

# Redukcijski modeli dinamike fluida s primjenama

---

Kozić, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:231905>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Kristina Kozić

**REDUKCIJSKI MODELI DINAMIKE**  
**FLUIDA S PRIMJENAMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Zlatko Drmač

Zagreb, Rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 POD</b>	<b>3</b>
1.1 Veza POD u $\mathbb{R}^m$ i SVD . . . . .	3
1.2 Računanje POD baze . . . . .	9
1.3 Primjena POD na evolucijski sustav . . . . .	11
<b>2 DEIM</b>	<b>21</b>
2.1 Algoritam . . . . .	22
2.2 Ocjena greške . . . . .	24
2.3 q-DEIM . . . . .	25
2.4 Primjena na sustav nižeg reda . . . . .	28
<b>3 Dodatak</b>	<b>31</b>
3.1 Nelinearna optimizacija . . . . .	31
3.2 O FeniCS-u . . . . .	32
3.3 POD kod . . . . .	32
<b>Bibliografija</b>	<b>35</b>

# Uvod

U ovom radu predstaviti ćemo metode redukcije dimenzije sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) koji nastaje nakon prostorne diskretizacije neke parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ). Jedan takav sustav ODJ nastao primjenom metode konačnih elemenata na nelinearnu PDJ u jednoj prostornoj dimenziji je

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (2)$$

gdje  $t \in [0, T]$  označava vrijeme,  $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je konstantna matrica,  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$  inicijalni uvjet i  $\mathbf{F} = [F(y_1(t)), \dots, F(y_m(t))]^T \in \mathbb{R}^m$  gdje je  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  nelinearna funkcija,  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ . Dimenzija sustava  $m$  dolazi od broja točaka diskretizacije i može biti ekstremno velika kada se zahtjeva visoka točnost, stoga je rješavanje takvog sustava uglavnom neisplativo. Tada posežemo za metodama redukcija dimenzije sustava. Pritom se najčešće koriste metode projekcije na potprostor razapet tkz. *reduciranom* bazom dimenzije  $l \ll m$ . Jedan od načina konstrukcije spomenute baze je **POD** (Proper Orthogonal Decomposition) metoda o kojoj će biti riječ u prvom poglavlju. Dani su detalji same metode u konačnodimenzionalnom slučaju - veza sa **SVD** (Singular Value Decomposition), svojstva **POD** baze te algoritam pronalaska. Za općeniti slučaj **POD** u Hilbertovom prostoru upućujemo na [6].

Kada smo dobili reduciranu bazu čiji su vektori ortonormirani stupci matrice  $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{m \times l}$  primjenimo Galerkinovu metodu:  $\mathbf{y}(t)$  zamjenimo sa  $\mathbf{V}_1\tilde{\mathbf{y}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^l$  i projiciramo sustav (1) na  $\mathbf{V}_1$ . Reducirani sustav je

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{y}}(t) = \underbrace{\mathbf{V}_1^T \mathbf{A} \mathbf{V}_1}_{\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{l \times l}} \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{V}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{V}_1\tilde{\mathbf{y}}(t)) \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{V}_1^T \mathbf{y}_0 \quad (4)$$

Kombinacija **POD** baze i Galerkinove projekcije nije sretno rješenje kada imamo nelinearni član  $\mathbf{V}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{V}_1\tilde{\mathbf{y}}(t))$  jer je rješavanje toga dijela sustava složenosti kao rješavanje originalnog sustava. Tu poteškoću nadilazi **DEIM** (Discrete Empirical Interpolation Method)

metoda, kao i njezina modificirana verzija **q – DEIM** o kojima će biti riječi u drugom poglavlju. Na samom kraju rada osvrnuli smo se na neke osnovne pojmove i rezultate za rješavanje optimizacijskih problema u okvirima Lagrangeove teorije. Naime, to koristimo za rješavanje **POD** optimizacijskog problema u prvom poglavlju. Kod s kojim smo testirali **POD** metodu na rješenjima Navier-Stokesove zadaće, također se nalazi u dodatku na kraju rada.

# Poglavlje 1

## POD

**POD** jest međukorak u konstrukciji nižedimenzionalnog sustava - odrediti bazu dimenzije  $l \ll m$  na koju se projicira originalni sustav. Baza koju daje **POD** metoda je optimalna reprezentacija ranga  $l$  određenih podataka. Optimalna u smislu da niti jedna druga metoda ne daje bolju aproksimaciju ranga  $l$ . U odjeljcima koji slijede, **POD** problem je formuliran kao optimizacijski problem čije je rješenje dobiveno uz pomoć metode Lagrangeovih multiplikatora. U dodatku na kraju rada nalazi se više o samoj metodi Lagrangeovih multiplikatora.

Slijedi veza **POD** metode u realnom konačno-dimenzionalnom prostoru i **SVD** (Singular Value Decomposition) metode te sama formulacija **POD** problema i njegovo rješenje. Zatim slijede neka svojstva **POD** baze, algoritam pronalaska te primjena na podatke generirane nelinearnom funkcijom. U posljednjem odjeljku ovog poglavlja biti će riječi o primjeni **POD** na evolucijske sustave te simulacija na modelu toka fluida.

### 1.1 Veza **POD** u $\mathbb{R}^m$ i **SVD**

**Teorem 1.1.1.** [3](Singularna dekompozicija matrice) Ako je  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $d \leq \min\{m, n\}$ , tada postoje ortogonalne matrice  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  i  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , takve da je

$$\mathbf{U}^T \mathbf{Y} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} =: \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (1.1)$$

gdje je  $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , pri čemu je  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > 0$ , a  $\mathbf{0}$  su nulmatrice odgovarajuće dimenzije. Brojeve  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$  zovemo **singularne vrijednosti** matrice  $\mathbf{Y}$ . Stupce matrice  $\mathbf{U}$  zovemo lijevi, a stupce matrice  $\mathbf{V}$  desni singularni vektori matrice  $\mathbf{Y}$ .

Neka je  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrica ranga  $d \leq \min\{m, n\}$  čiji su stupci  $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Iz teorema (1.1.1) slijedi da singularni vektori  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^d$  i  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^d$  zadovoljavaju

$$\mathbf{Y}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{Y}^T\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.2)$$

Također, to su svojstveni vektori matrica  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$  i  $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$  sa pripadnim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_i = \sigma_i^2 > 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Singularni vektori  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=d+1}^m$  i  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=d+1}^n$  su svojstveni vektori matrica  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$  i  $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$  sa pripadnim svojstvenim vrijednostima 0. Iz (1.1) imamo da je  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ . Također  $\mathbf{Y}$  možemo zapisati kao

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}^d\mathbf{D}(\mathbf{V}^d)^T, \quad (1.3)$$

gdje su matrice  $\mathbf{U}^d \in \mathbb{R}^{m \times d}$  i  $\mathbf{V}^d \in \mathbb{R}^{n \times d}$  dane sa

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ij}^d &= \mathbf{U}_{ij}, & 1 \leq i \leq m, & \quad 1 \leq j \leq d, \\ \mathbf{V}_{ij}^d &= \mathbf{V}_{ij}, & 1 \leq i \leq n, & \quad 1 \leq j \leq d. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Označimo li sada sa  $\mathbf{B}^d = \mathbf{D}(\mathbf{V}^d)^T \in \mathbb{R}^{d \times n}$  i  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^d\mathbf{B}^d$ , slijedi da stupce od  $\mathbf{Y}$  možemo zapisati kao linearnu kombinaciju stupaca matrice  $\mathbf{U}^d$ . Koeficijenti u raspisu vektora  $\mathbf{y}_j$  u bazi  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^d$  su elementi  $j$ -tog retka matrice  $\mathbf{B}^d$ . Slijedi

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^d \mathbf{B}_{ij}^d \mathbf{U}_{:,i}^d = \sum_{i=1}^d (\mathbf{D}(\mathbf{V}^d)^T)_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d \underbrace{((\mathbf{U}^d)^T \mathbf{U}^d)}_{\mathbf{I}_d} \mathbf{D}(\mathbf{V}^d)^T)_{ij} \mathbf{u}_i \quad (1.5)$$

$$= \sum_{i=1}^d ((\mathbf{U}^d)^T \mathbf{Y})_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d \underbrace{\left( \sum_{k=1}^m \mathbf{U}_{ki}^d \mathbf{Y}_{kj} \right)}_{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}_j} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^d \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_i, \quad (1.6)$$

gdje je  $\mathbf{I}_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$  matrica identitete i  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  skalarni produkt na  $\mathbb{R}^m$ . Dakle,

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^d \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Kao što vidimo iz prethodne jednakosti, koeficijenti u raspisu  $\mathbf{y}_j$  u bazi  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^d$  su skalari  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Ugrubo rečeno, veličina izraza  $|\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_j \rangle_{\mathbb{R}^m}|$  proporcionalna je s kolinearnošću vektora  $\mathbf{u}_i$  i  $\mathbf{y}_j$ . Kada bi htjeli  $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^n$  opisati samo jednim vektorom, **POD** optimizacijski problem glasio bi

$$\boxed{\max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u} \rangle|^2 \quad t.d. \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^m}^2 = 1,} \quad (1.8)$$



gdje je  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^m}}$ .

Sada ćemo iskoristiti teorem (3.1.4) kako bi dobili rješenje problema (1.8). Neka je funkcija  $e : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  t.d.  $e(\mathbf{u}) = 1 - \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^m}^2$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Tada uvjet jednakosti možemo zapisati kao  $e(\mathbf{u}) = 0$ . Primjetimo da je  $\nabla e(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}^T$  linearno nezavisan ukoliko je  $\mathbf{u} \neq 0$  što vrijedi zbog (1.8). Slijedi da je  $\mathbf{u}$  regularna točka s obzirom na uvjet  $e(\mathbf{u}) = 0$ .

