Presjek funkcija propasti procesa rizika

Findak, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Findak

PRESJEK FUNKCIJA PROPASTI PROCESA RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se profesoru Nikoli Sandriću na mentorstvu i velikoj pomoći.
Hvala roditeljima i prijateljima na podršci.

Sadržaj

Uvod

U okviru matematike neživotnog osiguranja, teorija rizika bavi se modeliranjem i izračunom šteta i rizika, njihove distribucije te vjerojatnosti propasti odnosno gubitka u portfelju polica osiguranja. Svako osiguravajuće društvo nastoji predvidjeti visine šteta u budućnosti koje će trebati podmiriti osiguranicima te u skladu s tim odrediti visine premija. Teorija rizika u aktuarstvu bavi se izradom matematičkih modela s ciljem sprječavanja nastajanja situacija da osiguravatelj nema dovoljno sredstava za naknadu šteta. U tom slučaju, kada razina zahtjeva za isplatom prijeđe kapital, osiguravatelju prijeti propast. Zato je potrebno minimizirati vjerojatnost da ukupni zahtjev za isplatom postane veći od kapitala tj. vjerojatnost propasti. Tema ovog rada su funkcije propasti procesa rizika. S aktuarovim ciljem da čim bolje predvidi ponašanje vjerojatnosne funkcije propasti razvijeni su mnogi matematički modeli. Lévyjevi procesi, nazvani po Francuskom matematičaru Paulu Lévyju, koriste se kao matematički model u modeliranju prihoda osiguravajućeg društva. Stoga su Lévyjevi procesi tema prvog dijela ovog rada. Neki poznati Lévyjevi osiguravajući modeli kronološki su nastali ovako: 1930. Cramér i Lundberg objavljuju klasični model, 1991. Dufresne i Gerber Brownovo gibanje te zatim Dufresne, Gerber i Shiu Gamma procese, 1998. Furrer $\alpha-$ stabilni proces, a iste godine Gerber i Shiu predstavljaju EDPF funkcije propasti (Expected Discounted Penalty Function), 2004. Huzak, Vondraček, Šikić i Perman Generalizirane rizične procese, 2007. Morales i Garrido EDPF za perturbirane subordinatore i 2010. Morales, Biffis i Kyprianou generalizirane EDPF. U drugom dijelu rada promatramo funkcije propasti Cramér-Lundbergovog modela i Furerrovog $\alpha-$ stabilnog spektralno negativnog modela. Bavimo se brojem sjecišta dviju funkcija propasti te razmatramo slučajeve u kojima $\alpha-$ stabilni spektralno negativni procesi imaju jedno, dva ili n sjecišta.

Poglavlje 1

Lévyjevi procesi

1.1 Definicija

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo vjerojatnosni prostor ako:
(i) Ω je neprazan skup, a njegove elemente zovemo elementarnim događajima
(ii) $\mathcal{F}$ je σ - algebra događaja na Ω t.j. neprazna familija podskupova od Ω koja sadrži Ω te je zatvorena na komplementiranje i prebrojive unije
(iii) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je σ- aditivna funkcija na $\mathcal{F}$ takva da je $P(\Omega) = 1$ koju zovemo vjerojatnost.

Definicija 1.1.1. *Slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva u paru σ - algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tj. $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ izmjeriva u paru σ - algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ naziva se slučajni vektor.*

Definicija 1.1.2. *Distribucija μ slučajne varijable X je funkcija $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ definirana s $\mu(B) = \mathbb{P}(X \in B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ naziva se funkcija distribucije slučajne varijable X. Funkcija $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definirana s $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ naziva se funkcija distribucije slučajnog vektora $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Distribucija i funkcija distribucije su u 1-1 korespondenciji.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, te neka je $T \subset \mathbb{R}$ skup indeksa koji se interpretiraju kao vremenski trenuci i $\forall t \in T$, X_t slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$. Ako je T diskretan skup, $T = \mathbb{N}_0$, familiju slučajnih varijabli $\{X_t : t \in T\}$ zovemo slučajni proces s diskretnim vremenom, dok ako je $T = \mathbb{R}_+$, familiju slučajnih varijabli $\{X_t : t \in T\}$ zovemo slučajni proces s kontinuiranim vremenom.*

Definicija 1.1.4. *Neka je $T \subset \mathbb{R}$ skup indeksa koji se interpretiraju kao vremenski trenuci. Funkciju koja za fiksirani $\omega \in \Omega$ svakom elementu $t \in T$ pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$ nazivamo trajektorijom slučajnog procesa $\{X_t : t \in T\}$.*

Definicija 1.1.5. *Slučajni proces $\{X_t : t \geq 0\}$ ima stacionarne priraste ako vrijedi*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, \ \forall\, 0 \leq s \leq t, \ h \geq 0$$

gdje je $\stackrel{d}{=}$ jednakost po distribuciji.

Definicija 1.1.6. *Slučajni proces $\{X_t : t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste ako vrijedi $X_t - X_s$ je nezavisan s $\{X_u : \ u \leq s\}$.*

Definicija 1.1.7. *Slučajni proces $N = \{N_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se naziva Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ ako zadovoljava sljedeće:*
i) $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$
ii) N ima stacionarne priraste
iii) N ima nezavisne priraste
iv) za svaki $t > 0$, N_t je Poissonova slučajna varijabla s parametrom λt.

Definicija 1.1.8. *Slučajni proces $B = \{B_t : t \geq 0\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se naziva Brownovo gibanje ako zadovoljava sljedeća svojstva:*
i) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$
ii) B ima stacionarne priraste
iii) B ima nezavisne priraste
iv) gotovo sve trajektorije od $B = \{B_t : t \geq 0\}$ su neprekidne funkcije
v) za svaki $t \geq 0$, B_t je po distribuciji jednako normalnoj slučajnoj varijabli s varijancom t.

Definirajmo sada pojam jedne klase stohastičkih procesa koja obuhvaća Poissonov proces i Brownovo gibanje.

Definicija 1.1.9. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ se naziva Lévyjev proces ako ima sljedeća svojstva:*
i) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$
ii) X ima stacionarne priraste
iii) X ima nezavisne priraste
iv) Trajektorije od X su $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne s desna te imaju limes s lijeva.

1.2 Beskonačno djeljive distribucije, Lévy-Khintchinova formula

U ovom potpoglavlju razmatramo važno svojstvo karakteristično za Lévyjeve procese, beskonačnu djeljivost distribucije. Zatim promatramo Lévyjevu mjeru te dajemo iskaz Lévy-Khintchinove formule koja beskonačno djeljivoj distribuciji pridružuje Lévyjev proces.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ skup svih konačnih Borelovih mjera na $\mathbb{R}^n$. Karakteristična funkcija vjerojatnosne mjere μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je funkcija $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\theta,x)}\mu(dx)$$

gdje je $(\theta, x) = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n$.

Neka je F vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2.2. *Karakteristična funkcija od F je funkcija φ definirana s*

$$\varphi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(\theta x) dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} sin(\theta x) dF(x).$$

Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X . Tada karakterističnu funkciju od F_X zovemo i karakterističnom funkcijom od X i označavamo s φ_X. Vrijedi:

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X}),\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla sa zakonom razdiobe $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, ...$ onda iz (1.1) slijedi

$$\varphi_X(\theta) = \sum_k e^{i\theta x_k} p_k,\ \theta \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Ako je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_X onda iz (1.1) slijedi

$$\varphi_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f_X(x) dx,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.2.3. *Neka je $X = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dimenzionalni slučajni vektor s funkcijom distribucije F_X. Karakteristična funkcija φ_X od X je karakteristična funkcija od F_X i dana je s :*

$$\varphi_X(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\theta,x)} dF(x),\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Teorem 1.2.4. *Neka je* $(X_1, \dots, X_n)$ *vektor nezavisnih slučajnih varijabli. Tada je*

$$\varphi_{X_1,X_2,...,X_n}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) = \prod_{1 \le k \le n} \varphi_{X_k}(\theta_k),\ \forall \theta_1, ..., \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Za sve $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\varphi_{X_1,X_2,...,X_n}(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) = \mathbb{E}(e^{i \sum_{k=1}^{n} \theta_k X_k}) = \mathbb{E}(\prod_{1 \le k \le n} e^{i\theta_k X_k}) = \prod_{1 \le k \le n} \mathbb{E}(e^{i\theta_k X_k}) = \prod_{1 \le k \le n} \varphi_{X_k}(\theta_k).$$

□

Definicija 1.2.5. *Kažemo da slučajna varijabla X ima beskonačno djeljivu distribuciju ako* $\forall n \in \mathbb{N}$ *postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli* $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ *takvih da vrijedi*

$$X \overset{d}{=} X_{1,n} + X_{2,n} + ... + X_{n,n}.$$

Alternativno, u terminima mjere, neka slučajna varijabla X ima distribuciju μ, onda je μ beskonačno djeljiva ako $\forall n \in \mathbb{N}$ postoje distribucije μ_n takve da vrijedi $\mu = \mu_n^{*n}$.
Ako pogledamo karakterističnu funkciju $\varphi_\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} d\mu(x)$ pridruženu toj distribuciji, onda vrijedi $\varphi_\mu(\theta) = \varphi_{\mu_n}^n(\theta)$, gdje su φ_{μ_n} karakteristične funkcije pridružene distribucijama μ_n.

Teorem 1.2.6. *(Lévy-Khintchinova formula)*
Vjerojatnosna distribucija μ *na* $\mathbb{R}$ *je beskonačno djeljiva ako i samo ako* $\varphi_\mu(\theta) = e^{-\psi(\theta)}$, *gdje je*

$$\psi_\mu(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{|x|<1}) d\Pi(x)$$

za $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \ge 0$ *i* Π *je Borelova mjera koncentrirana na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *, za koju vrijedi* $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\Pi(x) < \infty$. *Nadalje, a,* σ^2 *i* Π *su jedinstveni.*

Definicija 1.2.7. *Trojka* (a, σ^2, Π) *se naziva Lévyjeva trojka, a parametar drifta,* σ^2 *difuzijski parametar,* Π *Lévyjeva mjera te* ψ_μ *karakteristični eksponent.*

Lévyjeva mjera Π na $\mathbb{R}$ je mjera koja zadovoljava

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\Pi(x) < \infty. \tag{1.2}$$

Intuitivno, Lévyjeva mjera opisuje očekivani broj skokova određene visine u intervalu duljine 1. Ako je Π konačna, $\lambda = \Pi(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} d\Pi(x) < \infty$ onda definiramo vjerojatnosnu mjeru s $dF(x) = \frac{d\Pi(x)}{\lambda}$, gdje je λ očekivani broj skokova, a $dF(x)$ distribucija skoka visine x. Za

