

# Prikazi prodora oblih ploha uz pomoć računalne grafike

---

**Kovačić, Dajana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:390546>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-09**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dajana Kovačić

**PRIKAZI PRODORA OBLIH PLOHA**  
**UZ POMOĆ RAČUNALNE GRAFIKE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Dora Pokaz

Suvoditelj rada:  
prof. dr. sc. Sanja Varošaneć

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>1 Projiciranje</b>	<b>2</b>
1.1 Mongeova metoda projiciranja . . . . .	3
1.2 Aksonometrija . . . . .	6
<b>2 O prostornim krivuljama</b>	<b>9</b>
<b>3 Osnovni principi konstrukcije točkaka prodorne krivulje</b>	<b>12</b>
3.1 Prodor dva valjka . . . . .	12
3.2 Prodor dva stošca . . . . .	22
3.3 Prodor valjka i stošca . . . . .	30
3.4 Prodori sa sferom . . . . .	37
<b>4 Primjena prodora u svakodnevnom životu</b>	<b>50</b>
4.1 Svodovi . . . . .	53
4.2 Kupole . . . . .	54
<b>Bibliografija</b>	<b>57</b>

# Uvod

Prikazivanje trodimenzionalnih objekata iz prostora na papiru nije uvijek jednostavno. Ono vrlo često zahtjeva primjenu složenijeg znanja i metoda iz matematike te spretnu ruku prilikom same konstrukcije. Prikazivanje obliha ploha poput stošca, valjka i sfere, a posebice njihovih prodora, zahtjevan je i dugotrajan zadatak. Prikaz prodora može biti dvodimenzionalan no on u većini slučajeva ne pruža realan i zoran prikaz situacije stoga težimo trodimenzionalnim prikazima prodora. Ovisno o tome što je željeni cilj i prioritet prilikom konstrukcije, u skladu s time odabiru se raznovrsne metode projiciranja. Premda je korisno i pohvalno znati provesti konstrukciju bez upotrebe računala i raznih programa, ponekad nam to znatno može olakšati zadatak i uštedjeti vrijeme. Jedan od takvih programa, pomoću kojega se na jednostavan način mogu prikazati prodori obliha ploha je i program *Rhinoceros* koji je osmišljen za 3D modeliranje.

U prvom poglavlju ukratko ćemo opisati paralelno projiciranje, Mongeovu metodu projiciranja pomoću koje se mogu prikazivati prodori stožaca, valjaka i sfera u ravnini te aksonometriju koju koristimo za trodimenzionalne prikaze. Navest ćemo osnovne pojmove koje vežemo uz ove metode i to potkrijepiti slikama izrađenima u *GeoGebri*.

U drugom poglavlju objasnit ćemo što su uopće prodori, kakve prodore možemo proučavati te što nastaje prodorom dviju ploha. Definirat ćemo prostorne krivulje te navesti neke tipične klasifikacije prostornih krivulja. Također, objasnit ćemo što su to red i rod prostorne krivulje.

U trećem poglavlju ukratko ćemo opisati osnovni princip za konstrukciju točaka prodorne krivulje. Nakon toga proučavat će se prodori dviju obliha ploha: dvaju stožaca, dvaju valjaka, valjka i stošca te prodori sa sferom. Nakon svakog pojedinog slučaja riješit ćemo nekoliko zadataka uz pomoć programa *Rhinoceros* i/ili *GeoGebre*. Rješenje svakog zadatka bit će u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prikazu.

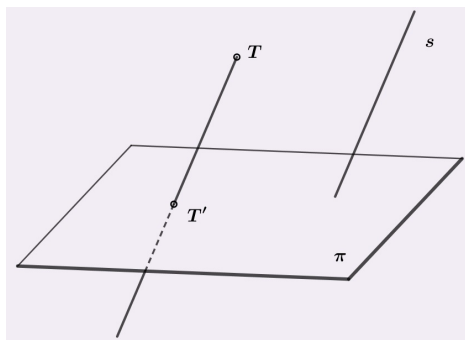
U četvrtom, posljednjem poglavlju navest ćemo i opisati neke primjere prodora obliha ploha s kojima se čovjek susreće u svom svakodnevnom životu.

# Poglavlje 1

## Projiciranje

Centralno i paralelno projiciranje osnovne su vrste projiciranja. U nastavku donosimo definiciju paralelnog projiciranja budući da ćemo se u ovom radu koristiti takvom vrstom projiciranja.

**Definicija 1.0.1.** *Neka je dana ravnina  $\pi$  u prostoru  $E$  te  $s \in E$  čvrsti pravac tako da  $s \nparallel \pi$ . **Paralelno projiciranje na ravninu  $\pi$  u smjeru pravca  $s$**  je preslikavanje koje svakoj točki  $T \in E$  pridružuje točku  $T'$  koja je probodište ravnine  $\pi$  i pravca kroz  $T$  paralelnog sa  $s$ .*



Slika 1.1: Paralelno projiciranje

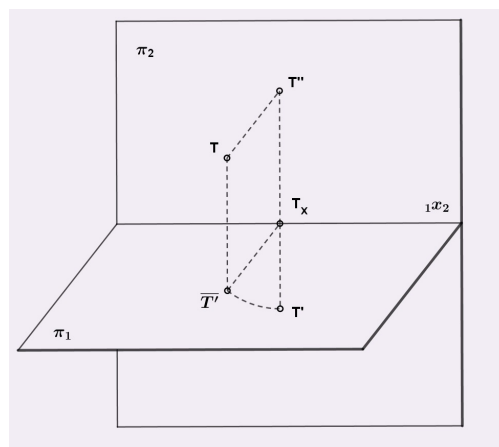
Sve pravce prostora koji su paralelni s pravcem  $s$  zovemo **zrakama projiciranja** ili **smjerom projiciranja**.

Paralelno projiciranje može biti **koso** ili **ortogonalno**, ovisno o zrakama projiciranja. Ako su zrake projiciranja okomite na ravninu  $\pi$  onda je riječ o ortogonalnoj projekciji, a inače govorimo o kosoj projekciji. Kod kose je projekcije kut zraka projekcije manji od pravog kuta.

## 1.1 Mongeova metoda projiciranja

Mongeova metoda projiciranja osnovna je metoda projiciranja u nacrtnoj geometriji. Projiciranje je ortogonalno, a služi za prikazivanje objekata trodimenzionalnog prostora u dvodimenzionalnom prostoru (ravnini). Ovo projiciranje poznato je još i pod nazivom dvocrtno projiciranje. Također omogućuje rekonstrukciju prostornih objekata na temelju njihova dvodimenzionalnog (ravninskog) prikaza. Objasnimo sada detaljnije Mongeovu metodu projiciranja.

Neka su  $\pi_1$  i  $\pi_2$  dvije međusobno okomite ravnine, a presječna  ${}_1x_2$ . Ravninu  $\pi_2$  odabiremo kao ravninu crtanja i onu koja je u vertikalnom položaju, a ravninu  $\pi_1$  kao ravninu u horizontalnom položaju. Neka je  $T$  proizvoljna točka prostora. Ortogonalna projekcija točke  $T$  na ravninu  $\pi_1$  je točka  $\overline{T'}$ , a na ravninu  $\pi_2$  točka  $T''$ . Rotacijom ravnine  $\pi_1$  oko presječnice  ${}_1x_2$ , u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu, točka  $\overline{T'}$  preslikava se u točku  $T'$  koja sada leži u ravnini  $\pi_2$ . Na ovaj način, točki  $T$  pridružen je par točaka  $(T', T'')$  iz ravnine  $\pi_2$  (slika 1.2).



Slika 1.2: Mongeova metoda

**Definicija 1.1.1.** *Mongeovo projiciranje* je pridruživanje koje svakoj točki  $T$  iz prostora pridružuje par točaka  $(T', T'')$  na prethodno opisani način.

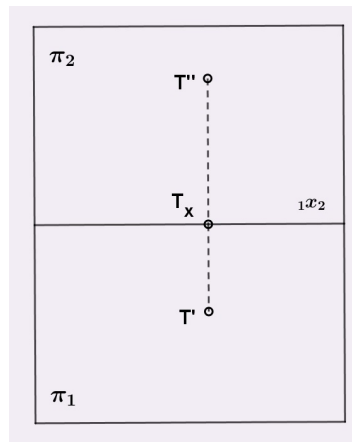
**Definicija 1.1.2.** Točka  $\overline{T'}$  naziva se *tlocrt* ili *prva projekcija* točke  $T$ .

Točku  $T'$  također zovemo *tlocrtom* točke  $T$ .

**Definicija 1.1.3.** Točka  $T''$  naziva se *nacrt* ili *druga projekcija* točke  $T$ .

**Definicija 1.1.4.** Pravac  ${}_1x_2$  naziva se *os*, ravnina  $\pi_1$  *tlocrtna ravnina*, a ravnina  $\pi_2$  *nacrtna ravnina*.

U ravnini crtanja, projekcije točke  $T$  prikazujemo kao na slici 1.3.

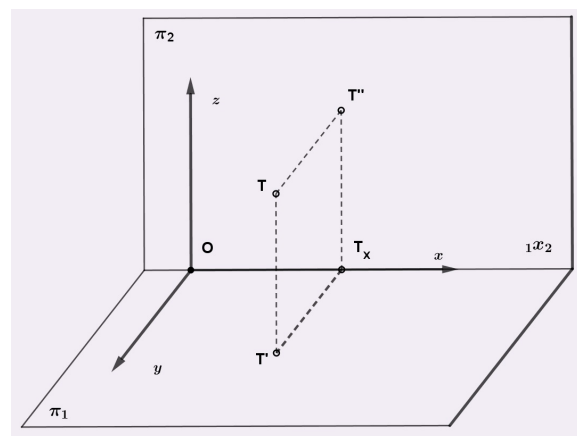


Slika 1.3

Spojnica točaka  $T'$  i  $T''$  je okomita na pravac  $1x_2$ .

**Definicija 1.1.5.** *Spojnica točaka  $T'$  i  $T''$  naziva se **ordinala**.*

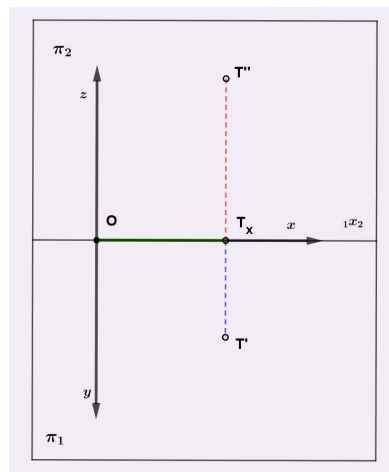
Uvođenjem lijevog pravokutnog koordinatnog sustava  $(O, x, y, z)$  u prostor na način da se  $x$ -os podudara s osi  $1x_2$ ,  $y$ -os leži u ravnini  $\pi_1$ , a  $z$ -os u ravnini  $\pi_2$ , točki  $T$  prostora na jedinstven način pridružujemo trojku koordinata  $(x, y, z)$  (slika 1.4).



Slika 1.4

U ravnini crtanja, projekcije točke  $T$  s koordinatama  $(x, y, z)$  prikazujemo kao na slici 1.5.

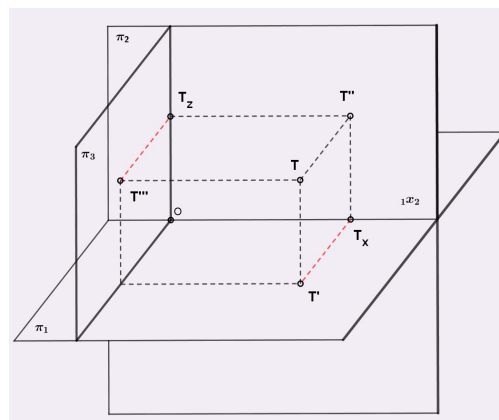




Slika 1.5

Možemo promatrati i projekciju na treću ravninu - ravninu  $\pi_3$  koja je okomita na  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

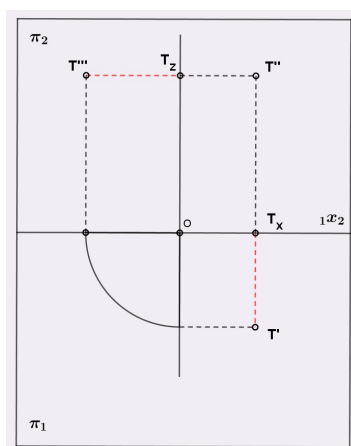
Ortogonalna projekcija točke  $T$  na ravninu  $\pi_3$  je točka  $\overline{T'''}.$  Rotacijom ravnine  $\pi_3$  oko presječnice ravnina  $\pi_2$  i  $\pi_3$ , točka  $\overline{T'''}.$  preslikava se u točku  $T'''$  (slika 1.6).



Slika 1.6

**Definicija 1.1.6.** Točka  $T'''$  naziva se **bokocrt** točke  $T$ .

U ravnini crtanja, bokocrt točke  $T$  prikazujemo kao na slici 1.7.



Slika 1.7

Crvenom bojom, na slikama 1.6 i 1.7, označene su dužine koje su jednake duljine.

## 1.2 Aksonometrija

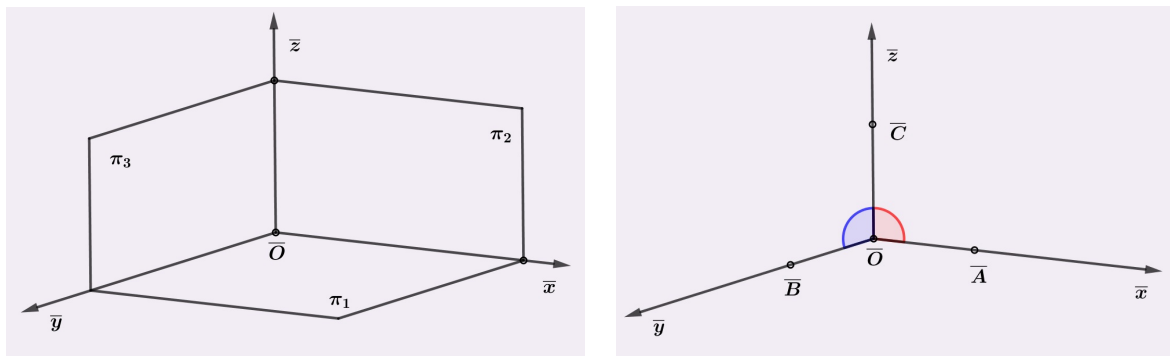
Prikazivanje raznih objekata iz prostora u tlocrtu, nacrtu i bokocrtu ne omogućava nam uvijek da sam taj objekt proučimo i sagledamo realno i zorno. Iz tog razloga, Monge-ova metoda projiciranja nije uvijek najpogodnija metoda kojom se služimo u nacrtnoj geometriji, već se u tu svrhu koristimo *aksonometrijskim metodama projiciranja* ili *aksonometrijom*.

U aksonometriji, objekt koji promatramo smještavamo u pogodno odabrani prostorni koordinatni sustav tako da su osnovni bridovi tog objekta paralelni s koordinatnim osima odabranog sustava, a zatim ih zajedno paralelno projiciramo na ravninu slike. Ravnina slike nalazi se u općem položaju prema koordinatnom sustavu, a najčešće se zamišlja kao ravnina između promatrača i ishodišta koordinatnog sustava. Zrake projiciranja mogu biti paralelne ili okomite na ravninu slike pa ovisno o tome možemo govoriti o *kosoj aksonometriji* ili *ortogonalnoj aksonometriji*. Postoji i poseban slučaj kose aksonometrije - *kosa projekcija*. Kosa projekcija je kosa aksonometrija u kojoj se koordinatni sustav odabire tako da je jedna koordinatna ravnina paralelna s ravninom slike. Najčešće je ta koordinatna ravnina ravnina  $\pi_2$ .

**Teorem 1.2.1 (Pohlkeov teorem).** *Tri dužine  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  u ravnini sa zajedničkom ishodišnom točkom  $\bar{O}$ , koje ne leže na istom pravcu, mogu se smatrati kosom paralelnom projekcijom triju jednakih i međusobno okomitih dužina  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  u prostoru sa zajedničkom ishodišnom točkom  $O$ .*

Ovaj teorem omogućuje da prilikom stvaranja kosoaksonometrijske slike nekog objekta, projekcije koordinatnih osi i jedinične dužine na njima odabiremo proizvoljno jer sigurno postoji paralelno projiciranje koje neki pravokutni koordinatni sustav projicira u naš odabrani koordinatni sustav.