Pretpostavimo da je  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  rješenje problema (1.8) formuliranog kao (P). Iz teorema (3.1.4) slijedi da postoji jedinstveni Lagrangeov multiplikator  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je zadovoljen nužan optimizacijski uvjet prvog reda. Definiramo Lagrangeov funkcional

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2 + \lambda(1 - \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^m}^2) \quad \text{za } (\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

za koji vrijedi

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Računamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_i}(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m \mathbf{Y}_{kj} \mathbf{u}_k \right|^2 + \lambda \left( 1 - \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k^2 \right) \right) \quad (1.11)$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m \mathbf{Y}_{kj} \mathbf{u}_k \right) \mathbf{Y}_{ij} - 2\lambda \mathbf{u}_i \quad (1.12)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^m \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{ij} \mathbf{Y}_{jk}^T}_{(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)_{ik}} \mathbf{u}_k \right) - 2\lambda \mathbf{u}_i \quad (1.13)$$

Stoga,

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = 2(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (1.14)$$

iz čega slijedi problem svojstvenih vrijednosti

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.15)$$

Iz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\mathbf{u}, \lambda) = 0, \quad (1.16)$$

nameće se uvjet

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}^m} = 1. \quad (1.17)$$

Lijevi singularni vektor  $\mathbf{u}_1$  iz (1.1) rješava problem (1.15) i (1.17) i

$$\sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2 = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (1.18)$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m \mathbf{Y}_{kj} \mathbf{u}_{1k} \right) \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_{:j} \mathbf{Y}_{jk}^T \mathbf{u}_{1k} \right) \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (1.19)$$

$$= \langle \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} = \lambda_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} = \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \lambda_1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.20)$$

Pokazati ćemo da  $\mathbf{u}_1$  zaista rješava problem (1.8). Uzmimo proizvoljan vektor  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$  t.d.  $\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{R}^m} = 1$ . Kako je  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$  ortonormirana baza u  $\mathbb{R}^m$  tada je

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^m \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_i. \quad (1.21)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2 &= \sum_{j=1}^n \left| \langle \mathbf{y}_j, \sum_{i=1}^m \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \langle \langle \mathbf{y}_j, \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m}, \langle \langle \mathbf{y}_j, \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \rangle_{\mathbb{R}^m} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \underbrace{\left\langle \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{y}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \mathbf{u}_k}_{\lambda_i \mathbf{u}_i}, \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \underbrace{\langle \lambda_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m}}_{\lambda_i \delta_{ik}} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i |\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2 \\ &\leq \lambda_i \sum_{i=1}^m |\langle \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2 \\ &= \lambda_i \|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \lambda_i \\ &= \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{R}^m}|^2, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nadalje, možemo tražiti drugi vektor koji je ortogonalan vektoru  $\mathbf{u}_1$  i zajedno s  $\mathbf{u}_1$  najbolje moguće opisuje stupce matrice  $\mathbf{Y}$ . Konačan rezultat, odnosno generalizacija prethodnog rezultata dana je sljedećim teoremom.

**Teorem 1.1.2.** *Neka je  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrica ranga  $d \leq \min\{m, n\}$  čiji su stupci  $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Nadalje, neka je  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  dekompozicija singularnih vrijednosti matrice  $\mathbf{Y}$ . Tada, za svaki  $l \in \{1, \dots, d\}$  rješenje problema*

$$\max_{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_i \rangle|^2 \quad t.d. \quad \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} := \delta_{ij} \quad za \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad (1.23)$$

dano je lijevim singularnim vektorima  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$ , odnosno sa prvih  $l$  stupaca matrice  $\mathbf{U}$ . Štoviše,

$$\arg \max = \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^l \lambda_i. \quad (1.24)$$

*Dokaz.* [6] □

**Definicija 1.1.3.** *Vektore  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$  zovemo **POD baza** ranga  $l \in \{1, \dots, d\}$ .*

### Svojstva POD baze

Sljedeći rezultat govori o tome kako je aproksimacija stupaca matrice  $\mathbf{Y}$  s prvih  $l$  lijevih singularnih vektora  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$ , najbolja među svim aproksimacija ranga  $l$ .

**Korolar 1.1.4.** *Neka vrijede pretpostavke kao u teoremu (1.1.2). Neka je  $\hat{\mathbf{U}}^d \in \mathbb{R}^{m \times d}$  matrica čiji su stupci u parovima ortonormirani vektori  $\hat{\mathbf{u}}_i$  i raspis stupaca matrice  $\mathbf{Y}$  u bazi  $\{\hat{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^d$  dan je sa*

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{U}}^d \mathbf{C}^d, \quad g.d.j.e.je \quad \mathbf{C}_{ij} = \langle \hat{\mathbf{u}}_i, \mathbf{y}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad za \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.25)$$

Tada, za svaki  $l \in \{1, \dots, d\}$  imamo

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{U}^l \mathbf{B}^l\|_F \leq \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{U}}^l \mathbf{C}^l\|_F. \quad (1.26)$$

U korolaru (1.1.4),  $\|\cdot\|_F$  označava Frobenius-ovu normu danu sa

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{A}_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (1.27)$$



Slika 1.1: Od vrha prema dolje: SVD aproksimacija ranga 25 i 150, izvorna fotografija  $2304 \times 4096 \times 3$  (lijevo); SVD aproksimacija ranga 50 i 200, izvorna fotografija  $770 \times 1680 \times 3$  (desno)

matrica  $\mathbf{U}^l$  označava prvih  $l$  stupaca matrice  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{B}^l$  označava prvih  $l$  redaka matrice  $\mathbf{B}$  (slično za  $\hat{\mathbf{U}}^l$  i  $\mathbf{C}^l$ ). Nadalje,  $\text{tr}(\mathbf{A})$  označava sumu dijagonalnih elemenata matrice  $\mathbf{A}$ . Iz korolara (1.1.4) također slijedi da **POD** bazu ranga  $l$  možemo izračunati rješavajući minimizacijski problem

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{y}_j, \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \tilde{\mathbf{u}}_i\|_{\mathbb{R}^m}^2 \quad \text{t.d.} \quad \langle \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij} \quad \text{za} \quad 1 \leq i, j, \leq l. \quad (1.28)$$

## 1.2 Računanje POD baze

Matricu  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zovemo *matrica uzoraka*. Tri su načina računanja **POD** baze ranga  $l$   $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$ :

- **SVD**  $[\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_{:,i} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda_i = \Sigma_{ii}^2$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

- $m \leq n$  *Klasični POD*

Rješavamo  $m \times m$  svojstveni problem  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

- $m > n$  *Metoda uzoraka*

Rješavamo  $n \times n$  svojstveni problem  $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ,

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{Y} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Odabir ranga  $l$  je od centralne važnosti prilikom konstrukcije **POD** baze. Ne postoji a-priori pravilo prilikom odabira no kao prikladna metoda smatra se odabrati  $l$  na način da je uhvaćen najveći postotak "energije" matrice uzoraka  $\mathbf{Y}$ . Taj postotak može se izračunati kao

$$\epsilon(l) = \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}. \quad (1.29)$$

**Primjer 1.** Neka je dana funkcija  $h : \Omega \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega, \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  t.d.

$$h(x, t) = e^{-a(x-t)^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (1.30)$$

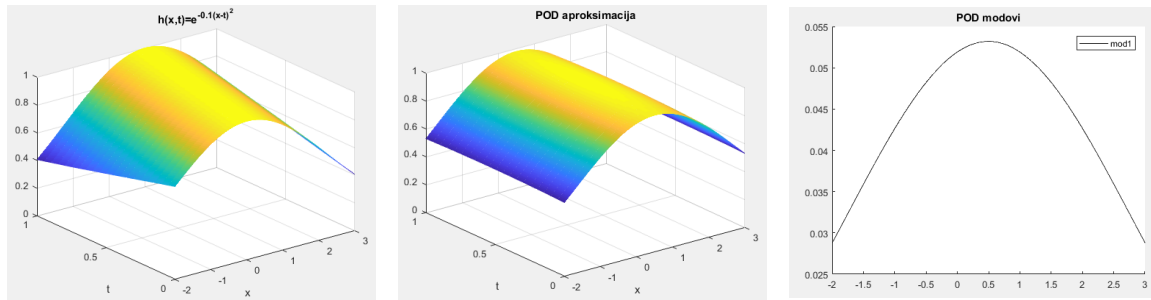
Prostornu domenu  $\Omega = [-2, 3]$  diskretiziramo ekvidistantnom mrežom od  $m = 500$  točaka

$$x_i = -2 + 5 \frac{i-1}{m-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.31)$$

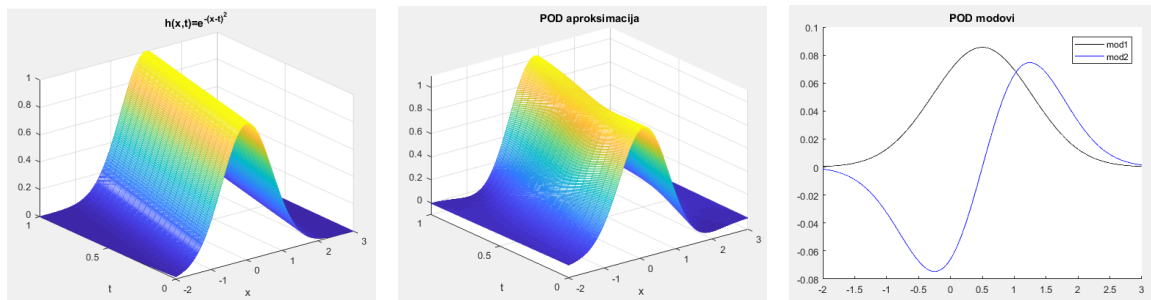
a vremensku domenu  $\mathcal{I} = [0, 1]$  ekvidistantnom mrežom od  $n = 20$  točaka

$$t_j = \frac{j-1}{n-1}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.32)$$

Elementi matrice uzoraka  $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  biti će vrijednosti funkcije  $h$  u diskretnim točkama  $(x_i, t_j)$ , odnosno  $\mathbf{Y}_{ij} = h(x_i, t_j)$ . Funkcija  $h$  jednaka je 1 za  $x = t$ , a za  $x \neq t$  ide prema 0. Parametar  $a \in \mathbf{R}^+$  kontrolira brzinu kojom će vrijednosti funkcije ići u nulu za sve  $x \neq t$ . Za manje vrijednosti parametra  $a$  (one bliže nuli) ići će sporije, a za veće vrijednosti brže. Komentirati ćemo aproksimaciju matrice uzoraka vektorima **POD** baze za različite vrijednosti parametra  $a$ . Odabir ranga  $l$  nižedimenzionalne aproksimacije je na temelju (1.29). Uzimamo prvi takav  $l$  za koji je  $\epsilon(l) > 0.99$ , odnosno 99% energije je sadržano u prvih  $l$  modova **POD** baze.

