Jako regularni grafovi

Crnoja, Luka

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Luka Crnoja

Jako regularni grafovi

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, studeni 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) je jednostavan graf s v vrhova koji su svi stupnja k. Nadalje, svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda, a svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda. U ovom diplomskom radu obradit će se osnovni rezultati o jako regularnim grafovima. Diplomski rad je podijeljen na nekoliko poglavlja.

U prvom poglavlju bavimo se definicijom i primjerima jako regularnih grafova. Krenut ćemo s definicijom pojmova graf i regularan graf i oko toga graditi teorijski dio našeg prvog poglavlja. Nakon toga ćemo definirati jako regularan graf i njegov komplement, pokazati neke osnovne rezultate o parametrima jako regularnog grafa, a zatim obraditi najpoznatije primjere jako regularnih grafova i kombinatorno dokazati koji su parametri svakog od njih.

U idućem poglavlju bavit ćemo se spektrom jako regularnog grafa. Definirat ćemo matricu susjedstva A, a zatim lemom pokazati koja je interpretacija brojeva u potenciji matrice A^t. Nakon toga vidjet ćemo koje su svojstvene vrijednosti matrice A i koliko ih ima. Poglavlje završava uvjetima za egzistenciju jako regularnih grafova kao što je npr. uvjet cjelobrojnosti.

To znanje ćemo još malo proširiti u idućem poglavlju u kojem ćemo obraditi još neke uvjete za egzistenciju jako regularnih grafova kao što su apsolutna međa i Kreinovi uvjeti i neke primjere iz kojih ćemo uvidjeti koliko je zapravo ova tema opširna.

U zadnjem poglavlju ćemo povezati sve rezultate koje smo dobili prilikom pisanja ovog diplomskog rada. Generirat ćemo sve uređene četvorke parametara (v, k, λ, μ) koji imaju maksimalno 50 vrhova, pa ćemo za svaku od njih provjeriti uvjete za postojanje jako regularnog grafa koje smo obradili u prethodnim poglavljima i tako vidjeti koje su od njih dopustivi parametri nekog jako regularnog grafa. U dodatku bit će napisan Maxima [20] kod i algoritam koji smo provodili da bi dobili sve četvorke koje su kandidat za parametre nekog jako regularnog grafa. Daljnjim provođenjem još nekih nužnih uvjeta vidjet ćemo da će se broj četvorki koje su parametri jako regularnog grafa smanjiti. Sve to će biti prikazano u tablici uz detaljna objašnjenja.

Grafovi su nacrtani u programskog paketu Maxima [20]. Ovom prilikom zahvaljujem svojoj obitelji što mi je bila veliki oslonac na ovom putu. Također jedno veliko hvala i mom mentoru za sve.

2 Definicija i primjeri jako regularnih grafova

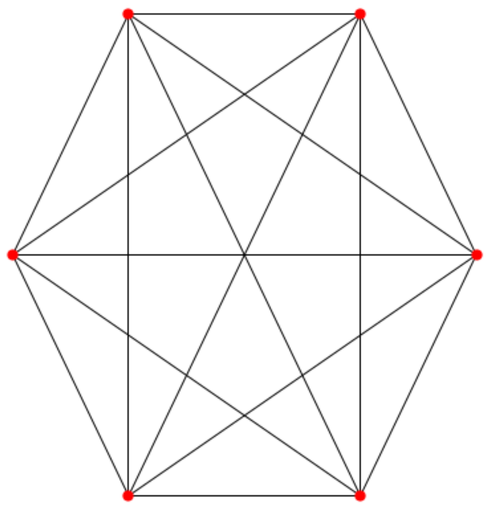
U ovom radu ograničit ćemo se na jednostavne grafove. Kasnije ćemo definirati pojam jako regularnog grafa, koji je ujedno i tema ovog diplomskog rada. Uvedimo najprije osnovne pojmove.

Definicija 2.1. Graf *je uređeni par* $\Gamma = (V, E)$*, gdje je* V *neprazni konačni skup čije elemente nazivamo vrhovima, a* E *je konačni skup dvočlanih podskupova skupa* V *i njegove elemente nazivamo bridovima.*

Za brid $e = \{x, y\}$ kažemo da spaja vrhove x i y. U toj situaciji kažemo da su vrhovi x i y susjedni. Ako ne postoji brid koji spaja vrhove x i y kažemo da su oni nesusjedni. Također, kažemo da je vrh x incidentan s bridom e. Naravno, vrh y je također incidentan s bridom e. Stupanj vrha x grafa Γ jest broj bridova koji su incidentni s vrhom x, a označavamo ga $deg(x)$ ili $d_\Gamma(x)$. Izolirani vrh je vrh stupnja 0, a vrh stupnja 1 zovemo krajnji vrh ili list. Za graf sa samo jednim vrhom kažemo da je trivijalan.

Definicija 2.2. *Za graf* Γ *kažemo da je* regularan*, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je graf* Γ k-regularan *ako je* $deg(x) = k$*,* $\forall x \in V$*. Cijeli broj* k *tada ćemo zvati* stupanj regularnosti *grafa* Γ*.*

Potpun graf je graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom. Oznaka za potpun graf je K_v, pri čemu je $v = |V|$ (vidi sliku 1). Nulgraf je graf u kojem je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.



Slika 1: Potpun graf K_6.

Definicija 2.3. *Jako regularan graf s parametrima* (v, k, λ, μ) *je* k-regularan *graf* Γ *s* v *vrhova koji nije potpun graf ili nulgraf. Nadalje, za svaka dva vrha* x *i* y *grafa* Γ *vrijedi da je broj njihovih zajedničkih susjeda jednak:*
1. λ, *ako su* x *i* y *susjedni vrhovi,*
2. μ, *ako su* x *i* y *nesusjedni vrhovi.*

Parametri jako regularnog grafa nisu nezavisni.

Propozicija 2.4. *Ako postoji jako regularan graf s parametrima* (v, k, λ, μ), *tada vrijedi:*

$$k\,(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\,\mu.$$

Dokaz. Neka je $x \in V$. Prebrojavamo na dva načina parove susjednih vrhova (y, z) takve da je y susjedan s x, a z nije susjedan s x, tj. elemente skupa

$$\{(y, z) \mid y, z \in V,\ y \,\text{i}\, z \,\text{su susjedni},\ \ x \,\text{i}\, y \,\text{su susjedni}, x \,\text{i}\, z \,\text{nisu susjedni}\}.$$

Lijevu stranu dobivamo na idući način: vrh x ima k susjeda, pa y možemo izabrati na k načina. Nadalje, za svaki od tih k izbora za y, postoji $k - \lambda - 1$ izbora za z jer vrh y ima k susjednih vrhova, od kojih moramo isključiti vrh x i još λ vrhova koji su zajednički susjedi od x i y. Time smo dobili lijevu stranu jednakosti. S druge strane, desnu stranu jednakosti dobivamo na idući način: z možemo izabrati na $v - k - 1$ načina (od ukupnog broja vrhova oduzmemo k vrhova koji su susjedni s x i sam x). Sada za svaki od $v - k - 1$ izbora za z, y možemo izabrati na μ načina, jer je y zajednički susjed od x i z koji su nesusjedni. Budući da smo isti skup prebrojili na dva načina, slijedi jednakost $k\,(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\,\mu$. □

Komplement grafa Γ je graf $\overline{\Gamma}$ s istim skupom vrhova V kao i graf Γ, pri čemu su dva vrha susjedna u $\overline{\Gamma}$ ako nisu susjedna u Γ.

Propozicija 2.5. *Komplement jako regularnog grafa je jako regularan.*

Dokaz. Neka je Γ jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) i neka je $\overline{\Gamma}$ njegov komplement. Kako je svaki vrh u grafu Γ stupnja k, iz definicije komplementa grafa zaključujemo da je svaki vrh u grafu $\overline{\Gamma}$ stupnja $v-k-1$, tj. graf $\overline{\Gamma}$ je regularan stupnja $\overline{k} = v-k-1$. Nadalje, neka su x i y susjedni vrhovi grafa $\overline{\Gamma}$. Iz definicije komplementa grafa zaključujemo da vrhovi x i y nisu susjedni u grafu Γ. Sada želimo prebrojiti zajedničke susjede u komplementu, tj. vrhove u grafu Γ koji nisu susjedi niti od x niti od y. Znamo da u grafu Γ x ima k susjeda, y ima k susjeda, a zajedničkih susjeda imaju μ. Primjenom formule uključivanja-isključivanja (FUI) na njihove susjede, zaključujemo da unija zajedničkih susjeda vrhova x i y ima ukupno $2k - \mu$ elemenata. Kako mi tražimo vrhove u grafu Γ koji nisu susjedi niti od x niti od y, trebamo ovu uniju komplementirati. Dobivamo da je:

$$\overline{\lambda} = (v - 2) - 2k + \mu = v - 2k + \mu - 2.$$

Neka su sada x i y nesusjedni vrhovi grafa $\overline{\Gamma}$. Iz definicije komplementa grafa zaključujemo da su vrhovi x i y susjedni u grafu Γ. Sada opet želimo prebrojiti zajedničke susjede u komplementu, tj. vrhove u grafu Γ koji nisu susjedi niti od x niti od y. Znamo da u grafu Γ x ima k susjeda, y ima k susjeda, a zajedničkih susjeda imaju λ. Primjenom formule uključivanja-isključivanja zaključujemo da unija ima $2k - \lambda$ elemenata. Komplementiranjem dobivamo da je:

$$\overline{\mu} = v - 2k + \lambda.$$

□

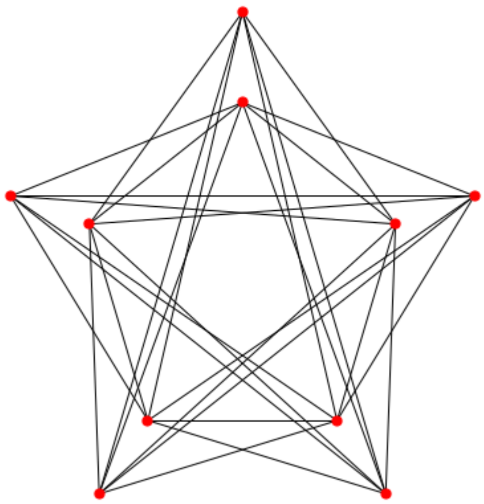
Korolar 2.6. *Ako postoji jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ), tada vrijedi:*

$$v \geq 2k - \mu + 2,$$
$$v \geq 2k - \lambda.$$

Primjer 2.7. *Neka je M skup sa m elemenata, pri čemu je $m \geq 4$. Neka je skup vrhova V jednak $\mathcal{P}_2(M)$, odnosno skupu dvočlanih podskupova skupa kardinalnosti m. Trokutasti graf $T(m)$ $(m \geq 4)$, uz definiciju da su dva vrha susjedna ako nisu disjunktna, je jako regularan, s parametrima*

