

# Redukcija dimenzije parametarski ovisnih nelinearnih sustava

---

**Manojlović, Iva**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:155923>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Iva Manojlović

**REDUKCIJA DIMENZIJE**  
**PARAMETARSKI OVISNIH**  
**NELINEARNIH SUSTAVA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Zlatko  
Drmač

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|   |            |
|---|------------|
| <b>Sadržaj</b>  | <b>iii</b> |
| 0.1 Uvod . . . . .  | 1          |
| <b>Uvod</b>   | <b>2</b>   |
| <b>1 Matematička podloga</b>  | <b>3</b>   |
| 1.1 Problem najmanjih kvadrata . . . . .  | 3          |
| 1.2 SVD . . . . .   | 4          |
| 1.3 Generalizirani inverz . . . . .   | 7          |
| <b>2 POD</b>  | <b>9</b>   |
| 2.1 Matematička formulacija . . . . .   | 9          |
| 2.2 Algoritam . . . . .   | 15         |
| 2.3 Primjeri . . . . .  | 15         |
| 2.4 Primjena POD baze na dinamičkim sustavima . . . . .   | 17         |
| 2.5 Ocjena greške . . . . .   | 18         |
| 2.6 POD s težinskim sklarnim produktom . . . . .  | 20         |
| 2.7 POD u kontinuiranom slučaju . . . . .   | 22         |
| <b>3 Diskretna empirička interpolacijska metoda</b>   | <b>25</b>  |
| 3.1 Motivacija . . . . .  | 25         |
| 3.2 Algoritam . . . . .   | 25         |
| 3.3 Ocjena greške . . . . .   | 27         |
| 3.4 Računanje aproksimacije . . . . .   | 29         |
| 3.5 Q-DEIM . . . . .  | 30         |
| 3.6 Primjeri . . . . .  | 30         |
| 3.7 Primjena DEIM algoritma za smanjivanje dimenzije parametarski ovisnih<br>dinamičkih sustava . . . . . | 34         |
| 3.8 Ostale primjene . . . . .   | 34         |
| <b>4 Dinamička modalna dekompozicija</b>  | <b>39</b>  |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.1      | Uvod . . . . .   | 39        |
| 4.2      | Matematičko rješenje . . . . .                               | 40        |
| 4.3      | DMD algoritam . . . . .                                      | 41        |
| 4.4      | Koopmanova spektralna teorija . . . . .                      | 43        |
| 4.5      | Online DMD . . . . .   | 45        |
| 4.6      | Težinski online DMD . . . . .                                | 47        |
| 4.7      | DMD s klizećim vremenskim prozorom . . . . .                 | 48        |
| 4.8      | Primjena DMDa . . . . .                                      | 50        |
| <b>5</b> | <b>Primjeri</b>  | <b>53</b> |
| 5.1      | Primjena na nelinearnom sustavu . . . . .                    | 53        |
| 5.2      | Fitz-Nagumo (F-N) sustav . . . . .                           | 55        |
| 5.3      | Primjena na parcijalnim diferencijalnim jednačbama . . . . . | 57        |
| 5.4      | DMD-ilustracija . . . . .                                    | 63        |
|          | <b>Bibliografija</b>   | <b>65</b> |

# Uvod

## 0.1 Uvod

Matematičkim modeliranjem procesa u prirodi ili tehničkim znanostima često dobijemo sustave diferencijalnih jednažbi koji ovise o velikom broju parametara. Takav sustav najčešće je velike dimenzije. Ukoliko želimo puno puta evaluirati rješenje s različitim parametrima, dolazimo do rješavanja sustava velike dimenzije puno puta, što je računski i memorijski skup proces. Ideja algoritama opisanih u ovom radu je slijedeća: riješiti originalni sustav određeni broj puta (tzv. *offline* faza) i pomoću tih rješenja sustav svesti na sustav puno manje dimenzije te za evaluaciju rješenja za novi parametar (tzv. *online* faza) riješiti reducirani sustav te preko njega opisati rješenje. Promotrimo nelinearni sustav običnih diferencijalnih jednažbi:

$$E\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + Bg(t), t \geq 0,$$

gdje je  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times v}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^v$ . U danom problemu,  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  je stanje sustava, a  $g(t)$  vanjska sila. U primjenama, ovakav sustav često ima veliku prostorno-vremensku dimenziju. Cilj je zamijeniti ovaj sustav sa sustavom puno manje prostorno-vremenske dimenzije,  $r \ll n$ . Tada će reducirani model imati slijedeću strukturu:

$$E_r \dot{y}_r(t) = A_r y_r(t) + f_r(y_r(t)) + B_r g(t),$$

pri čemu je  $E_r, A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times v}$ , i  $f_r : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ .

