarrow} = \emptyset, \ f^{-1}(U_3) \cap W^{\leftarrow} = \emptyset \ \text{ i } \ f^{-1}(U_4) \cap W^{\uparrow} = \emptyset.$$

No, ovo je u kontradikciji s lemom 4.2.3. Stoga je zaista $C_{i,j} \cap S \neq \emptyset$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_m$ takve da je $1 < i, j < m - 1$.

Neka je Ω skup svih $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ takvih da svojstva (i)-(v) vrijedi. Nije teško zaključiti da je skup Ω izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ kao presjek izračunljivo prebrojivih skupova (vidi propoziciju 4.3.1, potpoglavlje 4.3. te propoziciju 1.1.5). Kako za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji neki $l \in \mathbb{N}$ takav da svojstva (i)-(v) vrijede, to jest takav da je uređeni par $(k, l) \in \Omega$, to postoji neka izračunljiva funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(k, \varphi(k)) \in \Omega$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ izračunljiva funkcija takva da je $\alpha_{g(j)} \in J_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Takva funkcija zaista postoji. Naime, kako je skup $S = \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \ \alpha_i \in J_j\}$ izračunljivo prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$ (vidi poglavlje 3.), te kako za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji neki $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(j, i) \in S$, to izračunljivu funkciju g dobivamo direktno primjenom propozicije 1.1.2(ii).

Neka je $k \in \mathbb{N}$. Stavimo $l := \varphi(k)$. Tada je $(k, l) \in \Omega$, pa za te k i l svojstva (i)-(v) vrijede. U tom slučaju smo pokazali da je

$$J_{\Sigma(l,i,j)} \cap S \neq \emptyset \tag{4.29}$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takve da je $1 < i, j < \nu(l) - 1$. Kako je prema svojstvu (ii) $\text{diam}(J_{\Sigma(l,i,j)}) < 2^{-k}$ za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$, to je svaka točka od $J_{\Sigma(l,i,j)}$, ukoliko je $1 < i, j < \nu(l) - 1$, 2^{-k}-blizu nekoj točki od S prema relaciji (4.29). Također uočimo da ukoliko je $i \in \{0, 1, \nu(l) - 1, \nu(l)\}$ ili je $j \in \{0, 1, \nu(l) - 1, \nu(l)\}$, tada je svaka točka od $J_{\Sigma(l,i,j)}$ $2 \cdot 2^{-k}$-blizu nekoj točki od nekog $J_{\Sigma(l,p,q)}$, gdje je $1 < p, q < \nu(l) - 1$. Naime to nam slijedi iz nejednakosti trokuta i činjenice da je $\mathcal{H}_l$ 2-lanac. Stoga, za sve $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ imamo da je svaka točka od $J_{\Sigma(l,i,j)}$ $2 \cdot 2^{-k}$-blizu nekoj točki od S. S druge pak strane, kako je $S \subseteq \bigcup \mathcal{H}_l$, to za svaku točku $x \in S$ postoje neki $i, j \in \mathbb{N}_{\nu(l)}$ takvi da je x 2^{-k}-blizu svakoj točki od $J_{\Sigma(l,i,j)}$. Neka je $A := \{\alpha_{g(\Sigma(l,i,j))} \mid 0 \leq i, j \leq \nu(l)\}$.

Imamo sljedeći zaključak: svaka točka skupa A je $2 \cdot 2^{-k}$-blizu nekoj točki od S i svaka točka od S je $2 \cdot 2^{-k}$-blizu nekoj točki od A. Stoga je

$$d_H(S, A) < 2 \cdot 2^{-k}. \tag{4.30}$$

Lako se može zaključiti da postoji neka izračunljiva funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\{g(\Sigma(l, i, j)) \mid 0 \leq i, j \leq \nu(l)\} = [h(l)]$ za svaki $l \in \mathbb{N}$. Slijedi da je $\{\alpha_{g(\Sigma(l,i,j))} \mid 0 \leq i, j \leq \nu(l)\} = \Lambda_{h(l)}$ za svaki $l \in \mathbb{N}$. Sada iz relacije (4.30) zaključujemo da je

$$d_H(S, \Lambda_{h(\varphi(k))}) < 2 \cdot 2^{-k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Dakle, imamo da je

$$d_H(S, \Lambda_{h(\varphi(k+1))}) < 2^{-k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

te time zaključujemo da je S zaista izračunljiv skup. □

Literatura

[1] Brattka, V.: Plottable real number functions and the computable graph theorem, *SIAM J. Comput.*, 38(1):303–328, 2008.