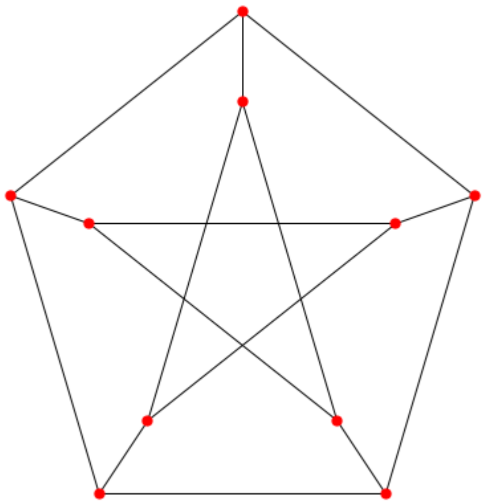
$$v = \frac{1}{2}\, m\,(m-1), \;\; k = 2\,(m-2), \;\; \lambda = m-2, \;\; \mu = 4.$$

Parametar v lako dobijemo jer je to upravo broj dvočlanih podskupova m-članog skupa. Nadalje, neka je $\{x, y\}$ jedan vrh našeg grafa. Postoje $m - 2$ dvočlana podskupa koja sadrže element x uz uvjet da drugi element u tom podskupu nije y. Analogno ponavljamo postupak za element y i zaključujemo da je $k = 2\,(m-2)$. Nadalje, neka su $\{x, y\}$ i $\{y, z\}$ dva susjedna vrha grafa. Njihovi zajednički susjedi su svi oni vrhovi koji sadrže element y, a ne sadrže elemente x i z uz specijalan slučaj $\{x, z\}$. Slijedi da je $\lambda = (m-1)-1-1+1$ iz čega zaključujemo da je $\lambda = m - 2$. Neka su sada $\{x, y\}$ i $\{z, w\}$ dva nesusjedna vrha grafa. Svi njihovi zajednički susjedi su vrhovi $\{x, z\}$, $\{x, w\}$, $\{y, z\}$ i $\{y, w\}$. Slijedi da je $\mu = 4$.



Slika 2: $T(5)$ graf.

Primjer 2.8. *Petersenov graf je jednostavan* 3*-regularan graf s* 10 *vrhova i* 15 *bridova. Nazvan je po Juliusu Petersenu koji ga je otkrio* 1898*. godine. Petersenov graf je jako regularan s parametrima* $(10, 3, 0, 1)$ *i komplement je grafa* $T(5)$ *(vidi sliku 3).*

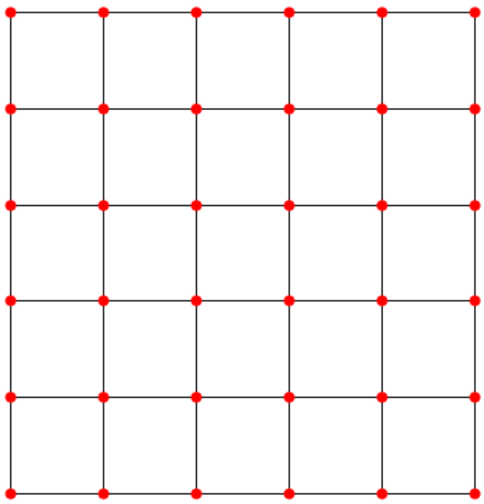


Slika 3: Petersenov graf.

Primjer 2.9. *Graf kvadratne rešetke* $\mathcal{L}_2(m)$ *sastoji se od vrhova skupa* $S \times S$*, gdje je* S *skup kardinaliteta* m*; dva različita vrha su susjedna ako se podudaraju u jednoj koordinati (vidi sliku 4). Graf* $\mathcal{L}_2(m)$ *je jako regularan s parametrima*

$$v = m^2, \ \ k = 2\,(m-1), \ \ \lambda = m-2, \ \ \mu = 2.$$

Parametar v *lako dobijemo jer koordinatu* x *iz uređenog para* (x, y) *skupa* $S \times S$ *možemo izabrati na* m *načina. Analogno radimo za koordinatu* y *i ukupno dobivamo* m^2 *vrhova. Nadalje, neka je* (x, y) *jedan vrh našeg grafa. Postoji* $m-1$ *uređenih parova koji za prvu koordinatu sadrže element* x *uz uvjet da druga koordinata nije* y*. Analogno ponavljamo postupak za koordinatu* y *i zaključujemo da je* $k = 2\,(m-1)$*. Nadalje, neka su* $\{x, y\}$ *i* $\{x, z\}$ *dva susjedna vrha grafa. Njihovi zajednički susjedi su svi oni vrhovi koji sadrže koordinatu* x *kao prvu koordinatu, a ne sadrže koordinate* y *i* z *kao drugu koordinatu. Slijedi da je* $\lambda = m-2$*. Neka su sada* $\{x, y\}$ *i* $\{z, w\}$ *dva nesusjedna vrha grafa. Svi njihovi zajednički susjedi su vrhovi* $\{x, w\}$ *i* $\{z, y\}$*. Slijedi da je* $\mu = 2$*.*

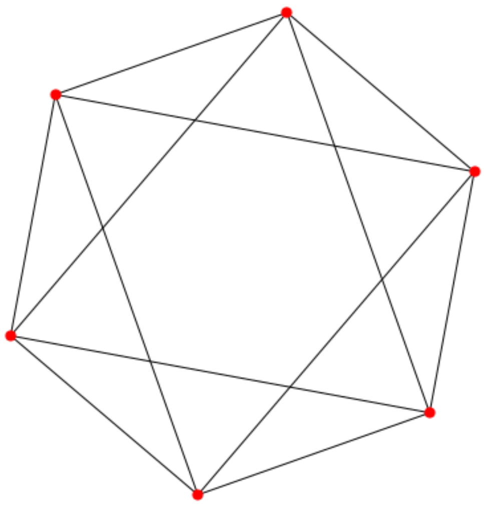


Slika 4: $\mathcal{L}_2(6)$ graf.

Primjer 2.10. *Disjunktna unija* r *potpunih grafova od kojih svaki ima* m *vrhova* $(r, m > 1)$ *je jako regularan graf s parametrima*

$$v = rm, \ \ k = m-1, \ \ \lambda = m-2, \ \ \mu = 0.$$

Zbog disjunktnosti slijedi da je ukupan broj vrhova $v = rm$. Nadalje, neka je x jedan vrh našeg grafa. Vrh x pripada točno jednom od potpunih grafova K_m. Slijedi da je vrh x stupnja $k = m - 1$ jer ima točno $m - 1$ susjeda. Nadalje, neka su x i y dva susjedna vrha grafa. Iz toga slijedi da su x i y vrhovi istog potpunog grafa (inače ne bi bili susjedni). Njihovi zajednički susjedi su svi oni vrhovi koji su preostali u tom potpunom grafu, a takvih je točno $\lambda = m - 2$. Neka su sada x i y dva nesusjedna vrha grafa. Oni pripadaju disjunktnim potpunim grafovima pa nemaju zajedničkih susjeda i vrijedi $\mu = 0$.
Ovaj graf označavamo $r \cdot K_m$. Graf $r \cdot K_2$ zovemo "ljestve". Komplement od $r \cdot K_m$ zovemo potpuni multipartitni graf i označavamo $K_{m,\ldots,m}$, a komplement "grafa ljestve" zovemo "coctail party graf" i označavamo CP(r). Zamišljamo ga kao r parova pri čemu svaki sudionik priča međusobno sa svima osim sa svojim partnerom (vidi sliku 5).



Slika 5: Graf $CP(3)$.