Prvo, uvodno poglavlje ovog rada sadrži pregled bitnih definicija i rezultata koji su bitni za razvoj algoritama. Opisani su i definirani SVD dekompozicija, generalizirani inverz i metoda najmanjih kvadrata.

Drugo poglavlje opisuje POD metodu, od definiranja problema do određivanja POD baze. Opisana je primjena POD baze na dinamičkim sustavima, primjena na kompresiju i vizualizaciju podataka. Uz to, dani su i teorijski rezultati o ocjeni greške rješenja početnog i reduciranog dinamičkog sustava.

Treće poglavlje opisuje DEIM metodu kao nadogradnju na POD, tj. opisuje POD-DEIM

metodu. Opisana je ocjena greške nelinearne funkcije i njene DEIM aproksimacije, kao i opis primjene na dinamičkim sustavima. Opisani su primjeri i rezultati interpolacije nelinearnih funkcija u jednoj i dvije prostorne dimenzije.

Četvrto poglavlje opisuje DMD metodu. Dana je motivacija, postavljanje kao problem najmanjih kvadrata i određivanja rješenja pomoću projekcije na nižedimenzionalni vektorski prostor. Uz to, opisana je veza s Koopmanovim operatorom i spektralnom teorijom. Uz osnovni algoritam, opisane su i varijante online, težinski i DMD s klizećim prozorom.

Peto, posljednje poglavlje bavi se konkretnim primjenama opisanih algoritama. Bit će opisani primjeri sa sustavom običnih diferencijalnih jednažbi, nelinearnih jednažbi i parcijalnih diferencijalnih jednažbi.

# Poglavlje 1

## Matematička podloga

U ovom poglavlju definirat ćemo pojmove SVD dekompozicije i generaliziranog inverza te opisati rješenje problema najmanjih kvadrata, koji će nam biti ključni za razvoj i izvedbu algoritama koje ćemo opisati u ovom radu.

### 1.1 Problem najmanjih kvadrata

Za  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$  tražimo  $x \in \mathbb{R}^n$  koji minimizira funkciju  $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zadanu s

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2. \quad (1.1)$$

Želimo naći stacionarne točke ove funkcije, tj.  $x \in \mathbb{R}^n$  za koje je

$$\nabla \Phi(x) = 0.$$

Napišimo  $\Phi(x)$  na drugi način:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} (Ax - y)^T (Ax - y) \\ &= \frac{1}{2} x^T A^T A x - x^T A^T y + \frac{1}{2} y^T y \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i (A^T A)_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n x_i (A^T y)_i + \frac{1}{2} y^T y \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (A^T A)_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i (A^T y)_i + \frac{1}{2} y^T y. \end{aligned}$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) &= (A^T A)_{kk} x_k + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (A^T A)_{kj} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} (A^T A)_{ik} x_i - (A^T y)_k \\ &= \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ki} x_i - (A^T y)_k \\ &= (A^T A x - A^T y)_k. \end{aligned}$$

Duga jednakost vrijedi jer je  $A^T A$  simetrična matrica. Sada imamo

$$\nabla \Phi(x) = A^T A x - A^T y.$$

Dakle, stacionarna točka  $x$  zadovoljava jednadžbu

$$A^T A x - A^T y = 0. \quad (1.2)$$

Odredimo i Hesijan od  $\Phi$ :

$$H\Phi = A^T A.$$

Ako je  $A$  ranga  $n$ , tada je  $A^T A$  pozitivno definitivna te ima inverz. Onda postoji jedinstveni minimum i dan je s

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y. \quad (1.3)$$

U slučaju da  $A$  nije punog ranga, rješenje nije jedinstveno, nego se postiže na čitavom afinom prostoru  $x + \text{Ker}(A)$ , gdje je  $x$  neko rješenje. Postoji jedinstveno rješenje  $x$  koje još minimizira i  $\|x\|_2$  i tada je  $x$  okomit na  $\text{Ker}(A)$ .