Unatoč mogućem proizvoljnom odabiru projekcija koordinatnih osi, obično se radi zornijeg i realnijeg prikaza os  $\bar{z}$  postavlja u vertikalni položaj te se odabiru sljedeće mjere kuteva između koordinatnih osi:  $\angle(\bar{x}, \bar{z}) \in [100^\circ, 105^\circ]$  i  $\angle(\bar{y}, \bar{z}) \in [110^\circ, 120^\circ]$  (slika 1.8).



Slika 1.8

Duljine dužina na projekcijama koordinatnih osi  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  označavamo s  $d_x$ ,  $d_y$  i  $d_z$ , pri čemu je  $d_x = |\overline{OA}|$ ,  $d_y = |\overline{OB}|$  i  $d_z = |\overline{OC}|$ . Ako sa  $d$  označimo duljinu proizvoljno odabrane jedinične dužine,  $d_x$ ,  $d_y$  i  $d_z$  tada zadajemo na sljedeći način:

$$d_x = m \cdot d, \quad d_y = n \cdot d \quad \text{i} \quad d_z = p \cdot d. \quad (1.1)$$

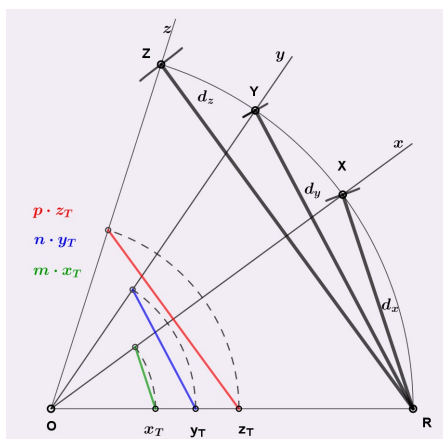
Dakle,  $d_x$ ,  $d_y$  i  $d_z$  su zapravo projekcije dužine duljine  $d$  u smjerovima osi  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . Koeficijente  $m$ ,  $n$  i  $p$  zovemo *omjerima prikraćivanja* ili *pikratama*. Premda to mogu biti bilo koji realni brojevi, opet radi što zornijeg i realnijeg prikaza objekta kojeg promatramo, ti se koeficijenti najčešće uzimaju u sljedećem odnosu:

$$n \leq m \leq p \leq 1. \quad (1.2)$$

Iz (1.1) i (1.2) lako je zaključiti da će za tako odabrane pikrate  $m$ ,  $n$  i  $p$  projekcije dužine duljine  $d$  biti jednake ili kraće od njene prave veličine.

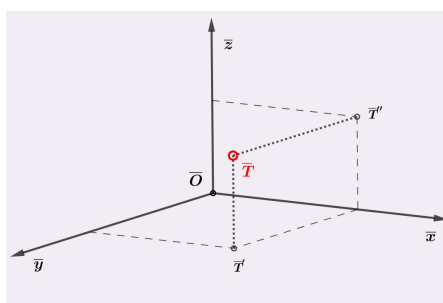
Za konstrukciju kosoaksonometrijske slike objekta potrebno je zadati ortogonalne projekcije objekta, projekciju koordinatnog sustava i pikrate. Opišimo sada kako konstruirati duljine projekcija dužina u smjeru koordinatnih osi, a zatim i kako konstruirati kosoaksonometrijsku sliku neke točke.

Na kružni luk proizvoljno odabranog polumjera  $d = |\overline{RO}|$  nanose se dužine duljina  $d_x = |\overline{RX}|$ ,  $d_y = |\overline{RY}|$ ,  $d_z = |\overline{RZ}|$ . Dobiveni kutovi  $\angle ROX$ ,  $\angle ROY$ ,  $\angle ROZ$  nazivaju se *kutevi proporcionalnosti* za prikrate  $m, n$  i  $p$ . Aksonometrijska slika točke  $T(x_T, y_T, z_T)$  konstruira se tako da se njezina apscisa, ordinata i aplikata prikrate pomoću kuteva proporcionalnost (slika 1.9).



Slika 1.9

Zatim se tako prikraćene nanose na odgovarajuće projekcije koordinatnih osi  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . Nakon što se konstruira aksonometrijski tlocrt  $\bar{T}'$  i nacrt  $\bar{T}''$  točke  $T$ , iz njih se dalje konstruira aksonometrijska slika  $\bar{T}$  točke  $T$  (slika 1.10).



Slika 1.10

U nacrtnoj je geometriji, osim osnovnog znanja potrebnog za Mongeovo ili aksonometrijsko projiciranje, potrebno provesti *analizu* i *konstruktivni postupak u ravnini*. Analiza podrazumijeva *logičko zaključivanje* te poznavanje *svojstava projiciranja*. Logičko zaključivanje znači da koristimo zaključivanje na temelju teorema, aksioma i definicija. Svojstva projiciranja odnose se na to da znamo kako se određeni prostorni elementi i odnosi prikazuju i vide u projekciji.

## Poglavlje 2

# O prostornim krivuljama

**Definicija 2.0.1.** *Prodor ili presjek dviju ploha  $\Phi$  i  $\Psi$  je skup svih točaka koje su zajedničke tim plohama.*

Gornju definiciju možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\Phi \cap \Psi = \{T \mid T \in \Phi \ \& \ T \in \Psi\}.$$

Razlikujemo nepotpuni prodor, potpuni prodor i prodor s dvostrukom točkom. Nepotpuni prodor još se naziva i zador, a opisuje slučaj kada jedna od ploha ne prodire u potpunosti kroz drugu plohu. Potpuni prodor je slučaj kada jedna od ploha u potpunosti prodire kroz drugu plohu. Prodore s dvostrukom točkom detaljnije ćemo objasniti nešto kasnije, a ovisno o tome prodor kojih dviju ploha ćemo gledati.

Nadalje, možemo promatrati prodor dviju uglatih ploha (piramide, prizme), prodor uglate i oble plohe te prodor dviju oblih ploha. Posljednja situacija nas trenutno najviše zanima. Općenito, prodor dviju oblih ploha je *prostorna krivulja*.

**Definicija 2.0.2.** *Prostorna krivulja je skup od  $\infty^1$  neprekinuto povezanih točaka prostora koje ne leže u istoj ravnini.*

Prostorna krivulja može biti algebarska ili transcendentna. U slučaju da je barem jedna od ploha transcendentna, njihov prodor će biti transcendentna prostorna krivulja. Ako su obje plohe algebarske i prodorna krivulja će biti algebarska. U ovom radu proučavat ćemo prodore algebarskih oblih ploha (stožac, valjak, sfera) pa će i prostorne krivulje biti algebarske.

**Definicija 2.0.3.** *Algebarska prostorna krivulja je skup točaka u prostoru čije  $(x, y, z)$  koordinate zadovoljavaju algebarske jednadžbe  $F_1(x, y, z) = 0$  i  $F_2(x, y, z) = 0$ .*

Svaka algebarska prostorna krivulja ima svoj *red* i *rod*.

**Definicija 2.0.4.** Red algebarske prostorne krivulje  $k^n$  jednak je maksimalnom broju  $n$  njenih sjecišta s bilo kojom ravninom u prostoru.

Za red prostorne krivulje kažemo da je *invarijanta projiciranja*. To znači da je projekcija prostorne krivulje  $n$ -tog reda ravninska krivulja istog reda.

**Teorem 2.0.5.** Prodor dvije algebarske plohe, od kojih je jedna  $n$ -tog, a druga  $m$ -tog reda, je prostorna algebarska krivulja  $(m \cdot n)$ -tog reda.

Kako su stožac, valjak i sfera algebarske plohe 2. reda, njihov međusobni prodor je uvijek krivulja 4. reda.

Neka su  $\Phi$  i  $\Psi$  plohe,  $k$  njihova prodorna krivulja i  $T \in k$  regularna točka spomenutih ploha.

**Definicija 2.0.6.** Kažemo da je točka  $T$  dvostruka točka prodorne krivulje  $k$  ako plohe  $\Phi$  i  $\Psi$  u točki  $T$  imaju zajedničku tangencijalnu ravninu.

Još kažemo da krivulja ima dvostruku točku ako njome prolazi dva puta. Također, ukoliko je neka točka dvostruka točka plohe ona je ujedno i dvostruka točka svake prodorne krivulje koja prolazi kroz nju.

**Definicija 2.0.7.** Rod algebarske prostorne krivulje  $k^n$  je broj  $R = d - D$ , gdje je  $d$  maksimalan broj dvostrukih točaka koji ne dovodi do raspada, a  $D$  broj dvostrukih točaka krivulje  $k^n$ .

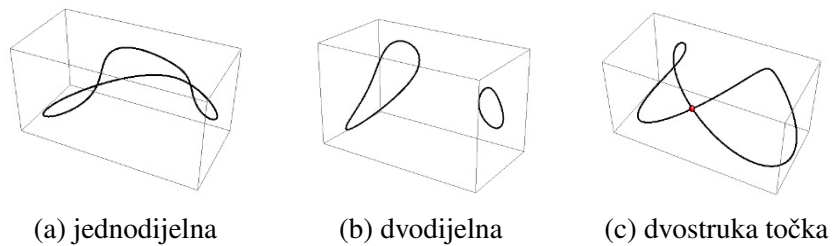
Veza između reda  $n$  prostorne krivulje i maksimalnog broja  $d$  dvostrukih točaka koji ne dovodi do raspada može se izraziti formulom

$$d = \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4}, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{(n-1) \cdot (n-3)}{4}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Osim što ih razlikujemo s obzirom na red i rod, postoji i podjela na sljedeće tipove prostornih krivulja 4. reda:

1. prave prostorne krivulje (jednodijelna, dvodijelna, krivulja s jednom dvostrukom točkom),
2. raspadnute krivulje (krivulja 3. reda i pravac, dvije krivulje 2. reda, krivulja 2. reda i dva pravca, četiri pravca).

Do raspada krivulje  $n$ -tog reda dolazi ako ona ima veći broj dvostrukih točaka od  $d$  iz (2.1).



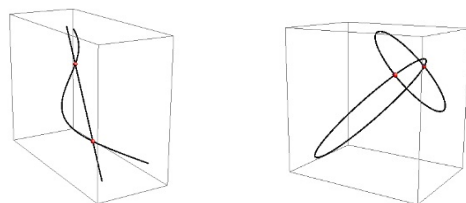
(a) jednodijelna

(b) dvodijelna

(c) dvostruka točka

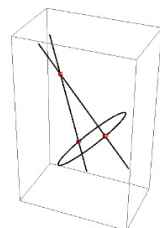
Slika 2.1: Prave prostorne krivulje

Izvor:[8]

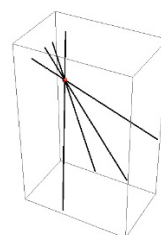


(a) pravac i krivulja 3. reda

(b) dvije krivulje 2. reda



(c) dva pravca i krivulja 2. reda



(d) četiri pravca

Slika 2.2: Raspadnute prostorne krivulje

Izvor:[8]

Uočite da se u slučaju raspada krivulje  $n$ -tog reda ona raspada na krivulje nižih redova, ali tako da je zbroj tih redova jednak  $n$ .

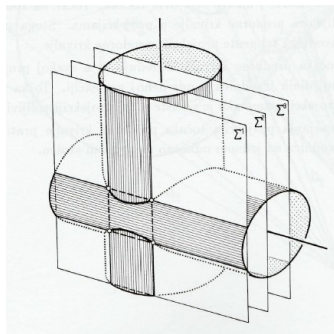
## Poglavlje 3

# Osnovni principi konstrukcije točaka prodorne krivulje

Kako bismo konstruirali prodornu krivulju dviju ploha, potrebno je odabrati pomoćne ravnine koje će svaku od ploha sjeći duž neke ravninske krivulje (najčešće duž pravaca i kružnica). Tako dobivene ravninske krivulje sjeći će se u točkama koje su zajedničke za obje plohe, a koje leže na traženoj prodornoj krivulji. Prilikom prodora pravčastih ploha (stožaca i valjaka), najčešće se koristimo *metodom presječnih ravnina*. U njoj biramo pomoćne ravnine koje obje plohe sijeku po izvodnicama (pravcima).

### 3.1 Prodor dva valjka

Prilikom prodora dva valjka, pomoćne ravnine postavljaju se paralelno s osima oba valjka. Takve ravnine sjeći će oba valjka po izvodnicama. Konkretnije, svaka takva ravnina će svaki od valjaka sjeći duž dvije paralelne izvodnice, a njihov presjek daje (po četiri) točke koje se nalaze na prodornoj krivulji.

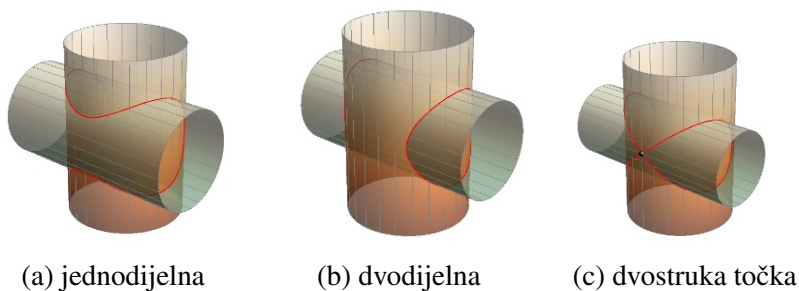


Slika 3.1: Pomoćne ravnine kod prodora dvaju valjaka  
Izvor:[2]



Kod prodora dvaju valjaka mogu nastati i prave i raspadnute krivulje 4. reda. Prave krivulje nastaju u sljedećim situacijama:

1. jednodijelna - slučaj nepotpunog prodora,
2. dvodijelna - slučaj potpunog prodora,
3. jedna dvostruka točka - valjci imaju jednu zajedničku dirnu ravninu.



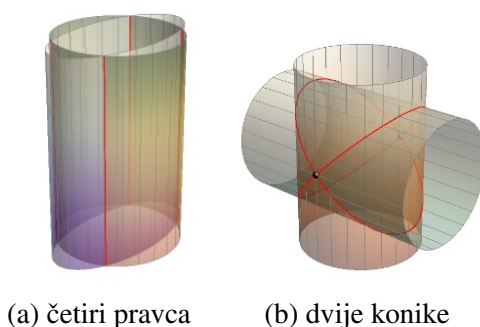
Slika 3.2: Prave prostorne krivulje kod prodora dvaju valjala  
Izvor:[8]

Od raspadnutih krivulja javljaju se sljedeći raspadi:

1. raspad na četiri pravca,
2. raspad na dvije konike.

Raspad na četiri pravca nastaje u slučaju kada su izvodnice dvaju valjaka paralelne, a raspad na dvije konike ukoliko valjci nemaju paralelne osi, ali imaju dvije zajedničke dirne ravnine.

Primjer raspada na dvije konike, točnije, na dvije elipse javlja se u slučaju prodora dvaju rotacijskih valjaka čije se osi sijeku, a polumjeri njihovih baza su jednaki.



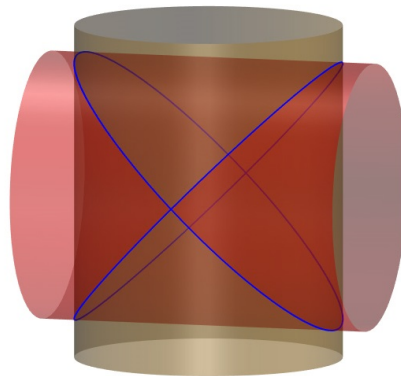
Slika 3.3: Raspadnute prostorne krivulje kod prodora dvaju valjaka  
Izvor:[8]

### Zadaci

1. U ortogonalnim projekcijama i kosoj aksonometriji [ $\angle(\bar{x}, \bar{z}) = 100^\circ$ ,  $\angle(\bar{y}, \bar{z}) = 115^\circ$ ] konstruirajte prodornu krivulju rotacijskih valjaka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $MN$ ,  $M(5,5,0)$ ,  $N(5,5,10)$ ,  $r = 4$ ] i  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $PQ$ ,  $P(0,5,5)$ ,  $Q(10,5,5)$ ,  $r = 4$ ].

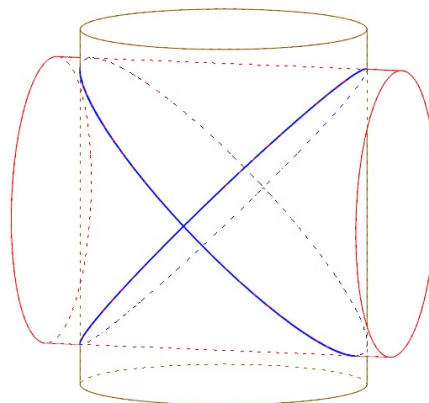
### Rješenje:

Iz aksonometrijske slike prodora valjaka (slika 3.4), ali i teksta zadatka, lako je zaključiti da je riječ o rotacijskim valjcima čije se osi sijeku, a radijusi baza su jednaki pa se prodorna krivulja raspada na dvije konike (elipse).