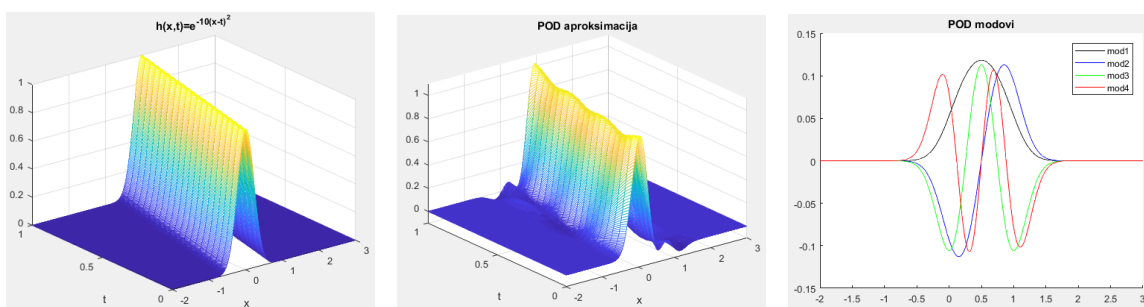
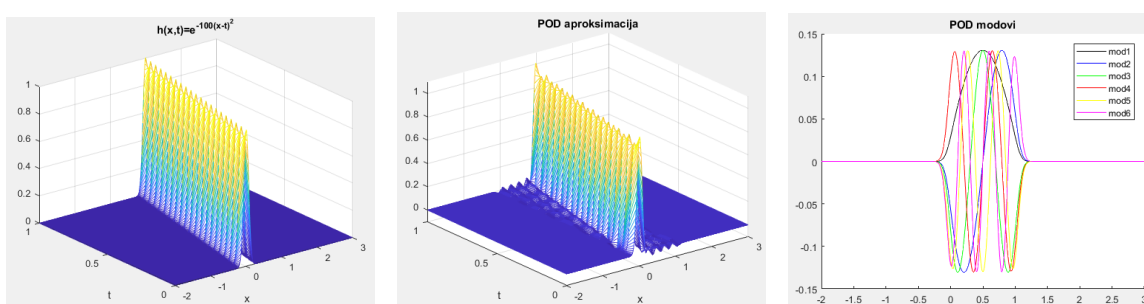


Slika 1.2:  $a=0.1$   $\epsilon(1) = 0.9947$



Slika 1.3:  $a=1$   $\epsilon(2) = 0.9970$

Kod za rezultate na slikama (1.2)-(1.5) napisan je u softverskom paketu MATLAB. Kod je testiran za  $a \in \{0.1, 1, 10, 100\}$ . Primjetimo da je za veće vrijednosti parametra  $a$  potreban veći broj **POD** modova za aproksimaciju. Razlog tome je što za veće vrijednosti  $a$  informacija brže putuje, odnosno prostorna veza među uzorcima je manja te je potreban veći broj modova koji bi "uhvatili informaciju".

Slika 1.4:  $a=10$   $\epsilon(4) = 0.9959$ Slika 1.5:  $a=100$   $\epsilon(10) = 0.9942$ 

### 1.3 Primjena POD na evolucijski sustav

Neka su stupci matrice uzoraka  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  diskretna rješenja evolucijskog sustava (1) u  $n$  ekvidistantnih vremenskih intervala. S obzirom da je  $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , definiramo težinski skalarni produkt na  $\mathbb{R}^m$ :

$$\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{W} \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{W} \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m, \quad (1.33)$$

gdje je  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simetrična, pozitivno-definitna matrica. Težinski skalarni produkt na  $\mathbb{R}^m$  proizašao je iz diskretizacije  $L^2$ -skalarnog produkta.

Cilj je naći **POD** bazu ranga  $l \leq \min\{m, n\}$  koja će opisati matricu uzoraka obzirom na težinski skalarni produkt. Vektori **POD** baze kao i pripadajuće svojstvene vrijednosti ovise o odabranim vremenskim intervalima tj.  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^n$  i  $\lambda_i = \lambda_i^n$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Problem glasi

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{y}_j, \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{u}}_i\|_{\mathbf{W}}^2 \quad t.d. \quad \langle \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad (1.34)$$

gdje  $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$  predstavljaju nenegativne težine koje ćemo specificirati kasnije kod formulacije kontinuiranog **POD** problema.

Definiramo Lagrangeov funkcional  $\mathcal{L} : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_l \times \mathbb{R}^{l \times l} \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{\Lambda}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \|\mathbf{y}_j\| - \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbf{W}} \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{W}}^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \Lambda_{ij} (1 - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbf{W}}), \quad (1.35)$$

gdje su  $\Lambda_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq l$ , elementi matrice multiplikatora  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ . Iz nužnog optimizacijskog uvjeta prvog reda slijedi

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbf{W}} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{YDY}^T \mathbf{W}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (1.37)$$

gdje je  $\mathbf{D} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zamjenom  $\mathbf{u}_i = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}_i$  i množeći (1.37) s lijeva sa  $\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}$  slijedi

$$\langle \bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}_i^T \mathbf{W}\mathbf{u}_j = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbf{W}} = \delta_{ij}, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{YDY}^T \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{u}}_i, \quad 1 \leq i, j \leq l. \quad (1.39)$$

Zamjenom  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{YD}^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  i koristeći  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$  i  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  dolazimo do

$$\langle \bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j \rangle_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij}, \quad (1.40)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{u}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{u}}_i, \quad 1 \leq i, j \leq l. \quad (1.41)$$

Rješenjem svojstvenog problema (1.41) dolazimo do vektora **POD** baze  $\mathbf{u}_i = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Drugi način je metoda uzoraka kojom rješavamo  $n \times n$  svojstveni problem

$$\langle \bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{v}}_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad (1.42)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{v}}_i. \quad (1.43)$$

Tada su vektori **POD** baze

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{YD}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{v}}_i, \quad (1.44)$$

i

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{W}\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \bar{\mathbf{u}}_i^T \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}^T \mathbf{WYD}^{\frac{1}{2}}}_{\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}}} \bar{\mathbf{v}}_j = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \bar{\mathbf{v}}_i^T \bar{\mathbf{v}}_j \quad (1.45)$$

$$= \frac{\lambda_i \delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad (1.46)$$



tj. vektori **POD** baze su u parovima ortonormalni s obzirom na težinski skalarni produkt. Kako bi objasnili prisutnost težinskih koeficijenata  $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$  u (1.34), uvodimo kontinuiranu verziju **POD** problema. Pretpostavimo da (1) ima jedinstveno rješenje  $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ako želimo pronaći **POD** bazu ranga  $l$  koja će opisati čitavu trajektoriju rješenja  $\{\mathbf{y}(t) | t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^m$  problem je sljedeći:

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l \in \mathbb{R}^m} \int_0^T \|\mathbf{y}(t) - \sum_{i=1}^l \langle \mathbf{y}(t), \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{u}}_i\|_{\mathbf{W}}^2 dt \quad t.d. \quad \langle \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq l. \quad (1.47)$$

Potrebno je izabrati odgovarajuće težine  $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$  u (1.34) kako bi osigurali

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \|\mathbf{y}(t_j)\|_{\mathbf{W}}^2 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \|\mathbf{y}(t)\|_{\mathbf{W}}^2 dt. \quad (1.48)$$

U ovom slučaju uzimamo

$$\alpha_1 = \frac{\Delta t}{2}, \quad \alpha_j = \Delta t \quad 2 \leq j \leq n-1, \quad \alpha_n = \frac{\Delta t}{2}, \quad (1.49)$$

što je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom.

Definiramo operator  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa

$$\mathcal{R}\mathbf{u} = \int_0^T \langle \mathbf{y}(t), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{W}} \mathbf{y}(t) dt, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.50)$$

**Teorem 1.3.1.** *Pretpostavimo da (1) ima jedinstveno rješenje  $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tada svojstveni vektori  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^l$  operatora  $\mathcal{R}$  koji odgovaraju  $l$  najvećih svojstvenih vrijednosti čine **POD** bazu ranga  $l$  koja rješava problem (1.47).*

Kod diskretnog problema imali smo iz (1.37)

$$(\mathbf{YDY}^T \mathbf{W}\mathbf{u})_i = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \mathbf{Y}_{ij} \mathbf{Y}_{kj} \mathbf{W}_{kl} \mathbf{u}_l = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{Y}_{ij} \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{W}} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{W}} (\mathbf{y}_j)_i. \quad (1.51)$$

Definirajmo sada operator  $\mathcal{R}^n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa

$$\mathcal{R}^n \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{W}} \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (1.52)$$

Za  $i \in \{1, \dots, m\}$  vrijedi

$$\mathcal{R}^n \mathbf{u}_i^n = \lambda_i^n \mathbf{u}_i^n, \quad \lambda_i^n \geq \dots \lambda_l^n \geq \dots \lambda_{d(n)}^n > \lambda_{d(n)+1}^n = \dots = \lambda_m^n = 0, \quad (1.53)$$

$$\mathcal{R} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \lambda_i \geq \dots \lambda_l \geq \dots \lambda_d > \lambda_{d+1} = \dots = \lambda_m = 0. \quad (1.54)$$

**Teorem 1.3.2.** *Pretpostavimo da (1) ima jedinstveno rješenje  $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Neka su  $\{\mathbf{u}_i^n, \lambda_i^n\}_{i=1}^m$  i  $\{\mathbf{u}_i, \lambda_i\}_{i=1}^m$  svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti operatora  $\mathcal{R}^n$  i  $\mathcal{R}$  dane sa (1.53) i (1.54). Pretpostavimo da je  $l \in \{1, \dots, m\}$  fiksiran i  $\sum_{i=l+1}^m \lambda_i \neq 0$   $\sum_{i=l+1}^m |\langle \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbf{w}}|^2 \neq 0$ . Tada vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}^n - \mathcal{R}\|_{\mathbb{B}(\mathbb{R}^m)} = 0$ .*

Iz toga slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_i^n - \lambda_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{w}} = 0 \quad \text{za } 1 \leq i \leq l, \quad (1.55)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^m (\lambda_i^n - \lambda_i) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=l+1}^m |\langle \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_i^n \rangle_{\mathbf{w}}|^2 = \sum_{i=l+1}^m |\langle \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbf{w}}|^2. \quad (1.56)$$

**Napomena 1.3.3.**  $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$  predstavlja Banachov prostor svih linearnih i ograničenih operatora s  $\mathbb{R}^m$  na  $\mathbb{R}$ .

Za dokaze teorema (1.3.2) i (1.3.1) upućujemo na [6].

## Primjer 2. Tok fluida kroz cijev s preprekom u 2D

Promatramo tok inkompresibilnog fluida kroz cijev s preprekom. Tok fluida opisan je u terminima brzine  $\mathbf{u}$  i pritiska  $p$ , nestacionarnim Navier-Stokesovim jednadžbama na prostornoj domeni  $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ , gdje je  $\Omega_1 = [0, 2.5] \times [0, 0.5]$  pravokutnik s kvadratnom preprekom  $\Omega_2 = [0.2, 0.3] \times [0.25, 0.35]$ .

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad \text{u } \Omega, \quad (1.57)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{u } \Omega, \quad (1.58)$$

$$\mathbf{u}_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_{\Gamma_3} = \mathbf{u}_{\Gamma_{\Omega_2}} = 0, \quad (1.59)$$

$$\mathbf{u}_{\Gamma_4} = \mathbf{u}_{in}, \quad (1.60)$$

$$\mu \partial_n \mathbf{u} - pn = 0 \quad \text{na } \Gamma_2. \quad (1.61)$$

Vrijedi  $\Gamma_{\Omega} = \Gamma_{\Omega_1} \cup \Gamma_{\Omega_2}$  gdje je  $\Gamma_{\Omega_1} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  t.d. je  $\Gamma_1 = [0, 2.5] \times \{0\}$ ,  $\Gamma_2 = \{2.5\} \times [0, 0.5]$ ,  $\Gamma_3 = \{0.5\} \times [0, 2.5]$  i  $\Gamma_4 = \{0\} \times [0, 0.5]$ . Na ulaznoj granici  $\Gamma_4$  brzina je oblika parabole sa tjemenom u (1.2, 0.5):

$$\mathbf{u}_{in} = (-20y^2 + 10y, 0). \quad (1.62)$$

Slika 1.6: Brzina u trenutku  $t = 5s$ Slika 1.7: Pritisak u trenutku  $t = 5s$ 

Koeficijenti  $\rho$  i  $\mu$  označavaju gustoću, odnosno dinamičku viskoznost fluida. Rješenje promatramo na intervalu  $[0,10]$ . Jednadžbe numerički rješavamo u FeniCS-u. IPCS (Incremental Pressure Correction Scheme) *splitting* metodom [4] efikasno dolazimo do rješenja rješavajući odvojeno tri varijacijska problema u svakom vremenskom koraku. Više o FeniCS-u nalazi se u dodatku na kraju rada. Na slici nalazi se rješenje za brzinu  $\mathbf{u}$  i pritisak  $p$  u trenutku  $t = 5s$ .