[2] Brattka, V., Presser, G.: Computability on subsets of metric spaces, *Theoretical Computer Science*, 305 (2003) 43-76.

[3] Burgess, C.E.: Chainable continua and indecomposability, *Pac. J. Math*, **9**, 1959, 653–659.

[4] Burnik, K.: "Izračunljivost 1-mnogostrukosti" doktorska disertacija, Zagreb, 2015.

[5] Burnik, K., Iljazović, Z.: Computability of 1-manifolds, *Logical Methods in Computer Science*, 10(2:8), 2014, 1–28.

[6] Christenson, C.O., Voxman, W.L.: *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[7] Engelking, R.: *Dimension Theory*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1978.

[8] Iljazović, Z.: Chainable and circularly chainable continua in computable metric spaces, *Journal of Universal Computer Science*, 15(6):1206–1235, 2009.

[9] Iljazović, Z.: "Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova" doktorska disertacija, Zagreb, 2010.

[10] Iljazović, Z.: Co-c.e. Spheres and Cells in Computable Metric Spaces, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 7(3:05):1–21, 2011.

[11] Iljazović, Z.: Local Computability of Computable Metric Spaces and Computability of Co-c.e. Continua, *Glasnik matematički*, Vol. 47(67):1–20, 2012.

[12] Iljazović, Z.: Compact manifolds with computable boundaries, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 9(4:19):1–22, 2013.

[13] Iljazović, Z., Pažek B.: Co-c.e. sets with disconnected complements, *Theory Comput. Syst.* (2017). doi:10.1007/s00224-017-9781-x.

[14] Iljazović, Z., Pažek, B.: Computable intersection points, *Computability*, Vol. 7, no. 1, pp. 57-99, 2018.

[15] Iljazović, Z., Pažek, B.: Warsaw discs and semicomputability, *Topology and its Applications*, 239 (2018) 308–323.

[16] Iljazović, Z., Validžić, L.: Computable neighbourhoods of points in semicomputable manifolds, *Annals of Pure and Applied Logic*, 168(4):840–859, 2017.

[17] Iljazović, Z., Validžić, L.: Maximal computability structures, *Bulletin of Symbolic Logic*, 22(4):445-468, 2016.

[18] Kihara, T.: Incomputability of Simply Connected Planar Continua, *Computability*, 1(2), 2012, 131–152.

[19] Miller, J.S., Effectiveness for Embedded Spheres and Balls, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, volume 66, Elsevier, 2002, 127-138.

[20] Munkres, J.R.: *Topology*, Pearson Education International, New York, 2000.

[21] Nadler, S.B.: *Continuum theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[22] Pauly, A.: On the topological aspects of the theory of represented spaces, *Computability*, 5(2):159–180, 2016.

[23] Pour-El, M.B., Richards, I., Computability in Analysis and Physics, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.

[24] Specker, E., Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis, Constructivity in Mathematics (A. Heyting, ed.), North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1959, 254-265.

[25] Sušić, I.: "Lokalna izračunljivost" diplomski rad, PMF- Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.

[26] Thomassen, C.: The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces, *Amer. Math. Monthly*, Monthly 99, 116-130, 1992.

[27] Ungar, Š.: "Matematička analiza 3" udžbenik, Sveučilište u Zagrebu, 2002.

[28] Vuković, M.: "Izračunljivost" skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[29] Weihrauch, K.: Computable Analysis; Springer, Berlin, 2000.

Sažetak

U ovom doktorskom radu proučavali su se uvjeti koji omogućuju da skupovi s nepovezanim komplementom sadrže izračunljivu točku, odnosno postaju izračunljivi. Štoviše, istraživanje ove disertacije obuhvaća i skupove koji su homeomorfni skupovima s nepovezanim komplementima. Ambijentni prostor nad kojim su dokazivani rezultati ovog rada bio je izračunljiv metrički prostor (X, d, α), koji predstavlja svojevrsno poopćenje standardnog izračunljivog euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$.