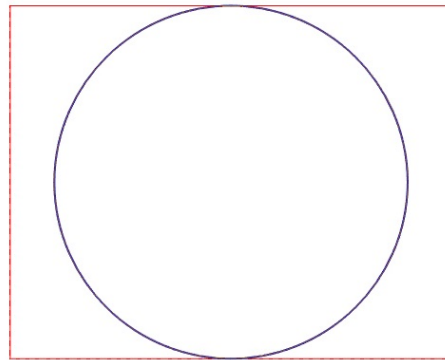


Slika 3.4

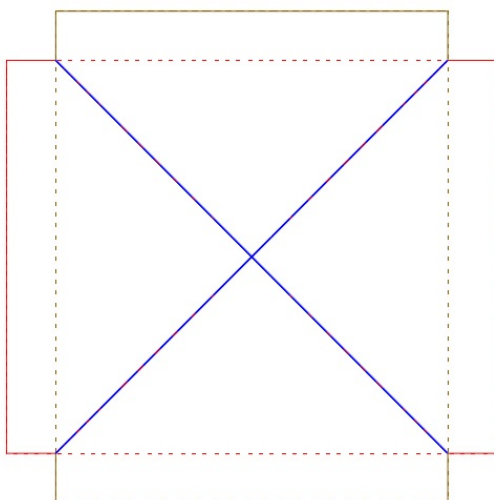
Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.5.



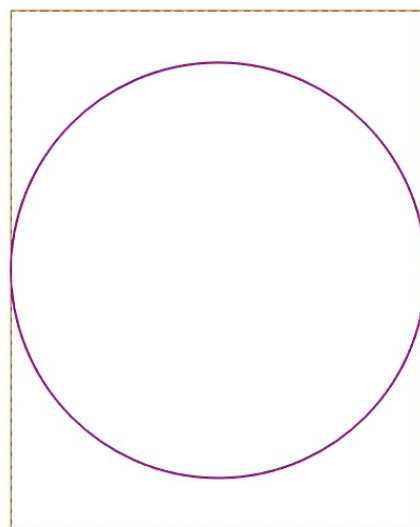
Slika 3.5



(a) tlocrt



(b) nacrt



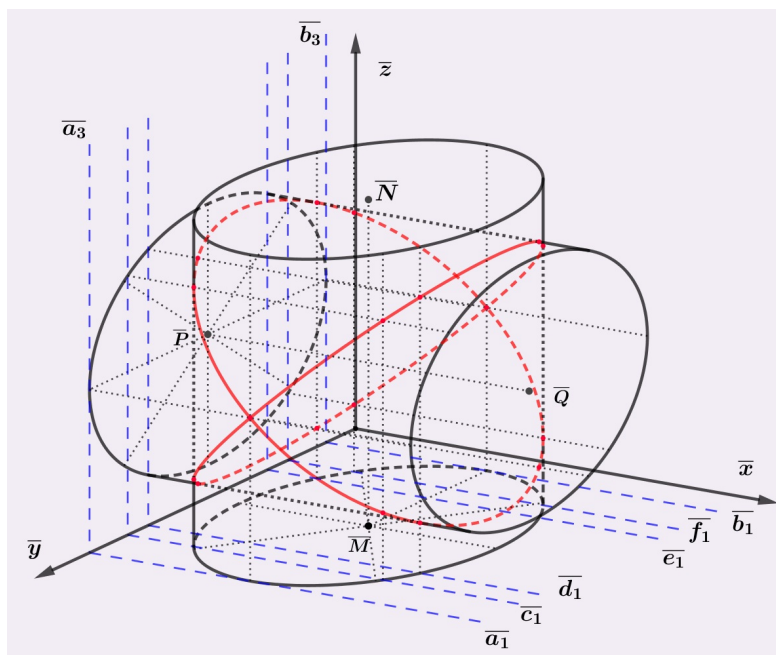
(c) bokocrt

Slika 3.6: Ortogonalne projekcije valjaka i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

U nastavku slijedi kratki opis konstrukcije provedene u *Geogebra*.

Najprije je potrebno konstruirati kosoaksonometrijsku sliku oba valjka, a tek onda kosoaksonometrijsku sliku njihove prodorne krivulje. Kosoaksonometrijske slike valjaka dobiju se tako što se najprije konstruiraju kosoaksonometrijske slike točaka koje određuju njihove osi. Budući da je riječ o rotacijskim valjcima, baze tih valjaka su kružnice. No, kosoaksonometrijska slika kružnice je elipsa. U ovom zadatku, te elipse su zadane s jednim parom konjugiranih promjera duljine 4. Koristimo Rytzovu konstrukciju kako bismo odredili glavne osi ovih elipsi. Također je potrebno konstruirati konturne izvodnice valjaka. Konturne izvodnice pojedinog valjka bit će tangente na elipse paralelne s osi tog valjka.

Osi oba valjka su paralelne s ravninom  $\Pi_2$  stoga se pomoćne ravnine postavljaju paralelno s  $\Pi_2$ . Takve će ravnine sijeći oba valjka duž njihovih izvodnica. Za konstrukciju točaka prodorne krivulje biraju se granične ravnine  $A(a_1, a_3)$  i  $B(b_1, b_3)$  te one ravnine koje sadrže konturne izvodnice jedne i druge plohe ( $C(c_1, c_3), D(d_1, d_3), F(f_1, f_3)$ ). Te su ravnine važne jer pomoću njih dobivamo točke na konturama koje su granične točke vidljivosti dijelova prodorne krivulje. Nadalje, granične ravnine  $A(a_1, a_3)$  i  $B(b_1, b_3)$  tangencijalne su za oba valjka stoga će prodorna krivulja imati dvije dvostruke točke (u svakoj tangencijalnoj ravnini po jedna točka). Drugim riječima, ovo je slučaj kada se prodorna krivulja raspada na dvije konike, tj. elipse.

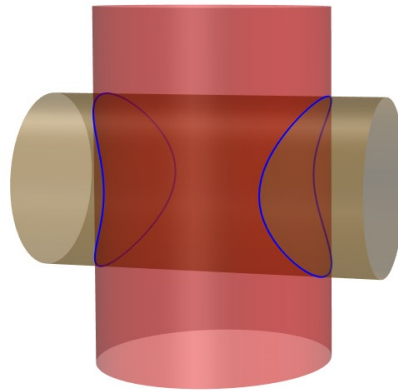


Slika 3.7: Kosoaksonometrijska slika prodora - *GeoGebra*

2.<sup>1</sup> U ortogonalnim projekcijama konstruirajte prodornu krivulju rotacijskih valjaka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $MN$ ,  $M(4,3,0)$ ,  $N(4,3,6)$ ,  $r = 2$  cm] i  $\Psi$  [os  $PQ$ ,  $P(1,3,3)$ ,  $Q(7,3,3)$ ,  $r = 1.5$  cm]. Baza drugog valjka paralelna je s ravninom  $\Pi_3$ .

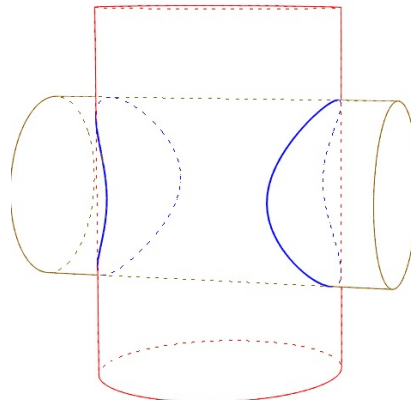
**Rješenje:**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.8) vidimo da je riječ o potpunom prodoru valjka  $\Psi$  kroz valjak  $\Phi$  stoga je prodorna krivulja dvodijelna.



Slika 3.8

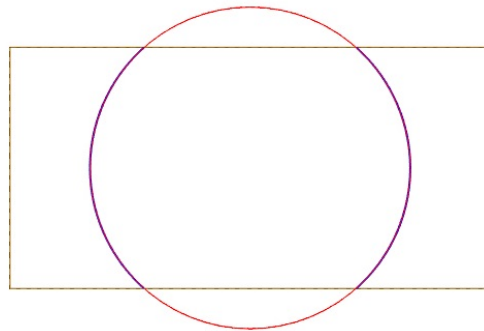
Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.9.



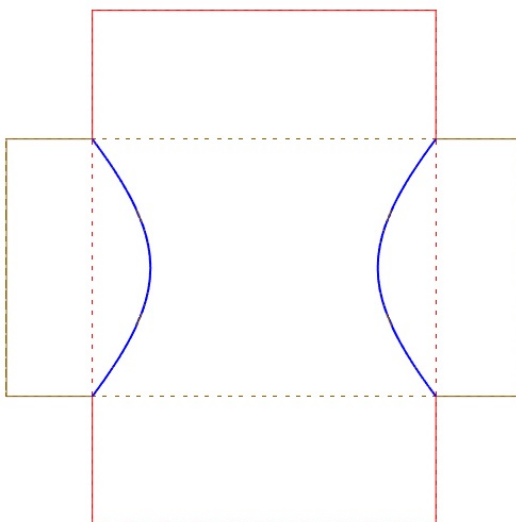
Slika 3.9

---

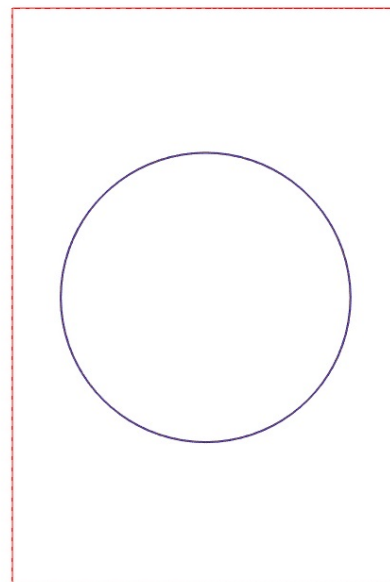
<sup>1</sup>Zadatak je preuzet iz izvora [7].



(a) floct



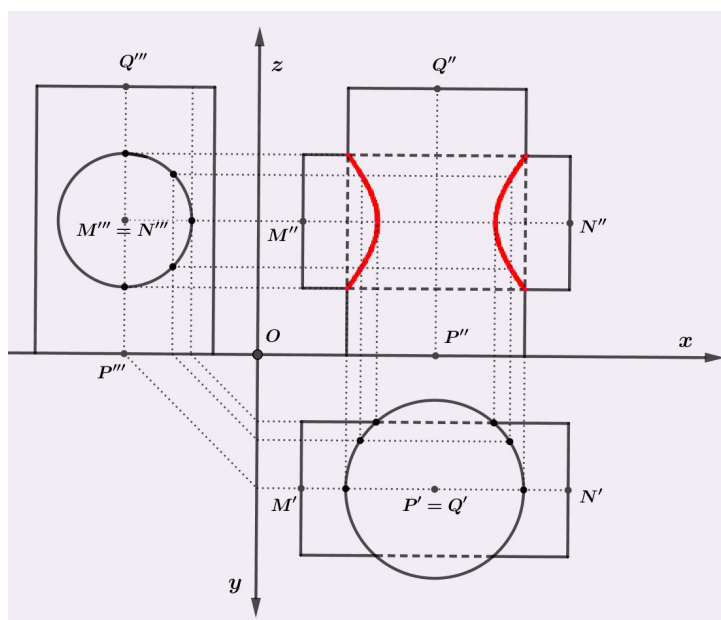
(b) nacrt



(c) bokocrt

Slika 3.10: Ortogonalne projekcije valjaka i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

U nastavku slijedi kratki opis konstrukcije prodora provedene u *GeoGebri*. Osi oba valjka su paralelne s ravninom  $\Pi_2$  stoga se pomoćne ravnine postavljaju paralelno s  $\Pi_2$ . Budući da je baza drugog valjka paralelna s ravninom  $\Pi_3$  koristimo se i bokocrtom. U bokocrtu se crtaju proizvoljni treći tragovi tih ravnina koji su paralelni sa osi  $z$ , a tamo gdje ti tragovi sijeku treću projekciju valjka  $\Psi$  (kružnicu) dobivamo treće projekcije točaka prodorne krivulje. Prve projekcije, odnosno tlocrte tih točaka dobivamo kao presjek iscrtkanih linija i kružnice (prve projekcije valjka  $\Phi$ ). Druge projekcije, tj. nacрте točaka prodorne krivulje dobivamo uz pomoć njihove prve i treće projekcije. Naime, kao što je prikazano na slici 1.7, kroz bokocrt pojedine točke prodorne krivulje povlačimo paralele s  $x$ -osi, a u tlocrtu te točke dižemo okomicu na  $x$ -os. Nacrt pojedine točke prodorne krivulje je presjek spomenute paralele i okomice (slika 3.11).

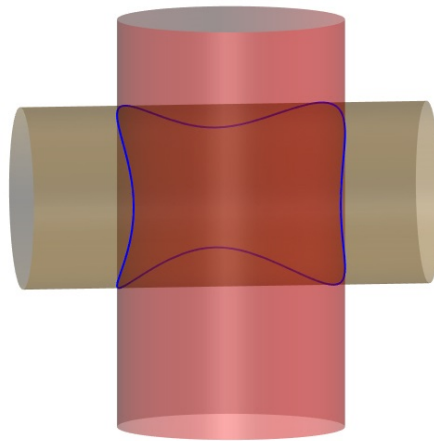


Slika 3.11: Mongeova metoda - ortogonalne projekcije valjaka i njihove prodorne krivulje - *GeoGebra*

3. Konstruirajte projekcije prodorne krivulje rotacijskih valjaka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $MN$ ,  $M(4.5,7,0)$ ,  $N(4.5,7,9)$ ,  $r = 2.5$ ] i  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $PQ$ ,  $P(0,8,5)$ ,  $Q(9,8,5)$ ,  $r = 2$ ].

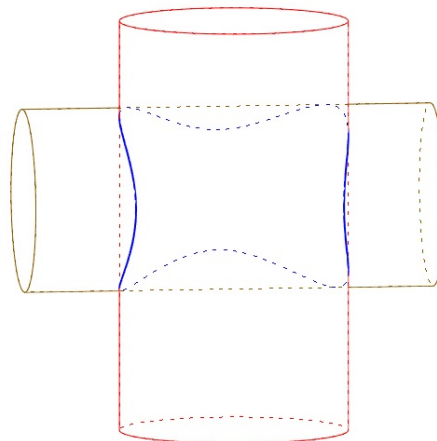
**Rješenje:**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.12) zaključujemo da je riječ o nepotupnom prodoru, tj. zadoru pa je prodorna krivulja jednodijelna.



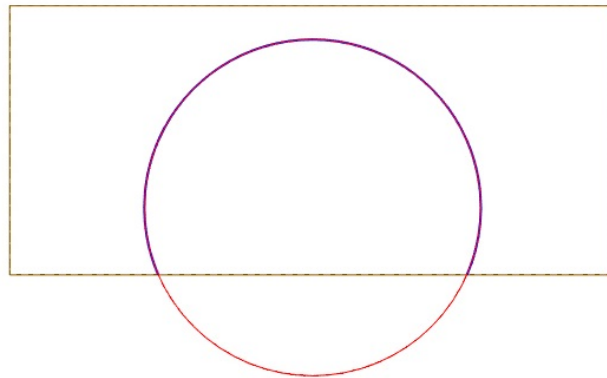
Slika 3.12

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.13.