### Reynoldsov broj

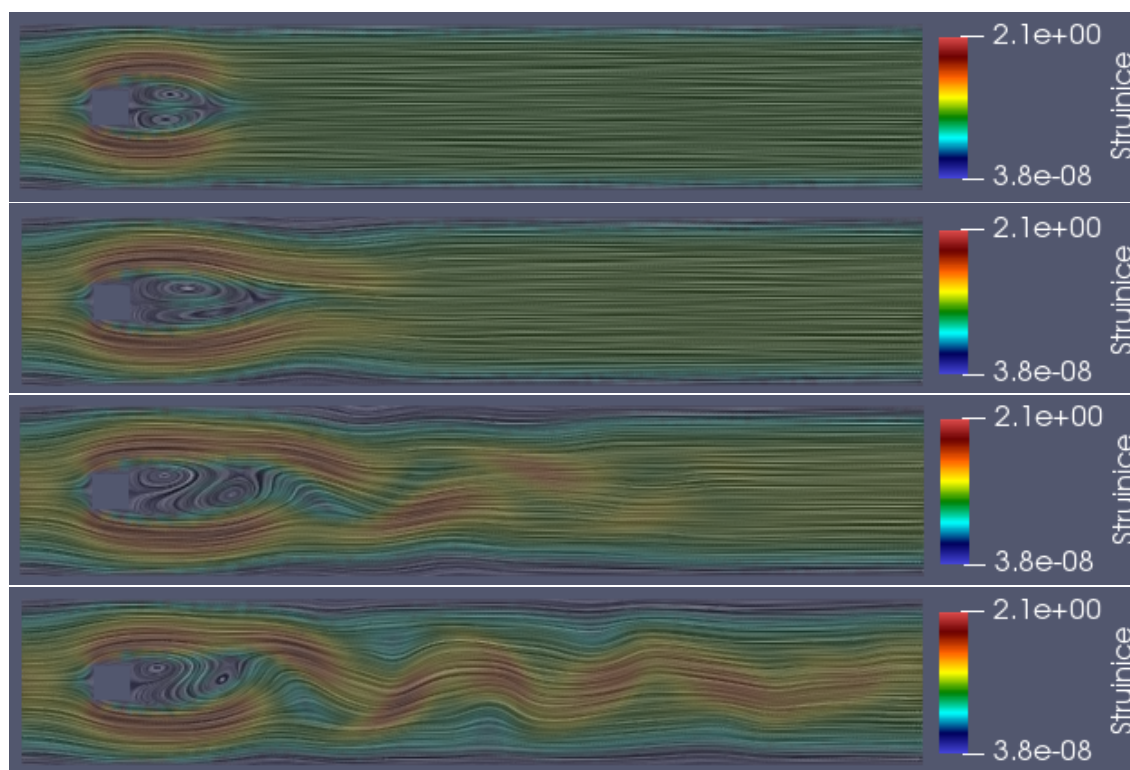
U mehanici fluida, Reynoldsov broj je važan parametar uz pomoć kojeg možemo predvidjeti hoće li tok biti laminaran ili turbulentan, ovisno o svojstvima promatranog fluida. Kada su viskozne sile u fluidu dominantne (spor tok, nizak  $Re$ ) te uzrokuju da čestice fluida putuju duž ravnih linija onda kažemo da je tok laminaran. Kada inercijalne sile u fluidu dominiraju u odnosu na viskozne (brži tok, veći  $Re$ ) čestice pokazuju kaotično ponašanje i za tok kažemo da je turbulentan. Dakle, Reynoldsov broj je bezdimenzionalna veličina koja daje omjer inercijalnih i viskoznih sila u fluidu i računa se po formuli

$$Re = \frac{\rho Lu}{\mu} = \frac{Lu}{\nu} \quad (1.63)$$

gdje je

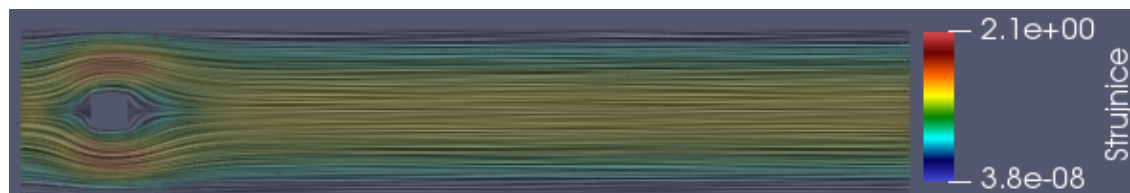
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.64)$$

kinematička viskoznost, u srednja vrijednost brzine toka i  $L$  karakteristična duljina.



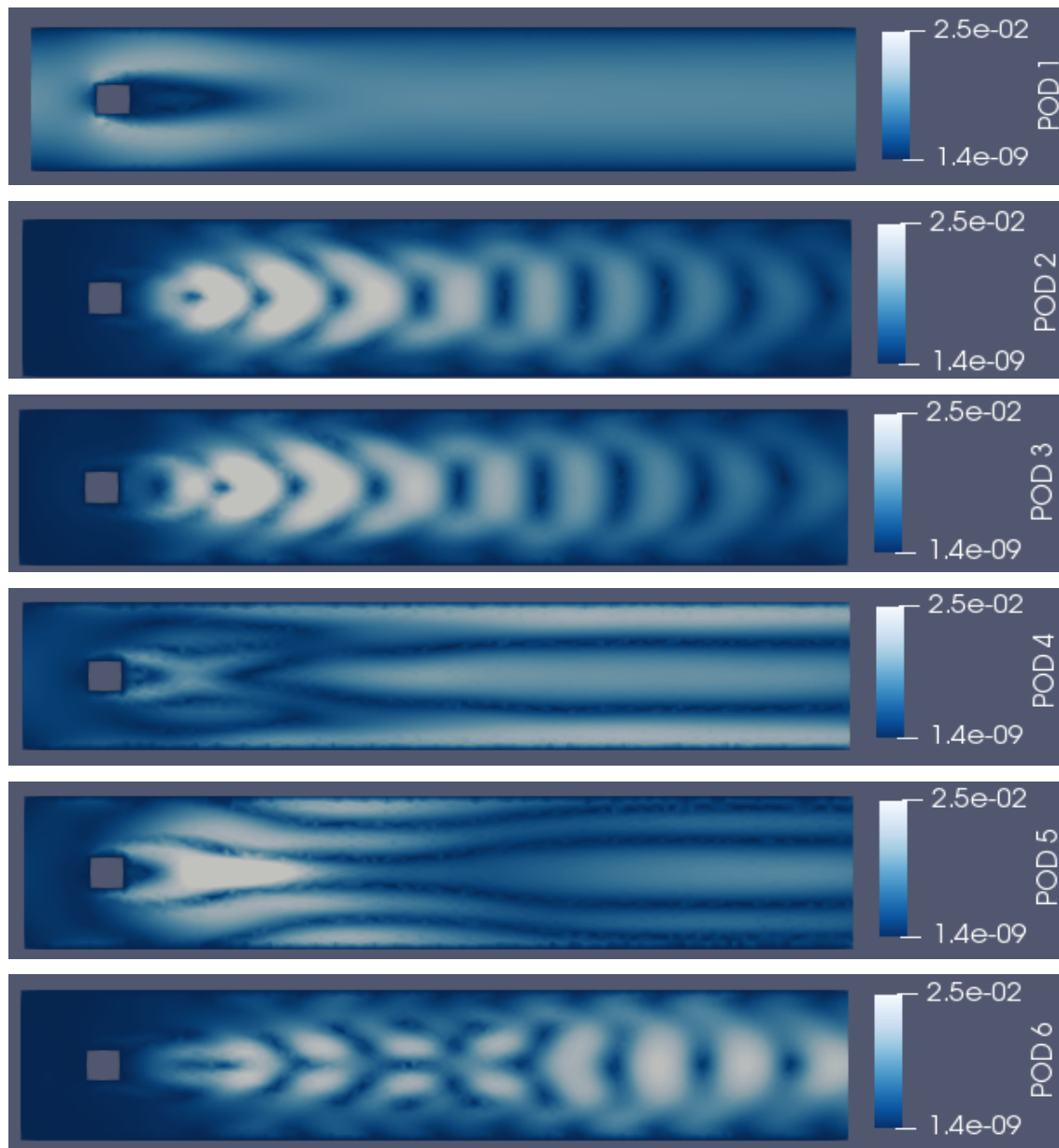
Slika 1.8: Prikaz strujnica u trenutku  $t \in \{0.5, 2, 4, 6\}$  za  $Re=80$ . Uočavamo pojavu vrtloga iza kvadratne prepreke. Tok je nestabilan laminaran, vremenski periodičan.

Na slici(1.8) prikaz je strujnica u različitim vremenskim trenucima. U ovom primjeru je srednja vrijednost brzine toka  $u = \frac{2}{3} \cdot 1.2$ ,  $L = 0.1$  i  $\nu = 0.001$  iz čega slijedi  $Re = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.001} = 80$ . Primjećujemo stvaranje vrtloga iza kvadratne prepreke i vremensku periodičnost toka. U sljedećem primjeru odabrali smo fluid veće dinamičke viskoznosti  $\nu = 0.005$ . U tom slučaju  $Re = 16$ . Na slici (1.9) prikaz je strujnica u trenutku  $t=10s$  i usporedba toka u odnosu na prethodni.