## 1.2 SVD

U ovoj sekciji objasniti ćemo pojam SVD dekompozicije i preko nje riješiti problem najmanjih kvadrata, kao što je opisano u [1].

**Teorem 1.2.1** (SVD-dekompozicija). *Neka su  $m$  i  $n$  ( $m \geq n$ ) prirodni brojevi te  $A$  proizvoljna  $m \times n$  matrica. Tada postoji dekompozicija  $A = U\Sigma V^T$ , gdje je  $U$  unitarna  $m \times m$  matrica i  $V$  unitarna  $n \times n$  matrica, a  $\Sigma$  je dijagonalna  $m \times n$  matrica i  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , sa  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ .*

*Dokaz.* Dokaz ide indukcijom po  $m$  i  $n$ . Pretpostavljamo  $A \neq 0$  jer inače je  $\Sigma = 0$ , a u  $U$  i  $V$  proizvoljne unitarne matrice.

Baza indukcije je za  $n = 1$  jer je  $m \geq n$ . Matricu  $A$  napišemo u obliku

$$A = U\Sigma V^*,$$

gdje je

$$U = \frac{A}{\|A\|_2}, \Sigma = \|A\|_2, V = 1,$$

pa tvrdnja vrijedi za  $n$  i bilo koji  $m$ .

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $(m-1) \times (n-1)$  matrice. Za korak indukcije izaberemo vektor  $v$ , tako da je  $\|v\|_2 = 1$  koji je rješenje problema

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Definirajmo jedinični vektor

$$u = \frac{Av}{\|Av\|_2}.$$

Vektore  $u$  i  $v$  dopunimo matricama  $\tilde{U}$  i  $\tilde{V}$  tako da matrice

$$U_0 = \begin{bmatrix} u & \tilde{U} \end{bmatrix}, V_0 = \begin{bmatrix} v & \tilde{V} \end{bmatrix}$$

budu unitarne matrice reda  $m$ , odnosno  $n$ . Sada možemo pisati

$$U_0^* A V_0 = \begin{bmatrix} u^* \\ \tilde{U}^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v & \tilde{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* A v & u^* A \tilde{V} \\ \tilde{U}^* A v & \tilde{U}^* A \tilde{V} \end{bmatrix}.$$

Po definiciji vektora  $u$  i  $v$ , vrijedi

$$u^* A v = \frac{v^* A^* A v}{\|Av\|_2} = \frac{\|Av\|_2^2}{\|Av\|_2} = \|Av\|_2 := \sigma.$$

Zbog ortogonalnosti stupaca unitarne matrice  $U_0$ , svi stupci matrice  $\tilde{U}$  okomiti su na  $u$ , pa je  $U^* u = 0$ . Onda je i

$$\tilde{U}^* A v = \tilde{U}^* u \|Av\|_2 = 0.$$

Tvrdimo i da je  $u^* A \tilde{V} = 0$ . Ako označimo s  $A_1 = U_0^* A V_0$ ,  $\omega^* = u^* A \tilde{V}$ ,  $B = \tilde{U}^* A \tilde{V}$ , onda je

$$A_1 = U_0^* A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & \omega^* \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Također je  $\sigma = \|A\|_2 = \|U_0^* A U_0\|_2 = \|A_1\|_2$ . S druge strane, za proizvoljni vektor  $z \neq 0$  vrijedi

$$\|A_1\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \geq \frac{\|A_1 z\|_2}{\|z\|_2},$$

odnosno  $\|A_1\|_2 \|z\|_2 \geq \|A_1 z\|_2$ . Izaberimo

$$z = \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Onda je

$$\begin{aligned} \|A_1\|_2 \|z\|_2 &= \|A_1\|_2 (\sigma^2 + \|\omega\|^2) \geq \|A_1 z\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} A_1 & \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \sigma & \omega^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \end{bmatrix} \right\|_2 = (\sigma^2 + \omega^* \omega)^2 + \|B\omega\|_2^2 \\ &\geq (\sigma^2 + \|\omega\|_2^2)^2, \end{aligned}$$

pa vidimo da je

$$\|A_1\|_2^2 (\sigma^2 + \|\omega\|_2^2) \geq (\sigma^2 + \|\omega\|_2^2)^2,$$

tj.