U poglavlju 1. definirali su se neki osnovni pojmovi iz izračunljive analize te su istaknuti neki poznati, ali za ovo istraživanje, važni rezultati, koji su se tijekom ove doktorske disertacije koristili. Naglasak ovog poglavlja je posebno bio na doprinosima ove doktorske disertacije. Cilj ovog rada među ostalim je također bio da se još jednom istakne kako postoji uska veza između topologije i same teorije izračunljivosti. Neka topološka svojstva mogu učiniti poluizračunljiv/co-c.e. skup izračunljivim ili barem učiniti da takvi skupovi sadrže izračunljivu točku.

Orginalni doprinos ovog rada započet je s poglavljem 2. u kojem su proučavani co-c.e. skupovi s nepovezanim komplementima u izračunljivom metričkom prostoru. Pažnja se posebno usmjerila na slučaj kada je izračunljiv metrički prostor (X, d, α) efektivno lokalno povezan i kada se komponente povezanosti komplementa co-c.e. skupa $S \subseteq X$ mogu na efektivan način razlikovati. Opisali su se neki dovoljni uvjeti koji omogućavaju da takav skup S sadrži izračunljivu točku te neki dovoljni uvjeti uz koje skup S postaje izračunljiv. Slobodno se može istaknuti da je pojam efektivne lokalne povezanosti zapravo ključ proučavanja ovog poglavlja. Stoga je u potpoglavlju 2.2. dana precizna definicija toga pojma. Budući se definicija efektivne lokalne povezanosti ne treba ograničiti samo na povezane otvorene kugle stvara se potreba za opisom pojma koji bi objašnjavao značenje izračunljivosti niza otvorenih (povezanih) skupova U_i u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α). U tom kontekstu prezentira se definicija koja objašnjava značenje da niz skupova (A_i) efektivno profinjuje niz skupova (B_i) te značenje kada su dva niza skupova (A_i) i (B_i) izračunljivo ekvivalentni. U potpoglavlju 2.4. uvodi se pojam efektivne nepovezanosti otvorenog nepovezanog skupa V u (X, d, α). Tim pojmom poopćava se situacija koja se odnosi na slučaj kada nepovezan otvoren skup V u (X, d, α) ima konačno mnogo komponenti povezanosti. Glavni rezultat ovog poglavlja, čiji je dokaz dan u potpoglavlju 2.4., kaže da ukoliko je (X, d, α) efektivno lokalno povezan izračunljiv metrički prostor te ukoliko je S co-c.e. skup u (X, d, α) takav da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan i takav da svaka točka skupa S leži na rubu barem dvije komponente povezanosti od $X \setminus S$, onda skup S nužno mora biti izračunljiv u (X, d, α) (vidi teorem 2.4.5 u potpoglavlju 2.4.). Također je dokazano da u efektivno lokalno povezanom izračun-

ljivom metričkom prostoru (X, d, α), proizvoljan co-c.e. skup S, sa svojstvom da je $X \setminus S$ efektivno nepovezan, nužno sadrži izračunljivu točku ukoliko se dodatno pretpostavi da je metrički prostor (X, d) povezan i potpun (korolar 2.4.6). Na kraju tog poglavlja prezentiran je još jedan dovoljan uvjet uz koji co-c.e. skup s efektivno nepovezanim komplementom u potpunom, efektivno lokalno povezanom izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) sadrži izračunljivu točku. Skup S sadrži izračunljivu točku x ako postoji neki povezan skup A koji siječe dvije različite komponente povezanosti skupa $X \setminus S$. Štoviše, takav se x može naći po volji blizu skupa A (vidi teorem 2.4.8).