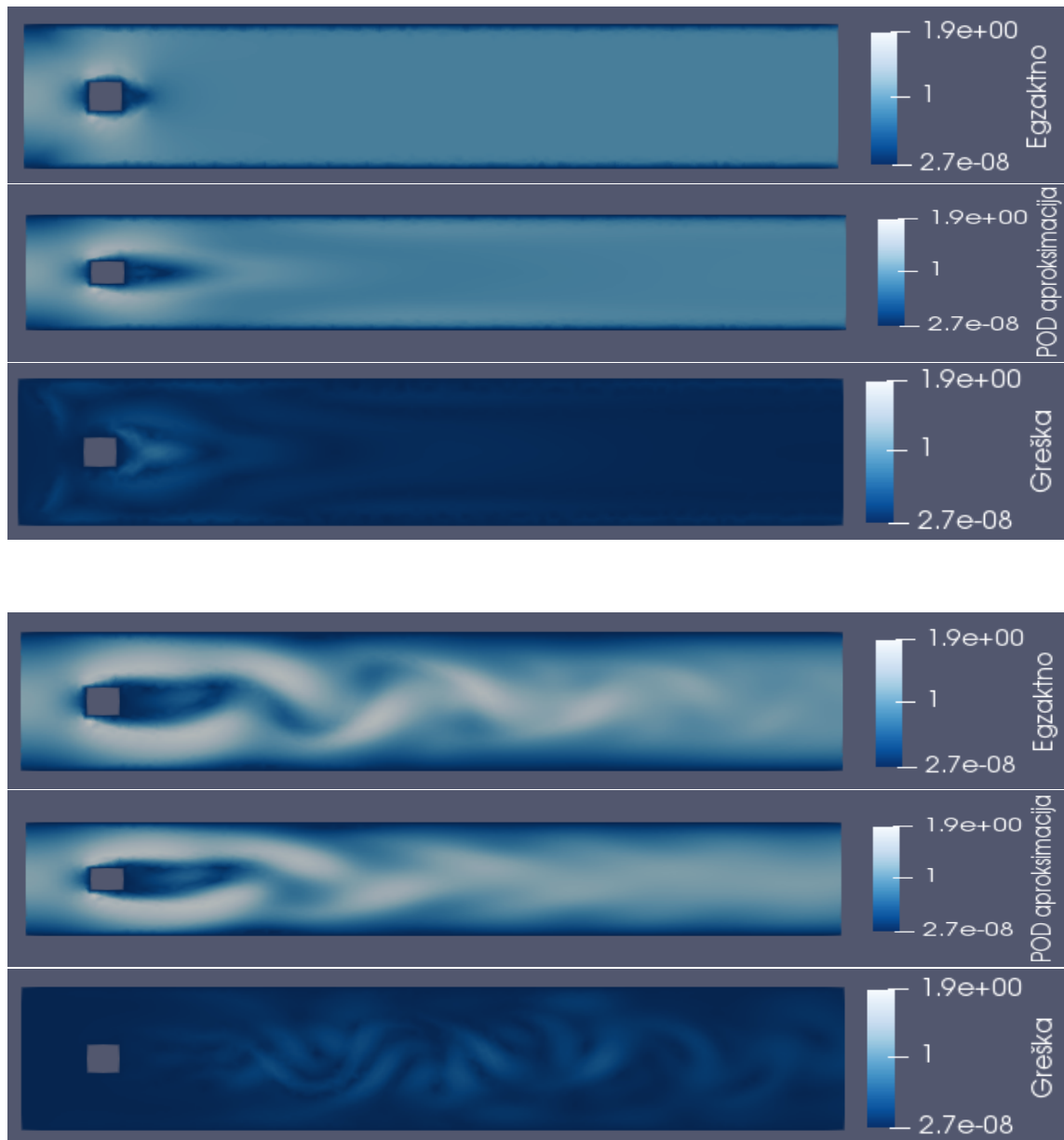


Slika 1.9: Prikaz strujnica u trenutku  $t=10$ ,  $Re=16$ ; Tok je stabilan laminaran

Sada kada imamo vektore brzina  $\mathbf{u}$  u pojedinim vremenskim trenucima ( $n = 5000$ ) formirati ćemo matricu uzoraka  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{19958 \times 5000}$  i na nju primjeniti **POD** dekompoziciju. Na slici (1.10) nalazi se prvih šest vektora **POD** baze u kojima je sadržano 99% energije. Na slici (1.11) nalaze se rješenja brzina u odabranim vremenskim trenucima, njihova **POD** aproksimacija dimenzije 6 i pripadna pogreška.



Slika 1.10: Prvih 6 POD modova

Slika 1.11: Prikaz egzaktnog rješenja, POD aproksimacije i greške u trenutku  $t=0.2$  i  $t=5$





## Poglavlje 2

### DEIM

Jednadžba (3) sadrži nelinearni član

$$\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{y}}(t)) := \underbrace{\mathbf{V}_1^T}_{l \times m} \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t))}_{m \times 1}, \quad (2.1)$$

čija složenost ovisi o dimenziji  $m$  originalnog sustava (1). Efektivan način kako doskočiti tom problemu jest projicirati nelinearni član originalnog sustava na potprostor razapet vektorima koji aproksimiraju prostor generiran nelinearnom funkcijom. Odaberemo  $n_t$  ekvidistantnih vremenskih intervala unutar  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  i dobijemo matricu uzoraka nelinearne funkcije. Dakle, stupci matrice uzoraka su vektori  $\{\mathbf{F}(\mathbf{y}(t_1)), \mathbf{F}(\mathbf{y}(t_2)), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{y}(t_{n_t}))\}$ . Primjenom **POD** metode na matricu uzoraka dobijemo vektore  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  koji čine bazu potprostora na koji ćemo projicirati prostor generiran nelinearnom funkcijom.

Uvodimo oznake  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$  i  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t))$ . Želimo projicirati  $\mathbf{f}$  na potprostor koji čine vektori  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ . Tada je aproksimacija od  $\mathbf{f}$  oblika

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{U}\mathbf{c}(t), \quad (2.2)$$

gdje je  $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^k$  vektor koeficijenata. Cilj **DEIM** algoritma je pronaći  $\mathbf{c}(t)$  kako bi aproksimacija bila što bolja. Prije samog algoritma promotrimo sustav

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{U}\mathbf{c}(t), \quad (2.3)$$

Recimo da želimo izdvojiti  $p_1, \dots, p_k$ -ti redak iz tog sustava. Pritom nam treba matrica

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_k}] \in \mathbb{R}^{m \times k}, \quad (2.4)$$

gdje je  $\mathbf{e}_{p_i} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^m$   $i$ -ti stupac matrice  $\mathbf{I}^{m \times m}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Sada imamo sustav

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = (\mathbf{P}^T \mathbf{U}) \mathbf{c}(t), \quad (2.5)$$

Pretpostavimo da je  $\mathbf{P}^T\mathbf{U}$  regularna matrica. Rješenje sustava (2.5)  $\mathbf{c}(t)$  sada možemo iskoristiti kod aproksimacije

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{U}\mathbf{c}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{P}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{f}(t). \quad (2.6)$$

Indeksi  $p_1, \dots, p_k$  ovise o bazi  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k$  i biraju se **DEIM** algoritmom koji slijedi.

## 2.1 Algoritam

---

### Algorithm 1 DEIM

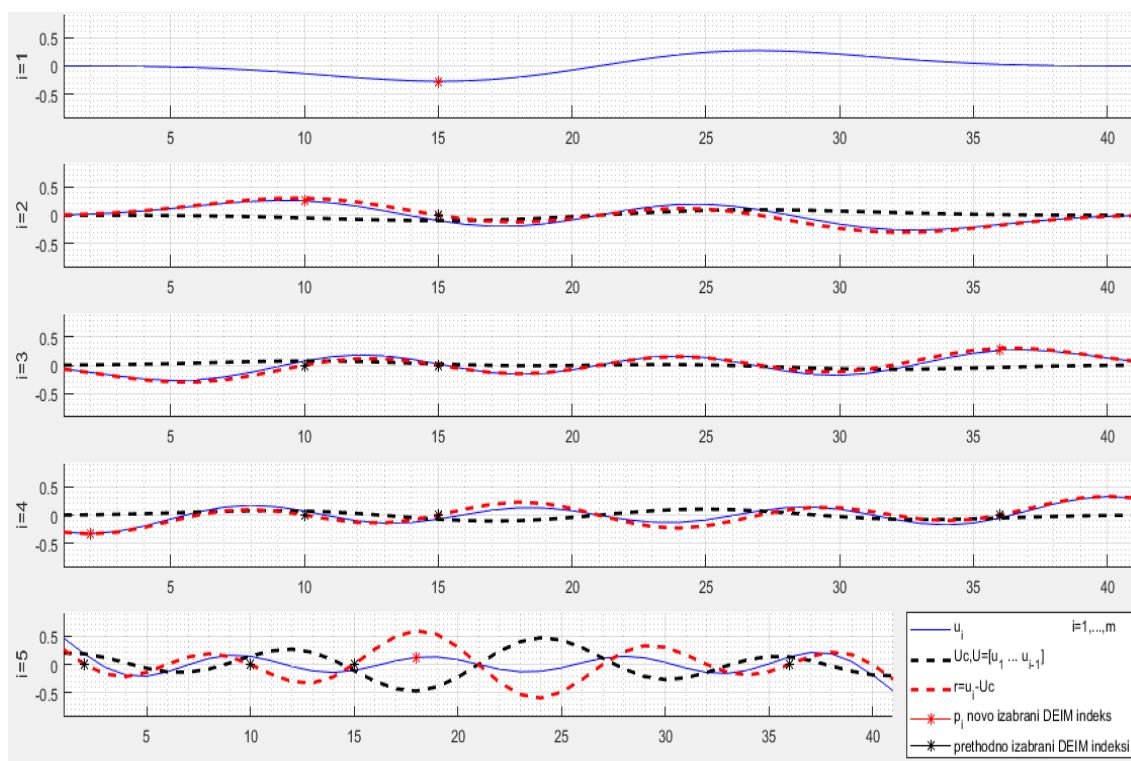
---

**INPUT:**  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^m$

**OUTPUT:**  $\vec{p} = [p_1, \dots, p_k]^T \in \mathbb{R}^m$

- 1:  $p_1 = \operatorname{argmax}_i |\mathbf{u}_1(i)|$
  - 2:  $\mathbf{U} = \mathbf{u}_1, \mathbf{P} = [\mathbf{e}_{p_1}], \vec{p} = [p_1]$
  - 3: **for**  $l=2:k$  **do**
  - 4:     Riješi  $\mathbf{P}^T\mathbf{U}\mathbf{c} = \mathbf{P}^T\mathbf{u}_l$  za  $\mathbf{c}$
  - 5:      $\mathbf{r} = \mathbf{u}_l - \mathbf{U}\mathbf{c}$
  - 6:      $p_l = \operatorname{argmax}_i |\mathbf{r}_j(i)|$
  - 7:      $\mathbf{U} \leftarrow [\mathbf{U} \quad \mathbf{u}_l], \mathbf{P} \leftarrow [\mathbf{P} \quad \mathbf{e}_{p_l}], \vec{p} \leftarrow \begin{bmatrix} \vec{p} \\ p_l \end{bmatrix}$
  - 8: **end for**
  - 9: **end**
- 

Procedura **DEIM** započinje odabirom prvog indeksa  $p_1 \in \{1, \dots, k\}$  i on odgovara indeksu po apsolutnoj vrijednosti najveće komponente vektora  $\mathbf{u}_1$ . Ostali indeksi,  $p_l, l \in \{2, \dots, k\}$  biraju se tako da svaki od njih odgovara indeksu po apsolutnoj vrijednosti najveće komponente reziduala  $\mathbf{r} = \mathbf{u}_l - \mathbf{U}\mathbf{c}$ .  $\mathbf{r}$  je razlika između vektora *input* baze  $\mathbf{u}_l$  i njegove aproksimacije  $\mathbf{U}\mathbf{c}$  nastale interpolacijom  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{l-1}\}$  na indeksima  $p_1, i \in \{1, \dots, l-1\}$ . Linearna nezavisnost baze garantira da, u svakoj iteraciji,  $\mathbf{r}$  je ne-nul vektor. To implicira regularnost matrice  $\mathbf{P}^T\mathbf{U}$  i time je **DEIM** dobro definirana. Na slici (2.1) nalazi se grafički prikaz selekcije indeksa **DEIM** algoritmom. Kao ulazne podatke uzeli smo **POD** bazu  $\{u_i\}_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^6$  matrice uzoraka  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{6 \times 41}$  koja je proizašla iz diskretnih vrijednosti funkcije  $f : [-1, 1] \times [0, 4] \rightarrow \mathbf{R}, f(t, x) = \sin(tx)$ . Algoritam je dao indekse 15, 10, 36, 2 i 18.