$$\sigma^2 = \|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + \|\omega\|_2^2,$$

što je moguće samo za  $\omega = 0$ . Dakle, vrijedi

$$U_0^* A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Sad možemo iskoristiti pretpostavku indukcije na matricu  $B$ , tj  $B$  ima SVD dekompoziciju

$$B = U_1 \Sigma_1 V_1^*,$$

pa dobivamo

$$U_0^* A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & U_1 \Sigma_1 V_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}.$$

□

**Definicija 1.2.2.** *Stupce matrice  $U = [u_1, \dots, u_m]$  nazivamo lijevi singularni vektori, a stupce matrice  $V = [v_1, \dots, v_n]$  nazivamo desni singularni vektori. Brojeve  $\sigma_i$  nazivamo singularne vrijednosti.*

Uz uvedene oznake lako se vidi da vrijedi  $A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$ . Vektori  $u_1, \dots, u_d$  su svojstveni vektori matrice  $AA^T$ , dok su  $v_1, \dots, v_d$  svojstveni vektori matrice  $A^T A$  sa svojstvenim vrijednostima  $\lambda_i = \sigma_i^2 > 0$ , dok su vektori  $u_{d+1}, \dots, u_m$  i  $v_{d+1}, \dots, v_m$  svojstveni vektori od  $AA^T$  i  $A^T A$  sa svojstvenom vrijednosti 0.

SVD dekompozicijom možemo lako odrediti rang matrice, a on je jednak broju singularnih vrijednosti koje su veće od nule.

Opišimo rješenje problema najmanjih kvadrata preko SVD dekompozicije. Ako je  $A$  punog ranga  $\Sigma$  je regularna matrica i vrijedi

$A = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$ . Pri čemu  $U_1$  ima  $n$  stupaca, a  $U_2$   $m - n$  stupaca. Označimo s  $\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$  Dalje vrijedi

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|_2^2 &= \|U\Sigma V^T x - y\|_2^2 = \|\tilde{U}^T(U\Sigma V^T x - y)\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} (U\Sigma V^T x - y) \Big\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \Sigma V^T x - U_1^T y \\ -U_2 y \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\Sigma V^T x - U_1 y\|_2^2 + \|U_2 y\|_2^2. \end{aligned}$$

Izraz je minimalan za  $\Sigma V^T x - U_1 y = 0$ , tj

$$x = V\Sigma^{-1}U_1^T y.$$

Ukoliko  $A$  nije punog ranga, već ranga  $r < n$ , imamo slijedeće:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix},$$

gdje matrice  $U_1$  i  $V_1$  imaju  $r$  stupaca,  $U_2$  ima  $m - r$  stupaca,  $V_2$  ima  $n - r$  stupaca, a  $\Sigma_+$  je regularna matrica reda  $r$ . Tada je

$$A = U_1 \Sigma_+ V_1^T.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|_2^2 &= \|U\Sigma V^T x - y\|_2^2 = \|\tilde{U}^T(U\Sigma V^T x - y)\|_2 \\ &= \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} (U_1 \Sigma_+ V_1^T x - y) \Big\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_+ V_1^T x - U_1^T y \\ -U_2 y \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \|\Sigma_+ V_1^T x - U_1^T y\|_2^2 + \|U_2 y\|_2^2. \end{aligned}$$

Prethodni izraz minimalan je ukoliko je  $\Sigma_+ V_1^T x - U_1^T y = 0$ , tj  $x = V_1 \Sigma_+^{-1} U_1^T y$ .

### 1.3 Generalizirani inverz

Generalizirani inverz je pojam koji će nam biti potreban za razvoj dinamičke modalne dekompozicije. Prisjetimo se, za kvadratnu regularnu matricu  $A \in \mathbf{M}_n$  kažemo da je matrica  $B \in \mathbf{M}_n$  njen inverz ukoliko vrijedi:

$$AB = BA = I_n$$

i pišemo  $A^{-1} = B$ .