$\Pi(\mathbb{R}) = \infty$ očekujemo beskonačno mnogo malih skokova. Vrijede sljedeće dvije tvrdnje o konačnosti Lévyjeve mjere:

$$\int_{|x|<1} |x|^2 \Pi(dx) < \infty, \tag{1.3}$$

$$\int_{|x|>1} \Pi(dx) < \infty. \tag{1.4}$$

Ako je visina skoka veća od 1 ($|x| > 1$) onda (1.2) poprima oblik (1.4), što govori da Lévyjeva mjera ima konačan očekivani broj velikih skokova u jedinici vremena. Ako je visina skoka manja od 1 ($|x| < 1$) (1.2) poprima oblik (1.3) pa zaključujemo da Lévyjeva mjera ne mora imati konačan broj malih skokova po jedinici vremena. Lévyjeva mjera nosi i informaciju o konačnosti momenata Lévyjevih procesa. Neka je X Lévyjev proces s trojkom (a, σ^2, Π). Vrijedi: X_t ima konačan p-ti moment, $p > 0$,

$$\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty \Longleftrightarrow \int_{|x|\geq 1} |x|^p d\Pi(x) < \infty. \tag{1.5}$$

Za svaki Lévyjev proces s konačnim momentima, $\mathbb{E}[X_t^p] := f_p(t)$ p-ti moment je polinom i zadovoljava binomni identitet,

$$f_p(t+s) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_k(t) f_{p-k}(s).$$

Također vrijedi (za dokaz [3], teorem 3.6.)

$$\mathbb{E}[e^{\theta X_t}] < \infty,\ \forall t \geq 0 \Longleftrightarrow \int_{|x|\geq 1} e^{\theta x} d\Pi(x) < \infty,\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Pogledajmo sada detaljnije vezu između beskonačno djeljivih distribucija i Lévyjevih procesa. Neka je $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ Lévyjev proces. Iz definicije Lévyjevih procesa vidimo da $\forall t > 0$, X_t je slučajna varijabla koja pripada klasi beskonačno djeljivih distribucija. To slijedi iz sljedećeg: $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$X_t = X_{\frac{t}{n}} + (X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}) + ... + (X_{\frac{(n-1)t}{n}} - X_{\frac{(n-2)t}{n}}) + (X_{\frac{nt}{n}} - X_{\frac{(n-1)t}{n}})$$

te činjenice da X ima stacionarne i nezavisne priraste.

Neka je ψ_t karakteristični eksponent od X_t.

$$e^{-\psi_t(\theta)} = \mathbb{E}(e^{i\theta X_t})$$

Sada za $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$e^{-\psi_m(\theta)} = \mathbb{E}(e^{i\theta X_m}) = \mathbb{E}(e^{i\theta(X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_m - X_{m-1}))}).$$

Zbog nezavisnosti prirasta slijedi

$$\mathbb{E}(e^{i\theta(X_1+(X_2-X_1)+\cdots+(X_m-X_{m-1}))}) = \mathbb{E}(e^{i\theta X_1})\cdot\mathbb{E}(e^{i\theta(X_2-X_1)})\cdot\dots\cdot\mathbb{E}(e^{i\theta(X_m-X_{(m-1)})}).$$

Iz stacionarnosti prirasta slijedi

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_1})\cdot\mathbb{E}(e^{i\theta(X_2-X_1)})\cdot\dots\cdot\mathbb{E}(e^{i\theta(X_m-X_{(m-1)})}) = \mathbb{E}(e^{i\theta X_1})^m = (e^{-\psi_1(\theta)})^m.$$

Slijedi da za sve $m, n \in \mathbb{N}$

$$m\cdot\psi_1(\theta) = \psi_m(\theta) = n\cdot\psi_{\frac{m}{n}}(\theta).$$

Također, za bilo koji $t > 0$ iracionalan postoji padajući niz racionalnih brojeva $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, $t_n \downarrow t$ kad $n \to \infty$. Za t racionalan broj, neprekidnost zdesna procesa X povlači neprekidnost zdesna od $e^{-\psi_t(\theta)}$ pa za svaki $t \geq 1$ vrijedi

$$\psi_t(\theta) = t\psi_1(\theta)$$

te svaki Lévyjev proces ima svojstvo da $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = e^{-t\psi(\theta)} \tag{1.7}$$

gdje je $\psi(\theta) = \psi_1(\theta)$ karakteristični eksponent od slučajne varijable X_1, koja je beskonačno djeljive distribucije. Sada je jasno da svaki Lévyjev proces možemo povezati s beskonačno djeljivim distribucijama. Međutim, nije jasno možemo li za danu beskonačno djeljivu distribuciju konstruirati Lévyjev proces X, takav da X_1 ima tu distribuciju. Odgovor na to pitanje daje idući teorem.

Teorem 1.2.8. *(Lévy-Khintchinova formula za Lévyjev proces) Neka je μ beskonačno djeljiva distribucija. Postoji Lévyjev proces takav da vrijedi $\psi_\mu = \psi_1$,*

$$\psi_1(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}(1 - e^{i\theta x} + i\theta x\mathbb{1}_{|x|<1})d\Pi(x)$$

za $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ i Π je Borelova mjera koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}}(1\wedge x^2)d\Pi(x) < \infty$. Nadalje, a, σ^2 i Π su jedinstveni.

Za dva Lévyjeva procesa općenito vrijedi: suma dva nezavisna Lévyjeva procesa je Lévyjev proces. Neka su $X^{(1)} = \{X_t^{(1)} : t \geq 0\}$ i $X^{(2)} = \{X_t^{(2)} : t \geq 0\}$ dva nezavisna Lévyjeva procesa i $X = \{X_t^{(1)} + X_t^{(2)} : t \geq 0\}$. Kako su $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ Lévyjevi, njihove distribucije μ_1 i μ_2 su beskonačno djeljive i $\exists\ \psi_1$, ψ_2 takvi da za njihove karakteristične funkcije vrijedi $\varphi_1(\theta) = e^{-\psi_1(\theta)}$, $\varphi_2(\theta) = e^{-\psi_2(\theta)}$. Za karakterističnu funkciju od X vrijedi:

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta(X^{(1)}+X^{(2)})}] = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta) = e^{-(\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta))}.$$

Kako je zbroj dva nezavisna karakteristična eksponenta karakteristični eksponent po (1.2.8) postoji Lévyjev proces čija je karakteristična funkcija φ_X.

1.3 Primjeri Lévyjevih procesa

Deterministički Lévyjev proces

Najjednostavniji Lévyjev proces je linearni drift. Slučajni proces $\{X_t : t \geq 0\}$ je linearni drift ako ima oblik:

$$X_t = at, \ a \in \mathbb{R}.$$

Neka je $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta at}) = e^{i\theta at}$$

pa je karakteristični eksponent po (1.7) oblika:

$$\psi(\theta) = -i\theta a$$

te je po Lévy- Khintchinovoj formuli Lévyjeva trojka dana s $a = -a, \sigma = 0, \Pi = 0$.

Poissonov proces

Neka je $\lambda > 0$. Vjerojatnosnu distribuciju μ_λ definiranu na $k \in \mathbb{N}_0$ s

$$\mu_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{1.8}$$

nazivamo Poissonovom distribucijom.
Za početak, izračunajmo karakterističnu funkciju Poissonove slučajne varijable. Neka X ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ, $X \sim P(\lambda),\ \lambda > 0$. Tada vrijedi:

$$\varphi_X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\theta}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{i\theta}} = e^{\lambda\cdot(e^{i\theta}-1)}.$$

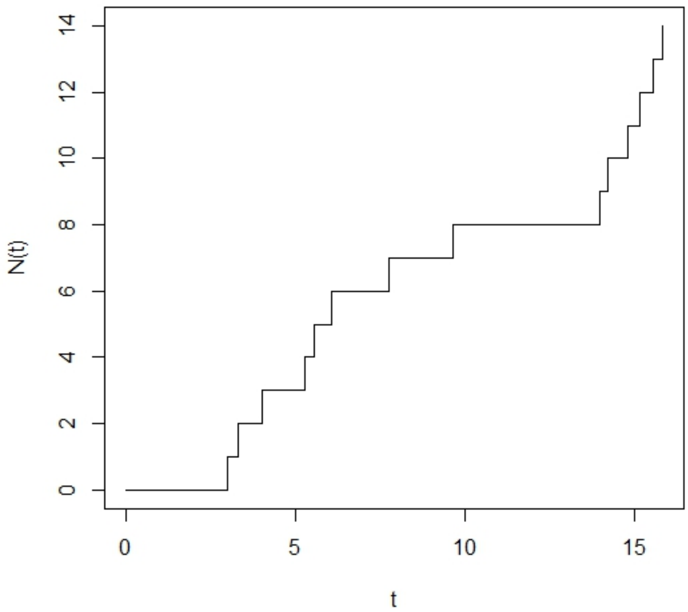
Sada možemo vidjeti da je

$$\varphi_X(\theta) = (e^{\frac{\lambda}{n}(e^{i\theta}-1)})^n = (\varphi_{X_n}(\theta))^n, \forall n \in \mathbb{N},\ \theta \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

gdje je $X_n \sim P(\frac{\lambda}{n}), n \in \mathbb{N}$. Slijedi da je Poissonova distribucija beskonačno djeljiva. Rezultat u (1.9) je karakteristična funkcija sume n nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli s parametrom $\frac{\lambda}{n}$. Za ovaj slučaj, Lévy- Khintchinova dekompozicija dana je s $a = \sigma = 0$ i $\Pi = \lambda\delta_1$, gdje je δ_1 Diracova delta mjera na skupu $\{1\}$.
Sada za Poissonov proces $\{N_t : t \geq 0\}$, $N_t \sim P(\lambda t)$ u nekom vremenu $t > 0$, vrijedi

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta N_t}) = e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})}$$

pa je po (1.7) karakteristični eksponent dan s $\psi(\theta) = \lambda(1 - e^{i\theta})$. Na slici 1.1 nalazi se simulacija Poissonovog procesa za $\lambda = 1$.