Slika 2.1: Proces selekcije indeksa DEIM algoritmom

**Definicija 2.1.1.** Neka je  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  nelinearna vektorska funkcija i  $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1}^k \subset \mathbb{R}^n$  linearno nezavisni skup za  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Za  $\tau \in \mathcal{D}$ , **DEIM** aproksimacija reda  $k$  za  $\mathbf{f}(t)$  u prostoru razapetom s  $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1}^k$  dana je sa

$$\hat{\mathbf{f}}(\tau) := \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\tau), \quad (2.7)$$

gdje je  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$  i  $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_{p_1}, \mathbf{e}_{p_2}, \dots, \mathbf{e}_{p_k}] \in \mathbb{R}^{m \times k}$  gdje je  $\{p_1, \dots, p_k\}$  output **DEIM** algoritma sa input bazom  $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1}^k$ .

**DEIM** aproksimacija jedinstveno je određena bazom  $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1}^k$ . Osim što ta baza diktira prostor projekcije ona utječe i na odabir interpolacijskih indeksa. Stoga odabir baze značajno utječe na grešku aproksimacije. Jednom kada imamo indekse  $\{p_l\}_{l=1}^k$  predodređene s bazom  $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1}^k$ , **DEIM** aproksimacija je nezavisna od izbora baze za  $\text{Range}(\mathbf{U})$ . Naime, neka je  $\{\mathbf{q}_l\}_{l=1}^k$  proizvoljna baza za  $\text{Range}(\mathbf{U})$ . Tada vrijedi

$$\mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U}) \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{P}^T \mathbf{Q}) \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t), \quad (2.8)$$

gdje je  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ . Da bismo pokazali da to vrijedi, primjetimo da je  $\text{Range}(\mathbf{U}) = \text{Range}(\mathbf{Q})$ , pa je  $\mathbf{U} = \mathbf{QR}$ , gdje je  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  regularna matrica. Vrijedi

$$\mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = (\mathbf{QR})((\mathbf{P}^T \mathbf{Q})\mathbf{R})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{P}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(t). \quad (2.9)$$

## 2.2 Ocjena greške

Ocjena greške **DEIM** aproksimacije dana je sljedećom lemom. Dokaz u [1].

**Lema 2.2.1.** *Neka je  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  proizvoljan vektor i  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^m$  ortonormirani skup vektora,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . **DEIM** aproksimacija reda  $k$  za  $\mathbf{f}$  u prostoru razapetom s  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k$  dana je sa*

$$\hat{\mathbf{f}} := \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}, \quad (2.10)$$

uz oznake iz definicije (2.1.1). Tada vrijedi

$$\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|_2 \leq C \epsilon_*(\mathbf{f}), \quad (2.11)$$

gdje je

$$C = \|(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1}\|_2 \quad i \quad \epsilon_*(\mathbf{f}) = \|(\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{f}\|_2. \quad (2.12)$$

Konstanta  $C$  je omeđena sa

$$C \leq \frac{(1 + \sqrt{2n})^{m-1}}{|\mathbf{e}_{p_1}^T \mathbf{u}_1|} = (1 + \sqrt{2n})^{m-1} \|\mathbf{u}_1\|_\infty^{-1}. \quad (2.13)$$

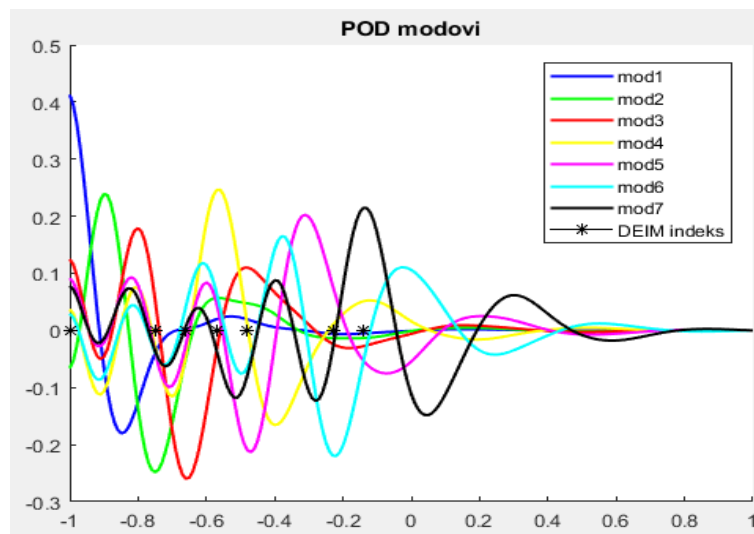
**Primjer 3.** Na nelinearnoj parametarskoj funkciji  $s : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$s(x; \mu) = (1 - x) \cos(3\pi\mu(x + 1)) e^{(1+x)\mu}, \quad (2.14)$$

pokazati ćemo u kakvom su odnosu prosječna pogreška **DEIM** aproksimacije i teoretska procjena pogreške (2.11). Neka je  $x \in \Omega = [-1, 1]$  i  $\mu \in \mathcal{D} = [1, \pi]$ .  $[-1, 1]$  diskretiziramo sa  $m = 201$  točaka t.d.  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^m$  i definiramo  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa

$$\mathbf{f}(\mu) = \begin{bmatrix} s(x_1, \mu) \\ \vdots \\ s(x_m, \mu) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Odabrali smo skup parametara  $\{\mu_i\}_{i=1}^{43} \subset [1, \pi]$  te konstruirali matricu uzoraka čiji su stupci  $\{\mathbf{f}(\mu_1), \dots, \mathbf{f}(\mu_{43})\}$ . Primjenom **POD** metode na matricu uzoraka dobivena je **POD** baza

Slika 2.2: Prvih 7 **POD** modova matrice uzoraka 2.15

ranga 7,  $\epsilon(7) > 0.99$  (Slika 2.2). **DEIM** algoritmom dobili smo skup interpolacijskih indeksa  $\{1, 26, 35, 44, 53, 78, 87\}$  te konačno **DEIM** aproksimaciju (2.7). Samu grešku aproksimacije provjerili smo na većem skupu parametara  $\{\bar{\mu}_i\}_{i=1}^{429} \subset [1, \pi]$ , drugačijem od onog korištenog za konstrukciju matrice uzoraka. Prosječnu pogrešku nad novim skupom parametara dobili smo iz

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{429} \|\mathbf{f}(\bar{\mu}_i) - \hat{\mathbf{f}}(\bar{\mu}_i)\|_2. \quad (2.16)$$

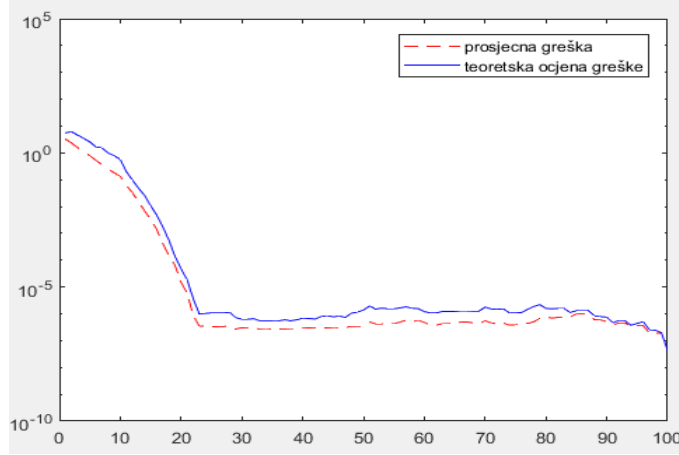
Iz leme (2.11) imamo teoretsku procjenu prosječne pogreške  $\bar{\epsilon}(\mathbf{f}) \leq C\bar{\epsilon}_*(\mathbf{f})$ , stoga smo izračunali i

$$\bar{\epsilon}_*(\mathbf{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{429} \|\mathbf{f}(\bar{\mu}_i) - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{f}(\bar{\mu}_i)\|_2, \quad (2.17)$$

kako bi vidjeli koliko je mjerodavna. Rezultat je prikazan na slici (2.3).

## 2.3 q-DEIM

**q-DEIM** je metoda empirijske interpolacije koja se razlikuje od **DEIM** po načinu odabira operatora selekcije **P**. Motivacija za konstrukciju **q-DEIM** proizašla je iz želje da se odgovori na pitanje može li se konstruirati novi operator selekcije interpolacijskih indeksa s kojim će gornja ograda iz leme (2.2.1) biti manja i koji će biti neovisan o izboru ortonormirane baze **U** za potprostor na koji ćemo projicirati prostor generiran nelinearnom funkcijom. Takvo pitanje je sasvim opravdano s obzirom da su rezultati koji se dobiju u



Slika 2.3: Teoretska ocjena greške i prosječna greška **DEIM** aproksimacije u ovisnosti o rangui **POD** baze

praksi uvijek ispod te granice što smo i pokazali u 3. primjeru (slika 2.3). **q** – **DEIM** računa operator selekcije neovisno o ortonormiranoj bazi **U**, daje bolju gornju ogradu za konstantu  $C$  iz leme (2.2.1), odnosno računa operator selekcije **P** s manjim vrijednostima izraza  $\|(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1}\|_2$  nego što to daje **DEIM** algoritam. Sve navedene tvrdnje pokazane su sljedećim teoremom a detalji oko dokaza nalaze se u [2].