Želimo pojam inverza poopćiti i na matrice koje nisu regularne ili čak nisu niti kvadratne. Za matricu  $A \in \mathbf{M}_{mn}$  kažemo da je  $B \in \mathbf{M}_{nm}$  Moore-Penroseov inverz ili pseudoinverz matrice  $A$  ukoliko vrijedi:

1.  $ABA = A$
2.  $BAB = B$
3.  $(AB)^* = AB$
4.  $(BA)^* = BA$

i tada označavamo  $B = A^\dagger$ . Pseudoinverz je jedinstven i njega možemo izraziti pomoću SVD-dekompozicije na slijedeći način:

Za matricu  $A = U\Sigma V^*$ , vrijedi  $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*$ , pri čemu je  $\Sigma^\dagger$  dijagonalna matrica koja na dijagonali ima recipročne vrijednosti singularnih vrijednosti koje su veće od 0 i nule na mjestima gdje  $\Sigma$  ima nule. Primijetimo da ukoliko je  $A$  kvadratna realna matrica tada je pseudoinverz zbilja inverz matrice  $A$  te je stoga pseudoinverz zbilja generalizacija pojma inverza.

# Poglavlje 2

## POD

### 2.1 Matematička formulacija

Pretpostavimo da smo riješili neki sustav diferencijalnih jednadžbi za  $n$  različitih parametara ili vremenskih trenutaka i rješenje je zapisano kao stupci duljine  $m$  ili da imamo mjerenja stanja sustava u istom formatu. Ta rješenja tvore matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbf{M}_{m,n}$ . Želimo naći vektorski prostor manje dimenzije (i njegovu bazu), ali tako da je u tom prostoru sadržana većina informacija o prostoru rješenja. Očekujemo da je to moguće jer često rješenja ne variraju puno pa se može očekivati i da postoji niže-dimenzionalna struktura koja ih opisuje. Ukoliko želimo ortonormiranu bazu dimenzije  $l$ , problem možemo formulirati na slijedeći način:

$$\max_{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi}_i \rangle|^2, \text{ uz uvjet } \langle \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle = \delta_{i,j}. \quad (2.1)$$

Riješimo prvo ovaj problem za  $l = 1$ . Neka je  $e : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $e(\psi) = 1 - \|\psi\|^2$ . Sada uvjet iz 2.1 glasi  $e(\psi) = 0$ .  $\nabla e(\psi) = 2\psi^T$  je linearno nezavisan za  $\psi \neq 0$ , a to zadovoljava svako rješenje 2.1, tj. svaka dopustiva točka je i regularna. Neka je  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lagrangeov funkcional problema 2.1, tj:

$$\mathcal{L}(\psi, \lambda) = \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \psi \rangle|_{\mathbb{R}^m}^2 + \lambda(1 - \|\psi\|_{\mathbb{R}^m}^2) \text{ za } (\psi, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Neka je  $\psi$  rješenje problema. Kako je  $\psi$  regularna točka, postoji jedinstveni  $\lambda$  tako da vrijedi uvjet:

$$\nabla \mathcal{L}(\psi, \lambda) = 0 \text{ u } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}.$$

Izračunajmo gradient  $\mathcal{L}$  po  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} &= \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m Y_{kj} \psi_k \right|^2 + \lambda \left( 1 - \sum_{k=1}^n \psi_k^2 \right) \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m Y_{kj} \psi_k \right) Y_{ij} - 2\lambda \psi_i \\ &= 2 \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n Y_{ij} Y_{jk}^T \psi_k \right) - 2\lambda \psi_i \\ &= (YY^T \psi)_i - 2\lambda \psi_i.\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\nabla_{\psi} \mathcal{L}(\psi, \lambda) = 2(YY^T \psi - \lambda \psi) = 0 \text{ u } \mathbb{R}^m.$$

Problem 2.1 sveli smo na svojstveni problem:

$$YY^T \psi = \lambda \psi.$$

Matrica  $YY^T \in \mathbb{R}^m$  je simetrična i semidefinitna:

$$\psi^T (YY^T) \psi = (Y^T \psi)^T Y^T \psi = \|Y^T \psi\|_{\mathbb{R}^m}^2 \geq 0.$$