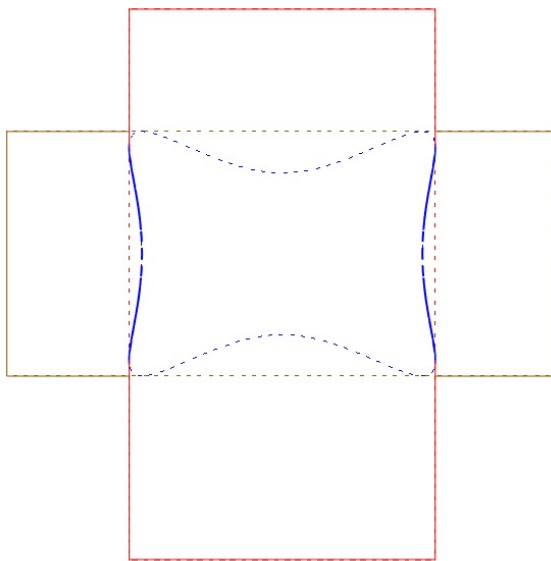


Slika 3.13

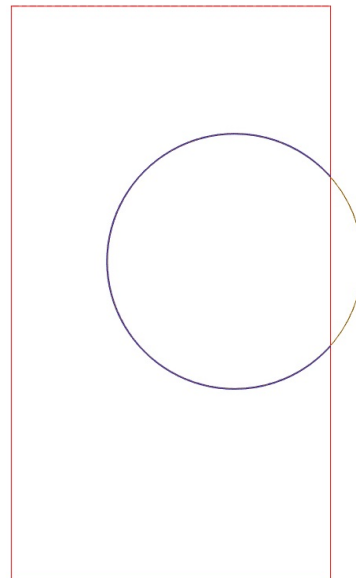




(a) tlocrt



(b) nacrt

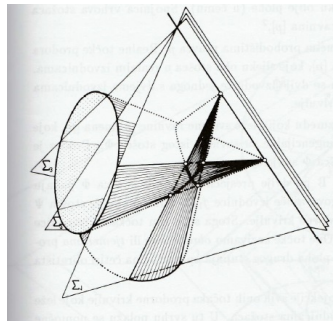


(c) bocoert

Slika 3.14: Ortogonalne projekcije valjaka i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

### 3.2 Prodor dva stošca

Prilikom prodora dvaju stožaca, pomoćne ravnine postavljaju se tako da prolaze vrhovima oba stošca jer će takve ravnine sijeći oba stošca po izvodnicama. Slično kao i kod prodora dvaju valjaka, tako odabrane ravnine sijeku svaki od stožaca duž dvije izvodnice, a njihov presjek ovaj put daje šest točaka koje se nalaze na prodornoj krivulji jer pomoćne ravnine prolaze i vrhovima stožaca.

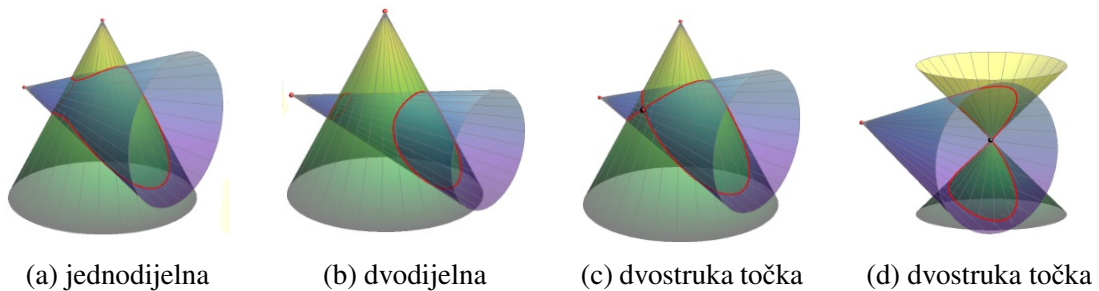


Slika 3.15: Pomoćne ravnine kod prodora dvaju stožaca

Izvor:[2]

Kod prodora dvaju stožaca također mogu nastati prave i raspadnute krivulje 4. reda.

Jednodijelne krivulje nastaju u slučaju nepotpunog prodora, a dvodijelne u slučaju potpunog prodora. Dvostruka točka će se kod prodora dvaju stožaca javiti onda kada stošci imaju zajedničku dirnu ravninu ili kada jedan od stožaca prolazi vrhom drugog stošca. U posljednjem slučaju, dvostruka točka je upravo spomenuti vrh stošca.



(a) jednodijelna

(b) dvodijelna

(c) dvostruka točka

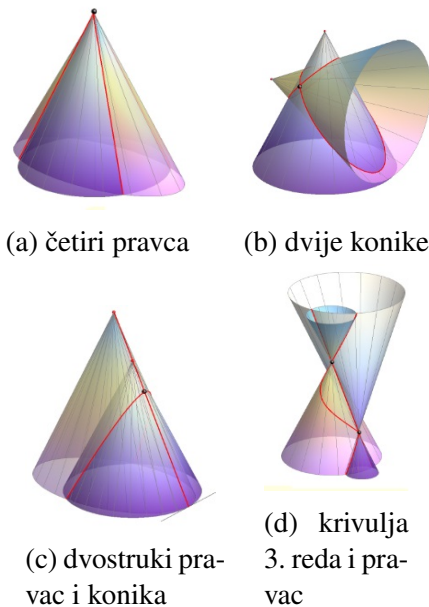
(d) dvostruka točka

Slika 3.16: Prave prostorne krivulje kod prodora dvaju stožaca

Izvor:[8]

Od raspadnutih krivulja mogu se pojaviti gotovo svi tipovi raspadnutih krivulja:

1. raspad na četiri pravca - kada stošci imaju zajednički vrh,
2. raspad na dvostruki pravac i koniku - kada stošci imaju zajedničku izvodnicu i duž nje nemaju dirnu ravninu, ali nemaju zajednički vrh,
3. raspad na pravac i krivulju 3. reda - kada stošci imaju zajednički izvodnicu, ali duž nje nemaju dirnu ravninu niti imaju zajednički vrh,
4. raspad na dvije konike - kada stošci imaju dvije zajedničke dirne ravnine, ali nemaju zajedničkih izvodnica.



Slika 3.17: Raspadnute prostorne krivulje kod prodora dvaju stožaca

Izvor:[8]

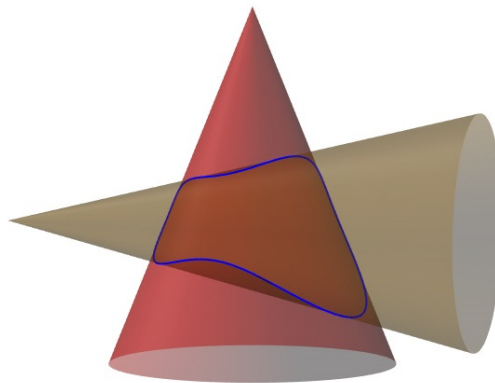
Spomenimo da raspad na dva različita pravca i koniku kod prodora dvaju stožaca nije moguć jer bi sjecište spomenutih pravaca trebao biti zajednički vrh stožaca, no tada smo u prvom slučaju kada se javlja raspad na četiri pravca. Također, kako bi došlo do raspada na dvije konike, kod prodora dvaju rotacijskih stožaca, nužno je da se njihove osi sijeku.

### Zadaci

1. Konstruirajte projekcije prodorne krivulje rotacijskih stožaca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(3,5,0)$ ,  $V(3,5,7.5)$ ,  $r = 3$ ] i  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_2$ , os  $MU$ ,  $M(2,0,3)$ ,  $U(2,10,3)$ ,  $r = 2.5$ ].

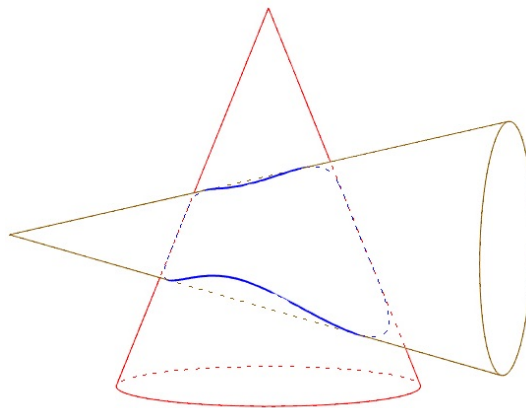
### Rješenje:

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.18) zaključujemo da je riječ o nepotpunom prodoru, tj. zadoru pa je prodorna krivulja jednodijelna.

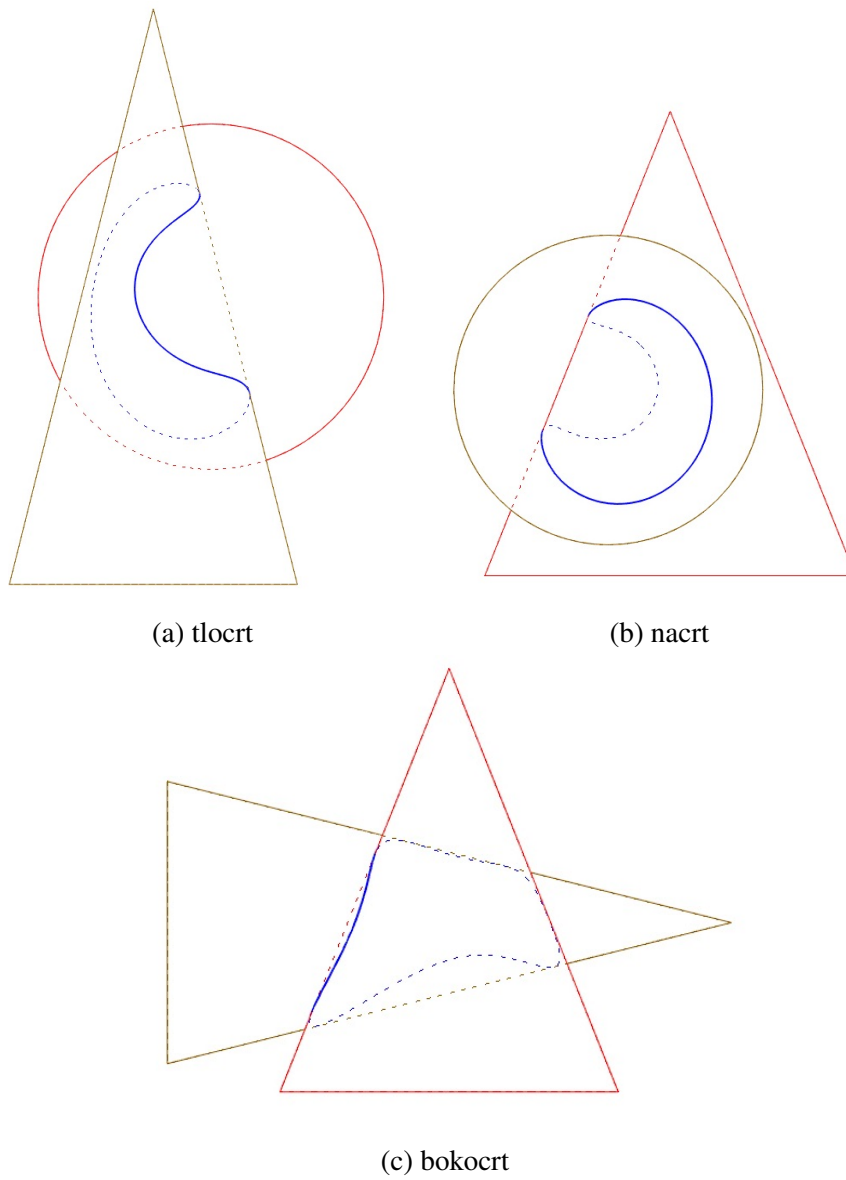


Slika 3.18

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.19.



Slika 3.19

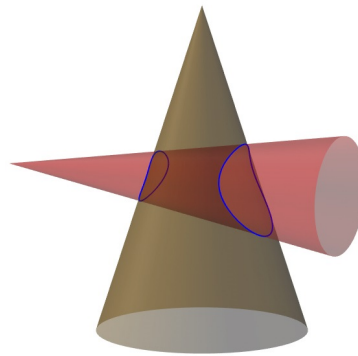


Slika 3.20: Ortogonalne projekcije stožaca i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

2. Konstruirajte projekcije prodorne krivulje rotacijskih stožaca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(10,5,0)$ ,  $V(10,5,11)$ ,  $r = 3.5$ ] i  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_2$ , os  $MU$ ,  $M(10,0,5)$ ,  $U(10,12,5)$ ,  $r = 2$ ].

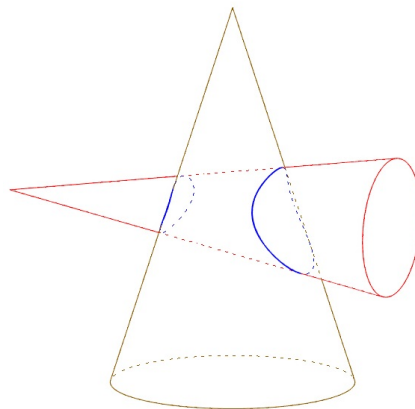
**Rješenje:**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.21) zaključujemo da je riječ o potpunom prodoru stošca  $\Psi$  kroz stožac  $\Phi$  pa je prodorna krivulja dvodijelna.

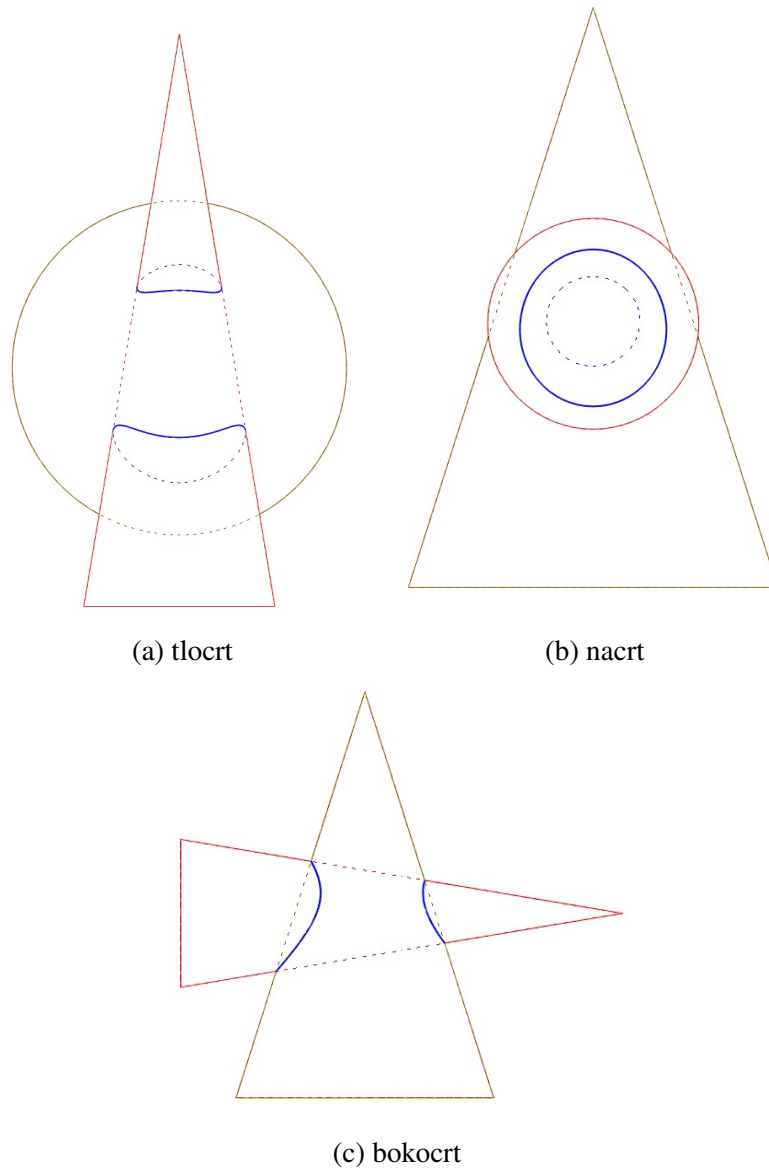


Slika 3.21

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.22.



Slika 3.22

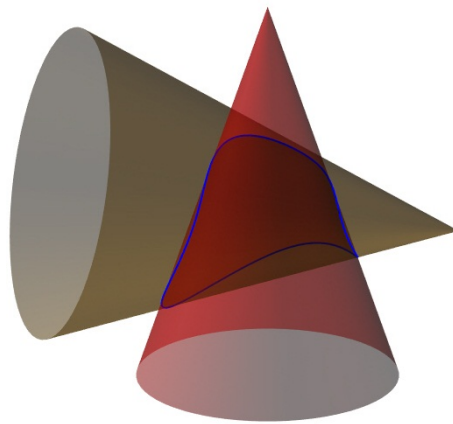


Slika 3.23: Ortogonalne projekcije stožaca i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

3. Konstruirajte projekcije prodorne krivulje rotacijskih stožaca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(9,7,0)$ ,  $V(9,7,15)$ ,  $r = 5$ ] i  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $MU$ ,  $M(0,9,6)$ ,  $U(16,9,6)$ ,  $r = 6$ ].

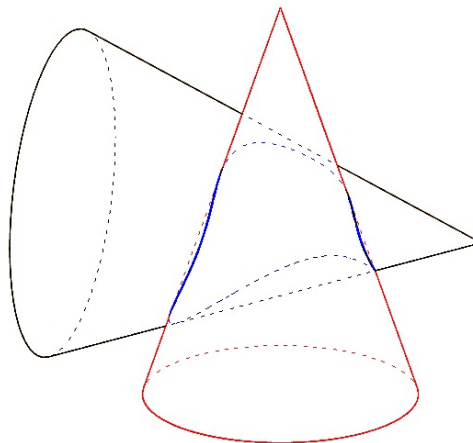
**Rješenje:**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.24) zaključujemo da je riječ o nepotpunom prodoru, tj. zadoru pa je prodorna krivulja jednodijelna.