**Teorem 2.3.1.** *Neka je  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{U}^* \mathbf{U} \in \mathbb{I}_m$ ,  $m < n$ . Vrijedi sljedeće:*

- Postoji algoritam koji računa operator selekcije **P** složenosti  $O(nm^2)$  takav da

$$\|(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1}\|_2 \leq \sqrt{n-m-1} \frac{4^m + 6m - 1}{3}, \quad (2.18)$$

i za svaki  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n$

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}\|_2 \leq \sqrt{n} O(2^m) \|\mathbf{f} - \mathbf{U} \mathbf{U}^* \mathbf{f}\|_2. \quad (2.19)$$

Ako je **U** punog stupčanog ranga, onda umjesto (2.19) vrijedi

$$\|(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1}\|_2 \leq \frac{\sqrt{n-m-1}}{\sigma_{\min}(\mathbf{U})} \frac{4^m + 6m - 1}{3}. \quad (2.20)$$

- Postoji operator selekcije **P**<sub>\*</sub> takav da je greška **DEIM** aproksimacije omeđena sa

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{U}(\mathbf{P}_*^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{P}_*^T \mathbf{f}\|_2 \leq \sqrt{1 + m(n-m)} \|\mathbf{f} - \mathbf{U} \mathbf{U}^* \mathbf{f}\|_2. \quad (2.21)$$

- Operatori selekcije **P** i **P**<sub>\*</sub> ostaju nepromjenjeni ukoliko **U** zamjenimo s  $\mathbf{U} \mathbf{\Omega}$ , gdje je  $\mathbf{\Omega}$  proizvoljna  $m \times m$  unitarna matrica.

**q** – **DEIM** konstruira operator selekcije **P** **QR** faktorizacijom s pivotiranjem po stupcima matrice **U**<sup>\*</sup>. Označimo **W** = **U**<sup>\*</sup> ∈ ℂ<sup>m×n</sup>. Tada je

$$\mathbf{W}\mathbf{\Pi} = (\widehat{\mathbf{W}}_1 \widehat{\mathbf{W}}_2) = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{T} \ \mathbf{K}), \quad (2.22)$$

gdje je **T**  $m \times m$  gornjetrokutasta matrica ( $m = 4$  i  $n = 7$  u 2.22), a **Π** matrica permutacija odabrana tako da su elementi dijagonale matrice **T** složeni padajuće po apsolutnim vrijednostima. Operator selekcije **P** definiramo na način da izdvaja stupce od **W** koji čine  $\widehat{\mathbf{W}}_1$ . Tada je  $\mathbf{P}^T \mathbf{U} = \widehat{\mathbf{W}}_1^*$  te ocjenjujemo  $\|\widehat{\mathbf{W}}_1^{-1}\|_2$ . Kako je  $\widehat{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{T}$ , a **Q** je unitarna matrica, u konačnici ocjenjujemo  $\|\mathbf{T}^{-1}\|_2$ . Vratimo li se na notaciju iz teorema (2.19) imamo

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{K}^* \end{pmatrix} \mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{U} = \mathbf{T}^* \mathbf{Q}^*, \quad (2.23)$$

Tada je

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{K}^* \mathbf{T}^{-*} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

a **q** – **DEIM** aproksimacija  $n \times 1$  vektora **f** je  $\mathbf{M}\mathbf{P}^T \mathbf{f}$ . Na slici (2.4) je prikaz funkcije

---

#### Algorithm 2 q-DEIM

---

**INPUT:**  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^m$

**OUTPUT:**  $\vec{p} = [p_1, \dots, p_m]^T \in \mathbb{R}^m$

$\mathbf{M} = \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U})^{-1}$

1:  $[n, m] = \text{size}(\mathbf{U});$

2:  $\mathbf{U}^T \mathbf{\Pi} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \ \mathbf{R} = (\mathbf{T} \ \mathbf{K}) \ \mathbf{\Pi} = [\mathbf{e}_{p_1}, \dots, \mathbf{e}_{p_m}, \dots, \mathbf{e}_{p_n}]$

3:  $\mathbf{M} = \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{K}^T \mathbf{T}^{-T} \end{pmatrix}$

4: **end**

---

**f**( $\mu$ ) i njezine **DEIM** i **q** – **DEIM** aproksimacije za različite parametre  $\mu$ . Na slici (2.5) je usporedba prosječne pogreške i teoretske ocjene pogreške za obje metode.

## 2.4 Primjena na sustav nižeg reda

DEIM aproksimacija (2.1.1) nelinearne funkcije  $\mathbf{F}$  u (3) je

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t)) \approx \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U}^{-1}) \mathbf{P}^T \mathbf{F}(\mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t)) \quad (2.25)$$

$$= \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U}^{-1}) \mathbf{F}(\mathbf{P}^T \mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t)). \quad (2.26)$$

Jednakost slijedi iz pretpostavke  $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = [F(\mathbf{y}_1), \dots, F(\mathbf{y}_n)]^T$ , odnosno nelinearna funkcija  $\mathbf{F}$  se računa po komponentama. Tada je DEIM aproksimacija cijelog nelinearnog izraza u (3)

$$\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{y}}(t)) \approx \underbrace{\mathbf{V}_1^T \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U}^{-1})}_{l \times k} \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{P}^T \mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t))}_{k \times 1}. \quad (2.27)$$

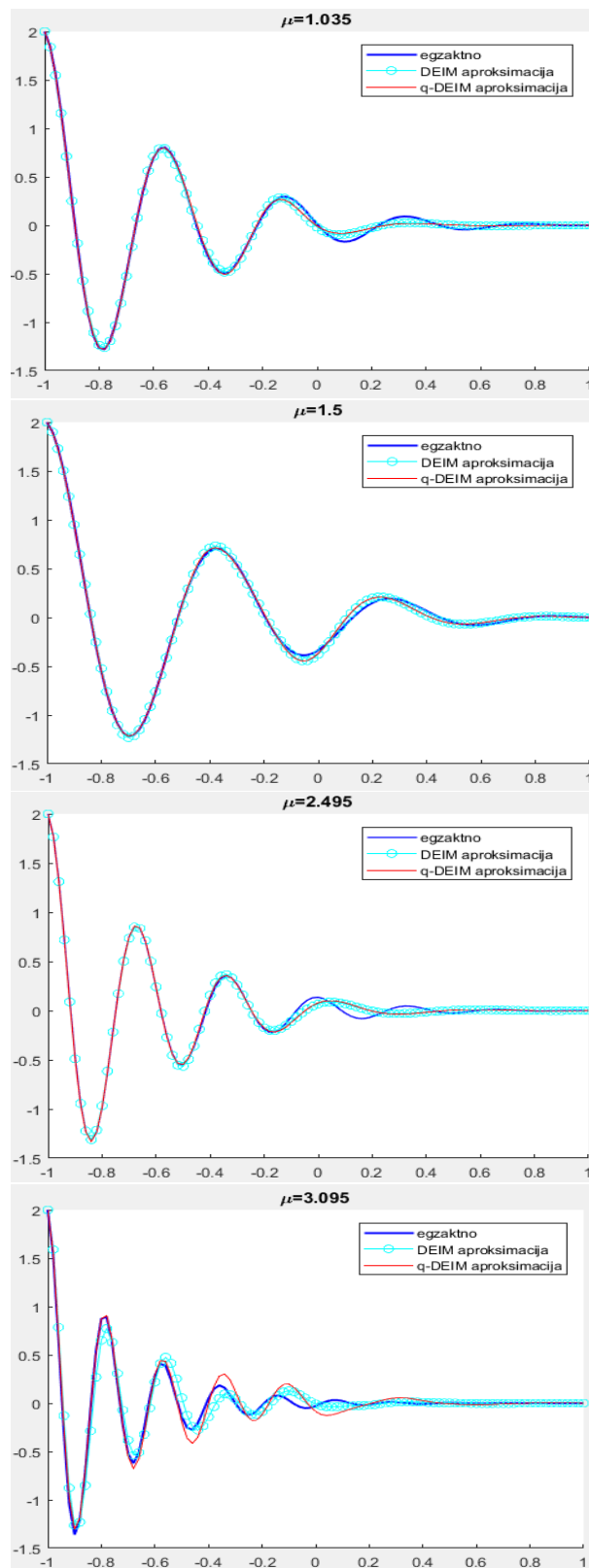
Izraz  $\mathbf{V}_1^T \mathbf{U}(\mathbf{P}^T \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l \times k}$  u (2.27) ne ovisi o  $t$ , stoga može biti izračunat prije samog rješavanja sustava ODJ.  $\mathbf{P}^T \mathbf{V}_1 \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^k$  riješimo tako da izvučemo  $p_1, \dots, p_k$ -te retke iz  $\mathbf{V}_1$  i pomnožimo s  $\tilde{\mathbf{y}}$ , što zahtjeva  $2kl$  operacija zbrajanja i množenja. Označimo li s  $\alpha(k)$  složenost računanja komponenti od  $\mathbf{F}$ , tada je ukupna složenost od (2.27)  $\mathcal{O}(\alpha(k) + 4kl)$  što je neovisno o dimenziji  $m$  originalnog sustava. Pripadni sustav nižeg reda tada je

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{F}(\mathbf{C} \tilde{\mathbf{y}}(t)), \quad (2.28)$$

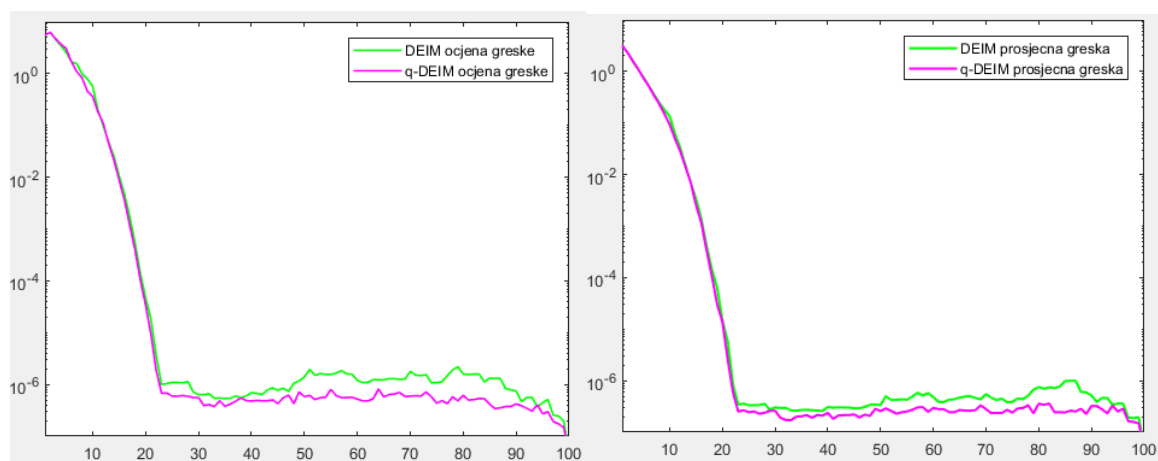
$$\tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{V}_1^T \mathbf{y}_0 \quad (2.29)$$

Za DEIM u općenitom slučaju nelinearne funkcije upućujemo na [1].





Slika 2.4: Usporedba  $f(\mu)$  te DEIM i q – DEIM aproksimacije reda 7 za različite  $\mu \in [1, \pi]$  za funkciju iz 3. primjera



Slika 2.5: Lijevo teoretska ocjena greške, desno prosječna greška dobivena **DEIM** i **q – DEIM** aproksimacijom za funkciju iz 3. primjera

# Poglavlje 3

## Dodatak

### 3.1 Nelinearna optimizacija

Promotrimo optimizacijski problem

$$\boxed{\max_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) \quad t.d. \quad e(x) = 0,} \quad (P)$$

gdje je  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija čiju vrijednost želimo maximizirati uz uvjet  $e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ . Točku  $x$  zovemo *dopustiva* ako je  $e(x) = 0$ . Skup dopustivih točaka definiramo kao  $\mathcal{F}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : e(x) = 0\}$ .