Ona posjeduje  $m$  nenegativnih svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$  i odgovarajući svojstveni vektori mogu se odabrati tako da su međusobno okomiti. Neka je  $Y = U\Sigma V^T$  SVD dekompozicija matrice  $Y$  i neka su  $\psi_1, \dots, \psi_n$  stupci matrice  $U$ . Tada je  $YY^T \psi_1 = \lambda_1 \psi_1$  i vrijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |\langle y_j, \psi_1 \rangle|^2 &= \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_1 \rangle \langle y_j, \psi_1 \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \langle y_j, \psi_1 \rangle y_j, \psi_1 \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_1 \rangle y_j, \psi_1 \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m Y_{kj}(\psi_1)_k \right) y_j, \psi_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n Y_{kj} Y_{jk}^T (\psi_1)_k \right) \psi_1, \psi_1 \right\rangle = \langle YY^T \psi_1, \psi_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \lambda_1 \|\psi_1\|^2 = \lambda_1.\end{aligned}$$

$\nabla_{\psi\psi}\mathcal{L}(\psi, \lambda) = 2(Y Y^T - \lambda I_m)$ . Kako je  $Y Y^T$  simetrična, postoji  $m$  ortonormiranih svojstvenih vektora  $\psi_1, \dots, \psi_m \in \mathbb{R}^m$  takve da je  $Y Y^T \psi_i = \lambda_i \psi_i$ , za  $1 \leq i \leq m$ . Tada proizvoljan  $\psi \in \mathbb{R}^m$  možemo napisati u slijedećem obliku:

$$\psi = \sum_{i=1}^m \langle \psi, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Nadalje, računamo:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \nabla_{\psi\psi}\mathcal{L}(\psi_1, \lambda_1)\psi \rangle &= 2\langle \psi, (Y Y^T - \lambda_1 I_m)\psi \rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle \psi, \psi_i \rangle \langle \psi, \psi_j \rangle \langle \psi_i, (Y Y^T - \lambda_1 I_m)\psi_j \rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_1) \langle \psi, \psi_i \rangle \langle \psi, \psi_j \rangle \langle \psi_i, \psi_j \rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \lambda_1) |\langle \psi, \psi_i \rangle|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vektor  $\psi_1$  zadovoljava nužne uvjete za maksimum. Sada ćemo pokazati da on zbilja rješava 2.1. Pretpostavimo da je  $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^m$  proizvoljan s  $\|\tilde{\psi}\| = 1$ . Kako je  $\psi_{i=1}^m$  ortonormirana baza u  $\mathbb{R}^m$ , imamo:

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi} \rangle|^2 &= \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i \rangle|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\langle y_j, \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i \rangle) (\langle y_j, \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\langle y_j, \psi_i \rangle \langle y_j, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_i \rangle \langle y_j, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_i \rangle y_j, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\langle \lambda_i \psi_i, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i |\langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle|^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^m |\langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle|^2 = \lambda_1 \|\tilde{\psi}\|^2 = \lambda_1 = \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \psi_1 \rangle|^2.
\end{aligned}$$

Dakle,  $\psi_1$  rješava problem 2.1 za  $l = 1$  i vrijednost funkcije cilja je  $\sigma_1^2 = \lambda_1$ . Tražimo li i drugi vektor, ortogonalan na  $\psi_1$  takav da što bolje opisuje podatke trebamo riješiti:

$$\max_{\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi} \rangle|^2 \text{ uz uvjet } \|\tilde{\psi}\|^2 = 1 \text{ i } \langle \tilde{\psi}, \psi_1 \rangle = 0.$$

Preko SVD kompozicije dobijemo rješenje  $\psi_2$  i vrijednost funkcije cilja  $\sigma_2^2 = \lambda_2$ . Za

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=2}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i$$

imamo

$$\sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi} \rangle|^2 \leq \lambda_2 = \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \psi_2 \rangle|^2.$$

Induktivno možemo nastaviti ovaj postupak pa imamo slijedeći teorem.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $Y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrica ranga  $d \leq \min\{m, n\}$ . Nadalje, neka je  $Y = \Psi \Sigma \Phi^T$  SVD dekompozicija matrice  $Y$ , gdje  $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\Phi =$*

$[\phi_1, \dots, \phi_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i matrica  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  dijagonalna. Tada, za svaki  $l \in \{1, 2, \dots, d\}$  rješenje

$$\max_{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi}_i \rangle|^2 \text{ uz uvjet } \langle \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle = \delta_{i,j}$$

je dano sa singularnim vektorima  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$ , tj. s prvih  $l$  stupaca matrice  $\Psi$ . Nadalje, maksimalna vrijednost koja se postiže je  $\sum_{i=1}^l \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^l \lambda_i$ .