Slika 1.1: Simulacija Poissonovog procesa

Složeni Poissonov proces

Neka je $N = \{N_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ te $\{\xi_i : i > 0\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F (nezavisan s N). Slučajni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definiran s

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \tag{1.10}$$

nazivamo složeni Poissonov proces. Složeni Poissonov proces X_t možemo zapisati u obliku: $\forall 0 \leq s \leq t < \infty$

$$X_t = X_s + \sum_{i=N_s+1}^{N_t} \xi_i.$$

Proces N je Poissonov pa ima stacionarne i nezavisne priraste. To uz nezavisnost i jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $\{\xi_i : i \geq 1\}$ povlači da $X_t - X_s$ ima distribuciju kao i X_{t-s} te je nezavisan s $\{X_u : u \leq s\}$. Iz desne neprekidnosti i postojanja limesa s lijeva procesa

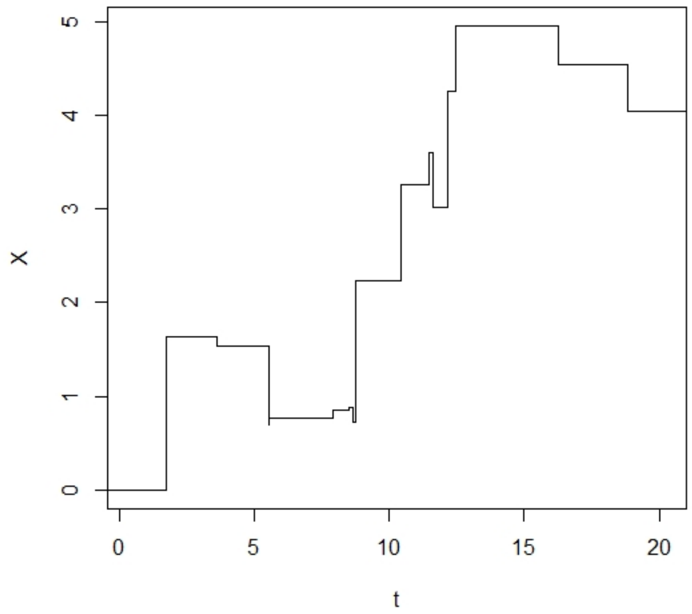
N slijedi desna neprekidnost i postojanje limesa s lijeva od X. Stoga je složeni Poissonov proces Lévyjev proces.
Za karakterističnu funkciju složenog Poissonovog procesa vrijedi: $\forall\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_1}(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta X_1}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i}) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{N_1} (e^{i\theta\xi_1})\mathbb{P}(N_1 = n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \prod_{i=1}^{N_1} \mathbb{E}(e^{i\theta\xi_1})\mathbb{P}(N_1 = n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(e^{i\theta\xi_1})^n \mathbb{P}(N_1 = n) \\
&= \sum_{n\geq 0} (\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} dF(x))^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} dF(x))^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= e^{-\lambda(1-\int_R e^{i\theta x} dF(x))} = e^{-\lambda \int_R (1-e^{i\theta x})dF(x)} = (e^{\frac{-\lambda \int_R (1-e^{i\theta x})dF(x)}{n}})^n.
\end{aligned}$$

Po (1.7) slijedi da je karakteristični eksponent dan s $\psi(\theta) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})dF(x)$.

$$\begin{aligned}
\psi(\theta) &= \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})dF(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})dF(x) + i\lambda\theta \int_{\{x\in\mathbb{R}:|x|=0\}} x dF(x) \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x})dF(x) + i\lambda\theta(\int_{\{0\leq|x|<1\}} x - \int_{\{0<|x|<1\}} x)dF(x) \\
&= -i\lambda\theta \int_{\{0<|x|<1\}} x dF(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}})dF(x)
\end{aligned}$$

pa je po Lévy-Khintchinovoj formuli Lévyjeva trojka $a = -\lambda \int_{0<|x|<1} xF(dx)$, $\sigma = 0$ i $\Pi(dx) = \lambda F(dx)$.
Slučajna šetnja je proces s diskretnim vremenom oblika $S = \{S_n : n \geq 0\}$, gdje je $S_0 = 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 1$ te $\{\xi_i : i > 0\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F. Složeni Poissonov proces je slučajna šetnja čiji skokovi su razmaknuti u nezavisnim i eksponencijalno distribuiranim periodima. Na slici 1.2 nalazi se simulacija složenog Poissonovog procesa.



Slika 1.2: Silmulacija složenog Poissonovog procesa

Brownovo gibanje

Vjerojatnosna funkcija distribucije Gaussove razdiobe definirana je s

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}$ očekivanje i $\sigma > 0$ standardna devijacija. Poznato je da

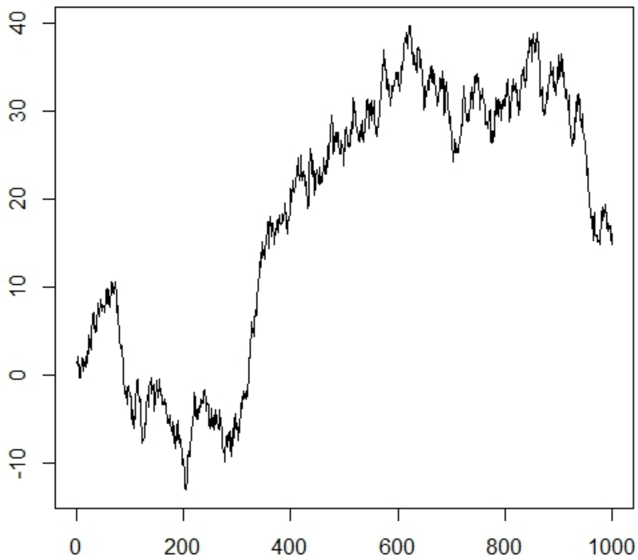
$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} dF(x) = e^{\frac{-1}{2}\sigma^2\theta^2 + i\theta\mu} = (e^{\frac{-1}{2}(\frac{\sigma}{\sqrt{(n)}})^2\theta^2 + i\theta\frac{\mu}{n}})^n$$

iz čega slijedi da je distribucija beskonačno djeljiva. Karakteristični eksponent Brownovog gibanja je

$$\psi(\theta) = \sigma^2\theta^2/2 - i\theta\mu \tag{1.11}$$

pa Lévy- Khintchinova formula daje Lévyjevu trojku $a = -\mu$, $\sigma = \sigma$ i $\Pi = 0$. Jasno je da $\Pi = 0$ jer su trajektorije Brownovog gibanja neprekidne gotovo sigurno. Neka je

$B = \{B_t : t \geq 0\}$ standardno (linearno) Brownovo gibanje s parametrima $\sigma = 1$ i $\mu = 0$. Proces $\{X = X_t : t \geq 0\}$, $X_t := \sigma B_t + \mu t,\ t \geq 0$ nazivamo Brownovo gibanje s linearnim driftom. Na slici 1.3 nalazi se dio trajektorije standardnog Brownovog gibanja.



Slika 1.3: Simulacija Brownovog gibanja

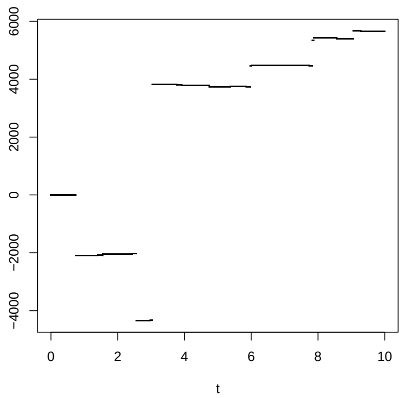
Stabilni procesi

Stabilni procesi su klasa Lévyjevih procesa čije marginalne slučajne varijable imaju stabilnu distribuciju.

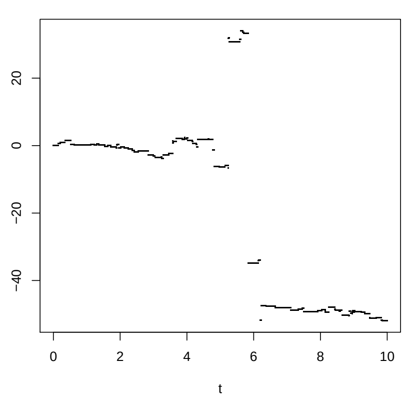
Definicija 1.3.1. *Slučajna varijabla X (odnosno njezina funkcija distribucije F_X odnosno njezina karakteristična funkcija φ_X) je stabilna ako vrijedi sljedeće:*
$\forall n \in \mathbb{N}$ postoje $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable s distribucijom F_X i postoje $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$X \stackrel{d}{=} \frac{S_n - b_n}{a_n}$$

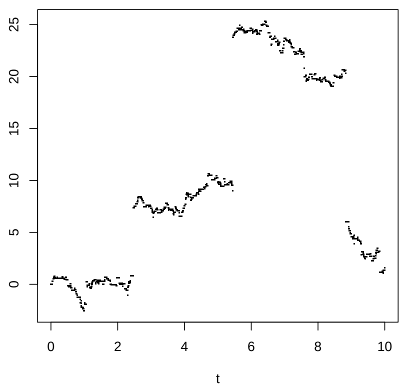
gdje je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.



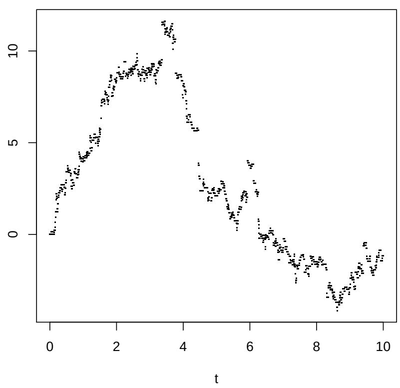
Slika 1.4: 0.4− stabilan proces



Slika 1.5: 1− stabilan proces



Slika 1.6: 1.5− stabilan proces



Slika 1.7: 1.8− stabilan proces

Pokažimo da je stabilna distribucija beskonačno djeljiva. Imamo

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \mathbb{E}e^{i\theta(\frac{S_n}{a_n}-\frac{b_n}{a_n})} \\ &= \mathbb{E}e^{i\theta\frac{S_n}{a_n}}\mathbb{E}e^{-i\theta\frac{b_n}{a_n}} = e^{-i\theta\frac{b_n}{a_n}}\mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta X_k\frac{1}{a_n}}) \\ &= e^{-i\theta\frac{b_n}{a_n}}(\mathbb{E}(e^{i\theta X_1\frac{1}{a_n}}))^n = (e^{-i\theta\frac{b_n}{na_n}}\mathbb{E}(e^{i\theta X_1\frac{1}{a_n}}))^n.\end{aligned}$$

Stabilna slučajna varijabla ima karakteristični eksponent oblika

$$\psi(\theta) = c|\theta|^{\alpha}(1 - i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}sgn\theta) + i\theta\eta$$

gdje je $\beta \in [-1,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Za $\alpha = 1$ karakteristični eksponent ima oblik

$$\psi(\theta) = c|\theta|(1 + i\beta^2 - sgn\theta\, log|\theta|) + i\theta\eta$$

gdje je $\beta \in [-1,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Funkcija sgn definirana je sa $sgn\,\theta = \mathbb{1}_{\theta>0} - \mathbb{1}_{\theta<0}$. Lévyjeva trojka sastoji se od: $\sigma = 0$,

$$\Pi(dx) = \begin{cases} c_1 x^{-1-\alpha}dx, & x \in (0,\infty) \\ c_2|x|^{-1-\alpha}dx, & x \in (-\infty,0). \end{cases}$$

gdje je $c = c_1 + c_2,\ c_1,\ c_2 \geq 0$ i $\beta = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$ za $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ i $c_1 = c_2$ za $\alpha = 1$, a a se onda određuje jasno iz same reprezentacije. Na slikama 1.4 − 1.7 nalaze se simulacije $\alpha-$ stabilnog procesa za $\alpha = 0.4$, 1, 1.5 i 1.8.