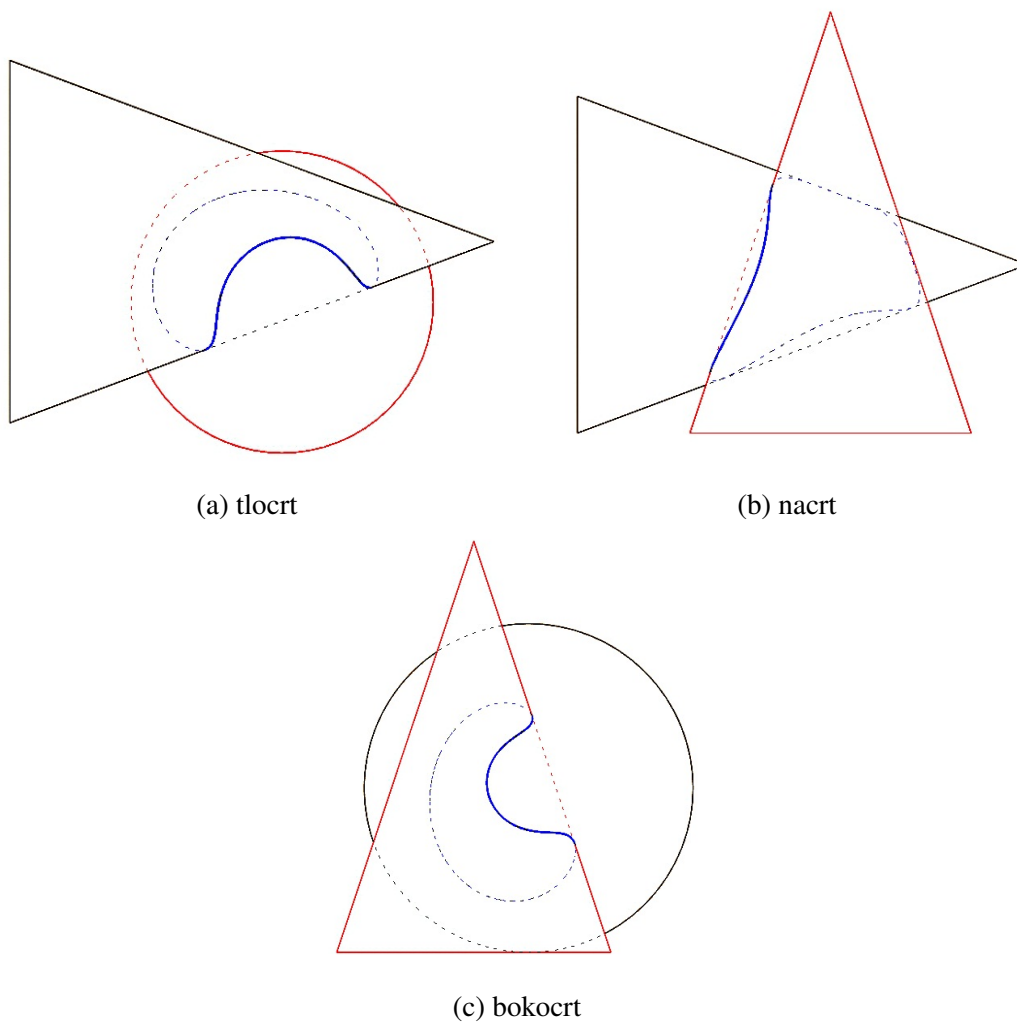
Slika 3.24

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.25.



Slika 3.25

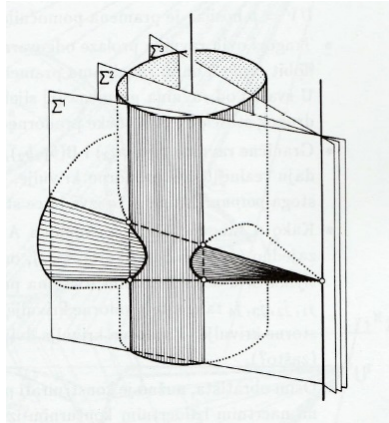




Slika 3.26: Ortogonalne projekcije stožaca i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

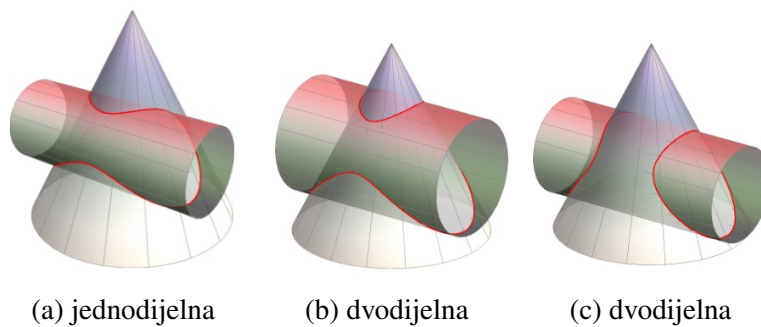
### 3.3 Prodor valjka i stošca

Prilikom prodora stošca i valjka, pomoćne ravnine postavljaju se tako da prolaze vrhom stošca i paralelne su s osi valjka. Takve će ravnine sijeći stožac i valjak po izvodnicama. Naime, iz prethodnih razmatranja zaključili smo da ravnine koje sijeku stožac po izvodnicama prolaze njegovim vrhom, a ravnine koje valjak sijeku po izvodnicama su ravnine paralelne s osi tog valjka.



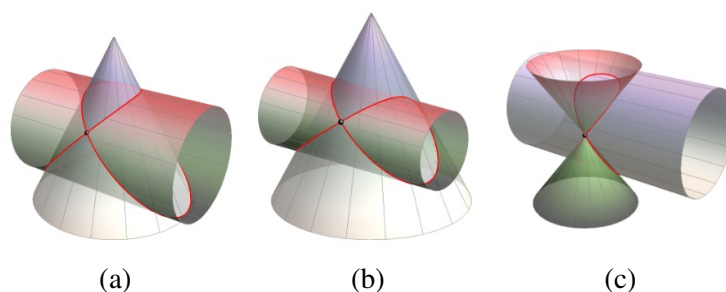
Slika 3.27: Pomoćne ravnine kod prodora valjka i stošca  
Izvor:[2]

Kod ovakvih prodora također mogu nastati i prave i raspadnute krivulje 4. reda. Jednodijelne krivulje nastaju u slučaju nepotpunog prodora, a dvodijelne u slučaju potpunog prodora.



Slika 3.28: Prave prostorne krivulje kod prodora stošca i valjka  
Izvor:[8]

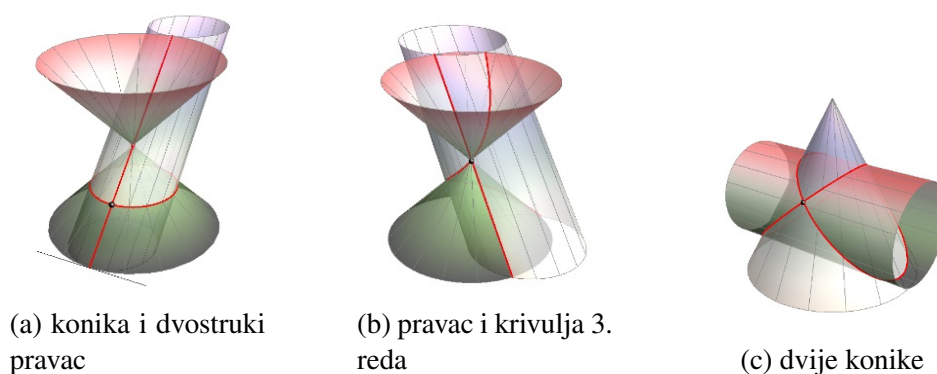
Dvostruka točka će se kod prodora stošca i valjka javiti onda kada valjak i stožac imaju zajedničku dirnu ravninu (slika 3.29a i 3.29b) ili kada valjak prolazi vrhom stošca (slika 3.29c).



Slika 3.29: Dvostruka točka kod prodora stošca i valjka  
Izvor:[8]

Od raspadnutih krivulja javljaju se sljedeći raspadi:

1. raspad na dvostruki pravac i koniku - kada stožac i valjak imaju zajedničku izvodnicu i duž nje dirnu ravninu,
2. raspad na pravac i krivulju 3. reda - kada stožac i valjak imaju zajedničku izvodnicu, ali duž nje imaju različite dirne ravnine,
3. raspad na dvije konike - kada stožac i valjak nemaju zajedničkih izvodnica, ali u dvije točke imaju zajedničke dirne ravnine.



(a) konika i dvostruki pravac

(b) pravac i krivulja 3. reda

(c) dvije konike

Slika 3.30: Raspadnute prostorne krivulje kod prodora stošca i valjka  
Izvor:[8]

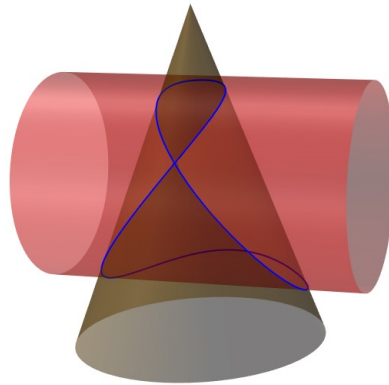
Raspad na četiri pravca nije moguć jer stožac i valjak ne mogu imati zajednički vrh.

### Zadaci

1. U ortogonalnim projekcijama i kosoj aksonometriji [ $\angle(\bar{x}, \bar{z}) = 100^\circ$ ,  $\angle(\bar{y}, \bar{z}) = 120^\circ$ ] konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog valjka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $MN$ ,  $M(0,4,5)$ ,  $N(11,4,5)$ ,  $r = 3.5$ ] i rotacijskog stošca  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(5.5,5.5,0)$ ,  $V(5.5,5.5,11)$ ]. Polumjer rotacijskog stošca odredite tako da plohe imaju zajedničku dirnu ravninu s prednje strane.

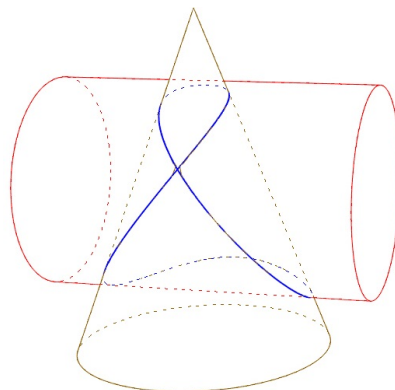
### Rješenje.

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.31), ali i teksta zadatka, zaključujemo da valjak i stožac imaju zajedničku dirnu ravninu pa je prodorna krivulja prava i ima dvostruku točku.

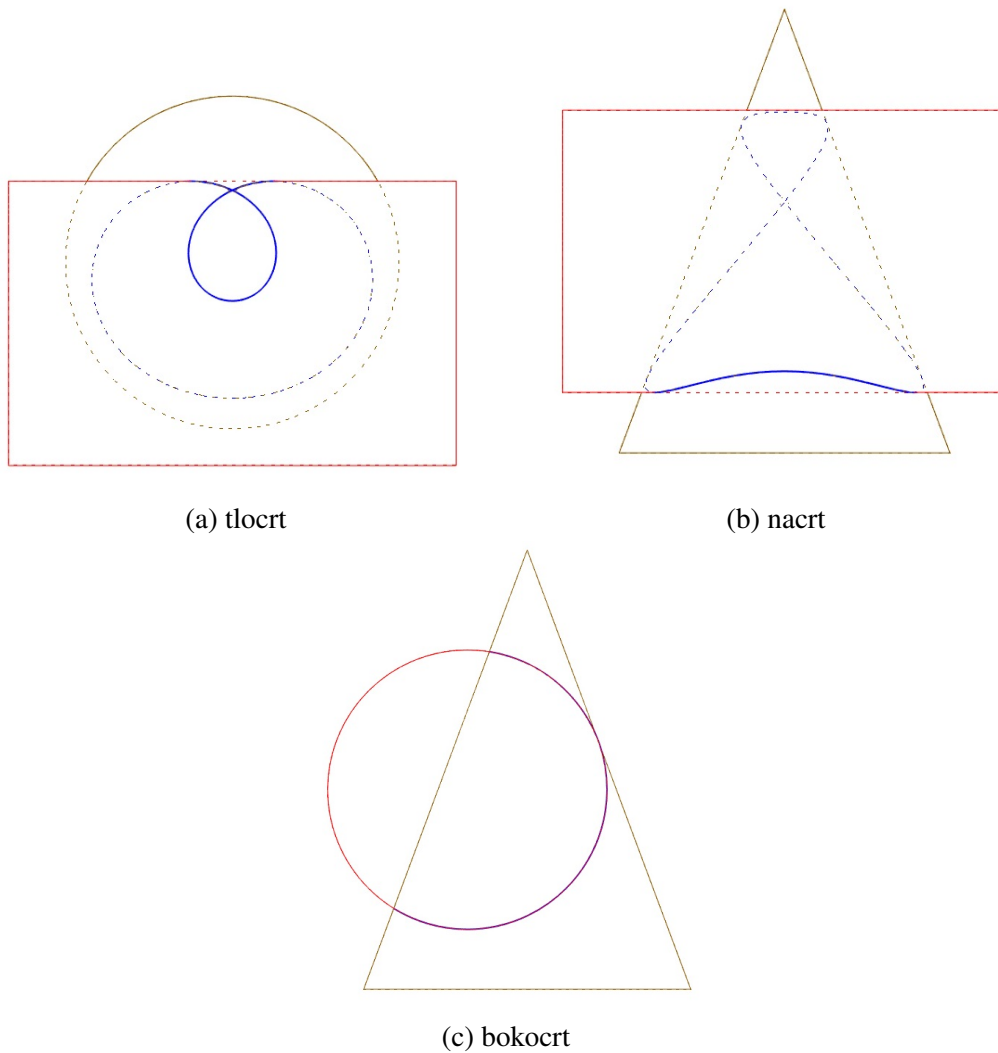


Slika 3.31

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.32.



Slika 3.32

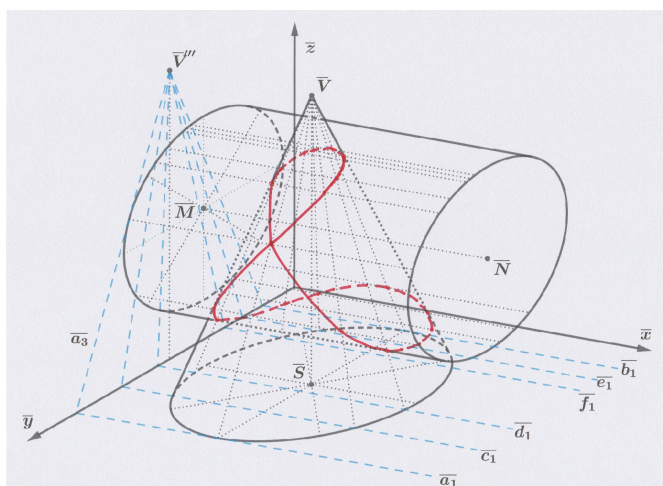


Slika 3.33: Ortogonalne projekcije stošca, valjka i njihove prodorne krivulje - *Rhinoce-ros*

Najprije je potrebno konstruirati kosoaksonometrijsku sliku stošca i valjka, a onda kosoaksonometrijsku sliku njihove prodorne krivulje. Kosoaksonometrijska slika valjka dobije se tako što se najprije konstruiraju kosoaksonometrijske slike točaka koje određuju njegovu os. Budući da je valjak rotacijski, njegova baza je kružnica, a njezina kosoaksonometrijska slika bit će elipsa. Ta je elipsa zadana s jednim parom konjugiranih promjera duljine 3.5. Kako bismo odredili glavne osi te elipse, koristimo Rytzovu konstrukciju. Također je potrebno konstruirati konturne izvodnice valjka. To će biti tangente paralelne s osi valjka na spomenute elipse.

Na analogan način se konstruiraju slike točaka koje određuju os stošca, a zatim i bokocrti tih točaka. Stožac je rotacijski pa je njegova baza kružnica, a njezina kosoaksonometrijska slika bit će elipsa. Međutim, polumjer stošca nije zadan. Njega odredimo povlačenjem tangente iz točke  $\bar{V}'''$  na elipsu čije je središte točka  $\bar{M}$  (metoda suprotišta). Tako dobivamo elipsu koja je određena s jednim parom konjugiranih promjera. Za određivanje glavnih osi ove elipse opet provodimo Rytzovu konstrukciju. Konturne izvodnice stošca su tangente iz točke  $\bar{V}$  na tu elipsu.