Propozicija 2.11. *Neka je Γ jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ). Tada je $\mu = 0$ ako i samo ako je Γ disjunktna unija potpunih grafova reda $k + 1$.*

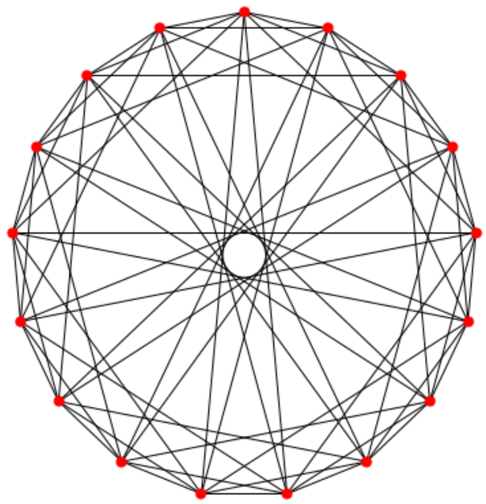
Dokaz. Zbog $\mu = 0$ pokaže se da je "biti susjedan" relacija ekvivalencije na skupu vrhova. Ako je vrh x susjedan vrhu y, direktno iz toga imamo da je vrh y susjedan vrhu x, tj. relacija "biti susjedan" je simetrična na skupu vrhova. Neka su x, y i z vrhovi takvi da je vrh x susjedan s vrhom y, a vrh y

susjedan s vrhom z. Kad vrhovi x i z ne bi bili susjedni, iz toga bi slijedilo da je $\mu \neq 0$, jer im je vrh y zajednički susjed. Tako dolazimo do kontradikcije pa zaključujemo da je relacija "biti susjedan" tranzitivna na skupu vrhova. Slijedi da je relacija "biti susjedan" relacija ekvivalencije na skupu vrhova. Klase ekvivalencije su potpuni podgrafovi na koje se graf raspada, a oni su zbog regularnosti veličine $k+1$. $\square$

Primjer 2.12. *Neka je q potencija prostog broja i $q \equiv 1 \,(mod\ 4)$. Skup vrhova Paleyevog grafa $P(q)$ su elementi konačnog polja $GF(q)$ u kojem su dva vrha susjedna ako je njihova razlika nenul kvadrat. Naime, kako je -1 kvadrat u $GF(q)$, "biti susjedan" je simetrična relacija. Paleyev graf je jako regularan s parametrima*

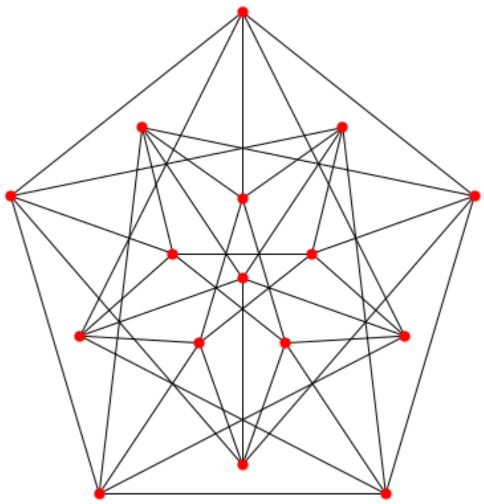
$$v = q,\ \ k = \frac{1}{2}\,(q-1),\ \ \lambda = \frac{1}{4}\,(q-5),\ \ \mu = \frac{1}{4}\,(q-1)$$

i izomorfan je svom komplementu.



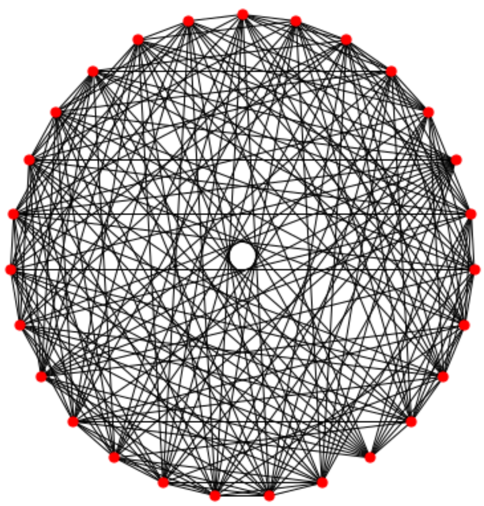
Slika 6: Graf $P(17)$.

Primjer 2.13. *Clebschov graf ima za vrhove sve podskupove od $\{1,2,3,4,5\}$ koji su parne kardinalnosti. Dva vrha su susjedna ako im simetrična razlika ima kardinalnost 4. To je jako regularan graf s parametrima $(16,5,0,2)$. Vidi sliku 7. Komplement Clebschova grafa je jako regularan graf s parametrima $(16,10,6,6)$.*



Slika 7: Clebschov graf.

Primjer 2.14. *Schläflijev graf je jako regularan graf koji ima* 27 *vrhova i* 216 *bridova i parametre* $(v, k, \lambda, \mu) = (27, 16, 10, 8)$. *Susjedstvo svakog vrha Schläflijevog grafa čini podgraf sa* 16 *vrhova u kojem svaki vrh ima* 10 *susjeda. Ti podgrafovi su izomorfni komplementu Clebschova grafa.*



Slika 8: Schläflijev graf.

Definicija 2.15. *Konačna incidencijska struktura je uređena trojka* (T, B, I)*. Pritom je* T *konačni skup čije elemente zovemo točkama,* B *je konačni skup čije elemente zovemo blokovima ili pravcima, a* $I \subseteq T \times B$ *je relacija koju zovemo incidencijom.*

Definicija 2.16. *Neka su* $v > k \geq t \geq 0$ *i* $\lambda > 0$ *cijeli brojevi. Dizajn s parametrima* $t - (v, k, \lambda)$ *je konačna incidencijska struktura sa svojstvima:*
1. *ukupan broj točaka je* v*,*
2. *na svakom bloku leži točno* k *točaka,*
3. *svaki* t*-člani skup točaka sadržan je u točno* λ *blokova.*

Dizajni s parametrom $\lambda = 1$ nazivaju se Steinerovi dizajni. Oznaka im je $S(t, k, v)$.

Primjer 2.17. *Blokovni graf Steinerova 2-dizajna* $S(2, m, n)$ *je graf s blokovima kao vrhovima, pri čemu su dva bloka susjedna ako imaju neprazan presjek. Takav graf je jako regularan s parametrima:*

$$v = \frac{n^2 - n}{m^2 - m}, \;\; k = \frac{mn - m^2}{m - 1}, \;\; \lambda = (m-1)^2 + \frac{n-1}{m-1} - 2, \;\; \mu = m^2.$$

3 Spektar jako regularnog grafa

Neka je Γ graf sa skupom vrhova $\{x_1, \ldots, x_v\}$. *Matrica susjedstva* $A(\Gamma) = (a_{ij})$ je kvadratna matrica reda v definirana pravilom:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ako su } x_i \text{ i } x_j \text{ susjedni} \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primijetimo da je matrica A simetrična matrica s nulama na glavnoj dijagonali. Ona posjeduje jedno važno svojstvo. Naime, njenim potenciranjem dobivamo informaciju o broju šetnji proizvoljne duljine u našem grafu. O tome nam govori sljedeća lema.

Definicija 3.1. *Šetnja u grafu* Γ *je niz* $W = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k$*, čiji su članovi naizmjence vrhovi* v_i *i bridovi* e_i*, takvi da su krajevi brida* e_i *upravo vrhovi* v_{i-1} *i* v_i*, gdje je* $1 \leq i \leq k$*. Kažemo da je graf* Γ *povezan ako između svaka dva vrha grafa postoji šetnja.*

Lema 3.2. *Ako je* A *matrica susjedstva grafa* Γ*, tada za proizvoljan nenegativan cijeli broj* $t \geq 0$ *i svaka dva vrha* x_i *i* x_j *grafa* Γ*, element* $(A^t)_{(x_i, x_j)}$ *jednak je broju šetnji duljine* t *od* x_i *do* x_j *u grafu* Γ*.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati indukcijom po t. Neka $w_t(x_i, x_j)$ označava broj šetnji duljine t od x_i do x_j u grafu Γ. Tvrdnja je očigledna za male vrijednosti broja t. Šetnja duljine 0 sastoji se samo od jednog vrha (ne sadrži bridove), pa je stoga

$$w_0(x_i, x_j) = \begin{cases} 1\,, \text{ ako je } x_i = x_j \\ 0\,, \text{ ako je } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Kako je $A^0 = I$, pri čemu je I jedinična matrica, vidimo da zaista vrijedi

$$(A^0)_{(x_i,x_j)} = w_0(x_i, x_j).$$

Šetnja duljine 1 sastoji se od početnog vrha, krajnjeg vrha i brida kojim su ti vrhovi povezani, pa je stoga

$$w_1(x_i, x_j) = \begin{cases} 1\,, \text{ ako je } \{x_i, x_j\} \in E \\ 0\,, \text{ ako je } \{x_i, x_j\} \notin E. \end{cases}$$

Vidimo da vrijednost $w_1(x_i, x_j)$ predstavlja odgovarajući element matrice susjedstva A, pa stoga tvrdnja teorema vrijedi i u ovom slučaju. Pretpostavimo sada da je tvrdnja teorema dokazana za neki $t_0 \geq 0$ i dokažimo ga za $t_0 + 1$. Po definiciji, znamo da vrijedi:

$$(A^{t_0+1})_{(x_i,x_j)} = \sum_{x_k \in V} (A^{t_0})_{(x_i,x_k)} \cdot A_{(x_k,x_j)},$$

a kako je $A_{(x_k,x_j)} = 1$ samo za $x_k \in N_\Gamma(x_j)$, slijedi

$$(A^{t_0+1})_{(x_i,x_j)} = \sum_{x_k \in N_\Gamma(x_j)} (A^{t_0})_{(x_i,x_k)}.$$

Po pretpostavci indukcije, vrijedi da je

$$(A^{t_0})_{(x_i,x_k)} = w_{t_0}(x_i, x_k),$$

tako da je

$$(A^{t_0+1})_{(x_i,x_j)} = \sum_{x_k \in N_\Gamma(x_j)} w_{t_0}(x_i, x_k).$$

S druge strane, svaka šetnja dužine $t_0 + 1$ od x_i do x_j određuje jednoznačno šetnju dužine t_0 od x_i do nekog suseda x_k vrha x_j (praćenu bridom od x_k do x_j). Vrijedi i obrat: svakoj šetnji dužine t_0 od x_i do nekog suseda x_k

vrha x_j odgovara točno jedna šetnja dužine $t_0 + 1$ od x_i do x_j. Zbog toga zaključujemo:

$$w_{t_0+1}(x_i, x_j) = \sum_{x_k \in N_\Gamma(x_j)} w_{t_0}(x_i, x_k).$$

Sada iz svega lako zaključujemo da zaista vrijedi

$$(A^{t_0+1})_{(x_i,x_j)} = w_{t_0+1}(x_i, x_j).$$

□

Neka je Γ jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) i $A = A(\Gamma)$. Ako pomnožimo matricu susjedstva A sa samom sobom dobivamo matricu $A^2 = A \cdot A$. Primjenom prethodnog teorema, zaključujemo da će tada na mjestu $(A^2)_{(x_i,x_j)}$ pisati sljedeće:

$$(A^2)_{(x_i,x_j)} = \sum_{k=1}^{v} A_{(x_i,x_k)} \cdot A_{(x_k,x_j)}.$$

Dakle, u novoj matrici na mjestu (x_i, x_j) pisat će broj uspješnih prolazaka od vrha x_i do vrha x_j preko nekog trećeg vrha x_k. Prolaz će biti uspješan ako postoji brid između x_i i x_k , te između x_k i x_j. Primijetimo da nova matrica neće sadržavati samo nule i jedinice već može sadržavati i druge prirodne brojeve. Ovisno o tome jesu li x_i i x_j susjedni ili nesusjedni, taj broj bit će jednak λ ili μ. Stoga je