Cramér-Lundbergov proces

Ovaj proces modelira prihod osiguravajuće kuće. Osiguravajuća kuća od klijenata naplaćuje premije po konstantnoj stopi $c > 0$. U jediničnim vremenskim intervalima klijenti traže isplate za naknadu šteta koje uzrokuju pad prihoda osiguranja. Neka štete (zahtjevi za isplatu) dolaze u nezavisnim vremenskim intervalima s iznosima $(\xi_i, i \in \mathbb{N})$. Iznosi šteta su nezavisni i jednako distribuirani. Poissonov proces promatramo kao model za brojeći proces šteta. Neka broj šteta u jediničnom vremenskom intervalu ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. Kapital (višak) osiguravajuće kuće, definiramo s

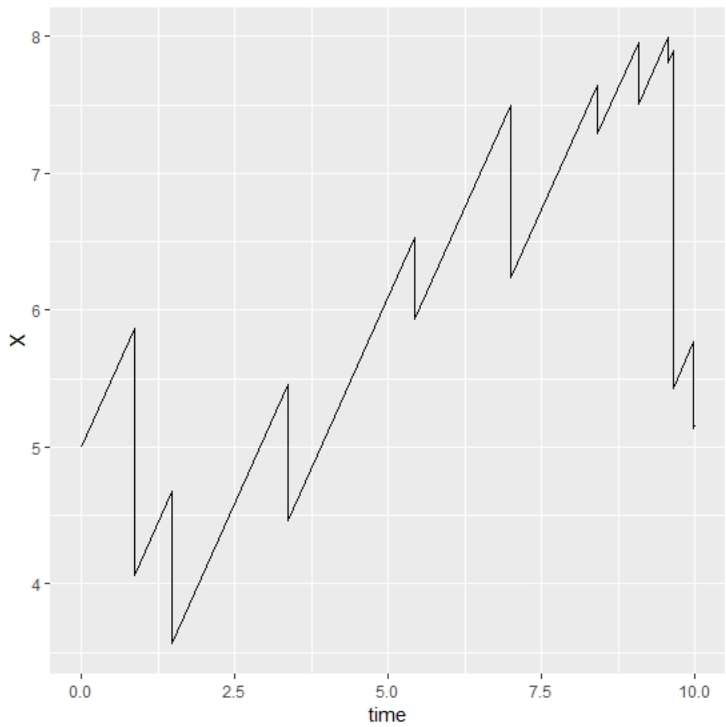
$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t}\xi_i,\ t \geq 0$$

gdje je x početni kapital, $N = \{N_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ koji modelira broj šteta pristiglih do trenutka t i $\{\xi_i : i \geq 1\}$ niz pozitivnih, nezavisnih, jednako

distribuiranih slučajnih varijabli, nezavisan s N.
Navedeni proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ je složeni Poissonov proces s driftom $c > 0$ te se naziva procesom rizika. Za $X_0 = x > 0$ je početni kapital. Propast modela nastaje ako kapital X osiguravajuće kuće padne ispod nule. To će se dogoditi s vjerojatnosti 1 ako vrijedi $\mathbb{P}(\liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty) = 1$. Vrijeme kada proces rizika prvi put poprimi vrijednost manju od nule naziva se vrijeme propasti, $T = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$. U interesu nam je odrediti vjerojatnost propasti uz dani početni kapital $x > 0$, tj.

$$\vartheta(x) = \mathbb{P}(\{X_t < 0,\ \textit{za neki}\ t > 0\}) = \mathbb{P}(T < \infty) \tag{1.12}$$

odnosno vjerojatnost preživljenja $\chi(x) = 1 - \vartheta(x)$.



Slika 1.8: Simulacija Cramér-Lundbergovog procesa

Na slici 1.8 nalazi se simulacija Cramér-Lundbergovog procesa s početnim kapitalom $x = 5$. Graf raste kako se povećava kapital od premija. Padove uočavamo u trenucima isplata osiguranicima za naknadu šteta.

Pretpostavimo da distribucija od ξ ima konačno očekivanje, $\mathbb{E}\xi_i := \mu > 0$. Izračunajmo očekivanje procesa $\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,\ t \geq 0$. Iskoristit ćemo nezavisnost i jednaku distribuiranost slučajnih varijabli ξ_i te očekivanje Poissonovog procesa N, koje je λt, $t > 0$ (Definicija 1.1.6).

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i = \mathbb{E}[\sum_{k\geq 0}(\sum_{i=1}^{k}\xi_i)\mathbb{1}_{\{N_t=k\}}] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}(\xi_1+\cdots+\xi_k)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{N_t=k\}}) = \mathbb{E}\xi_1\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(N_t=k) \quad (1.13)$$
$$= \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}N_t = \mu\lambda t$$

Ako uzmemo $x = 0$ i $t = 1$

$$\mathbb{E}(X_1) = c - \lambda\mu. \quad (1.14)$$

Propozicija 1.3.2. *Neka je* $\{X_t : t \geq 0\}$ *Lévyjev proces. Tada je zadovoljena jedna od sljedećih tvrdnji:*
i) $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$ *g.s.*
ii) $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *g.s.*
iii) $\limsup_{t\to\infty} X_t = \infty$ *i* $\liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *g.s.*

Dodatna pretpostavka na model je $c > \lambda\mu$, takozvani uvjet čistog profita (net profit condition). Uz nju je iz (1.14) $\mathbb{E}(X_t) > 0$ za bilo koji $t > 0$. Iz toga i prethodne propozicije slijedi $\liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty$ g.s. ako i samo ako je $c - \lambda\mu \leq 0$ te je onda $\vartheta(x) = 1$. Kako nam uvjet sigurne propasti nije interesantan, gledamo slučaj $lim_{t\to\infty}X_t = \infty$ g.s. tj. $c - \lambda\mu > 0$.

1.4 Lévy-Itôva dekompozicija

Pogledajmo sada još jedan važan rezultat koji opisuje strukturu Lévyjevih procesa. Prema Lévy-Itôvoj dekompoziciji Lévyjev proces se sastoji od tri nezavisna Lévyjeva procesa različitog tipa.

Neka su Π Lévyjeva mjera i μ funkcija distribucije. Zapišimo pripadni karakteristični eksponent iz Lévy- Khintchinovog teorema na sljedeći način

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 \\ &+ \Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1))\int_{|x|\geq 1}(1-e^{i\theta x})\frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1))} \\ &+ \int_{0<|x|<1}(1-e^{i\theta x}+i\theta x)\Pi(dx),\end{aligned} \quad (1.15)$$

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ gdje je $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ i Π zadovoljava $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)d\Pi(x) < \infty$. Označimo odvojene sumande iz izraza (1.15) redom s $\psi^1(\theta)$, $\psi^2(\theta)$ i $\psi^3(\theta)$. Lévy-Itôvom dekompozicijom dokazuje se da su to karakteristični eksponenti triju tipova Lévyjevih procesa. Uočimo da je po (1.11) $\psi^1(\theta)$ karakteristični eksponent Brownovog gibanja $X^{(1)} = \{X_t^{(1)} : t \geq 0\}$ definiranog s

$$X_t^{(1)} = \sigma B_t - at,\ t \geq 0 \tag{1.16}$$

te $\psi^2(\theta)$ karakteristični eksponent složenog Poissonovog procesa $X^{(2)} = \{X_t^{(2)} : t \geq 0\}$ definiranog s

$$X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,\ t \geq 0 \tag{1.17}$$

gdje je $N = \{N_t : t \geq 0\}$ Poissonov proces s parametrom $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ te $\{\xi_i : i > 0\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom $\frac{d\Pi(x)}{\Pi(\mathbb{R}\setminus(-1,1))}$ koncentriranom na $\{x : |x| \geq 1\}$ (osim za slučaj $\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ u kojem je proces $X^{(2)}$ jednak nuli). Pokažimo sada postojanje Lévyjevog procesa $X^{(3)}$ čiji je karakteristični eksponent dan s ψ^3. Vrijedi:

$$\int_{0<|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)\,\Pi(dx)$$
$$= \sum_{n\geq 0} \Big\{\lambda_n \int_{2^{-(n+1)}\leq|x|<2^{-n}} \Big(1 - e^{i\theta x}\Big)\,dF_n(x) + i\theta\lambda_n\Big(\int_{2^{-(n+1)}\leq|x|<2^{-n}} x\,dF_n(x)\Big)\Big\}$$

gdje $\lambda_n = \Pi(\{x : 2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}\})$ i $dF_n(x) = \frac{d\Pi(x)}{\lambda_n}$ pa slijedi da se proces $X^{(3)}$ sastoji od prebrojivo mnogo nezavisnih složenih Poissonovih procesa s različitim vremenima dolazaka i dodatnim linearnim driftom. Zapis Lévyjevog procesa kao sume procesa $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$ otkrili su Lévy 1954. godine i Itô 1942. te je predstavljen kao Lévy-Itôva dekompozicija.

Teorem 1.4.1. *(Lévy-Itôva dekompozicija)*
Neka su zadani $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ i mjera Π koncentrirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ koja zadovoljava $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)d\Pi(x) < \infty$. Postoji vjerojatnosni prostor na kojem postoje tri nezavisna Lévyjeva procesa $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$ gdje je $X^{(1)}$ linearno Brownovo gibanje s linearnim driftom oblika (1.16) s karakterističnim eksponentom

$$\psi^1(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2,$$

$X^{(2)}$ složeni Poissonov proces oblika (1.17) s karakterističnim eksponentom

$$\psi^2(\theta) = \Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \int_{|x|\geq 1} (1 - e^{i\theta x}) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))}$$

i $X^{(3)}$ kvadratno integrabilan martingal s gotovo sigurno prebrojivo mnogo skokova na svakom konačnom vremenskom intervalu i s karakterističnim eksponentom

$$\psi^3(\theta) = \int_{0<|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x)d\Pi(x).$$

Na tom vjerojatnosnom prostoru $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$ *je Lévyjev proces s karakterističnim eksponentom*

$$\psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbb{1}_{|x|<1}) d\Pi(x)$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Poglavlje 2

Presjek vjerojatnosnih funkcija propasti

2.1 Dva Cramér-Lundbergova procesa

Pogledajmo funkcije propasti za Cramér-Lundbergov proces s različitim parametrima te eksponencijalno distribuiranim iznosima šteta. Neka je

$$X_t^{(j)} = c_j t - \sum_{i=1}^{N_j(t)} \xi_i^{(j)},\ t \geq 0,$$

gdje je $c_j > 0$, $N_j(t)$ Poissonov proces s parametrom $\lambda_j > 0$, $\{\xi_i^{(j)} : i \geq 1\}$ niz pozitivnih, nezavisnih, eksponencijalno distribuiranih slučajnih varijabli, nezavisan s N_j te $\xi_i^{(j)} \sim Exp(\frac{1}{\mu_j})$ i vrijedi $\gamma_j = c_j - \lambda_j \mu_j > 0$, $j = 1, 2$.
Izračunajmo formulu (1.12) za vjerojatnost propasti s početnim kapitalom x. Koristimo sljedeći teorem.