Poglavlje 3. je prije svega posvećeno poopćenju takozvane izračunljive verzije Bolzanovog teorema o nultočki. Ukoliko je skup K izračunljiv i povezan podskup od $\mathbb{R}^2$ koji siječe obje komponente skupa $\mathbb{R}^2 \setminus S$, gdje je $S = \mathbb{R} \times \{0\}$, onda K nužno siječe S jer je K povezan. Postavlja se stoga sljedeće pitanje: mora li nužno K sijeći skup S u izračunljivoj točki? Izračunljiva verzija Bolzanovog teorema o nultočki nam kaže da ukoliko za skup K uzmemo graf izračunljive funkcije $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, takve da je $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$, onda K mora sijeći S u izračunljivoj točki. U potpoglavlju 3.3. ovaj rezultat se poopćava na način koji ćemo sada ukratko opisati. Prvo se promatra izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i dva c.e. otvorena skupa U i V u X. Skup S se definira kao komplement skupa $U \cup V$ u X. Sada se pretpostavi da je K kontinuum u X koji je lančast od točke a do točke b, gdje je $a \in U$ i $b \in V$, te se pretpostavi da je K izračunljiv skup i da su točke a i b izračunljive. Uz dodatnu pretpostavku da je $K \cap S$ potpuno nepovezan pokazuje se da skup $K \cap S$ sadrži izračunljivu točku (vidi teorem 3.3.3). Ideja koja se je nalazila u pozadini dokaza ovog teorema je bila da se na izvjestan način uspije skup K prekriti sa (U, V)-lancem od točke a do točke b, to jest lancem koji ima svojstvo da za svake dvije susjedne karike barem jedna leži u skupu U ili u skupu V, te da prva karika ovakvog lanca sadrži točku a, a posljednja karika sadrži točku b (vidi potpoglavlje 3.1.). Iako se pretpostavka potpune nepovezanosti skupa $K \cap S$ može na prvi pogled učiniti dosta neobičnom i stranom, ona je usko povezana sa samom tehnikom (U, V)-lanaca. Također, za potrebe dokaza samog teorema 3.3.3 razvija se koncept separatora, augmentatora i lokatora (potpoglavlje 3.2.) da bi se dobila mogućnost efektivnog načina lociranja tražene izračunljive točke u skupu $K \cap S$. Kao posljedica teorema 3.3.3, dobiva se rezultat koji se odnosi na luk. Ukoliko se promatra izračunljiv metrički prostor (X, d, α) i dva c.e. otvorena skupa U i V u X, te ukoliko je $S := X \setminus (U \cup V)$, tada svaki izračunljiv luk A u X, s krajnjim izračunljivim točkama $a \in U$ i $b \in V$, nužno mora sijeći skup S u izračunljivoj točki (vidi teorem 3.3.4). Ovdje ćemo još jednom naglasiti da u ovom prethodno navedenom teoremu pretpostavka da je skup $A \cap S$ potpuno nepovezan iščezava, a ipak se navedeni rezultat dokazuje kao posljedica teorema 3.3.3 u kojem je pretpostavka potpune nepovezanosti neizostavna. U potpoglavlju 3.4. prethodna dva rezultata se poopćavaju na način da se pretpostavi samo da skupovi K i A sijeku skupove U i V (izostavili smo pretpostavku koja se je odnosila na važnost točaka $a \in U$ i $b \in V$). Detalje navedenog poopćenja čitatelj može pratiti kroz teorem 3.4.14. Taj teorem istaknimo kao najveći doprinos ovog poglavlja. Također, u potpoglavlju 3.4. promatra se i slučaj kada $K \cap S$ nije potpuno nepovezan. Prvo se u ovom potpoglavlju može uočiti da ukoliko je K izračunljiv lančasti kontinuum, te S proizvoljan co-c.e. zatvoren skup, i ukoliko je promatrani skup $K \cap S$ povezan, onda je nužno $K \cap S$ poluizračunljiv lančasti kontinuum (to je zapravo posljedica propozicije 3.4.2). Stoga je temeljno pitanje koje prožima ovo potpoglavlje 3.4. bilo: što se općenito može kazati o izračunljivim točkama i izračunljivosti poluizračunljivih lančastih kontinuuma? U teoremu 3.4.7 promatra se izračunljiv metrički prostor (X, d, α) te poluizračunljiv skup S u ovom prostoru. Ukoliko se pretpostavi da je S kao potprostor od (X, d), lančasti kontinuum, te se dodatno pretpostavi da postoje dva potkontinuuma K_1 i K_2 od S takva da je $S = K_1 \cup K_2$, te da postoje neke dvije točke a i b sa svojstvom da je $a \in K_1 \setminus K_2$ i $b \in K_2 \setminus K_1$, onda se dokazalo da skup S sadrži izračunljivu točku. Štoviše, u tom se teoremu dobiva da su izračunljive točke zapravo guste u skupu S. Kao direktnu posljedicu toga teorema dobiva se sličan rezultat i za luk (vidi korolar 3.4.8). Kroz teorem 3.4.9, koji teorem 3.4.7 opisuje u terminu pojma dekompozabilnosti, uvidjeli smo da svaki dekompozabilan poluizračunljiv lančasti kontinuum S u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) mora sadržavati izračunljivu točku. Nadalje, važan rezultat isprofilirao se je i kroz teorem 3.4.10 koji kaže da u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), svaki poluizračunljiv lančasti kontinuum, koji ima izoliranu i dekompozabilnu komponentu povezanosti nužno mora sadržavati izračunljivu točku (štoviše izračunljive točke su guste u toj komponenti povezanosti). Budući se kroz ovo potpoglavlje također htjelo i poopćiti rezultat koji kaže da je svaka poluizračunljiva topološka kružnica S u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) izračunljiva, dokazujemo i teorem 3.4.12. U tom teoremu je dokazano da je proizvoljan poluizračunljiv cirkularno lančasti kontinuum S u (X, d, α), koji nije lančast, nužno izračunljiv skup (ovdje, u ovoj disertaciji, ovaj rezultat je dokazan bez korištenja pretpostavke da je (X, d, α) lokalno izračunljiv). Na kraju samog poglavlja 3. pred čitatelja se stavljaju neka otvorena pitanja koja su se prirodno pojavila pri istraživanju navedenih problema ovog poglavlja.