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu\,(J - I - A). \tag{1}$$

J označava kvadratnu matricu reda v kojoj su sve vrijednosti elemenata jednake 1. Imamo sljedeće leme:

Lema 3.3. *Neka je J kvadratna matrica reda v kojoj su sve vrijednosti elemenata jednake* 1*. Ona ima svojstvene vrijednosti* 0 *i v koje imaju kratnosti $v - 1$ i* 1 *redom.*

Dokaz. Računamo karakteristični polinom matrice J. Znamo da je karakteristični polinom $k_J(x) = det(J - xI)$. U matrici $J - xI$ svi elementi koji nisu na glavnoj dijagonali imaju vrijednost 1, a elementi na glavnoj dijagonali imaju vrijednost $1 - x$. Slijedi:

$$k_J(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}.$$

Od prvog retka determinante oduzmemo drugi, od drugog retka oduzmemo treći i tako dalje. Zatim izlučimo $-x$ iz svih redaka determinante osim zadnjeg. Dobivamo sljedeće:

$$\begin{vmatrix} -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (-x)^{v-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Zatim zbroj drugog do zadnjeg stupca dodamo prvom stupcu:

$$(-x)^{v-1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1-x+(v-1)\cdot 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-x \end{vmatrix}.$$

Sada razvijemo determinantu po prvom stupcu:

$$(-x)^{v-1}(-1)^{v-1}(1-x+(v-1)\cdot 1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

Zadnja determinanta jednaka je $(-1)^{v-1}$, pa dobivamo rezultat $(-x)^{v-1}(1-x+(v-1)\cdot 1)$. Konačno, naša determinanta jednaka je $(-x)^{v-1}(v-x)$. Znamo da su svojstvene vrijednosti matrice J nultočke ovog polinoma pa dobivamo da su svojstvene vrijednosti 0 i v. Također, eksponent koji stoji uz bazu $-x$ je kratnost svojstvene vrijednosti 0. Vidimo da je svojstvena vrijednost 0 kratnosti $v-1$. Analogno za svojstvenu vrijednost v zaključujemo da je kratnosti 1. Time je naša tvrdnja dokazana. □

Lema 3.4. *Graf* Γ *je* k*-regularan ako i samo ako je* $AJ = JA = kJ$.

Dokaz. Neka je graf Γ k-regularan. Iz toga i definicije matrice susjedstva zaključujemo da će u svakom retku matrice susjedstva A biti točno k jedinica. Kada tu matricu pomnožimo s matricom J zaključujemo da je produkt AJ matrica kojoj će svaki element biti upravo broj k. Npr. element u prvom retku i prvom stupcu matrice AJ dobivamo tako da pomnožimo prvi redak matrice A s prvim stupcem matrice J, k puta nam se pojavljuje umnožak $1 \cdot 1$ pa je taj element k. Jednako dobivamo za ostale elemente matrice AJ. Postupak je analogan kada pomnožimo matricu J matricom A. Zaključujemo da vrijedi $AJ = JA = kJ$. Obratno, ako vrijedi $AJ = JA = kJ$ onda iz toga i definicije matrice J zaključujemo da matrica A mora biti matrica koja u svakom retku i svakom stupcu ima k jedinica iz čega zaključujemo da je to matrica susjedstva grafa Γ koji je k-regularan. □

Lema 3.5. *Neka je Γ graf sa matricom susjedstva A. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
1. *Γ je regularan graf,*
2. *$AJ = JA$,*
3. *vektor $j = (1, 1, \ldots, 1)$ je svojstveni vektor od A.*

Dokaz. Ekvivalentnost tvrdnji 1. i 2. dokazali smo u prethodnoj lemi. Vrijednosti elemenata u produktu $A \cdot j^T$ su stupnjevi vrhova grafa Γ. Graf je regularan ako i samo ako je $A \cdot j^T$ višekratnik od j^T, a to znači da je j svojstveni vektor matrice A. □

Lema 3.6. *Neka je Γ k-regularan graf. Ako je graf Γ povezan, tada je kratnost svojstvene vrijednosti k jednaka* 1.

Dokaz. Neka $x = [x_1, x_2, \ldots, x_v]^t$ označava neki nenul vektor za koji vrijedi jednakost $Ax = kx$ i pretpostavimo da je x_j element vektora x koji ima najveću apsolutnu vrijednost. Kako je $(Ax)_j = kx_j$ dobivamo da vrijedi $\sum' x_i = kx_j$ gdje $\sum'$ označava sumaciju onih k vrhova v_i koji su susjedni vrhu v_j. Slijedi da je $x_i = x_j$ za sve ove vrhove. Ako je Γ povezan, možemo postupati sukcesivno ovom načinu i pokazati da su svi elementi vektora x jednaki. Slijedi da je vektor x zapravo vektor j pomnožen brojem k i da prostor svojstvenih vektora pridružen svojstvenoj vrijednosti k ima dimenziju 1. Time je dokazana naša tvrdnja. □

Iz svega ovoga slijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.7. *Graf Γ je jako regularan s parametrima (v, k, λ, μ) ako i samo ako vrijedi:*
1. $AJ = JA = kJ$,
2. $A^2 = kI + \lambda A + \mu\,(J - I - A)$.

Vidimo iz prehodne leme da matrice A i J komutiraju. Također, one su realne i simetrične pa slijedi da ih možemo ortogonalizirati. Svojstveni vektor od A i J je vektor j pridružen svojstvenim vrijednostima k i v redom. Dakle, mi znamo da matrica A ima svojstvenu vrijednost k kratnosti 1 po lemi 3.6.

Sada ćemo pokazati da A ima još samo dvije druge svojstvene vrijednosti. Da bi to dokazali, prvo se prisjetimo da je $(A^2)_{(x_i,x_j)}$ broj zajedničkih susjeda vrhova x_i i x_j. Za $x_i = x_j$, to je zapravo stupanj vrha x_i. Iskoristit ćemo ovu činjenicu da napišemo matricu A^2 kao linearnu kombinaciju matrica A, I i J. Primijetimo da je matrica susjedstva komplementa grafa Γ jednaka $J - I - A$. Iz toga slijedi koristeći jednakost (1)

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu \left(J - I - A\right) = \left(\lambda - \mu\right) A + \mu J + \left(k - \mu\right) I. \qquad (2)$$

Lema 3.8. *Neka je M simetrična matrica čiji su elementi realni brojevi. Tada su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima matrice M ortogonalni.*

Dokaz. Pretpostavimo da su α i β dvije različite svojstvene vrijednosti matrice M. Neka su x i y svojstveni vektori pridruženi tim svojstvenim vrijednostima. Slijede jednakosti

$$\alpha y^T x = y^T M x = (x^T M y)^T = (x^T \beta y)^T = \beta y^T x.$$

Kako je $\alpha \neq \beta$ slijedi da je $y^T x = 0$ čime smo dokazali traženu tvrdnju. □

Koristeći prethodnu lemu zaključujemo da je svaki drugi svojstveni vektor matrice A ortogonalan na vektor j. Također, svaki vektor ortogonalan na j je svojstveni vektor od J sa svojstvenom vrijednošću 0. Neka je vektor x jedan takav vektor. Iz prethodnog i činjenice da je J matrica kojoj su stupci v vektora j^T slijedi da je $Jx = 0$. Iz ovog rezultata i koristeći jednakost (2) dobivamo:

$$A^2 x = \left(\lambda - \mu\right) Ax + \left(k - \mu\right) x.$$

Sada koristeći ovu jednakost zaključujemo da svaka druga svojstvena vrijednost ρ od A zadovoljava

$$\rho^2 = \left(\lambda - \mu\right) \rho + \left(k - \mu\right).$$

Označimo korijene ove kvadratne jednadžbe po ρ sa r i s, uz konvenciju da je $r > s$. Tada je:

$$r,\, s = \frac{1}{2}\left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4\left(k - \mu\right)}\right).$$

Ako r i s imaju kratnosti f i g redom, onda imamo:

$$v = f + g + 1,$$

$$0 = Tr(A) = k + fr + gs.$$

Ove jednakosti određuju f i g, jer jednakost $k = \lambda = \mu$ nije moguća. Stoga vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.9. *Ako postoji jako regularan graf s parametrima* (v, k, λ, μ)*, onda su*

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(v - 1 \pm \frac{(v-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}}\right)$$

nenegativni cijeli brojevi.