Teorem 2.1.1. *Funkcija preživljenja χ je neprekidna na $\mathbb{R}_+$ s desnom derivacijom $\chi_+^{'}$ i lijevom $\chi_-^{'}$ te vrijedi:*

$$c\chi_+^{'}(x) = \lambda\Big(\chi(x) - \int_0^x \chi(x-y)dF(y)\Big)$$

$$c\chi_-^{'}(x) = \lambda\Big(\chi(x) - \int_0^{x-} \chi(x-y)dF(y)\Big).$$

Za dokaz pogledati [1], str. 163. Jednadžbe iz teorema zadovoljava jednakost:

$$c\chi^{'}(x) = \lambda\Big(\chi(x) - e^{-\frac{x}{\mu}} \frac{1}{\mu} \int_0^x \chi(y) e^{\frac{y}{\mu}} dy\Big). \tag{2.1}$$

Imamo $\chi^{'}$ je diferencijabilna i

$$c\chi^{''}(x) = \lambda\Big(\chi^{'}(x) + \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \frac{1}{\mu} \int_0^x \chi(y) e^{\frac{y}{\mu}} dy - \frac{1}{\mu}\chi(x)\Big) = (\lambda - \frac{c}{\mu})\chi^{'}(x).$$

Za tu diferencijalnu jednadžbu moguće rješenje je:

$$\chi(x) = c_1 - c_2 e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})x},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Iz $\lim_{x\to\infty}\chi(x) = 1$ slijedi $c_1 = 1$. Uvrštavanjem (2.2) u (2.1) slijedi $c_2 = \frac{\lambda\mu}{c}$. Stoga je formula za vjerojatnost propasti:

$$\vartheta(x) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})x} \tag{2.3}$$

te vrijedi sljedeći rezultat:

Propozicija 2.1.2. *Neka su ϑ_j vjerojatnosne funkcije propasti za $X_t^{(j)}$, j = 1, 2.*
(i) Ako

$$\frac{\lambda_1\mu_1}{c_1} \leq \frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}$$

i

$$\frac{1}{\mu_1} - \frac{\lambda_1}{c_1} \geq \frac{1}{\mu_2} - \frac{\lambda_2}{c_2}$$

onda $\vartheta_1(x) \leq \vartheta_2(x)$ za $x > 0$.
(ii) Ako

$$\frac{\lambda_1\mu_1}{c_1} < \frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}$$

i

$$\frac{1}{\mu_1} - \frac{\lambda_1}{c_1} < \frac{1}{\mu_2} - \frac{\lambda_2}{c_2}$$

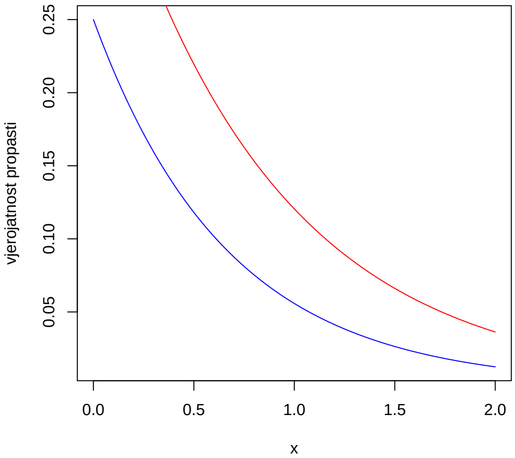
onda $\vartheta_1(x) < \vartheta_2(x)$ za $x < x_0$ i $\vartheta_1(x) > \vartheta_2(x)$ za $x > x_0$ gdje x_0 predstavlja jedinstveno sjecište funkcija propasti ϑ_1 i ϑ_2, $x_0 = \frac{1}{\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} - \frac{\lambda_2}{c_2}} \log \frac{\lambda_2\mu_2 c_1}{\lambda_1\mu_1 c_2}$.

Primijetimo da se funkcije propasti ϑ_1 i ϑ_2 ne sijeku ili imaju jednu točku sjecišta.

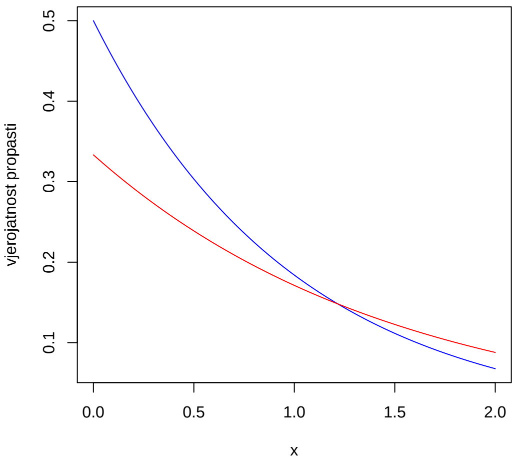
Primjer 2.1.3. *Neka su $X_t^{(1)} = 4t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} \xi_i^{(1)}$ i $X_t^{(2)} = 5t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} \xi_i^{(2)}$, gdje su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ i neka su $X_t^{(3)} = 2t - \sum_{i=1}^{N_3(t)} \xi_i^{(3)}$ i $X_t^{(4)} = 3t - \sum_{i=1}^{N_4(t)} \xi_i^{(4)}$, gdje su $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$, $\mu_3 = \frac{1}{2}$ i $\mu_4 = 1$.*
Funkcije propasti za navedene modele redom su:

$$\vartheta_1(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}x},\ \vartheta_2(x) = \frac{2}{5}e^{-\frac{6}{5}x},\ \vartheta_3(x) = \frac{1}{2}e^{-x},\ \vartheta_4(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}x}$$

te su na slici 2.1 prikazane $\vartheta_1(x)$ plavom bojom i $\vartheta_2(x)$ crvenom bojom, a na 2.7 $\vartheta_3(x)$ plavom bojom i $\vartheta_4(x)$ crvenom bojom.



Slika 2.1: Prikaz funkcija $\vartheta_1(x)$ i $\vartheta_2(x)$



Slika 2.2: Prikaz funkcija $\vartheta_3(x)$ i $\vartheta_4(x)$

2.2 Spektralno negativni Lévyjevi procesi

Sada ćemo promatrati klasu Lévyjevih procesa bez pozitivnih skokova. Lévyjev proces $X = \{X_t : t \geq 0\}$ za koji vrijedi $\Pi(0, \infty) = 0$, gdje je Π Lévyjeva mjera zovemo spektralno negativan proces.

Definicija 2.2.1. *Funkcija* $\Psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$\mathbb{E}[e^{\theta X_t}] = e^{\Psi(\theta)t}, \ \forall\theta > 0 \tag{2.4}$$

zove se Laplaceov eksponent od X.

Ψ je beskonačno diferencijabilna na $[0, \infty)$, strogo konveksna te $\Psi(0) = 0$ i $\lim_{x\to\infty} \Psi(x) = \infty$. Ako dovedemo u vezu karakteristični i Laplaceov eksponent, iz formula (1.7) i (2.4) slijedi $\Psi(\theta) = -\psi(-i\theta)$ pa uvrštavanjem u Lévy-Khintchinovu formulu Laplaceov eksponent spektralno negativnog procesa postiže oblik:

$$\Psi(\theta) = -a\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + \int_{(-\infty,0)} (e^{\theta x} - 1 - \theta x \mathbb{1}_{|x|<1}) d\Pi(x) \ , \ a > 0. \tag{2.5}$$

Iz (1.6) i definicije spektralno negativnih procesa za Laplaceov eksponent vrijedi $\Psi(\theta) < \infty, \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.2.2. *Neka je μ mjera na* $[0, \infty)$. *Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\mu$ od μ je definirana s*

$$\mathcal{L}\mu(\theta) = \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x}\mu(dx), \ za \ \theta > \sigma_0$$

gdje je $\sigma_0 = \inf\{\theta \in \mathbb{R} : \int_{[0,\infty)} e^{-\theta x}\mu(dx) < \infty\}$.

Napomena 2.2.3. *i) Ako je μ konačna mjera, onda je* $\sigma_0 < 0$.
ii) Neka je $\mathcal{L}\mu(a) < \infty$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Tada

$$\nu(dx) = \frac{e^{-ax}}{\mathcal{L}\mu(a)}\mu(dx)$$

definira vjerojatnosnu mjeru na $[0, \infty)$ *s Laplaceovom transformacijom*

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\theta x}\nu(dx) = \frac{1}{\mathcal{L}\mu(a)} \int_{[0,\infty)} e^{-(\theta+a)x}\mu(dx) = \frac{\mathcal{L}\mu(\theta + a)}{\mathcal{L}\mu(a)}.$$

iii) Za $\mu(dx) = f(x)dx$ vrijedi

$$\mathcal{L}\mu(\theta) = \mathcal{L}f(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} f(x)dx.$$

iv) Neka je X nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i* μ *distribucija od X. Vrijedi:*

$$\mathcal{L}\mu(\theta) = \mathbb{E}[e^{-\theta X}], \ za\ \theta > \sigma_0.$$

Sljedeći bitan pojam je funkcija skale. Za svaki spektralno negativan Lévyjev proces $\{X_t : t \geq 0\}$ postoji funkcija $W : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ za koju vrijedi: jedinstvena je, $W(x) = 0$ za $x < 0$, rastuća i neprekidna na $[0, \infty)$ i njena Laplaceova transformacija dana je s:

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} W(x) dx = \frac{1}{\Psi(\theta)}, \ \theta > 0. \tag{2.6}$$

Veza između funkcije propasti ϑ i funkcije skale je sljedeća:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1 - \Psi'(0+)W(x) & \Psi'(0+) > 0 \\ 1 & \Psi'(0+) < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Za α - stabilan spektralno negativan Lévyjev proces Z^α s pozitivnim pomakom $c > 0$, $X_t = Z_t^\alpha + ct$, gdje je $\alpha \in (1, 2]$ funkcija skale je dana s:

$$W(x) = \frac{1}{c}(1 - E_{\alpha-1}(-cx^{\alpha-1})) \tag{2.8}$$

gdje je

$$E_{\alpha-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + (\alpha - 1)k)} \tag{2.9}$$

Mittag-Lefflerova funkcija s indeksom $\alpha - 1$ i $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ x > 0$ Gamma funkcija za koju vrijedi $\Gamma(n) = (n-1)!, \ n \in \mathbb{N}$.

Navedimo dva bitna teorema koja ćemo koristiti u dokazima: Tauberovski i teorem monotone gustoće. Za funkcije f i g notacija $f \sim g$ znači da je $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Teorem 2.2.4. *Neka su* $L > 0, \ \rho \geq 0$ *pozitivne konstante i U mjera na* $[0, \infty)$ *s Laplaceovom transformacijom*

$$\Lambda(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} dU(x), \ \theta \geq 0.$$

a) (Tauberovski)
Ekvivalentno je:
(i)

$$\Lambda(\theta) \sim L\theta^{-\rho}, \ kad\ \theta \to 0$$

(ii)

$$U(x) \sim \frac{L}{\Gamma(1+\rho)} x^\rho, \ kad\ x \to \infty, \ gdje\ U(x) = U([0, x]).$$

b) (Teorem monotone gustoće)
Neka je $\rho > 0$ i za mjeru U vrijedi $U([0, x]) = \int_0^x u(t)dt,\ t > 0$, gdje je $u : [0, \infty] \to [0, \infty]$ monotona funkcija. Ekvivalentno je:
(i)

$$\Lambda(\theta) \sim L\theta^{-\rho},\ kad\ \theta \to 0$$

(ii)

$$u(x) \sim \frac{L}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1},\ kad\ x \to \infty.$$

Neka je $X = \{X_t : t \geq 0\}$, $X_t = \sigma Y_t + ct$ spektralno negativan Lévyjev proces s driftom $c > 0$ i ϑ_X vjerojatnosna funkcija propasti za proces X.