U posljednje poglavlju ove disertacije, poglavlju 4., nastavljaju se izučavati uvjeti koji bi omogućili da poluizračunljiv skup u izračunljivom metričkom prostoru postane izračunljiv. Topologija igra veoma važnu ulogu pri opisu takvih uvjeta, kao što se do sada moglo uočiti. Glavna motivacija za ovo poglavlje bio je dobro poznati rezultat koji kaže da je poluizračunljiva ćelija izračunljiva uz dodatnu pretpostavku da je njezina rubna sfera izračunljiv skup. U tom kontekstu, kroz cijelo poglavlje 4., proučava se poluizračunljivi varšavski disk i njegova rubna varšavska kružnica. U teoremu 4.4.1 dokazuje se da je poluizračunljiv varšavski disk u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) izračunljiv ukoliko je njegova rubna varšavska kružnica poluizračunljiv skup. Glavna ideja dokaza ovog teorema sastojala se je u tome da se nekako aproksimira varšavski disk s 2-ćelijama (vidi potpoglavlje 4.2.) te da se onda nekako iskoristi tehnika 2-lanaca (vidi posebno propoziciju 4.2.1 te lemu 4.2.3). Važnost glavnog rezultat ovog poglavlja (zajedno s tehnikama koje su razvijene u svrhu njegova dokaza) jest u tome što bi on trebao pridonijeti još boljem razumijevanju veze koja se neminovno pojavljuje između topologije i same izračunljivosti, te naposlijetku svakako treba istaknuti da ovaj rezultat pridonosi dubljem shvaćanju važnosti takozvanog ,,rubnog uvjeta".

Summary

In this dissertation we have examined under what conditions sets with disconnected complements contain a computable point, or they become computable. Moreover, we have generalized our research also on sets which are homeomorphic to those sets with disconnected complements. The ambient space for this research was computable metric space (X, d, α), which represents a kind of generalization of standard computable Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We can say that a computable metric space is a metric space in which we impose computability notions using some fixed dense sequence α.

In chapter 1. we defined some basic concepts of computable analysis and we referred readers to some important results which we used throughout the whole dissertation. The main part of this chapter 1. was to emphasize the contribution of our research. We strongly believe that this paper has once more showed to us that there is a strong connection between topology and computability. Some topological properties can force a semicomputable/co-c.e. sets to become computable or at least to have computable points.

We started our main work with chapter 2. in which we have been examining co-c.e. sets with disconnected complements in a computable metric space. We focused on the case when the computable metric space (X, d, α) is effectively locally connected and when the connected components of the complement of a co-c.e. set $S \subseteq X$ can be effectively distinguished. We gave a sufficient condition that such an S contains a computable point and a sufficient condition that S is computable. We can say that the notion of effective local connectedness is the key in this chapter. We gave precise definition of that term. Because we did not want to restrict ourselves to connected open balls, we introduced in section 2.2. a certain notion that a sequence of open (connected) sets U_i is computable in (X, d, α). To do this we needed to define when some sequence of sets (A_i) effectively refines sequence of sets (B_i), and we needed a concept that two sequences of sets (A_i) and (B_i) are computably equivalent. Also in section 2.4. we introduced the concept which describes when some disconnected open set V in (X, d, α) is effectivelly disconnected because we wanted to have a notion which will generalize the situation when disconnected open set V in (X, d, α) has finitely many components. The main result that we have proved in chapter 2. says that if (X, d, α) is an effectively locally connected computable metric space and if S is a co-c.e. set in (X, d, α) such that $X \setminus S$ is effectivelly disconected and such that each point of S lies in the boundary of at least two different components of $X \setminus S$, then S needs to be a computable set in (X, d, α) (see theorem 2.4.5 in section 2.4.). We have also proved that in effectively locally connected computable metric space (X, d, α), any co-c.e. set S, such that $X \setminus S$ is effectively disconnected, has to contain a computable point if we additionaly assume that metric space (X, d) is connected and complete (see corollary 2.4.6). We gave another sufficient condition that co-c.e. set with effectively disconnected complement in complete effectively locally connected computable metric space (X, d, α) contains a computable point. We showed that S contains a computable point x if there exists a connected set A which intersects two different components of $X \setminus S$. Moreover, we proved that such x can be found sufficiently close to A (see theorem 2.4.8).