Tvrdnja ovog teorema daje nam uvjet za nepostojanje jako regularnog grafa. Taj uvjet naziva se *uvjet cjelobrojnosti.*

Primjer 3.10. *Promotrimo jako regularne grafove s parametrima* $v = 6u-3$, $k = 2u,\ \lambda = 1,\ \mu = u$*. Imamo*

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(6u - 4 \mp \frac{(6u-4)(u-1) - 4u}{\sqrt{(u-1)^2 + 4u}}\right) = 3u - 2 \mp \frac{(3u-1)(u-2)}{u+1}.$$

Iz uvjeta cjelobrojnosti zaključujemo da $u + 1$ *dijeli* $(3u-1)(u-2)$*. Kako je* $(3u-1)(u-2) = (u+1)(3u-10) + 12$*, slijedi da* $(u+1)$ *dijeli* 12*, pa dobivamo da je* $u = 2,\ 3,\ 5$ *ili* 11*. Slučaj* $u = 1$ *ne uzimamo u obzir jer graf s parametrima* $(3, 2, 1, 1)$ *odgovara trokutu koji po našoj definiciji nije jako regularan graf. Za* $u = 2$ *dobivamo* $v = 9,\ k = 4,\ \lambda = 1,\ \mu = 2$*, a to su parametri Paleyevog grafa* $P(9)$ *koji je jako regularan pa zaključujem da za* $u = 2$ *postoji jako regularan graf. Za* $u = 3$ *dobivamo* $v = 15,\ k = 6,\ \lambda = 1,$ $\mu = 3$*, a to su parametri komplementa grafa* $T(6)$ *koji je jako regularan pa zaključujem da za* $u = 3$ *postoji jako regularan graf. Za* $u = 5$ *dobivamo* $v = 27,\ k = 10,\ \lambda = 1,\ \mu = 5$*, a to su parametri komplementa Schläflijevog grafa koji je jako regularan pa zaključujem da za* $u = 5$ *postoji jako regularan graf. Za* $u = 11$ *dobiju se parametri* $v = 63,\ k = 22,\ \lambda = 1,\ \mu = 11$*. Jako regularan graf s tim parametrima ne postoji, što ćemo vidjeti u primjeru 4.4.*

Lema 3.11. *Neka je* Γ *jako regularan graf s parametrima* (v, k, λ, μ) *i neka njegova matrica susjedstva ima svojstvene vrijednosti* k, r *i* s*. Tada njegov komplement* $\overline{\Gamma}$ *ima svojstvene vrijednosti* $v-k-1$*,* $-r-1$ *i* $-s-1$*. Dodatno, svojstveni potprostori su im jednaki.*

Dokaz. Neka je A matrica susjedstva grafa Γ. Tada je matrica susjedstva grafa $\overline{\Gamma}$ matrica $\overline{A} = J - I - A$. Znamo da je k svojstvena vrijednost matrice A i da je njen potprostor prostor konstantnih vektora. Neka je x jedan takav vektor. Tada imamo:

$$\overline{A}x = (J - I - A)\,x = vx - x - kx = (v - k - 1)\,x.$$

Stoga je $v - k - 1$ svojstvena vrijednost od $\overline{A}$ i njen svojstveni potprostor jednak je svojstvenom potprostoru od k. Neka je y svojstveni vektor matrice

A pridružen svojstvenoj vrijednosti r. Znamo da je y ortogonalan na j. Slijedi:

$$\overline{A}y = (J - I - A)\, y = 0 - y - ry = (-1 - r)\, y.$$

Stoga je $-r-1$ svojstvena vrijednost od $\overline{A}$ i njen svojstveni potprostor jednak je svojstvenom potprostoru od r. Možemo analogno pokazati da je $-1 - s$ svojstvena vrijednost od $\overline{A}$. Time je naša tvrdnja dokazana. □

Kako bismo dodatno ispitali uvjet cjelobrojnosti, razlikovat ćemo dva tipa skupa parametara za koje su f i g cijeli brojevi.

Tip I. Neka je $(v - 1)\,(\mu - \lambda) = 2k$. Tada je

$$v = 1 + \frac{2k}{\mu - \lambda} > 1 + k.$$

Iz toga slijedi $0 < \mu - \lambda < 2$. Stoga je nužan uvjet $\mu - \lambda = 1$, iz čega slijedi da je $\lambda = \mu - 1,\ k = 2\mu,\ v = 4\mu + 1$. Van Lindt i Seidel [13] su pokazali daljnji nužan uvjet za postojanje skupa parametara tipa I:

Teorem 3.12. *Ako postoji jako regularan graf s v vrhova i vrijedi da je skup parametara tipa I, onda je v suma kvadrata dva cijela broja.*

Tako, naprimjer, ne postoji jako regularan graf s 21 vrhom kojem je skup parametara tipa I. S druge strane, skup parametara Paleyevog graf je tipa I i takvi grafovi postoje kada je v potencija prostog broja i $v \equiv 1\,(mod\ 4)$.

Teorem 3.13 (Fermat)**.** *Prirodni broj v može se izraziti kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva ako i samo ako u rastavu broja v na prim faktore primbrojevi oblika $p \equiv 3\,(mod\ 4)$ dolaze isključivo s parnim eksponentima.*

Tip II. Ako je $(\mu - \lambda)^2 + 4\,(k - \mu)$ kvadrat cijelog broja u, u dijeli $(v - 1)\,(\mu - \lambda) - 2k$, i kvocijent je kongruentan $v - 1$ modulo 2. To vrijedi u općenitom slučaju. Primijetimo da je skup parametara tipa I ujedno i skup parametara tipa II ako i samo ako je v kvadrat. Graf $P(9) \cong \mathcal{L}_2(3)$ je primjer takvog grafa.

Sada ćemo pokazati da svaki regularan povezan graf čija matrica susjedstva ima najviše tri svojstvene vrijednosti mora biti jako regularan graf. Neka je Γ k-regularan graf i neka njegova matrica susjedstva ima svojstvene vrijednosti k, r i s. Kako je Γ povezan, svojstvena vrijednost k ima kratnost 1 po lemi 3.6. Tada za svaki vektor ortogonalan na vektor j, imamo

$$(A - rI)(A - sI)v = 0.$$

Slijedi da za neki β vrijedi

$$(A - rI)(A - sI) = \beta J.$$

Iz toga slijedi

$$A^2 - (r + s) A + rsI = \beta J,$$

odnosno

$$A^2 = (r + s) A - rsI + \beta J,$$

iz čega konačno dobivamo

$$A^2 = (r + s + \beta) A + \beta (J - A - I) + (rs + \beta) I.$$

Iz toga zaključujemo da broj zajedničkih susjeda dva vrha ovisi samo o tome jesu li oni susjedi ili ne, iz čega slijedi da je A matrica susjedstva jako regularnog grafa.

Vidjeli smo da parametri jako regularnog grafa određuju svojstvene vrijednosti od A i njihove kratnosti. Također vrijedi i obrat, tj. iz svojstvenih vrijednosti možemo odrediti sve parametre. Naime, ako su r i s korijeni kvadratne jednadžbe $\rho^2 = (k - \mu) + (\lambda - \mu) \rho$ imamo:

$$r + s = (\lambda - \mu),$$

$$rs = -(k - \mu).$$

Slijedi da je $\lambda = k + r + s + rs$ i $\mu = k + rs$. Iz toga slijedi da svojstvene vrijednosti određuju kratnosti. Ponekad je zgodnije koristiti ove izraze za parametre u terminima k, r i s. Općenito, poznavanje samo kratnosti ne određuje parametre. Nekada može dati djelomičnu informaciju.

Definicija 3.14. *Za matricu A kažemo da je nenegativna (pozitivna), u oznaci $A \geq 0$ $(A > 0)$, ako su svi elementi matrice A nenegativni (pozitivni). Nenegativna matrica A je primitivna ako postoji prirodan broj m tako da je A^m pozitivna. Matrica A je ireducibilna ako za bilo koji uređeni par (i, j) postoji prirodan broj p takav da je $(A^p)_{i,j} > 0$.*

Možemo primijetiti da ireducibilnost matrice susjedstva grafa odgovara povezanosti grafa. To slijedi iz leme 3.2. Naime, iz definicije povezanog grafa slijedi da između svaka dva vrha grafa postoji šetnja. Po lemi 3.2 slijedi da postoji nenegativan cijeli broj $t \geq 0$ takav da za svaka dva vrha x_i i x_j grafa Γ, element $(A^t)_{(x_i,x_j)}$ matrice susjedstva grafa Γ je ≥ 1. Iz toga slijedi da je matrica A ireducibilna. Obratno, ako je matrica A ireducibilna onda iz prethodne definicije slijedi da za svaka dva vrha postoji prirodan broj t takav da je $(A^t)_{(x_i,x_j)} > 0$. Po lemi 3.2 slijedi da između svaka dva vrha postoji šetnja duljine t, za neki prirodan broj t. To je ekvivalentno tome da je graf Γ povezan.

Definicija 3.15. *Spektralni radijus $\rho(A)$ kvadratne matrice A reda v je*

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : \lambda\, je\ svojstvena\ vrijednost\ od\, A\}.$$

Teorem 3.16 (Perron - Frobenius)**.** *Ako je A ireducibilna nenegativna kvadratna matrica reda v, tada vrijedi sljedeće:*
1. spektralni radijus $\rho(A) > 0$ je svojstvena vrijednost,
2. postoji svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\rho(A)$ koji ima sve komponente > 0,
3. ako je λ svojstvena vrijednost čiji svojstveni vektor ima sve komponente pozitivne, onda je $\lambda = \rho(A)$,
4. $\rho(A)$ je jednostavna svojstvena vrijednost matrice A, tj. ima algebarsku i geometrijsku kratnost 1.

Dokaz ovog teorema možemo pronaći u članku kojeg su napisali Chang, Pearson i Zhang [7].