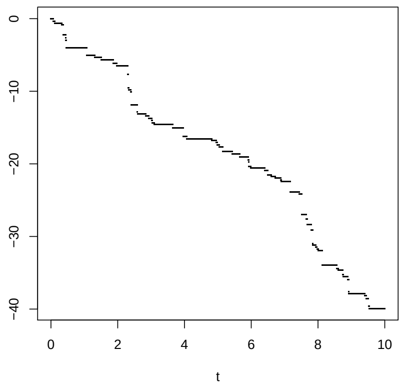
Lema 2.2.5. *Za funkciju propasti procesa X vrijedi:*

$$\vartheta_X(x) = \vartheta_{X/\sigma}(\frac{x}{\sigma}) \tag{2.10}$$

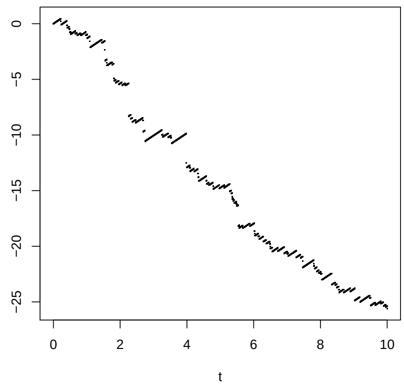
Dokaz.

$$\begin{aligned} \vartheta_X(x) &= \mathbb{P}(X_t < 0,\ za\,neki\,t > 0) \\ &= \mathbb{P}(x + ct < 0,\ za\ neki\ t > 0) \\ &= \mathbb{P}(\frac{x}{\sigma} + \frac{c}{\sigma}t < 0,\ za\ neki\ t > 0) \\ &= \vartheta_{X/\sigma}(\frac{x}{\sigma}) \end{aligned}$$

□



Slika 2.3: 1.4− stabilan spektralno negativan proces



Slika 2.4: 1.8− stabilan spektralno negativan proces s driftom $c = 2$

Dva α-stabilna spektralno negativna procesa

Neka je $X = \{X_t : t > 0\}$, $X_t = Z_t^\alpha + ct$, $c > 0$ pozitivan drift i Z^α α-stabilan spektralno negativan Lévyjev proces s parametrom stabilnosti $\alpha \in (1, 2]$. Laplaceov eksponent za proces X dan je s:

$$\Psi(\theta) = \theta^\alpha + c\theta. \tag{2.11}$$

Iz (2.7), (2.8), (2.9) i (2.11) slijedi da je vjerojatnosna funkcija propasti za proces X

$$\vartheta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k x^{(\alpha-1)k}}{\Gamma(1 + (\alpha - 1)k)} = E_{\alpha-1}(-cx^{\alpha-1}). \tag{2.12}$$

U slučaju Brownovog gibanja, $\alpha = 2$, funkcija propasti je oblika $\vartheta(x) = E_1(-cx) = e^{-cx}$. Neka je sada $X_t = \sigma Z_t^\alpha + ct$, Z^α α-stabilan spektralno negativan proces s driftom $c > 0$, skalarom $\sigma > 0$ i parametrom stabilnosti $\alpha \in (1, 2]$. Njegovu funkciju propasti računamo uvrštavanjem (2.12) u (2.10):

$$\vartheta(x) = \vartheta_{X/\sigma}(\frac{x}{\sigma}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{c}{\sigma^\alpha})^k x^{(\alpha-1)k}}{\Gamma(1 + (\alpha - 1)k)} = E_{\alpha-1}(-\frac{c}{\sigma^\alpha} x^{\alpha-1}). \tag{2.13}$$

Iz (2.4) vrijedi

$$\mathbb{E}e^{\theta X_t} = \mathbb{E}e^{(\theta\sigma)(Z_t^\alpha + \frac{c}{\sigma}t)} = e^{\Psi(\theta\sigma)t}$$

pa je Laplaceov eksponent za proces X

$$\Psi_X(\theta) = \Psi_{X/\sigma}(\theta\sigma) = (\theta\sigma)^\alpha + c\theta. \tag{2.14}$$

Lema 2.2.6. *Funkcija propasti ϑ za proces X zadovoljava:*

$$\vartheta(x) \sim \frac{\sigma^\alpha x^{-(\alpha-1)}}{c\Gamma(1 - (\alpha - 1))}, \; x \to \infty. \tag{2.15}$$

Dokaz. Iz (2.6), (2.7) i (2.14)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\vartheta(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta x} d\vartheta(x) = \int_0^\infty e^{-\theta x}(1 - cW(x))dx \\ &= \frac{1}{\theta} - \frac{c}{\Psi(x)} = \frac{1}{\theta} - \frac{c}{(\sigma\theta)^\alpha + c\theta} \\ &= \frac{\sigma^\alpha\theta^\alpha}{\sigma^\alpha\theta^{\alpha+1} + c\theta^2} = \frac{\theta^{\alpha-2}}{\theta^{\alpha-1} + \frac{c}{\sigma^\alpha}}. \end{aligned}$$

Zbog $\mathcal{L}\vartheta(\theta) \sim \frac{\sigma^\alpha}{c}\theta^{\alpha-2}$ po teoremu monotone gustoće vrijedi $\rho = (2 - \alpha)$ i $L = \frac{\sigma^\alpha}{c}$ pa slijedi (2.15).

□

Lema 2.2.7. *Vjerojatnosna funkcija doživljenja $\chi = 1 - \vartheta$ za proces X postiže sljedeći oblik:*

$$\chi(x) \sim \frac{cx^{\alpha-1}}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \ x \to 0. \tag{2.16}$$

Dokaz. Iz (2.13) izračunamo funkciju doživljenja za proces X_t:

$$\chi(x) = 1 - \vartheta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)}\frac{(\frac{c}{\sigma^{\alpha}})^k x^{(\alpha-1)k}}{\Gamma(1+(\alpha-1)k)}.$$

Računamo Laplaceovu transformaciju za mjeru $d\chi(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\chi(\theta) &= \int_0^{\infty} e^{-\theta x} d\chi(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)}\frac{(\frac{c}{\sigma^{\alpha}})^k(\alpha-1)k}{\Gamma(1+(\alpha-1)k)}\int_0^{\infty} e^{-\theta x}x^{(\alpha-1)k-1}dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)}\frac{(\frac{c}{\sigma^{\alpha}})^k(\alpha-1)k}{\Gamma(1+(\alpha-1)k)}\frac{\Gamma((\alpha-1)k)}{\theta^{(\alpha-1)k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\frac{c}{\sigma^{\alpha}})^{k+1}}{\theta^{(\alpha-1)(k+1)}} = \frac{c}{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{c}{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}})^k \\
&= \frac{c}{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}}\frac{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}}{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}+c} = \frac{c}{\sigma^{\alpha}\theta^{\alpha-1}+c}
\end{aligned}$$

gdje je $\theta > \frac{1}{\sigma}(\frac{c}{\sigma})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ i koristimo $\int_0^{\infty} e^{-\theta x}x^{\rho}dx = \frac{\Gamma(1+\rho)}{\theta^{1+\rho}}$. Slijedi da $\mathcal{L}\chi(\theta) \sim \frac{c}{\sigma^{\alpha}}\theta^{-(\alpha-1)}$ kad $\theta \to \infty$. Tvrdnja (2.16) slijedi iz Tauberovskog teorema. □

Neka su dani procesi $\{X_t^{(1)} = \sigma_1 Z_t^{\alpha_1} + c_1 t : t \geq 0\}$ i $\{X_t^{(2)} = \sigma_2 Z_t^{\alpha_2} + c_2 t : t \geq 0\}$, gdje su Z^{α_1} i Z^{α_2} spektralno negativni Lévyjevi procesi s parametrima $\alpha_1, \alpha_2 \in (1,2]$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ i c_1, $c_2 > 0$.

Propozicija 2.2.8. *Pretpostavimo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i ϑ_1, ϑ_2 funkcije propasti za procese $X^{(1)}$, $X^{(2)}$.*
(a) Ako je $\frac{c_1}{\sigma_1^{\alpha}} < \frac{c_2}{\sigma_2^{\alpha}}$, onda je $\vartheta_1(x) > \vartheta_2(x)$, $\forall x > 0$
(b) Ako je $\frac{c_1}{\sigma_1^{\alpha}} = \frac{c_2}{\sigma_2^{\alpha}}$, onda je $\vartheta_1(x) = \vartheta_2(x)$, $\forall x > 0$.

Dokaz. Neka je $X_t = Z_t^{\alpha} + t$. Funkcija propasti za proces X je definirana s $\vartheta(x) = E_{\alpha-1}(-x^{\alpha-1})$ pa za procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ vrijedi: $\vartheta_1(x) = E_{\alpha-1}(-\frac{c}{\sigma_1^{\alpha}}x^{\alpha-1})$ i $\vartheta_2(x) = E_{\alpha-1}(-\frac{c}{\sigma_2^{\alpha}}x^{\alpha-1})$. Tada imamo

$$\vartheta_1(x) = \vartheta(\frac{c_1}{\sigma_1^{\alpha}}x)$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta(\frac{c_2}{\sigma_2^\alpha}x).$$

(a) Pretpostavimo $\frac{c_1}{\sigma_1^\alpha} < \frac{c_2}{\sigma_2^\alpha}$. Tada je vjerojatnosna funkcija propasti ϑ padajuća i

$$\vartheta_1(x) = \vartheta(\frac{c_1}{\sigma_1^\alpha}x) > \vartheta(\frac{c_2}{\sigma_2^\alpha}x) = \vartheta_2(x), \forall\ x > 0.$$

(b) U slučaju $\frac{c_1}{\sigma_1^\alpha} = \frac{c_2}{\sigma_2^\alpha}$ procesi imaju istu funkciju propasti. □

Teorem 2.2.9. *Pretpostavimo neka je $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Tada funkcije propasti za dane procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ imaju pozitivnu točku sjecišta.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 < \alpha_2$. Po prethodnoj lemi funkcije preživljenja χ_1 i χ_2 za procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ zadovoljavaju:

$$\chi_1(x) \sim \frac{c_1 x^{\alpha_1 - 1}}{\sigma_1^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)},\ x \to 0$$

$$\chi_2(x) \sim \frac{c_2 x^{\alpha_2 - 1}}{\sigma_2^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)},\ x \to 0.$$

Zaključujemo da je $\chi_1(x) > \chi_2(x)$, kad je $x > 0$ dovoljno mali. Tada funkcije propasti za procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ zadovoljavaju $\vartheta_1(x) < \vartheta_2(x)$, $x > 0$. Iz (2.15) slijedi

$$\vartheta_1(x) \sim \frac{\sigma_1^{\alpha_1} x^{-\alpha_1+1}}{c_1\Gamma(2-\alpha_1)},\ x \to \infty$$

$$\vartheta_2(x) \sim \frac{\sigma_2^{\alpha_2} x^{-\alpha_2+1}}{c_2\Gamma(2-\alpha_2)},\ x \to \infty.$$