**Definicija 3.1.1.** *Točka  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  je lokalno rješenje problema (P) ako  $\bar{x} \in \mathcal{F}(P)$  i  $J(\bar{x}) \geq J(x)$  za svaki  $x \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{U}(\bar{x})$  gdje je  $\mathcal{U}(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n$  neprazna, otvorena okolina točke  $\bar{x}$ .*

Za karakterizaciju rješenja problema (P) trebamo definiciju tangencijalne ravnine. Krivulja u hiperravnini  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  je familija točaka  $x(t) \in \mathcal{H}$  gdje je  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  neprekidna ( $a < b$ ). Krivulja je diferencijabilna u  $t \in \langle a, b \rangle$  ukoliko  $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  postoji. Kažemo da krivulja  $x$  prolazi točkom  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  ako postoji  $\bar{t} \in [a, b]$  takva  $\bar{x} = x(\bar{t})$ . Skup tangencijalnih vektora svih krivulja koje prolaze točkom  $\bar{x}$  zove se tangencijalna ravnina u  $\bar{x}$ .

**Definicija 3.1.2.** *Za točku kažemo da je regularna uz uvjet  $e(x) = 0$ , ako su vektori  $\{\nabla e_i(\bar{x})\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$  linearno nezavisni u  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorem 3.1.3.** *Neka je  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  regularna točka. Tada je tangencijalna ravnina točkom  $\bar{x}$  jednaka  $\text{Ker} \nabla e(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n | \nabla e(\bar{x})v = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ , gdje je  $\nabla e(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla e_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla e_m(\bar{x})^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*

*Jakobijan u  $\bar{x}$ .*

**Teorem 3.1.4.** *Pretpostavimo da su  $J$  i  $e$  neprekidno diferencijabilne funkcije. Neka je  $\bar{x}$  lokalno rješenje problema  $P$  i regularna točka s obzirom na uvjet  $e(\bar{x}) = 0$ . Tada postoji jedinstveni Lagrangeov multiplikator  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  koji rješava*

$$\nabla J(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \nabla e_j(\bar{x}) = \nabla J(\bar{x}) + \nabla e(\bar{x})^T \bar{\lambda} = 0. \quad (3.1)$$

**Napomena 3.1.5.** *Uvjet (3.1) zovemo nužan optimizacijski uvjeti prvog reda.*

## 3.2 O FeniCS-u

FEniCS projekt je integrirano okruženje za automatizirano rješavanje diferencijalnih jednadžbi metodama konačnih elemenata. Nudi sučelja za programski jezike C++ i Python. Na primjeru Poissonove rubne zadaće predstaviti ćemo postupak dolaska do rješenja u FeniCS-u. Dana je Poissonova rubna zadaća

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$u(\mathbf{x}) = u_D(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\Omega, \quad (3.3)$$

gdje je  $u = u(\mathbf{x})$  nepoznata funkcija,  $f = f(\mathbf{x})$  vanjska sila,  $u_D$  rubni uvjet i  $\Omega$  prostorna domena s rubom  $\Gamma_\Omega$ .

Rješavanje rubnog problema u FeniCS-u provodi se u tri koraka:

1. Slaba formulacija problema,
2. Inicijalizacija domene  $\Omega$ , rubnog uvjeta  $u_D$ ,  $f$  i varijacijske formulacije problem pomoću FeniCS objekata,
3. Poziv FeniCS-u da riješi problem.

Prednost FeniCS-a u odnosu na većinu drugih softverskih paketa za rješavanje PDJ je u tome što 2. i 3. korak rezultiraju s vrlo kratkim kodom i bez tehnički zahtjevnog programiranja, intuitivno i efikasno. Za detalje upućujemo na [4]. U nastavku prilažemo kod s kojim smo testirali **POD** metodu nad rješenjima Navier-Stokesove zadaće iz primjera 2.

## 3.3 POD kod

```

1 from fenics import *
2 import numpy as np
3 import scipy.linalg as la
4 from math import *
5 import matplotlib.pyplot as plt
6

```

```
7 T = 5.0
8 n = 5000
9 dt = T / n
10
11 #ucitavanje mreze i konstrukcija prostora konacnih elemenata
12 mesh = Mesh('navier_stokes_cylinder/cylinder.xml.gz')
13 V = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 2)
14 u = Function(V)
15 v=u.vector()
16 v=as_backend_type(v)
17 m = v.vec().size
18
19 #ucitavanje matrice uzoraka
20 timeseries_w = TimeSeries('navier_stokes_cylinder/velocity_series')
21 U=np.zeros((m,n))
22 t = 0.0
23 for j in range(n):
24     t += dt
25     timeseries_w.retrieve(u.vector(), t)
26     U[:,j]=u.vector()
27
28
29 Ut=np.transpose(U)
30 K=np.matmul(Ut,U)
31 d,ev=la.eigh(K)
32 i=d.argsort()[::-1]
33 d=d[i]
34
35 #dimenzija POD baze
36 ev=ev[:,i]
37 suma_d=d.sum()
38 energija=0.0
39 dim=0
40 tol=0.01
41 while (1.0-energija) > tol:
42     energija=energija+d[1]/suma_d
43     dim=dim+1
44 print dim
45
46 #metoda uzoraka
47 phi=np.zeros((m,dim))
48 for i in range(dim):
49     tmp=np.matmul(U,v[:,i])
50     phi[:,i]=tmp/sqrt(d[i])
51
52 #prikaz matrice uzoraka u POD bazi
53 aprox=np.zeros((m,n))
```

```
54 c=np.zeros((dim,n))
55 for i in range(n):
56     for j in range(dim):
57         c[j,i]=np.inner(U[:,i],phi[:,j])
58     aprox[:,i]=np.matmul(phi,c[:,i])
59
60 #razlika egzaktnog rjesenja i POD aproksimacije
61 greska=np.zeros((m,n))
62 for i in range(n):
63     greska[:,i]=np.subtract(aprox[:,i],U[:,i])
64
65 rel_e=np.linalg.norm(greska)/np.linalg.norm(U)
66 print rel_e
67
68 #ispis u vtk formatu
69 vtkfile_u = File('pod_cylinder/u_pod.pvd')
70 vtkfile_u_exact = File('pod_cylinder/u_pod_exact.pvd')
71 vtkfile_u_error = File('pod_cylinder/u_pod_error.pvd')
72 vtkfile_u_phi = File('pod_cylinder/u_pod_phi.pvd')
73 for i in range(n):
74     u.vector()[:] = np.array(np.real(U[:,i]))
75     vtkfile_u_exact << (u, i*dt)
76 for i in range(n):
77     u.vector()[:] = np.array(np.real(aprox[:,i]))
78     vtkfile_u << (u, i*dt)
79 for i in range(dim):
80     u.vector()[:] = np.array(np.real(phi[:,i]))
81     vtkfile_u_phi << (u, i*dt)
82 for i in range(n):
83     u.vector()[:] = np.array(np.real(greska[:,i]))
84     vtkfile_u_error << (u, i*dt)
```

# Bibliografija

- [1] Saifon Chaturantabut i Danny C Sorensen, *Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation*, SIAM Journal on Scientific Computing **32** (2010), br. 5, 2737–2764.
- [2] Zlatko Drmac i Serkan Gugercin, *A new selection operator for the discrete empirical interpolation method—Improved a priori error bound and extensions*, SIAM Journal on Scientific Computing **38** (2016), br. 2, A631–A648.
- [3] Zlatko Drmac, Vjeran Hari, Miljenko Marušić, Mladen Rogina, Sanja Singer i Saša Singer, *Numericka analiza*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel (2003).
- [4] Hans Petter Langtangen i Anders Logg, *Solving PDEs in Python The FEniCS Tutorial Volume I*, 2016.
- [5] Arunn Narasimhan, *Turbulent Flow around Bodies*, <https://home.iitm.ac.in/arunn/docs/thermofluids-notes-07-turbulence-around-bodies-arunn.pdf>.
- [6] Stefan Volkwein, *Proper orthogonal decomposition: Theory and reduced-order modelling*, Lecture Notes, University of Konstanz **4** (2013), br. 4.





# Sažetak

U ovom radu proučavamo metode redukcije dimenzije sustava: pravu ortogonalnu dekompoziciju (POD), diskretnu empirijsku interpolacijsku metodu DEIM i q-DEIM, modificiranu verziju DEIM-a. Prilikom konstrukcije nižedimenzionalnog sustava, najčešće se koristi projekcija na potprostor niže dimenzije  $l \ll n$ . Upravo je POD jedna od metoda koja konstruira ortonormiranu bazu dimenzije  $l$  na koju će se projicirati originalni sustav. Štoviše, aproksimacija podataka ranga  $l$  dobivena POD metodom je najbolja među svim mogućim aproksimacijama ranga  $l$ . Problem je formuliran kao optimizacijski problem čije rješenje nalazimo uz pomoć metode Lagrangeovih multiplikatora. U konačnodimenzionalnom slučaju POD se svodi na dekompoziciju singularnih vrijednosti (SVD).

Ukoliko polazni sustav sadrži nelinearni član, tada je rješavanje nelinearnog dijela složenosti kao i rješavanje originalnog sustava. Tu poteškoću nadilazi DEIM na način da koristi POD bazu prostora generiranog nelinearnom funkcijom te bira indekse kojima interpolira polazne podatke. Osnovna razlika q-DEIM u odnosu na DEIM je odabir interpolacijskih indeksa i bolja ocjena na grešku aproksimacije. Predstavili smo oba algoritma i usporedili ih na konkretnom primjeru.



# Summary

In this paper, we study proper orthogonal decomposition (POD), discrete empirical interpolation method (DEIM) as well as its modified version q-DEIM and their applications, to obtain reduced order models. While constructing a reduced order system we usually apply projection on the subspace of lower dimension  $l \ll n$ . POD constructs lower dimensional subspace on which we project original system. Moreover, POD approximation represents a set of data better than any other representation of its rank. We set POD problem as an optimization problem and we solve it within Lagrangian framework. In finite dimensional case it comes down to singular value decomposition (SVD).

If original system contains nonlinear term, the cost of solving it is the same as solving the original system. DEIM overcomes that problem. It uses POD base of space generated by nonlinear function and by selecting indexes interpolates original data. q-DEIM has different approach to select indexes and as a result it has a better error upper bound. We demonstrate both algorithms and compare them on concrete example.



# Životopis

Kristina Kozić rođena je 27.9.1993. u Šibeniku. Pohađala je osnovnu školu Petra Krešimira IV, a zatim matematički smjer Gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku. Godine 2012. upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015. godine upisala je diplomski studij Primijenjene matematike.