Teorem 3.17. *Pretpostavimo da je Γ jako regularan graf s $v = 2m$ vrhova, čije svojstvene vrijednosti imaju kratnosti $1, m-1, m$. Tada vrijedi jedan od sljedeća dva slučaja:*
1. Graf Γ ili njegov komplement $\overline{\Gamma}$ je "graf ljestve",
2. Graf Γ ili njegov komplement $\overline{\Gamma}$ ima parametre $v = 4s^2 + 4s + 2$, $k = s(2s+1)$, $\lambda = s^2 - 1, \mu = s^2$, za neki pozitivni cijeli broj s.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $k < m$, zamjenom grafa s njegovim komplementom ako je potrebno (jer komplement ima stupanj $2m-k-1$). Matrice A, A^2, A^3 imaju na dijagonali vrijednosti 0, k, $k\lambda$ redom. Pomoću leme 3.2 zaključujemo da matrica A ima na dijagonali vrijednosti 0 jer niti iz jednog vrha x_i ne postoji šetnja duljine 1 do tog istog vrha. Nadalje, matrica A^2 ima na dijagonali vrijednosti k jer iz svakog vrha postoji točno k šetnji duljine 2 do tog istog vrha. Neka je x_i naš početni vrh. Prvim bridom moramo spojiti x_i s nekim njegovim susjedom, a to možemo na k načina. Sada smo došli u vrh x_j. Drugim bridom moramo se vratiti iz vrha x_j u početni vrh x_i, a to možemo samo na jedan način pa slijedi da A^2 na dijagonali ima vrijednosti k. Konačno, matrica A^3 ima na dijagonali vrijednosti λk jer iz svakog vrha postoji točno λk šetnji duljine 3 do tog istog vrha. Prvim bridom moramo spojiti naš početni vrh x_i s nekim njegovim susjedom x_j, a to možemo na k načina. Drugim bridom moramo spojiti vrh x_j u kojem se trenutno nalazimo s nekim vrhom x_k koji je zajednički susjed od x_i i x_j kako bi se mogli vratiti u x_i, a to možemo napraviti na λ načina. Na kraju se vraćamo iz vrha x_k u početni vrh, a to možemo samo na jedan način pa slijedi da A^3 na dijagonali ima vrijednosti λk. Slijedi da su im tragovi 0, vk, $vk\lambda$ redom. Dakle,

$$k + (m-1)\, r + ms = 0,$$

$$k^2 + (m-1)\, r^2 + ms^2 = 2mk,$$
$$k^3 + (m-1)\, r^3 + ms^3 = 2mk\lambda.$$

Perron-Frobeniusov teorem kaže da ako je A nenegativna matrica, onda A ima svojstveni vektor s pozitivnim komponentama i ako je k svojstvena vrijednost pridružena tom svojstvenom vektoru, onda je $|\rho| \leq k$ za sve svojstvene vrijednosti ρ. U našem slučaju, dakle, vrijedi $|r| \leq k$. Iz prve jednadžbe slijedi da je $k \equiv r\,(mod\; m)$, pa je $r = k$ ili $r = k - m$. U prvom slučaju je $s = -k, 2mk^2 = 2mk$, pa je $k = 1$ i vrijedi prva tvrdnja teorema. U drugom slučaju, imamo $k = m - 1 - s$, $r = -1 - s$ pa druga jednadžba daje $m = 2s^2 + 2s + 1$ i vrijednost od λ slijede iz treće jednadžbe. □

Jedini graf koji zadovoljava 2. uvjet prethodnog teorema za $s = 1$ je Petersenov graf.

4 Nužni uvjeti za egzistenciju jako regularnog grafa

Sada ćemo pokazati još neke nužne uvjete za parametre jako regularnih grafova.

Definicija 4.1. *Za kvadratnu matricu A kažemo da je pozitivno definitna ako za svaki vektor $x \neq 0$ vrijedi $x^T Ax > 0$. Matrica A je pozitivno semidefinitna ako je $x^T Ax \geq 0$.*

U nastavku koristimo sljedeću elementarnu lemu koja će nam biti od velike koristi u ovom poglavlju.

Lema 4.2. *Neka je $A = (a_{ij})$ pozitivno semidefinitna simetrična realna $n \times n$ matrica ranga d. Tada postoje vektori $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ takvi da je $a_{ij} = \langle v_i\,,\, v_j \rangle$ za i, $j = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Za pozitivno semidefinitnu simetričnu realnu matricu A postoji invertibilna realna matrica P takva da je

$$PAP^T = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stavljajući $Q = P^{-1}$ dobivamo

$$A = Q \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T = Q_1 I_d Q_1^T.$$

Pritom je Q_1 $n \times d$ matrica koja se sastoji od prvih d stupaca matrice Q. Sada je dovoljno uzeti da su $v_1, \ldots, v_n$ reci matrice Q_1. □

Matrica A se naziva Gramova matrica skupa vektora $v_1, \ldots, v_n$. Skup vektora je jedinstveno određen, do na izometriju od $\mathbb{R}^d$, svojom Gramovom matricom.

Teorem 4.3. *Neka je Γ jako regularni graf sa v vrhova, koji ima svojstva da su i Γ i $\overline{\Gamma}$ oba povezani grafovi i da matrica susjedstva grafa Γ ima svojstvenu vrijednost kratnosti $f > 1$. Tada je $v \leq \frac{1}{2} f\,(f+3)$.*

Dokaz. Matrica susjedstva $A = A(\Gamma)$ ima tri različita svojstvena potprostora i bilo koja matrica koja ima te svojstvene potprostore je linearna kombinacija od I, A i $J - I - A$. Posebno, postoji linearna kombinacija E koja ima svojstvenu vrijednost 1 na danom f-dimenzionalnom svojstvenom prostoru i 0 na njegovom komplementu. Tada je E pozitivno definitna, pa je Gramova matrica skupa S vektora iz $\mathbb{R}^f$. Kako je $E = \alpha I + \beta A + \gamma\,(J - I - A)$, onda bilo koji vektor u S ima duljinu $\sqrt{\alpha}$ i svaki kut između dva različita vektora iz S jednak je $arccos(\beta\alpha)$ ili $arccos(\gamma\alpha)$. Vektori su svi različiti, jer nije ni Γ, a ni njegov komplement unija potpunih grafova. Matricu E možemo normalizirati pa pretpostavljamo $\alpha = 1$, tj. S je podskup jedinične sfere Ω. Za $v \in S$, neka je $f_v : \Omega \to \mathbb{R}$ je funkcija definirana s

$$f_v(x) = \frac{(\langle v\,,\,x\rangle - \beta)\,(\langle v\,,\,x\rangle - \gamma)}{(1-\beta)\,(1-\gamma)}.$$

Nadalje, funkcije f_v su polinomi stupnja 2 i one su linearno nezavisne jer je

$$f_v(w) = \begin{cases} 1\,, \text{ ako je } v = w \\ 0\,, \text{ ako je } v \neq w. \end{cases}$$

Ove su funkcije elementi prostora razapetog sa f linearnih i $\frac{1}{2} f\,(f+1)$ homogenih kvadratnih funkcija na Ω. Slijedi da je

$$v = |S| \leq f + \frac{1}{2} f\,(f+1) = \frac{1}{2} f\,(f+3),$$

što je i trebalo dokazati. □

Ovaj kriterij za egzistenciju jako regularnih grafova nazivamo *apsolutna međa.*

Primjer 4.4. *Apsolutna međa isključuje mogućnost jako regularnog grafa s parametrima* $(6u-3, 2u, 1, u), u = 11$*. Naime, za* $u = 11$ *dobivamo parametre* $(63, 22, 1, 11)$*. Po teoremu 3.9 dobivamo da je*

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(63 - 1 \pm \frac{(63-1)\cdot(11-1) - 44}{\sqrt{(11-1)^2 + 4\cdot(22-11)}}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(62 \pm \frac{62\cdot 10 - 44}{\sqrt{100+44}}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(62 \pm \frac{576}{12}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(62 \pm 48\right),$$

iz čega slijedi $f = 55$ *i* $g = 7$*. Za* $g = 7$ *ne vrijedi nejednakost* $v \leq \frac{1}{2}\cdot g\cdot(g+3)$ *jer je tvrdnja* $63 \leq \frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7+3) = 35$ *neistinita, tj. dobivamo kontradikciju. Time smo dokazali našu tvrdnju.*

Sljedeća međa se zove *Kreinov uvjet.*

Teorem 4.5. *Neka je* Γ *jako regularan graf s matricom susjedstva* A*, takav da su* Γ *i* $\overline{\Gamma}$ *povezani. Neka* Γ *ima svojstvene vrijednosti* k, r, s*. Tada vrijede sljedeće nejednakosti:*

$$(r+1)\,(k+r+2rs) \leq (k+r)\,(s+1)^2,$$

$$(s+1)\,(k+s+2rs) \leq (k+s)\,(r+1)^2.$$

Primjer 4.6. *Kreinovi uvjeti isključuju mogućnost jako regularnog grafa s parametrima* $(28, 9, 0, 4)$*. Po teoremu 3.9 dobivamo da je*

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(28 - 1 \pm \frac{(28-1)\cdot(4-0) - 18}{\sqrt{(4-0)^2 + 4\cdot(9-4)}}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(27 \pm \frac{27\cdot 4 - 18}{\sqrt{16+20}}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(27 \pm \frac{90}{6}\right),$$

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(27 \pm 15\right),$$

iz čega slijedi $f = 21$ *i* $g = 6$*. Pokazali smo prije da vrijede jednakosti:*

$$r + s = (\lambda - \mu),$$

$$rs = -(k - \mu),$$

iz čega slijedi

$$r + s = -4,$$

$$rs = -5.$$

Koristeći supstituciju $r = -4 - s$ *dobivamo kvadratnu jednadžbu* $-s^2 - 4s + 5 = 0$ *čija su rješenja* -5 *i* 1. *Kako nam još mora vrijediti* $0 = Tr(A) = k + fr + gs$ *slijedi da je* $r = 1$, *a* $s = -5$. *Iz Kreinovih uvjeta dobivamo sljedeće nejednakosti:*

$$(r + 1) \cdot (k + r + 2rs) \leq (k + r) \cdot (s + 1)^2,$$

$$(1 + 1) \cdot (9 + 1 - 10) \leq (9 + 1) \cdot (-5 + 1)^2,$$

$$0 \leq 160.$$

Ova nejednakost je istinita. Pogledajmo sada drugi uvjet.

$$(s + 1) \cdot (k + s + 2rs) \leq (k + s) \cdot (r + 1)^2,$$

$$(-5 + 1) \cdot (9 - 5 - 10) \leq (9 - 5) \cdot (1 + 1)^2,$$

$$24 \leq 16.$$

Upravo smo dobili kontradikciju čime smo pokazali istinitost naše tvrdnje.