Za dovoljno velik $x > 0$ vrijedi

$$\vartheta_1(x) > \vartheta_2(x).$$

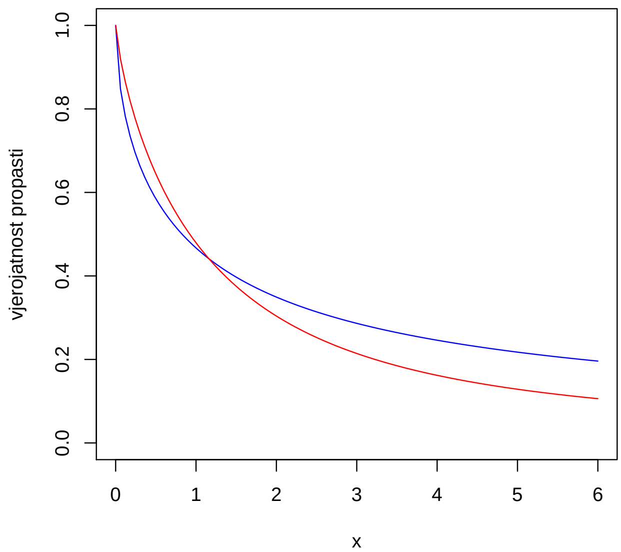
Vjerojatnosne funkcije propasti su neprekidne pa postoji sjecište za $x > 0$.
Analogno se dokazuje slučaj $\alpha_1 > \alpha_2$. □

Znamo da je propast modela s inicijalnim viškom 0 sigurna. Ako $\vartheta(x)$ označava vjerojatnost propasti procesa u tom modelu, onda je $\vartheta(0) = 1$ pa se vjerojatnosne funkcije propasti bilo koja dva procesa sijeku u nuli. Iz do sad razmotrenog možemo zaključiti da postojanje više od jednog sjecišta funkcija propasti ovisi o parametru α. Ako procesi $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ imaju isti parametar α funkcije propasti imaju jedinstveno sjecište u nuli, a u suprotnom imaju i sjecište u točki $x > 0$. Ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i $\frac{c_1}{\sigma_1^\alpha} = \frac{c_2}{\sigma_2^\alpha}$ onda procesi imaju zajedničku funkciju propasti (slijedi iz 2.13).

Primjer 2.2.10. *Neka su* $X^{(1)} = \{0.9Z_t^{1.6} + 0.7t : t \geq 0\}$ *i* $X^{(2)} = \{0.8Z_t^{1.8} + 0.5t : t \geq 0\}$ *dva procesa, gdje je* $Z^{1.6}$ $1.6-$ *stabilan spektralno negativan proces, a* $Z^{1.8}$ $1.8-$*stabilan spektralno negativan proces. Njihove funkcije propasti su po* (2.13) *sljedeće:*

$$\vartheta_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{0.83^k x^{0.6k}}{\Gamma(1+0.6k)}, \quad \vartheta_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{0.75^k x^{0.8k}}{\Gamma(1+0.8k)}$$

te su prikazane na slici 2.5. *Neka je sada* $X = \{X_t = Z_t^{\alpha} + 0.5t : t \geq 0\}$ *dan* $\alpha-$*stabilan*

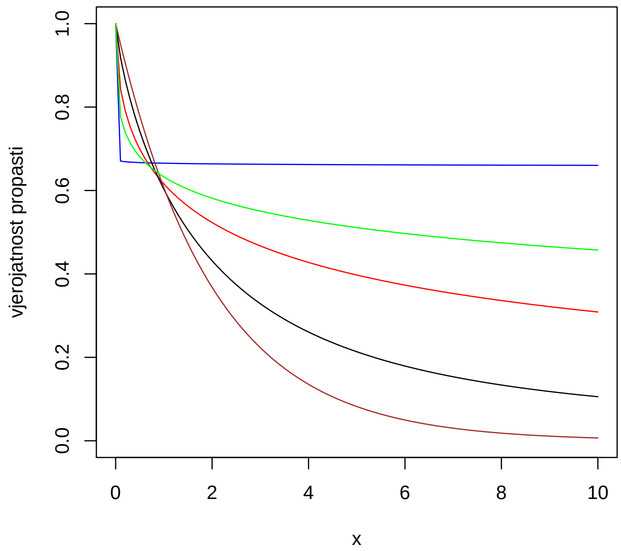


Slika 2.5: Funkcije propasti procesa $X^{(1)} = \{0.9Z_t^{1.6} + 0.7t : t \geq 0\}$ (plavo), $X^{(2)} = \{0.8Z_t^{1.8} + 0.5t : t \geq 0\}$ (crveno)

spektralno negativan proces s driftom $c = 0.5$. *Njegova funkcija propasti je (po* 2.12*):*

$$\vartheta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{0.5^k x^{(\alpha-1)k}}{\Gamma(1+(\alpha-1)k)}.$$

Slika 2.6 *prikazuje funkcije propasti za sljedeće vrijednosti od* α : $1.01, 1.3, 1.5, 1.8, 2$. *Možemo vidjeti da se povećanjem parametra* α *vjerojatnost propasti smanjuje te da se svake dvije funkcije međusobno sijeku u dvije točke.*

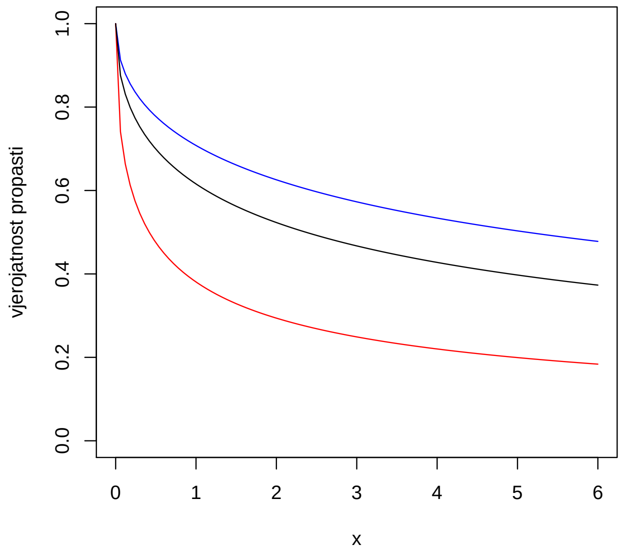


Slika 2.6: Funkcije propasti α-stabilnih spektralno negativnih procesa, $\alpha = 1.01,\ 1.3,\ 1.5,\ 1.8$ i 2 redom od najviše prema najnižoj krivulji

Pogledajmo sada slučaj za koji imamo jednake $\alpha-$ *stabilne spektralno negativne procese* Z^{α} *s različitim driftovima* $c > 0$ *i skalarima* $\sigma > 0$. *Neka su* $\{X_t^{(i)} = \sigma_i Z_t^{1.5} + c_i t : t \geq 0\}$, $i = 3, 4, 5$, $X_t^{(3)} = 0.7Z_t^{1.5} + 0.2t$, $X_t^{(4)} = Z_t^{1.5} + 0.5t$ *i* $X_t^{(5)} = 0.4Z_t^{1.5} + 0.3t$. *Funkcije propasti danih procesa su sljedeće:*

$$\vartheta_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0.34^k x^{0.5k}}{\Gamma(1+0.5k)}, \quad \vartheta_4(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0.5^k x^{0.5k}}{\Gamma(1+0.5k)}, \quad \vartheta_5(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1.19^k x^{0.5k}}{\Gamma(1+0.5k)}.$$

Na slici 2.7 *možemo vidjeti da za funkcije propasti procesa* $X^{(3)}$, $X^{(4)}$ *i* $X^{(5)}$ *vrijedi* $\vartheta_3(x) < \vartheta_4(x) < \vartheta_5(x), \forall x > 0$ *što je i dokazano u Propoziciji* 2.2.8.



Slika 2.7: Funkcije propasti procesa $X^{(3)} = \{0.7Z_t^{1.5} + 0.2t : t \geq 0\}$, $X^{(4)} = \{Z_t^{1.5} + 0.5t : t \geq 0\}$ i $X^{(5)} = \{0.4Z_t^{1.5} + 0.3t : t \geq 0\}$ redom od najveće

Zadamo li procese $X^{(6)}$ i $X^{(7)}$ s $X^{(6)} = \{Z_t^{1.5} + 4t : t \geq 0\}$ i $X^{(7)} = \{0.25Z_t^{1.5} + 0.5t : t \geq 0\}$ možemo primijetiti da oni imaju zajedničku funkciju propasti $\vartheta_6(x) = \vartheta_7(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k x^{0.5k}}{\Gamma(1+0.5k)}$.

Dva klasična rizična procesa perturbirana α- stabilnim spektralno negativnim procesom

Neka je Cramér-Lundbergov proces perturbiran s α-stabilnim spektralno negativnim Lévyjevim procesom dan s:

$$X_t = Z_t^{\alpha} + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$$

gdje je Z^{α} spektralno negativan Lévyjev proces s parametrom $\alpha \in (1, 2)$, $c > 0$ pozitivni drift, $N(t)$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ i $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nezavisne, jednako distribuirane varijable sa zajedničkom distribucijom F, $\mathbb{E}(\xi_1) = \mu$. Neka je zadovoljen uvjet net profita $\gamma = c - \lambda\mu > 0$.