Prilikom prodora stošca i valjka, pomoćne ravnine postavljamo tako da prolaze vrhom stošca i budu paralelne s osi valjka. Budući da je os valjka paralelna s ravninom  $\Pi_2$ , prvi tragovi pomoćnih ravnina su paralelni s  $\bar{x}$ , a treći tragovi tih ravnina prolaze točkom  $\bar{V}'''$ . Takve ravnine sijeku valjak i stožac duž njihovih izvodnica. Za konstrukciju točaka prodorne krivulje biraju se granične ravnine  $A(a_1, a_3)$  i  $B(b_1, b_3)$ , ali i one ravnine koje sadrže konturne izvodnice jedne ili druge plohe (ravnine  $C(c_1, c_3)$ ,  $D(d_1, d_3)$ ,  $E(e_1, e_3)$ ). Nadalje, granična ravnina  $A(a_1, a_3)$  tangencijalna je za obje plohe pa smo pomoću nje odredili polumjer stošca iz zadatka. U toj će ravnini prodorna krivulja imati dvostruku točku. Dakle, ovo je granični slučaj kada je prodorna krivulja jednodjelna s dvostrukom točkom.

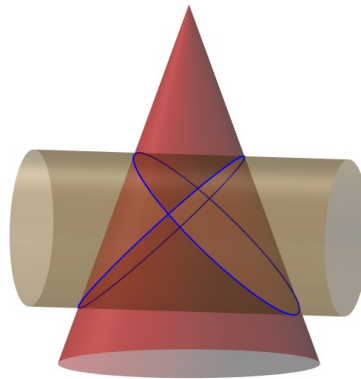


Slika 3.34: Kosoaksonometrijska slika prodora - GeoGebra

2. Konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog stošca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(5,6,0)$ ,  $V(5,6,11)$ ,  $r = 4$ ] i rotacijskog valjka  $\Psi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $MN$ ,  $M(0,6,4)$ ,  $N(10,6,4)$ ]. Polumjer osnovice rotacijskog valjka odredite tako da plohe imaju dvije zajedničke dirne ravnine.

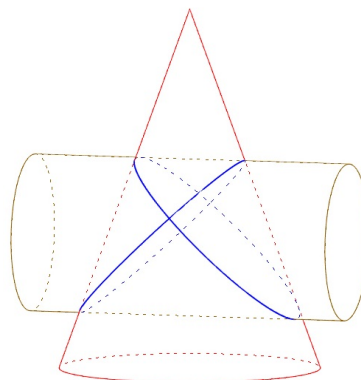
**Rješenje.**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.35), ali i teksta zadatka, zaključujemo da valjak i stožac imaju dvije zajedničke dirne ravnine pa se prodorna krivulja raspada na dvije konike (elipse).

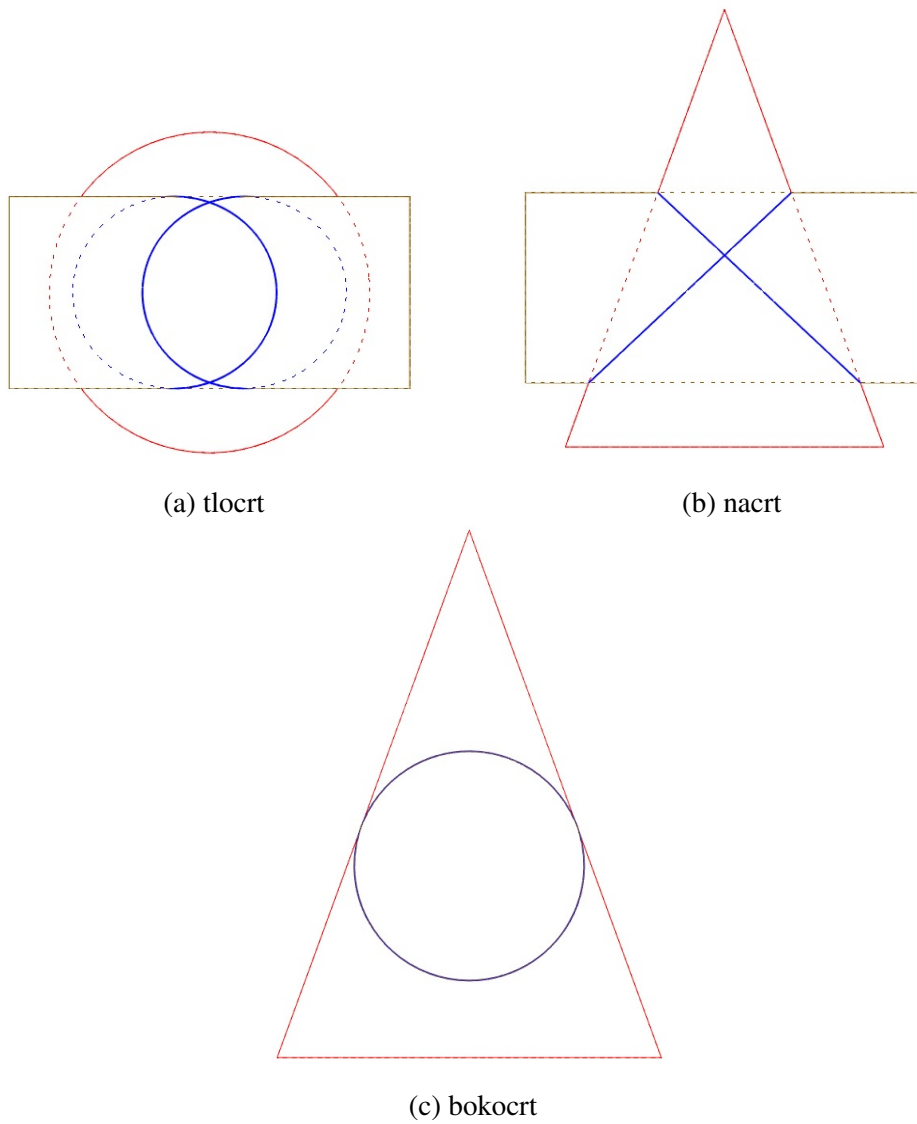


Slika 3.35

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.36.



Slika 3.36



Slika 3.37: Ortogonalne projekcije stošca, valjka i njihove prodorne krivulje - *Rhinoce-  
ros*



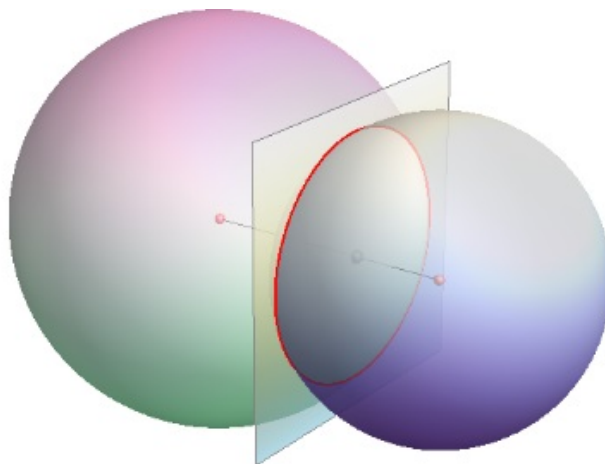
### 3.4 Prodori sa sferom

Budući da sfera nije pravčasta ploha, prilikom konstrukcije prodorne krivulje sfere i neke druge plohe biramo pomoćne ravnine tako da su one najpovoljnije za tu drugu plohu.

#### Prodor dviju sfera

**Definicija 3.4.1.** *Apsolutna konika prostora je imaginarna konika beskonačno daleke ravnine.*

Budući da svaka sfera prolazi jednom apsolutnom konikom, krivulja koja nastaje kod prodora dviju sfera uvijek se raspadne na dvije krivulje 2. reda: apsolutnu koniku i jednu kružnicu. Ravnina u kojoj leži kružnica okomita je na spojnicu središta sfera, a njezino središte nalazi se na toj spojnici.



Slika 3.38: Prodor dviju sfera

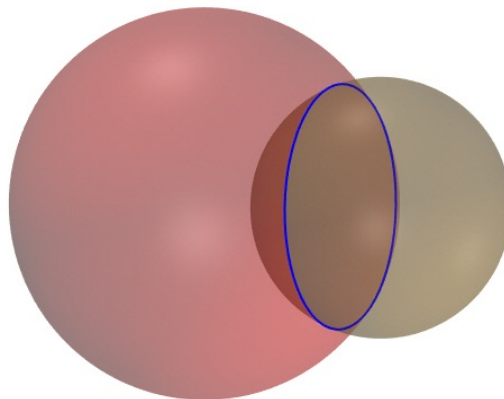
Izvor:[8]

### Zadaci

1. Konstruirajte prodornu krivulju dviju sfera  $\Phi [O(2, 2, 2), r = 6]$  i  $\Psi [S(11, 3, 1), r = 9]$ .

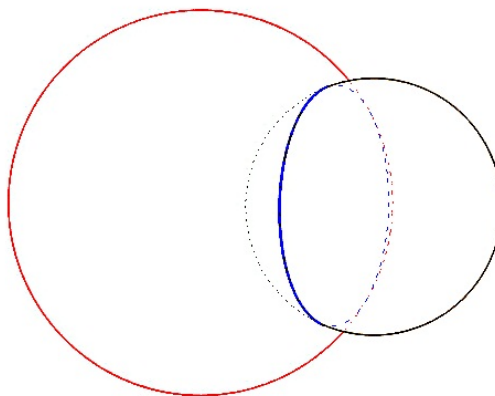
#### Rješenje.

Aksonometrijska slika prodora (slika 3.39) pokazuje da je prodorna krivulja dviju sfera doista kružnica.

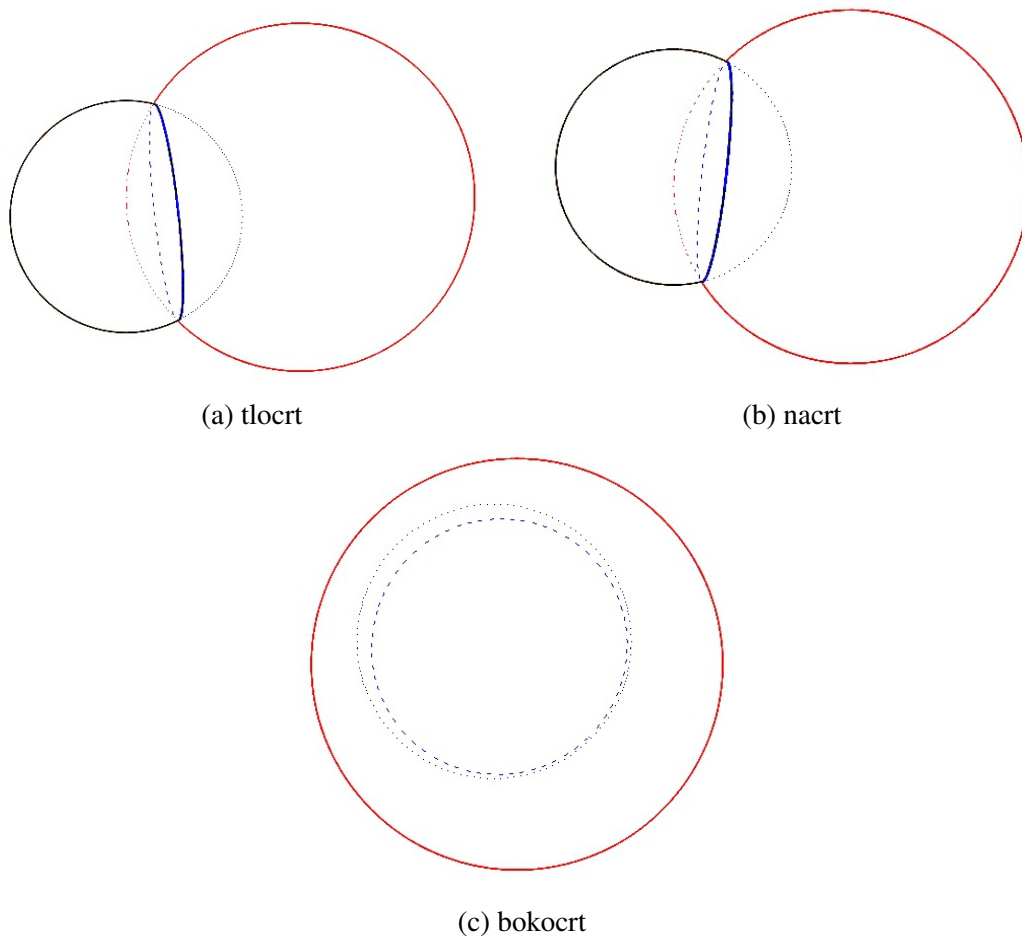


Slika 3.39

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.40.



Slika 3.40

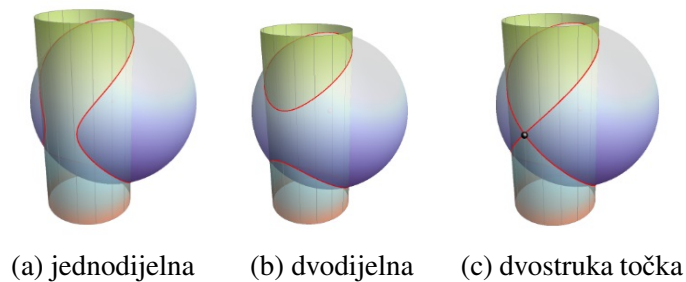


Slika 3.41: Ortogonalne projekcije sfera i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

### Prodor sfere i valjka

Od prodornih krivulja koje nastaju kod prodora sfere i valjka mogu se pojaviti svi tipovi pravih krivulja, dok se od raspadnute krivulje 4. reda može pojaviti samo raspad na dvije konike (kružnice). Razlog tome je što sfera nije pravčasta ploha pa se na njoj ne nalaze pravci.

Jednodijelna krivulja nastaje kod nepotpunog prodora, dvodijelna kod potpunog prodora, a krivulja s dvostrukom točkom onda kada sfera i valjak imaju jednu zajedničku dirnu ravninu.

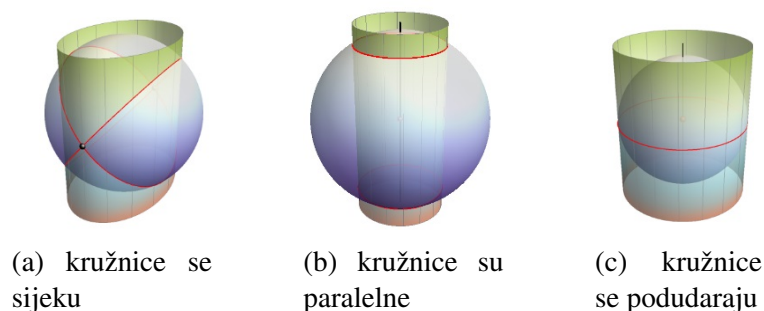


Slika 3.42: Prave prostorne krivulje kod prodora sfere i valjka  
Izvor:[8]

Kada dolazi do raspada na dvije kružnice, one mogu biti u sljedećim odnosima:

1. sijeku se u dvije točke - kod prodora sfere i eliptičkog valjka,
2. paralelne su - središte sfere leži na osi rotacijskog valjka,
3. podudaraju se - polumjer sfere iz 2. jednak je polumjeru baze rotacijskog valjka.

U posljednjem slučaju, valjak i sfera se dodiruju duž spomenute kružnice što znači da u svakoj točki te kružnice imaju zajedničku dirnu ravninu.



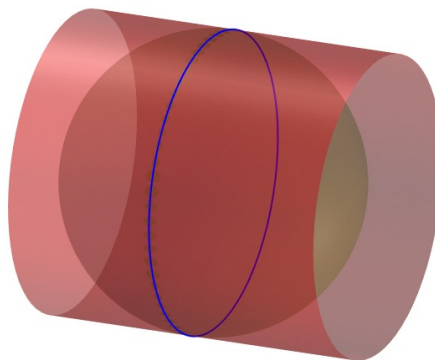
Slika 3.43: Raspadnute prostorne krivulje kod prodora sfere i valjka - kružnice  
Izvor:[8]

### Zadaci

1. Konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog valjka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_3$ , os  $MN$ ,  $M(0,4,3)$ ,  $N(13,4,3)$ ,  $r = 6$ ] i sfere  $\Psi$  [ $O(7,4,3)$ ,  $r = 6$ ].