5 Tablica dopustivih parametara jako regularnih grafova

U ovom poglavlju povezali smo sve što smo do sada naučili o jako regularnim grafovima. U programskom paketu Maxima [20] generirali smo sve uređene četvorke parametara (v, k, λ, μ), pri čemu su vrijedili sljedeći uvjeti:

$$4 \leq v \leq 50, \;\; 2 \leq k \leq v/2, \;\; 0 \leq \lambda \leq k - 1.$$

Parametar μ odredili smo na način da zadovoljava prvi uvjet za postojanje jako regularnog grafa iz naše propozicije 2.4:

$$k\,(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\,\mu.$$

Dobili smo 5476 takvih četvorki. Funkcijom $test1$ provjerili smo je li parametar μ cijeli broj. Pomoću funkcije *sublist* izbacili smo sve četvorke u kojima μ nije cijeli broj. Kada smo to napravili, preostalo nam je 1080 četvorki.

Nakon toga provjerili smo koje od preostalih četvorki parametara (v, k, λ, μ) zadovoljavaju uvjete korolara 2.6:

$$v \geq 2k - \mu + 2,$$

$$v \geq 2k - \lambda.$$

To smo provjerili funkcijom *test*2. Pomoću funkcije *sublist* izbacili smo sve četvorke koje ne zadovoljavaju uvjete korolara 2.6 i ostale su nam 1033 četvorke. Od preostalih četvorki parametara (v, k, λ, μ) izbacili smo zatim one koje ne zadovoljavaju uvjet cjelobrojnosti iz teorema 3.9:

$$f,\, g = \frac{1}{2}\left(v - 1 \pm \frac{(v-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}\right)$$

su nenegativni cijeli brojevi. Funkcijom *test*3 provjerili smo koje četvorke parametara zadovoljavaju uvjet cjelobrojnosti iz teorema 3.9, a onda funkcijom *sublist* izbacili sve četvorke koje ne zadovoljavaju taj uvjet. Preostalo nam je 145 četvorki. Još smo dodatno izbacili sve četvorke parametara oblika $v = rm,\ k = m - 1,\ \lambda = m - 2,\ \mu = 0$ iz primjera 2.10 i njihove komplemente. Funkcijom *test*4 provjerili smo koje su četvorke parametara oblika $v = rm,\ k = m - 1,\ \lambda = m - 2,\ \mu = 0$ iz primjera 2.10 i izbacili ih. Ostala nam je 61 moguća četvorka. Komplemente takvih grafova smo pronašli i izbacili pomoću funkcije *test*5. Preostalo nam je 37 četvorki i njih ćemo prikazati u tablici. Na ovaj način dobili smo sve dopustive četvorke parametara (v, k, λ, μ) koje zadovoljavaju nužne uvjete za postojanje jako regularnog grafa i one će biti kandidati za parametre nekog jako regularnog grafa.

Ako usporedimo s Brouwerovom tablicom jako regularnih grafova [4], možemo primijetiti da su četvorke koje smo dobili identične njegovima uz jednu iznimku. Naime, prilikom definiranja granica za parametre v, k i λ odlučili smo da vrijednost parametra k mora zadovoljavati nejednakost $2 \leq k \leq v/2$. Kako smo za svaki $k > v/2$ i neku četvorku kojoj on pripada u našem početnom skupu imali njen komplement, shvatili smo da je dovoljno gledati da k zadovoljava nejednakost $2 \leq k \leq v/2$. Iznimka koja se dogodila su parametri $(21, 10, 5, 4)$ i $(21, 10, 3, 6)$. Komplementarni su i za oba vrijedi $k < v/2$. U tablici prikazujemo samo jedan od njih ravnajući se prema Brouwerovoj tablici [4]. Te četvorke parametara navodimo u prva četiri stupca tablice. Peti stupac tablice je informacija o broju takvih grafova N_g do na izomorfizam. Ovdje ćemo se konzultirati s Brouwerovom tablicom jako regularnih grafova [4]. Ukoliko u stupcu N_g piše prirodan broj n, to znači da su poznati svi jako regularni grafovi s danim parametrima i da ih ima točno n. Ako u stupcu N_g piše broj 0, to znači da jako regularan graf sa danim parametrima ne postoji, a ako u stupcu N_g piše ≥ 1, to znači da jako regularan graf sa danim parametrima postoji, ali ne znamo koliko ih je točno. U zadnjem stupcu naveden je komentar koji govori o tome po kojem kriteriju postoji ili ne postoji određeni jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) iz pojedinog retka tablice. Pritom ćemo se pozivati na teorijski dio koji smo obradili u prethodnim poglavljima. Naprimjer, graf s parametrima $(5, 2, 0, 1)$ je Paleyev graf $P(5)$. U zadnjem stupcu najlakše će nam biti popuniti ona polja za koja za dane parametre iz retka tablice kojem pripada to polje znamo da sigurno postoji jako regularan graf s danim parametrima. To su primjeri iz 2. poglavlja rada. Za neke od preostalih četvorki iz tablice provjerom nužnih uvjeta za postojanje jako regularnih grafova koje smo obradili u prethodna dva poglavlja utvrdili smo da grafovi ne postoje. Primjerice, ako četvorka parametara ne zadovoljava uvjet apsolutne međe za postojanje jako regularnog grafa, u zadnjem stupcu navodimo "ne zadovoljava teorem 4.3 (apsolutna međa)". Dakle, za grafove koji ne postoje u zadnji stupac navodimo razlog zašto ne postoje, a za grafove koji postoje navodimo primjere ili reference, ako se radi o onima koje nismo obradili u ovom diplomskom radu. Dopustivi parametri su, dakle, oni koji zadovoljavaju propoziciju 2.4, korolar 2.6 i teorem 3.9.

v	k	λ	μ	N_g	Objašnjenje
5	2	0	1	1	Primjer 2.12, $P(5)$
9	4	1	2	1	Primjer 2.12, $P(9)$
10	3	0	1	1	Primjer 2.8, Petersenov graf
13	6	2	3	1	Primjer 2.12, $P(13)$
15	6	1	3	1	Primjer 2.7, komplement grafa $T(6)$
16	5	0	2	1	Primjer 2.13, Clebschov graf
16	6	2	2	2	Primjer 2.9, $\mathcal{L}_2(4)$
17	8	3	4	1	Primjer 2.12, $P(17)$
21	10	3	6	1	Primjer 2.7, komplement grafa $T(7)$
21	10	4	5	0	Parametri su tipa I i ne zadovoljavaju teorem 3.12
25	8	3	2	1	Primjer 2.9, $\mathcal{L}_2(5)$
25	12	5	6	15	Primjer 2.12, $P(25)$
26	10	3	4	10	Primjer 2.17, komplement blokovnog grafa $S(2, 3, 13)$
27	10	1	5	1	Primjer 2.14, komplement Schläflijevog grafa
28	9	0	4	0	Primjer 4.6, ne zadovoljava teorem 4.3 (apsolutna međa)
28	12	6	4	4	Primjer 2.7, $T(8)$
29	14	6	7	41	Primjer 2.12, $P(29)$
33	16	7	8	0	Parametri su tipa I i ne zadovoljavaju teorem 3.12
35	16	6	8	3854	McKay, Spence [15]
36	10	4	2	1	Primjer 2.9, $\mathcal{L}_2(6)$
36	14	4	6	180	McKay, Spence [15]
36	14	7	4	1	Primjer 2.7, $T(9)$
36	15	6	6	32548	McKay, Spence [15]
37	18	8	9	≥ 1	Primjer 2.12, $P(37)$
40	12	2	4	28	Spence [17]
41	20	9	10	≥ 1	Primjer 2.12, $P(41)$
45	12	3	3	78	Coolsaet, Degraer, Spence [8]
45	16	8	4	1	Primjer 2.7, $T(10)$
45	22	10	11	≥ 1	Mathon [14]
49	12	5	2	1	Primjer 2.9, $\mathcal{L}_2(7)$
49	16	3	6	0	Bussemaker, Haemers, Mathon, Wilbrink [5]
49	18	7	6	≥ 1	Behbahani, Lam [2]
49	24	11	12	≥ 1	Primjer 2.12, $P(49)$
50	7	0	1	1	Hoffman, Singleton [11]
50	21	4	12	0	Ne zadovoljava teorem 4.3 (apsolutna međa)
50	21	8	9	≥ 1	Primjer 2.17, komplement blokovnog grafa $S(2, 4, 25)$