Chapter 3. was devoted to generalization of computable version of Bolzano's theorem. If we assume that K is some computable and connected subset of Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ which intersects both components of $\mathbb{R}^2 \setminus S$, where $S = \mathbb{R} \times \{0\}$, then K certainly intersects S because K is connected. The question is does K needs to intersect S in a computable point? The computable version of Bolzano's theorem states that if we take for a set K to be a graph of a computable function $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, such that $f(0) < 0$ and $f(1) > 0$, then K intersects S in a computable point. In section 3.3. we have generalized this theorem in the following way. First, we observed computable metric space (X, d, α) and two c.e. open sets U and V in X. We defined set S to be the complement of the set $U \cup V$ in X. Now, we assumed that K is a continuum in X chainable from a to b, where $a \in U$ and $b \in V$, and we assumed that K is a computable set and that points a and b are computable. Additionally, we assumed that $K \cap S$ is totally disconnected. Then we proved that $K \cap S$ contains a computable point (see theorem 3.3.3). The idea of the proof of that theorem was to cover set K by (U, V)-chains, by chains which have the property that for each two adjacent links at least one lies in U or V (see section 3.1.). The necessity of the assumption of total disconnectedness of $K \cap S$ is closely related to the technique of (U, V)-chains. Also to prove the theorem 3.3.3 we needed to develop some techniques of separators, augmentators and locators (section 3.2.) to be able to precisely (effectively) locate the required computable point in the set $K \cap S$. As a consequence of the theorem 3.3.3, we have gotten the result for an arc. If we observe a computable metric space (X, d, α) and two c.e. open sets U and V in X, and if we define $S := X \setminus (U \cup V)$, then each computable arc A in X, with computable endpoints $a \in U$ and $b \in V$ needs to intersect the set S in a computable point (see theorem 3.3.4). We have to emphasize again that in this theorem we did not need to assume that the set $A \cap S$ is totally disconnected, and yet we have proved this theorem using the theorem 3.3.3. In section 3.4. we have generalized these two results assuming that this two sets K and A intersect sets U and V (we dropped out the assumption which referred to importance of points $a \in U$ and $b \in V$). The details of this generalization, reader can observe in theorem 3.4.14. Also in section 3.4. we have examined the case when $K \cap S$ is not totally disconnected. First in this section we saw that if K is a computable chainable continuum and S is any co-c.e. closed set and if $K \cap S$ is connected, then $K \cap S$ is a semi-computable chainable continuum (actually this is a consequence of the proposition 3.4.2). So the general question, which we have dealt with in section 3.4. was: what can be in general said about computable points and computability of semi-computable chainable continua? In theorem 3.4.7 we observed computable metric space (X, d, α) and a semi-computable set S in that space. We assumed that S is, as a subspace of (X, d), chainable continuum and additionally we assumed that there exist two subcontinua K_1 and K_2 of S such that $S = K_1 \cup K_2$ and there there exist two points a and b such that $a \in K_1 \setminus K_2$ and $b \in K_2 \setminus K_1$. Then we proved that S contains a computable point. Moreover, in that theorem we have proved that computable points are dense in S. As a direct consequence of the theorem 3.4.7 we got the same result for an arc (see corollary 3.4.8). Throughout the theorem 3.4.9 we saw that any decomposable semi-computable chainable continuum S in computable metric space (X, d, α) has to contain a computable point (this theorem is closely related to the theorem 3.4.7 and it puts that theorem in the context of decomposability). Also, an important result came out through theorem 3.4.10 which claims thai in computable metric space (X, d, α), any semi-computable chainable continuum, which has isolated and decomposable connected component, has a computable point, moreover computable points are dense in that connected component. Further, we wanted to generalize a result which says that any semi-computable topological circle S in computable metric space (X, d, α) has to be a computable set. We did it throughout the theorem 3.4.12. In that theorem we have proved that any semi-computable circulary chainable continuum S in (X, d, α), which is not chainable, needs to be a computable set (and we did it without assumption that (X, d, α) is locally computable). As a conclusion of the chapter 3. we gave some open questions which naturally appeared while we were working on this problems.