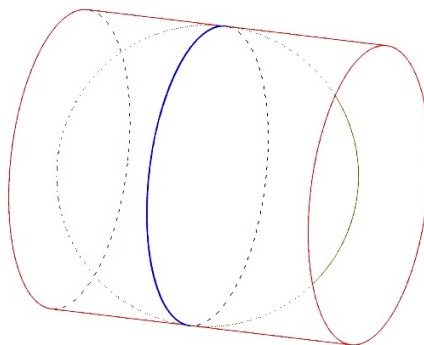
### Rješenje.

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.44), ali i teksta zadatka vidimo da se središte sfere nalazi na osi valjka, a njezin je polumjer jednak polumjeru baze rotacijskog valjka pa zaključujemo da se prodorna krivulja raspada na dvije kružnice koje se podudaraju.

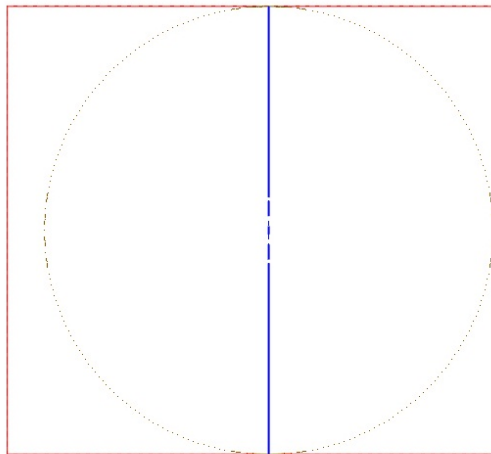


Slika 3.44

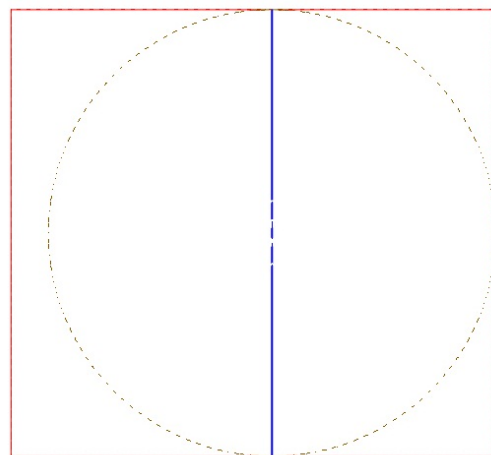
Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.45.



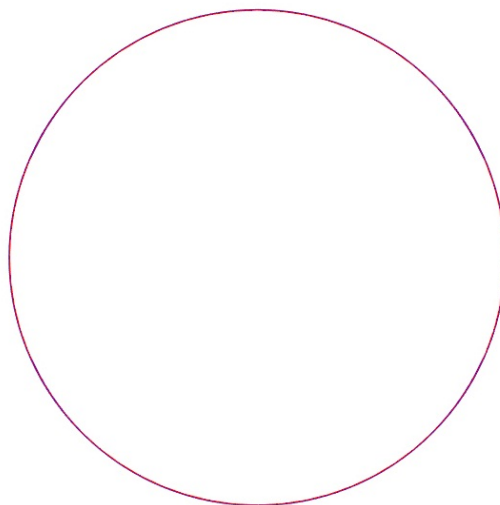
Slika 3.45



(a) tlocrt



(b) nacrt



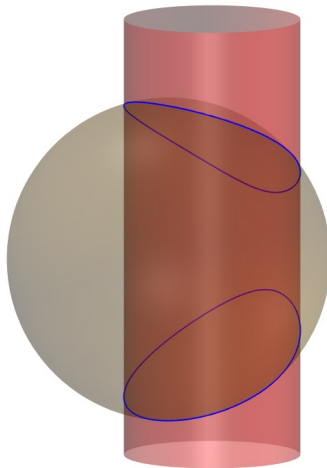
(c) bokocrt

Slika 3.46: Ortogonalne projekcije valjka, sfere i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

2. Konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog valjka  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $MN$ ,  $M(14,4,0)$ ,  $N(14,4,15)$ ,  $r = 3$ ] i sfere  $\Psi$  [ $O(12,5,7)$ ,  $r = 5.5$ ].

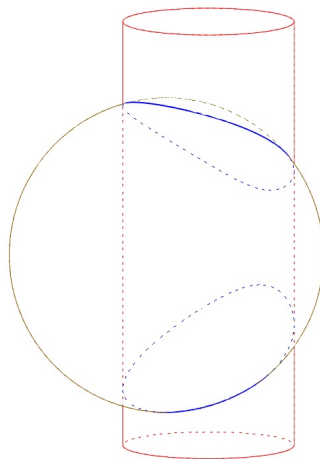
**Rješenje.**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.47) vidimo da je riječ o potpunom prodoru valjka kroz sferu pa je prodorna krivulja dvodijelna.

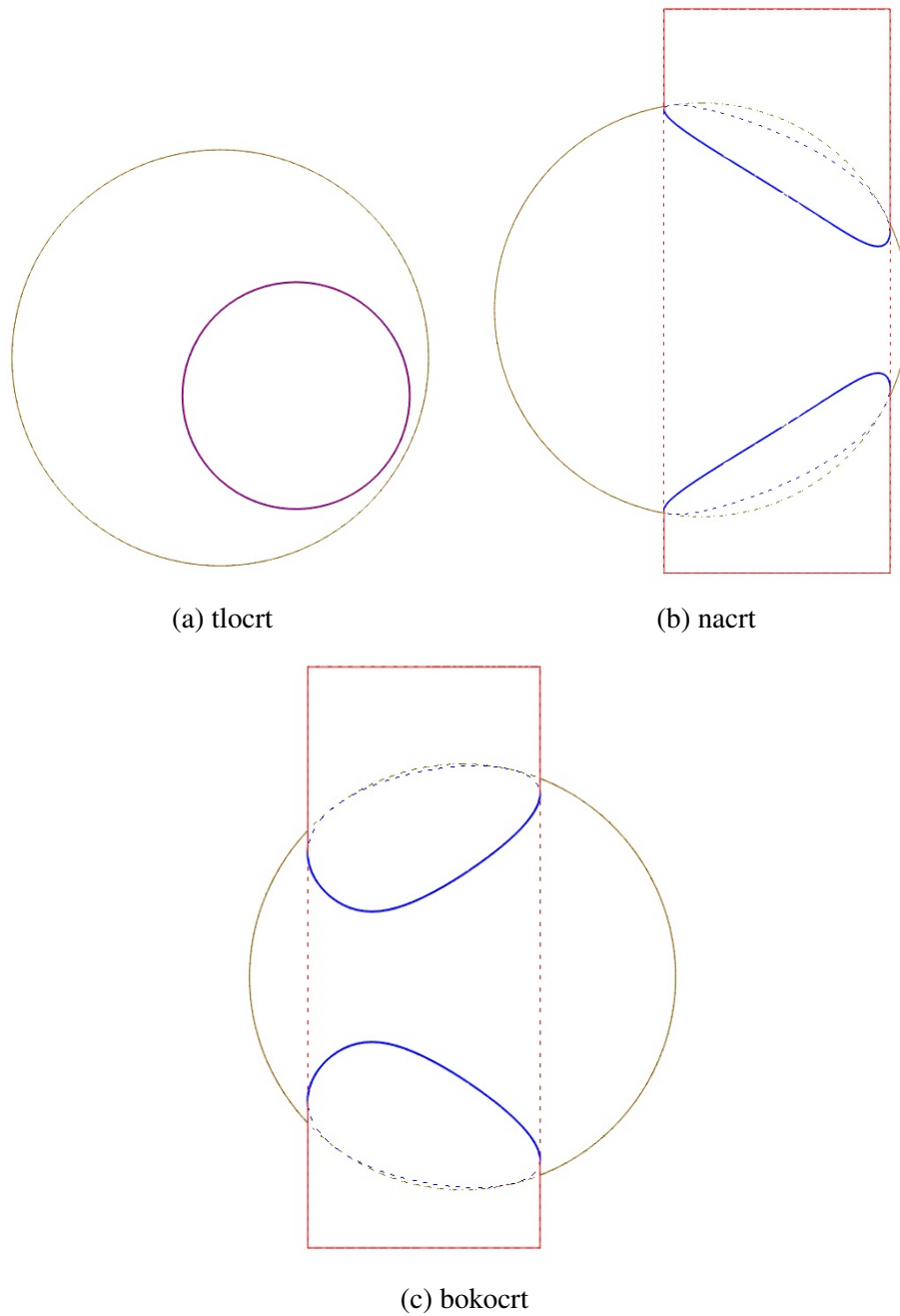


Slika 3.47

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.48.



Slika 3.48

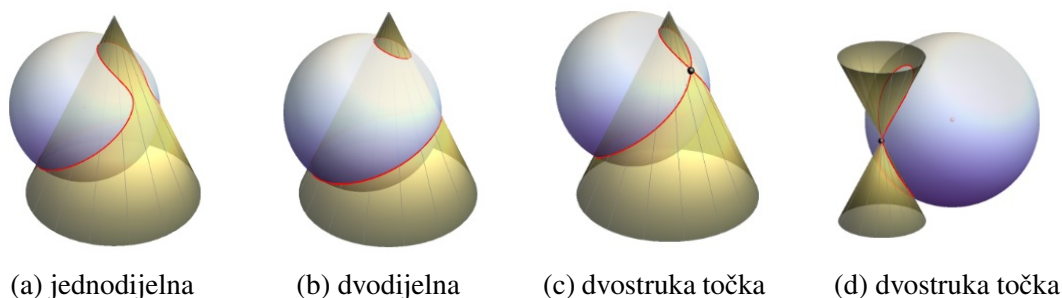


Slika 3.49: Ortogonalne projekcije valjka, sfere i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*



### Prodor sfere i stošca

Prodorne krivulje koje nastaju kod prodora sfere i stošca su jednodijelna kod nepotpunog prodora, dvodijelna kod potpunog prodora te krivulja s dvostrukom točkom koja nastaje u slučaju kada sfera i stožac imaju zajedničku dirnu ravninu ili kada sfera prolazi vrhom stošca.



(a) jednodijelna

(b) dvodijelna

(c) dvostruka točka

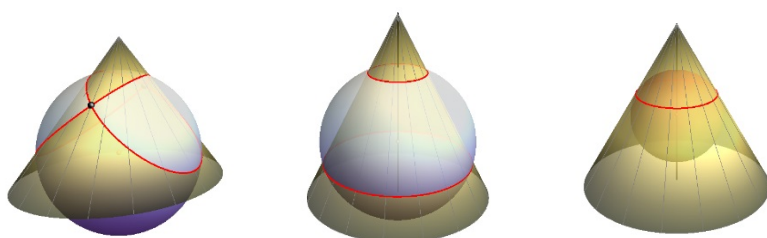
(d) dvostruka točka

Slika 3.50: Prave prostorne krivulje kod prodora sfere i stošca

Izvor:[8]

Od raspadnutih krivulja javlja se raspad na dvije kružnice. Ovisno o situaciji, možemo govoriti o sljedećim odnosima nastalih kružnica:

1. sijeku se u dvije točke - kod prodora sfere i stošca koji nije rotacijski,
2. paralelne su - kod prodora sfere i rotacijskog stošca tako da se središte sfere nalazi na osi stošca,
3. podudaraju se - kod prodora sfere i rotacijskog stošca tako da se središte sfere nalazi na osi stošca.



(a) kružnice se sijeku

(b) kružnice su paralelne

(c) kružnice se podudaraju

Slika 3.51: Raspadnute prostorne krivulje kod prodora sfere i stošca - kružnice

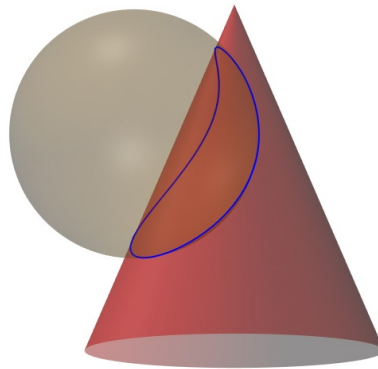
Izvor:[8]

### Zadaci

1. Konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog stošca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(9,4,0)$ ,  $V(9,4,7)$ ,  $r = 3$ ] i sfere  $\Psi$  [ $O(7,5,4.5)$ ,  $r = 2.5$ ].

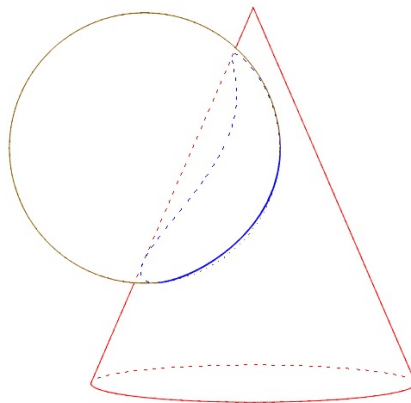
### Rješenje.

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.52) zaključujemo da je riječ o nepotpunom prodoru, tj. zadoru pa je prodorna krivulja jednodijelna.

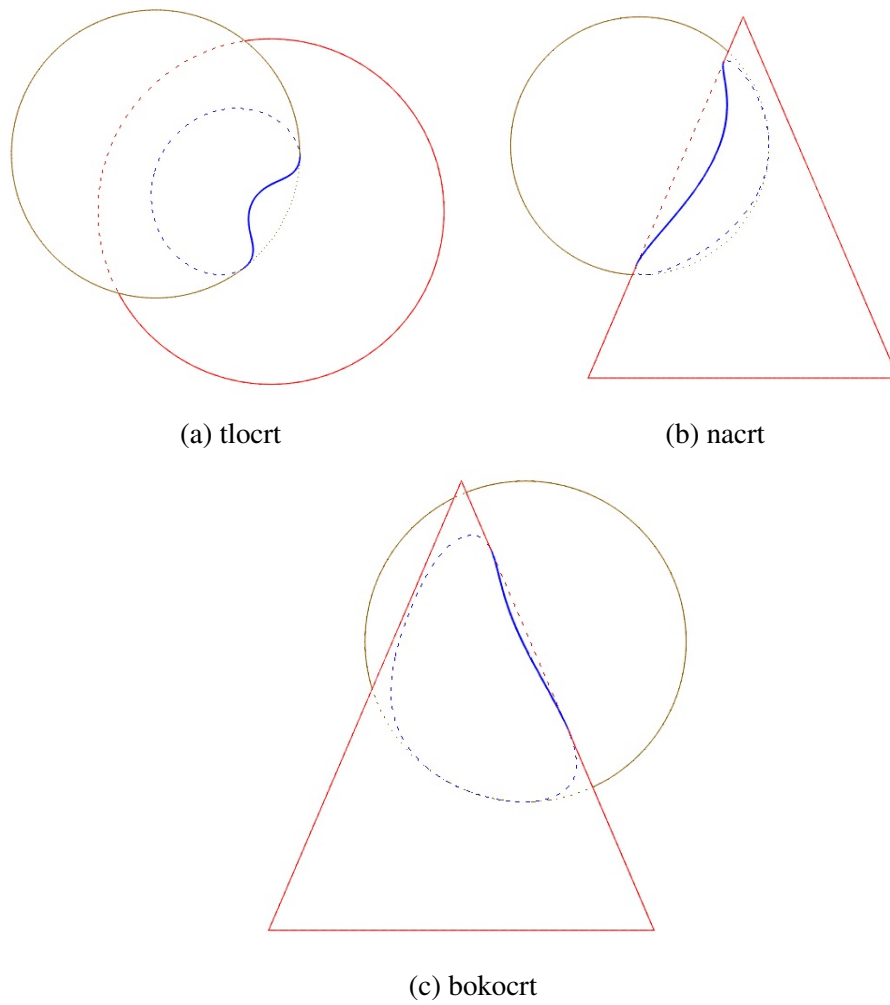


Slika 3.52

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.53.



Slika 3.53

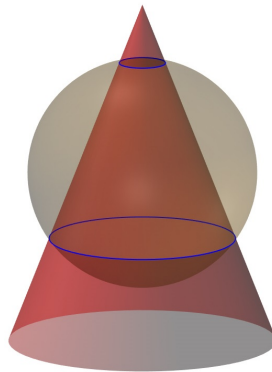


Slika 3.54: Ortogonalne projekcije stošca, sfere i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

2. Konstruirajte prodornu krivulju rotacijskog stošca  $\Phi$  [osnovica u  $\Pi_1$ , os  $SV$ ,  $S(7,8,0)$ ,  $V(7,8,9)$ ,  $r = 3.5$ ] i sfere  $\Psi$  [ $O(7,8,4.5)$ ,  $r = 3$ ].