A Dodatak

U dodatku je priložen kod napisan u programu Maxima [20] koji smo koristili za naše izračune u prethodnom poglavlju.

```
(%i1) p1: map(args,flatten(makelist(makelist(makelist
(a(v,k,l),l,0,k-1),k,2,v/2),v,4,50)));
(%i2) mi(x):=[x[1],x[2],x[3],x[2]*(x[2]-x[3]-1)/(x[1]-x[2]-1)];
(%i3) p2: map(mi,p1);
(%i4) d1:length(p2);
(d1) 5476
(%i5) test1(x):=integerp(x[4]);
(%i6) p3: sublist(p2,test1);
(%i7) d2:length(p3);
(d2) 1080
(%i8) test2(x):=is(x[1]>=2*x[2]-x[4]+2) and is(x[1]>=2*x[2]-x[3]);
(%i9) p4: sublist(p3,test2);
(%i10) d3:length(p4);
(d3) 1033
(%i11) test3(x):=nonnegintegerp(1/2* ((x[1] - 1) + ((x[1]- 1)*
            (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])*(x[4] - x[3])
                + 4*(x[2] - x[4]))))) and
nonnegintegerp(1/2* ((x[1] - 1) - ((x[1]- 1)*
            (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])*
                (x[4] - x[3]) + 4*(x[2] - x[4])))));
(%i12) p5: sublist(p4,test3);
(%i13) d4:length(p5);
(d4) 145
(%i14) test4(x):=is(notequal(x[4],0) or
    notequal((x[2]-x[3]),1) or
    integerp(x[1]/(x[2]+1))=false);
(%i15) p6:sublist(p5,test4);
(%i16) d5:length(p6);
(d5) 61
(%i18) test5(x):=is(notequal(x[2],x[4]) or
    notequal(2*(x[1]-x[2]),x[1]-x[3]));
p7:sublist(p6,test5);


(%i19) d6:length(p7);
(d6) 37
```

```
(%i20) test6(x):=is((1/2* ((x[1] - 1) - ((x[1]- 1)*
                (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/
            (sqrt ((x[4] -x[3])*(x[4] - x[3])
                    + 4*(x[2] - x[4])))))>1) or
is((1/2* ((x[1] - 1) + ((x[1]- 1)*
                (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/
            (sqrt ((x[4] -x[3])*(x[4] - x[3])
                    + 4*(x[2] - x[4])))))>1);
(%i21) p8:sublist(p7,test6);
(%i22) d7:length(p8);
(%i23) test7(x):=is((1/2* ((x[1] - 1) -
            ((x[1]- 1)* (x[4]-x[3]) -
                 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])
                    *(x[4] - x[3]) + 4*(x[2] - x[4])))))>1);
(%i24) p9:sublist(p8,test7);
(%i25) d8:length(p9);
(%i26) test8(x):=is(x[1]>(1/2* ((x[1] - 1)
            - ((x[1]- 1)* (x[4]-x[3])
                - 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])
                    *(x[4] - x[3]) + 4*(x[2] - x[4])))))*
    ((1/2* ((x[1] - 1) - ((x[1]- 1)*
                    (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/
                (sqrt ((x[4] -x[3])*(x[4] - x[3])
                        + 4*(x[2] - x[4])))))+3)*1/2);
(%i27) p10:sublist(p9,test8);
(%i28) d9:length(p10);
(%i29) test9(x):=is((1/2* ((x[1] - 1) +
             ((x[1]- 1)* (x[4]-x[3])
                - 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])*
                    (x[4] - x[3]) + 4*(x[2] - x[4])))))>1);
(%i30) p11:sublist(p8, test9);
(%i31) d10:length(p11);
(%i32) test10(x):=is(x[1]>(1/2* ((x[1] - 1)
            + ((x[1]- 1)* (x[4]-x[3]) -
                 2*x[2])/(sqrt ((x[4] -x[3])*
                    (x[4] - x[3]) + 4*(x[2] - x[4])))))*
    ((1/2* ((x[1] - 1) + ((x[1]- 1)*
                    (x[4]-x[3]) - 2*x[2])/
                (sqrt ((x[4] -x[3])*(x[4] - x[3])
 + 4*(x[2] - x[4])))))+3)*1/2);
(%i33) p12:sublist(p11, test10);
```

Naša lista dopustivih parametara izgleda ovako:

```
(p11) [[5,2,0,1],[9,4,1,2],[10,3,0,1],[13,6,2,3],[15,6,1,3],
[16,5,0,2],[16,6,2,2],[17,8,3,4],[21,10,3,6],[21,10,4,5],
[21,10,5,4],[25,8,3,2],[25,12,5,6],[26,10,3,4],[27,10,1,5],
[28,9,0,4],[28,12,6,4],[29,14,6,7],[33,16,7,8],[35,16,6,8],
[36,10,4,2],[36,14,4,6],[36,14,7,4],[36,15,6,6],[37,18,8,9],
[40,12,2,4],[41,20,9,10],[45,12,3,3],[45,16,8,4],[45,22,10,11],
[49,12,5,2],[49,16,3,6],[49,18,7,6],[49,24,11,12],[50,7,0,1],
[50,21,4,12],[50,21,8,9]]
```

Literatura

[1] M. Behbahani, *On strongly regular graphs*, disertacija, Concordia University, Kanada, 2009.

[2] M. Behbahani, C. Lam, *Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms*, Discr. Math. 311 (2011), 132-144.

[3] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[4] A. E. Brouwer, *A table of parameters of strongly regular graphs*, dostupno na www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html (studeni 2018.)

[5] F. C. Bussemaker, W. H. Haemers, R. Mathon, H. A. Wilbrink, *A* $(49, 16, 3, 6)$ *strongly regular graph does not exist*, European J. Combin. 10 (1989), 413-418.

[6] P. J. Cameron, H. J. van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[7] K. C. Chang, K. Pearson, T. Zhang, *Perron–Frobenius theorem for nonnegative tensors*, Commun. Math. Sci. 6 (2008), 507–520.

[8] K. Coolsaet, J. Degraer, E. Spence, *The strongly regular* $(45, 12, 3, 3)$ *graphs*, Electronic Journal Of Combinatorics, 13 (2006), R32.

[9] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.

[10] W. H. Haemers, *Matrix techniques for strongly regular graphs and related geometries*, dostupno na http://cage.ugent.be/~fdc/intensivecourse2/haemers2.pdf (studeni 2018.)

[11] A. J. Hoffman, R. R. Singleton, *On Moore graphs with diameters* 2 *and* 3, IBM J. Res. Develop. 4 (1960), 497-504.

[12] H. J. van Lint, A. E. Brouwer, *Strongly regular graphs and partial geometries*, in D. H. Jackson, S. A. Vanstone (ur.) "Enumeration and Design", str. 85-122, Academic Press, London, 1984.

[13] H. J. van Lint, J. J. Seidel, *Equilateral point sets in elliptic geometry*, Indag. Math. 28 (1966), 335–348.

[14] R. A. Mathon, *Symmetric conference matrices of order* pq^2+1, Canad. J. Math. 30 (1978), 321-331.

[15] B. D. McKay, E. Spence, *Classification of regular two-graphs on* 36 *and* 38 *vertices*, dostupno na https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/24/ocr-ajc-v24-p293.pdf (studeni 2018.)

[16] A. J. L. Paulus, *Conference matrices and graphs of order* 26, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 1973.

[17] E. Spence, $(40, 13, 4)$ *designs derived from strongly regular graphs, Advances in Finite Geometry and Designs*, Oxford University Press, (1990), 359–368.

[18] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2012.

[19] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[20] Maxima.sourceforge.net. Maxima, a Computer Algebra System. Version 5.42.0 (2018). http://maxima.sourceforge.net/

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su jako regularni grafovi. Diplomski rad je podijeljen u četiri poglavlja i dodatak.

U prvom poglavlju cilj je upoznati se s definicijom jako regularnog grafa i osnovnim uvjetima koji vrijede za svaki jako regularan graf. Dani su primjeri nekih jako regularnih grafova i njihovi parametri. Slike grafova prate sadržaj prvog poglavlja.

U drugom poglavlju proučavamo spektar jako regularnih grafova. Nalazimo formulu za kratnosti njegovih svojstvenih vrijednosti, koje moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Ovaj rezultat se naziva uvjet cjelobrojnosti i daje nam snažan kriterij za nepostojanje jako regularnog grafa. U trećem poglavlju otkrivamo dva sljedeća kriterija za egzistenciju jako regularnih grafova: apsolutnu među i Kreinove uvjete.

U četvrtom poglavlju koristimo sve prethodno dobivene rezultate o jako regularnim grafovima. Cilj je napraviti tablicu dopustivih parametara (v, k, λ, μ) koji zadovoljavaju nužne uvjete iz prvog poglavlja i uvjet cjelobrojnosti. Uspoređujemo našu tablicu s Brouwerovom tablicom jako regularnih grafova i nalazimo da ona sadrži točno iste parametre za $v \leq 50$. Također su dane informacije o egzistenciji i broju jako regularnih grafova.

Dodatak sadrži kod napisan u programskom paketu Maxima koji smo koristili za izradu tablice dopustivih parametara jako regularnih grafova.

Summary

The topic of this thesis are strongly regular graphs. The thesis is divided into four sections and an appendix.

In the first section, the goal is to get acquainted with the definition of a strongly regular graph and the basic conditions that apply. We give examples of some strongly regular graphs and their parameters. Pictures of the graphs accompany the contents of the first section.

In the second section we study the spectrum of strongly regular graphs. We find formulae for the multiplicity of their eigenvalues, which must be integers. This result is referred to as the integrality condition, and provides a powerful non-existence criterion for strongly regular graphs. In the third section two further existence criteria for strongly regular graphs are presented: the absolute bound and the Krein conditions.

In the fourth section all of the previous results about strongly regular graphs are put to use. The goal is to make a table of admissible parameters (v, k, λ, μ) satisfying the necessary conditions from the first section and the integrality condition. We compare our table with A. E. Brouwer's table of strongly regular graphs, and find that it contains exactly the same parameters for $v \leq 50$. Information about the existence and the number of strongly regular graphs is also given.

The appendix contains code in the computer algebra system Maxima we used to make the table of admissible parameters of strongly regular graphs.

Životopis

Rođen sam u Beču 13. ožujka 1994. godine. Osnovnu i srednju školu pohađao sam u Vrbovcu. Nakon završene srednje škole upisao sam 2012. godine preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija sam 2016. godine upisao Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu. Aktivno se bavim sportom, treniram nogomet od svoje pete godine. Igram također za ekipu fakulteta u sveučilišnoj ligi u futsalu. U slobodno vrijeme bavim se odbojkom na pijesku i tenisom.