Last chapter of this dissertation, chapter 4., was dedicated to finding out more some conditions which will allow a semi-computable set in computable metric space to became computable. We know that topology plays an important role in the description of such conditions. The main motivation for this chapter was the well known result which says that a semi-computable cell is computable if its boundary sphere is computable. In that context, throughout the chapter 4., we have been investigating semi-computable Warsaw discs and their boundary Warsaw circles. We proved in theorem 4.4.1 that a semicomputable Warsaw disc in computable metric space (X, d, α) is computable if its boundary Warsaw circle is semi-computable. The main idea behind the proof of this theorem was to approximate the Warsaw disc by 2-cells (see section 4.2.) and then to adjust somehow the technique of 2-chains (see especially proposition 4.2.1 and lemma 4.2.3). We believe that the main result of this chapter and the techniques that we used in its proof contribute to the better understending of relationship between topology and computability and also, in particular, to the understending of the so-called "boundary condition".

Životopis

Bojan Pažek je rođen u Zadru 14. veljače 1989. godine. Svoje djetinstvo proveo je u mjestu Kali na otoku Ugljanu. Osnovnu školu ,,Valentin Klarin" pohađao je dijelom u Kalima, a dijelom u mjestu Preko na otoku Ugljanu. Po završetku osnovne škole upisuje Nadbiskupsku Klasičnu Gimnaziju u Zadru (današnja Klasična Gimnazija Ivana Pavla II.) koju završava 2007. godine. Iste godine upisuje preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu kojeg završava 2010. godine i tada upisuje diplomski studij na smjeru Teorijska matematika. Diplomski rad pod naslovom ,,Konfiguracijski prostor robotske ruke i neke primjene u algebarskoj topologiji" izradio je pod vodstvom prof. dr. sc. Dragutina Svrtana. Profesor Dragutin Svrtan odigrao je veliku ulogu u njegovom daljnjem profesionalnom usmjerenju te zahvaljujući njemu Bojan upisuje doktorski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Kao mentor savjetnik pomogao mu je da se profilira u znanstvenom smislu te povezuje Bojana sa izv. prof. dr. sc. Zvonkom Iljazovićem koji ga prima kao svog doktoranda. Od 2014. godine zaposlen je na Arhitektonskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u statusu asistenta na kabinetu za matematiku, nacrtnu geometriju i perspektivu.

Bojan Pažek je bio sudionik, te održao predavanja, na sljedećim konferencijama:

1. *19. znanstveno-stručni kolokvij za geometriju i grafiku*, Starigrad-Paklenica, Hrvatska, 2016 (Znanstveni skupovi i radionice, usmeno izlaganje)
   "Generalized Computable intermediate Value Theorem";

2. *1ST Croatian Combinatorial Days*, Zagreb, Hrvatska, 2016 (Znanstveni skupovi i radionice, usmeno izlaganje)
   "Computable intermediate Value Theorem";

3. *6TH Croatian Mathematical Congress*, Zagreb, Hrvatska, 2016 (Znanstveni skupovi i radionice, usmeno izlaganje)
   "(U, V)-chains and Computable Transition Points";

4. *19TH OeMG Congress and Annual DMV Meeting*, Salzburg, Austrija, 2017 (Znanstveni skupovi i radionice, usmeno izlaganje)
   "Computability of Warsaw Disc and some Generalizations".

Popis objavljenih radova:

1. Iljazović, Z., Pažek B.: Co-c.e. sets with disconnected complements, *Theory Comput. Syst.* (2017). doi:10.1007/s00224-017-9781-x.

2. Iljazović, Z., Pažek, B.: Computable intersection points, *Computability*, Vol. 7, no. 1, pp. 57-99, 2018.

3. Iljazović, Z., Pažek, B.: Warsaw discs and semicomputability, *Topology and its Applications*, 239 (2018) 308–323.