Lema 2.2.11. *Vjerojatnost preživljenja χ za proces X zadovoljava*

$$\chi(x) \sim \frac{\gamma x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \; x \to 0. \tag{2.17}$$

Dokaz. Laplaceov eksponent za proces X dan je s

$$\Psi(\theta) = \theta^\alpha + c\theta - \lambda \int_0^\infty (1 - e^{-\theta t}) dF(t)$$

te je $\Psi'(0+) = \gamma > 0$. Koristeći (2.6) i (2.7) računamo Laplaceovu transformaciju za funkciju preživljenja $\chi = \gamma W$:

$$\begin{aligned} L\chi(x) =& \gamma \int_0^\infty e^{-tx} W(t) dt = \frac{\gamma}{\Psi(x)} \\ =& \frac{\gamma}{x^\alpha + cx - \lambda \int_0^\infty (1 + e^{-xt}) dF(t)}. \end{aligned}$$

Tada $L\chi(x) \sim \gamma x^{-\alpha}$, $x \to \infty$ te (2.17) slijedi iz teorema o monotonoj gustoći. □

Sljedeći teorem pokazuje da dva klasična rizična procesa perturbirana α-stabilnim Lévyjevim gibanjem s različitim parametrima α imaju pozitivno sjecište. Neka su procesi $X^{(1)} = \{X_t^{(1)} : t \geq 0\}$ i $X^{(2)} = \{X_t^{(2)} : t \geq 0\}$ dani s:

$$X_t^{(1)} = Z_t^{\alpha_1} + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} \xi_i^{(1)} \tag{2.18}$$

$$X_t^{(2)} = Z_t^{\alpha_2} + c_2 t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} \xi_i^{(2)} \tag{2.19}$$

gdje je $t \geq 0$, Z^{α_1} i Z^{α_2} spektralno negativni Lévyjevi procesi s parametrima α_1, $\alpha_2 \in (1, 2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $c_i > 0$ pozitivni driftovi, $N_i(t)$ Poissonovi procesi s parametrima $\lambda_i > 0$, $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots$ nezavisne, jednako distribuirane varijable sa zajedničkom distribucijom F_i, $\mathbb{E}(\xi_1^{(i)}) = \mu_i$ i neka je zadovoljen uvjet net profita $\gamma_i = c_i - \lambda_i \mu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Teorem 2.2.12. *Presjek funkcija propsti za procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$ dane s (2.18) i (2.19) ima pozitivnu točku presjeka.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 < \alpha_2$. Po prethodnoj lemi imamo sljedeće funkcije preživljenja za procese $X^{(1)}$ i $X^{(2)}$:

$$\chi_1(x) \sim \frac{\gamma_1 x^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)}, \; x \to 0$$

$$\chi_2(x) \sim \frac{\gamma_2 x^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}, \ x \to 0.$$

Zaključujemo da one zadovoljavaju $\chi_1(x) > \chi_2(x)$ odnosno za funkcije propasti vrijedi $\vartheta_1(x) < \vartheta_2(x)$ za $x > 0$ dovoljno mali. H. Furrer je u [6] dokazao da za vjerojatnosti propasti vrijedi:

$$\vartheta_1(x) \sim \frac{x^{-\alpha_1+1}}{\gamma_1\Gamma(2-\alpha_1)}, \ x \to \infty$$
$$\vartheta_2(x) \sim \frac{x^{-\alpha_2+1}}{\gamma_2\Gamma(2-\alpha_2)}, \ x \to \infty.$$

Iz toga slijedi $\vartheta_1(x) > \vartheta_2(x)$ za $x > 0$ dovoljno veliki. Kako su funkcije propasti neprekidne, možemo zaključiti da postoji pozitivna točka sjecišta.

□

Presjek funkcija propasti s *n* sjecišta

Sada ćemo pokazati primjer da postoje dvije funkcije propasti koje imaju *n* sjecišta. Navodimo ključne rezultate čiji se dokazi nalaze u [5].

Lema 2.2.13. *Neka je μ vjerojatnosna mjera na $[0,\infty)$ takva da $\mu(\{0\}) = 0$. Tada je*

$$\vartheta(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-xt}\mu(dt) = \mathcal{L}\mu(x)$$

funkcija propasti spektralno negativnog Lévyjevog procesa koji teži prema $+\infty$.

Teorem 2.2.14. *Za svaki $n \in N$ postoje dva različita spektralno negativna Lévyjeva procesa koji teže u $+\infty$ i čije funkcije propasti ϑ_1 i ϑ_2 imaju n sjecišta.*

Pomoću njih možemo konstruirati funkcije propasti s $n \in \mathbb{N}$ sjecišta, a skicu toga dajemo u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.15. *Neka je $\epsilon = \frac{1}{10}$, $\mu = \frac{5}{4}l$, l Lebesgueova mjera na $[0,1]$, μ vjerojatnosna mjera na $[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$ te $\mu = 0$ na $(0, \frac{1}{10}) \cup (\frac{9}{10}, 1)$. Definirajmo funkciju propasti s*

$$\vartheta_1(x) = \int_0^1 s^x\mu(ds) = \frac{5}{4}\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{9}{10}} s^x ds = \frac{5}{4}\frac{(\frac{9}{10})^{x+1} - (\frac{1}{10})^{x+1}}{x+1}, x \geq 0.$$

Za preslikavanje $s = -\ln t$ mjera μ na $(0,1]$ je slika mjere $\hat{\mu}(dt)$ na $[0,\infty)$ te je $\vartheta_1(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\hat{\mu}(dt)$. Po Lemi 2.2.13 ϑ_1 je funkcija propasti spektralno negativnog Lévyjevog procesa. Neka je ν mjera na $(0,1]$, $\nu = 0$ na $(0, \frac{1}{10}) \cup (\frac{9}{10}, 1)$. Definiramo sada

$$\vartheta_2(x) = \int_0^1 s^x\nu(ds).$$

Tražimo mjeru ν *na* $(0,1]$ *za koju su nulti, prvi i drugi momenti za* μ *i* ν *jednaki. Vrijedi:*

$$\int_0^1 s^1\mu(ds) = \frac{1}{2}, \int_0^1 s^2\mu(ds) = \frac{91}{300}, \int_0^1 s^3\mu(ds) = \frac{41}{200}.$$

Pretpostavimo $\nu = \alpha_1\delta_{\frac{3}{4}} + \alpha_2\delta_{\frac{1}{2}} + \alpha_3\delta_{\frac{1}{4}}$, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \geq 0$. *Iz jednakosti momenata dobivamo sljedeće jednadžbe:*

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 &= \int_0^1 s^1\nu(ds) = \frac{1}{2} \\
\frac{9}{16}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{16}\alpha_3 &= \int_0^1 s^2\nu(ds) = \frac{91}{300} \\
\frac{81}{64}\alpha_1 + \frac{1}{16}\alpha_2 + \frac{1}{64}\alpha_3 &= \int_0^1 s^3\nu(ds) = \frac{41}{200}.
\end{aligned}$$

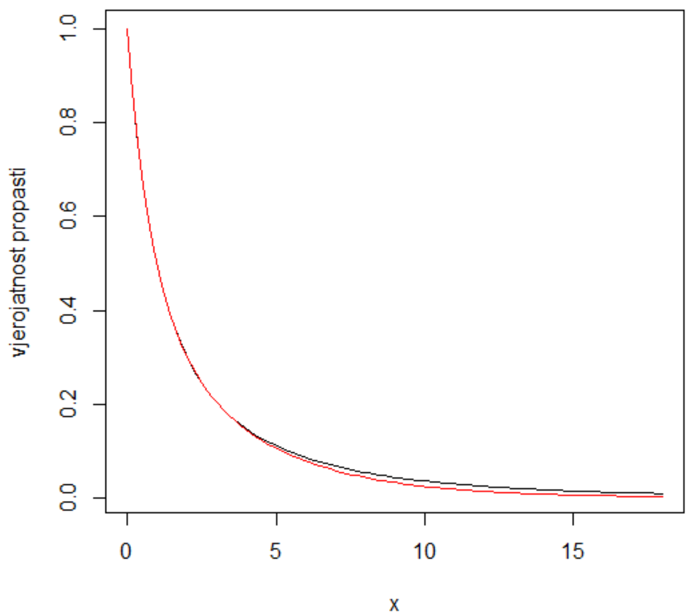
Njihovo rješenje je sljedeće: $\alpha_1 = \frac{32}{75}$, $\alpha_2 = \frac{11}{75}$, $\alpha_3 = \frac{32}{75}$. *Preslikavanjem* $t = -\ln s$ *mjera* ν *je slika mjere* $\hat{\nu}$ *na* $[0,\infty)$ *pa je*

$$\hat{\nu} = \frac{32}{75}\delta_{\ln\frac{3}{4}} + \frac{11}{75}\delta_{\ln 2} + \frac{32}{75}\delta_{\ln 4}.$$

Sada za funkciju propasti $\vartheta_2(x)$ *vrijedi:*

$$\vartheta_2(x) = \int_0^1 s^x\nu(ds) = \int_0^\infty e^{-xt}\hat{\nu}(dt) = \frac{32}{75}\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} + \frac{11}{75}2^{-x} + \frac{32}{75}4^{-x}.$$

Po Lemi 2.2.13 to je funkcija propasti spektralno negativnog Lévyjevog procesa koji teži u ∞. *Funkcije propasti konstruirali smo tako da smo dobili barem 3 točke presjeka, vrijedi:* $\vartheta_1(1) = \vartheta_2(1) = \frac{1}{2}$, $\vartheta_1(2) = \vartheta_2(2) = \frac{91}{300}$, $\vartheta_1(3) = \vartheta_2(3) = \frac{41}{200}$. *Navedene funkcije propasti prikazane su na slici 2.8.*



Slika 2.8: Funkcije propasti $\vartheta_1(x)$ (crno) i $\vartheta_2(x)$ (crveno)

Bibliografija

[1] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, J. Wiley & Sons, 1999.

[2] N. Sarapa *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[3] A. E. Kyprianou *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, 2006.

[4] K. Sato *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* Cambridge University press, 1999.

[5] T. Slijepčević Manger *Intersections of two ruin probability functions*, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, 2010.

[6] H. Furrer *Risk Processes Pertubed by α- stabile Lévx Motion*, Scand. Actuar. J. , 1998.

Sažetak

U ovom radu promatramo vjerojatnosne funkcije propasti. U prvom dijelu definirani su Lévyjevi procesi, razmotrena njihova osnovna svojstva te primjeri. Definirani su sljedeći ključni pojmovi: karakteristična funkcija funkcije distribucije, beskonačno djeljive i stabilne distribucije, karakteristični eksponent i Lévyjeva mjera beskonačno djeljive distribucije. Zatim su navedeni primjeri Lévyjevih procesa te izračunate njihove karakteristične funkcije i Lévyjeve trojke. U drugom dijelu rada bavimo se presjecima funkcija propasti. Definirani su pojmovi koji su nam bitni u računanju funkcija propasti: Laplaceov eksponent, Laplaceova transformacija, funkcija skale. Izračunate su funkcije propasti klasičnog Cramer-Lundbergovog procesa i $\alpha-$stabilnog spektralno negativnog procesa te razmotren broj sjecišta dvije funkcije propasti. Zatim je promatran klasični model perturbiran $\alpha-$stabilnim spektralno negativnim procesom te je na kraju iskazan rezultat koji daje uvjete za proizvoljan broj sjecišta dviju funkcija propasti.

Summary

In this thesis, we study ruin probability functions. In the first part, we define the notion of a Levy process. Also, we discuss certain properties and provide examples of these processes. In particular, we discuss the notion of characteristic function of a distribution function, infinitely divisible and stable distribution functions, characteristic exponent and Lévy measure of a infinitely divisible distribution function. At the end we provide several classical examples of Levy processes, and compute their Levy characteristics. In the second part of the thesis, we deal with intersections of ruin probability functions. We discuss the notion of Laplace exponent, Laplace transform and scale function. In particular, we explicitly compute ruin probability of the classical risk process and spectrally negative α-stable process and discuss intersections between two ruin probability functions. Then we discuss a classical risk model perturbed by a $\alpha-$ stable spectrally negative Lévy processes. In the end, we state a result which gives sufficient conditions for arbitrary number of intersections of two ruin probability functions.

Životopis

Rođena sam 14. veljače 1995. u Zagrebu. Osnovnu školu završila sam u Zlatar Bistrici te zatim opću gimnaziju u Zlataru. Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisala sam 2013. godine, završila 2016. i školovanje nastavila upisajući diplomski studij Matematičke statistike iste godine.