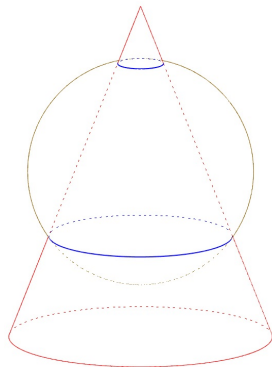
**Rješenje.**

Iz aksonometrijske slike prodora (slika 3.55), ali i teksta zadatka, zaključujemo da se središte sfere nalazi na osi valjka pa se prodorna krivulja raspada na dvije kružnice koje su paralelne.

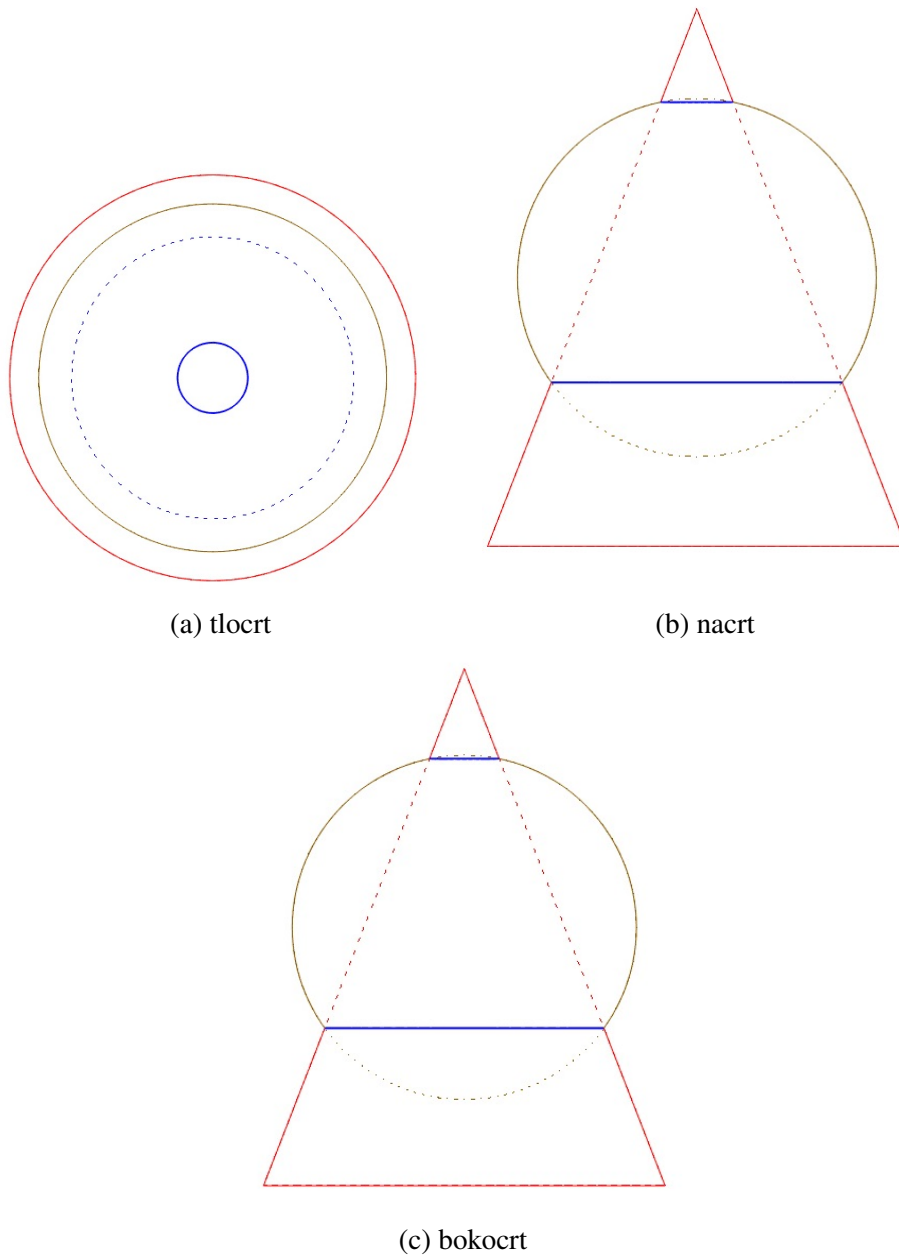


Slika 3.55

Vidljivost u prodoru, određena pomoću programa *Rhinoceros*, dana je na slici 3.56.



Slika 3.56



Slika 3.57: Ortogonalne projekcije stošca, sfere i njihove prodorne krivulje - *Rhinoceros*

## Poglavlje 4

# Primjena prodora u svakodnevnom životu

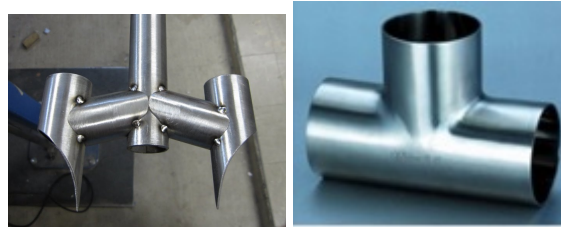
Primjeri prodora obliha ploha mogu se pronaći i u najjednostavnijim stvarima koje čovjek koristi i s kojima se susreće u svakodnevnom životu. Sljedeće slike prikazuju neke od tih primjera.



Slika 4.1: Prodor sfere i valjka - ograde i kvake za vrata  
Izvor: *Google*



Slika 4.2: Prodor stožaca - lampa i lijevak  
Izvor: *Google*



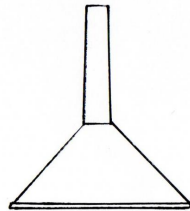
Slika 4.3: Prodor valjaka - cijevi  
Izvor: *Google*



Slika 4.4: Prodor sfera - loptica  
Izvor: *Google*



Slika 4.5: Prodor sfere i stošca - loptica  
Izvor: *Google*



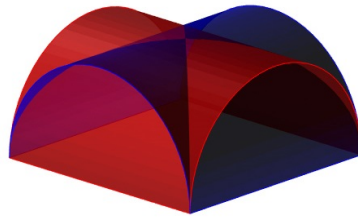
Slika 4.6: Prodor stošca i valjka - lijevak  
Izvor: *Google*

Nešto zanimljiviji i kreativniji primjeri primjene prodora oblih tijela mogu se pronaći u arhitekturi. To su svodovi i kupole koje služe za natkrivanje objekata.



## 4.1 Svodovi

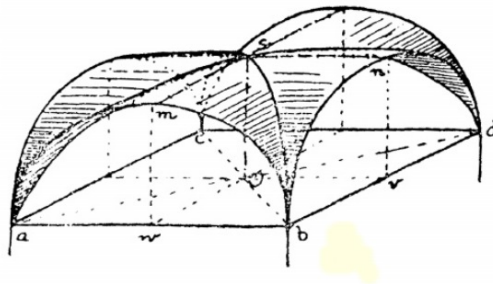
Svodovi su građevne konstrukcije konkavna oblika koje se oslanjaju na okolne zidove, lukove ili stupove, a služe za natkrivanje objekata. Kako je svodna ploha najčešće sferična ili cilindrična, kod nastojanja pojedinih svodova možemo uočiti prodore obliha ploha, tj. dvaju poluvaljaka. Primjeri takvih svodova su *križni svod* i *samostanski svod*.



Slika 4.7: Prodor poluvaljaka - *Rhinoceros*

### Križni svod

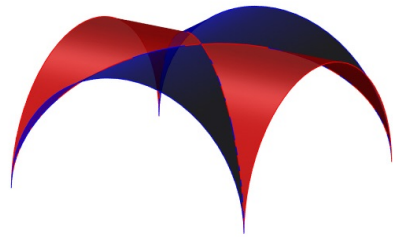
Križni svod nastaje prodorom dvaju poluvaljaka kao na slici 4.7. Pojavljuje se već za vrijeme klasične rimske arhitekture, ranokršćanske arhitekture, romanike, ali ga najčešće vežemo uz razdoblje gotike. Kod križnog svoda je prostor ispod njega svjetao.



Slika 4.8: Križni svod

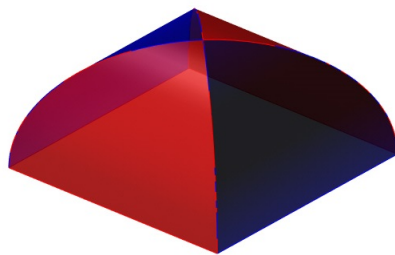
Izvor:[5]

Na slici 4.8 možemo vidjeti da se u slučaju križnog svoda nad stranicama *ab*, *bd*, *dc* i *ca* pojavljuju lukovi.

Slika 4.9: Križni svod - *Rhinoceros*

### Samostanski svod

Samostanski svod također nastaje prodorom dvaju poluvaljaka kao na slici 4.7. U većini slučajeva, njegov je tlocrt kvadrat, a možemo vidjeti da ima četiri cilindrična jedra. Za razliku od križnog svoda, prostor ispod samostanskog svoda je taman. Također, promatrajući slike 4.8 i 4.10 možemo vidjeti razliku između križnog i samostanskog svoda. Naime, kod samostanskog svoda se ne pojavljuju lukovi već od svake stranice obodnog zida ide po jedna ploha svoda (cilindrično jedro) prema tjemenu.

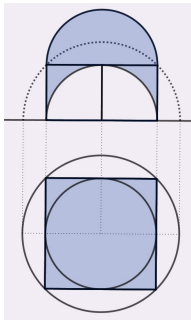
Slika 4.10: Samostanski svod - *Rhinoceros*

## 4.2 Kupole

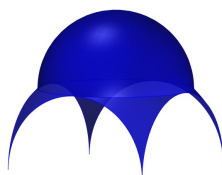
Kupole su također jedan od ljepših primjera prodora koje pronalazimo u arhitekturi. Sami naziv dolazi od talijanske riječi *cupola*, a odnosi se na svod ili krov polukuglasta ili polukugli slična oblika. Kupole se koriste za natkrivanje objekata, a njihova izgradnja imala je veliku važnost u mnogim razdobljima kroz povijest. Primjeri kupola za koje ćemo dati kratki opis su *viseća kupola*, *barokna kupola* te *bizantska kupola*.

### Bizantska kupola

Bizantska kupola još se naziva i *kupola s pandativima* jer kupola leži na četiri sferna trokutasta isječka (tzv. pandativa). Njezin tlocrt je kvadrat s upisanom kružnicom.



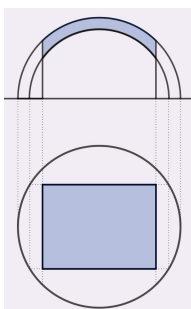
Slika 4.11: Tlocrt i nacrt bizantske kupole - *GeoGebra*



Slika 4.12: Bizantska kupola - *Rhinoceros*

### Barokna kupola

Barokna ili *češka* kupola je kupola izvedena nad pravokutnim tlocrtom kod kojeg je promjer polukugle veći od dijagonale pravokutnika.

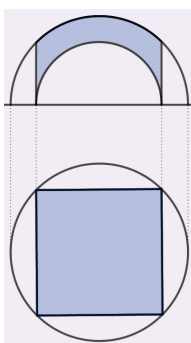


Slika 4.13: Tlocrt i nacrt barokne kupole - *GeoGebra*

Slika 4.14: Barokna kupola - *Rhinoceros*

### Viseća kupola

Viseća ili *opisana* kupola je kupola izvedena nad kvadratnim tlocrtom kod kojeg je promjer polukugle jednak dijagonali kvadrata.

Slika 4.15: Tlocrt i nacrt viseće kupole - *GeoGebra*Slika 4.16: Viseća kupola - *Rhinoceros*

# Bibliografija

- [1] Babić I., Gorjanc S., Sliepčević A., Szirovicza V., *Nacrtna geometrija - zadaci*, Zagreb, HDKGIKG, 2002.
- [2] Babić I., Gorjanc S., Sliepčević A., Szirovicza V., *Konstruktivna geometrija - vježbe*, Zagreb, HDKGIKG, 2002.
- [3] Niče, V., *Deskriptivna geometrija - prvi svezak*, Zagreb, Školska knjiga, 1987.
- [4] Niče, V., *Deskriptivna geometrija - drugi svezak*, Zagreb, Školska knjiga, 1988.
- [5] Periša, T., *Diplomski rad :Povijest svodova*. Dostupno na: <https://www.scribd.com/document/239273716>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.
- [6] Petrunić, I., Sudeta, N., *Stručni rad : Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji*, 2004. Dostupno na: <http://hrcak.srce.hr/3923>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.
- [7] Gligorić, R., *Nacrtna geometrija - primena*, 2015. Dostupno na: <http://polj.uns.ac.rs/wp-content/uploads/2015/11/Nacrtna-geometrija-primena-Osnovni-udzbenik-Radojka-Gligoric.pdf>
- [8] Gorjanc, S. *Deskriptivna geometrija*. Nastavni materijali. Dostupno na: <http://grad.hr/sgorjanc/Links/deskriptiva/plan.html>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.
- [9] Šimić-Horvath, M. *Svodovi*. Nastavni materijali. Dostupno na: <http://www.grad.hr/geomteh3d/radne.html>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.
- [10] Šimić-Horvath, M. *Kupole*. Nastavni materijali. Dostupno na: <http://www.grad.hr/geomteh3d/radne.html>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.
- [11] Varošaneć, S. *Nacrtna geometrija*. Nastavni materijali. Dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/>. Pristupljeno 24. srpnja 2018.

# Sažetak

Oble plohe čije smo međusobne prodore promatrali u ovom radu su stožac, valjak i sfera. Spomenute plohe su plohe 2. reda, a njihovim prodorom nastaju prostorne krivulje 4. reda. Razlikujemo prave i raspadnute prostorne krivulje, a kakva krivulja nastaje prodorom dviju ploha ovisi o njihovom međusobnom položaju. Prave prostorne krivulje možemo klasificirati na jednodijelne, dvodijelne te krivulje s dvostrukom točkom. Ukoliko dođe do raspada, prostorna se krivulja 4. reda raspada na krivulje nižih redova, ali tako da je zbroj redova tih krivulja jednak 4. Općenito, možemo govoriti o raspadu na četiri pravca, raspadu na dvije krivulje 2. reda, raspadu na krivulju 3. reda i pravac te raspadu na krivulju 2. reda i dva pravca. Projekcije obliha ploha i njihovih prodornih krivulja prikazivali smo pomoću Mongeove metode i aksonometrije u programu za 3D modeliranje *Rhinoceros*, ali primjenom klasičnih metoda presječnih ravnina. Kod prodora valjaka i/ili stožaca presječne ravnine odabiru se tako da obje plohe sijeku duž njihovih izvodnica dok se kod prodora sa sferom presječne ravnine odabiru tako da su najpogodnije za tu drugu plohu. Premda prikazivanje prodora stožaca, valjaka i sfera izgleda i zvuči komplicirano, njihova primjena je široka, a pronalazimo je u svakodnevnom životu. Jednostavniji primjeri prodora su spajanje cijevi, ograde, loptice... Ozbiljniji i kreativniji primjeri prodora su pojedini svodovi i kupole.

# Summary

Curved solids whose intersections have been described in this thesis are a cone, a cylinder and a sphere. Mentioned solids are solids of the 2<sup>nd</sup> order and their intersection is space curve of the 4<sup>th</sup> order. We differentiate between proper space curves and degenerated space curves and which one appears depends on the position of solids that we intersect. Proper space curves are classified as one-branch, two-branch and curves with one double point. If there comes to decomposition, a space curve of the 4<sup>th</sup> order is decomposed into curves of lower order but so that the sum of their orders equals 4. Generally, we can talk about following decompositions: four lines, two curves of the 2<sup>nd</sup> order, a curve of the 3<sup>rd</sup> order and a line, a curve of the 2<sup>nd</sup> order and two lines. Projections of curved solids and their intersection have been represented by Monge's method and axonometry in the program for 3D modeling *Rhinoceros* but also with classical methods of cutting planes. In case of intersecting cylinders and/or cones, we choose cutting planes that intersect both solids along their generatrices. When one of the two solids is a sphere, we choose cutting planes that cut the other solid in the simplest possible curves. Although intersections of curved solids seem and sound complicated, their application is wide and can be found in everyday life. Here are some simple examples of their application: connecting tubes, fences, balls...Serious and creative examples are some domes and vaults.

# Životopis

Rođena sam 8. svibnja 1993. godine u Čakovcu. U rodnom Međimurju pohađala sam Osnovnu školu Domašinec i završila je 2008. godine. Iste godine, također u Međimurju, upisujem srednju školu Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec i to opći smjer gimnazije. Maturirala sam 2012. godine, a nakon toga upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu. Godine 2016. na njemu završavam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer i postajem prvostupnica edukacije matematike. U rujnu iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika - nastavnički smjer, a ispite na diplomskom studiju uspješno privodim kraju u 2018. godini.