*Dokaz.* Uvodimo Lagrangian  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{l \times l}$  s:

$$\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_l, \Lambda) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \psi_i \rangle|^2 + \sum_{i,j=1}^l \lambda_{ij} (\delta_{ij} - \langle \psi_i, \psi_j \rangle)$$

za  $\psi_1, \dots, \psi_l \in \mathbb{R}^m$  i  $\Lambda = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ . Nužan uvjet za maksimum je zadan s:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}(\psi_1, \dots, \psi_l, \Lambda) \delta \psi_k = 0, \text{ za sve } \delta \psi_k \in \mathbb{R}^m \text{ i } k \in 1, \dots, l.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}(\psi_1, \dots, \psi_l, \Lambda) \delta \psi_k &= 2 \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_i \rangle \langle y_j, \delta \psi_k \rangle \delta_{ik} - \sum_{i,j=1}^l \lambda_{ij} \langle \psi_i, \delta \psi_k \rangle \delta_{jk} - \sum_{i,j=1}^l \lambda_{ij} \langle \delta \psi_k, \psi_j \rangle \delta_{ki} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_k \rangle \langle y_j, \delta \psi_k \rangle - \sum_{i=1}^l (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) \langle \psi_i, \delta \psi_k \rangle \\ &= \langle 2 \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_k \rangle y_j - \sum_{i=1}^l (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) \psi_i, \delta \psi_k \rangle. \end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_k \rangle y_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) \psi_i, \text{ za sve } k \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Kako je

$$YY^T \psi = \sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi \rangle y_j, \text{ za sve } \psi \in \mathbb{R}^m,$$

rješenje mora zadovoljavati:

$$YY^T \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\lambda_{ik} + \lambda_{ki}) \psi_i, \text{ za sve } k \in \{1, \dots, l\}.$$

Dalje nastavljamo indukcijom. Za  $l = 1, k = 1$  imamo

$$YY^T \psi_1 = \lambda_1 \psi_1$$

s  $\lambda_1 = \lambda_{11}$ . Pretpostavimo da za  $l \geq 0$  vrijedi

$$YY^T \psi_k = \lambda_k \psi_k \text{ za sve } k \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Želimo dokazati da su tada za POD bazu  $\{\psi_i\}_{i=1}^{l+1}$  ranga  $l + 1$  nužni uvjeti prvog reda dani s

$$YY^T \psi_k = \lambda_k \psi_k \text{ za sve } k \in \{1, 2, \dots, l + 1\}.$$

Koristeći pretpostavku indukcije, treba dokazati samo

$$YY^T \psi_{l+1} = \lambda_{l+1} \psi_{l+1}.$$

Vrijedi

$$YY^T \psi_{l+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l+1} (\lambda_{i,l+1} + \lambda_{l+1,i}) \psi_i.$$

Kako je  $\{\psi_i\}_{i=1}^{l+1}$  POD baza, ona je ortonormirana. Koristeći pretpostavku indukcije i simetriju matrice  $YY^T$  za proizvoljan  $j \in \{1, 2, \dots, l\}$  imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_j \langle \psi_{l+1}, \psi_j \rangle = \langle \psi_{l+1}, YY^T \psi_j \rangle = \langle YY^T \psi_{l+1}, \psi_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l+1} (\lambda_{i,l+1} + \lambda_{l+1,i}) \langle \psi_i, \psi_j \rangle = (\lambda_{j,l+1} + \lambda_{l+1,j}). \end{aligned}$$

Tj. imamo:

$$\lambda_{l+1,i} = -\lambda_{i,l+1} \text{ za sve } i \in \{1, \dots, l\}.$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} YY^T \psi_{l+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\lambda_{i,l+1} + \lambda_{l+1,i}) \psi_i + \lambda_{l+1,l+1} \psi_{l+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (\lambda_{i,l+1} - \lambda_{i,l+1}) \psi_i + \lambda_{l+1,l+1} \psi_{l+1} = \lambda_{l+1,l+1} \psi_{l+1}. \end{aligned}$$

Dakle,  $\lambda_{l+1,l+1} = \lambda_{l+1}$ . Ukratko, nužni uvjeti za maksimum dani su s

$$YY^T \psi_i = \lambda_i \psi_i \text{ za } i = 1, \dots, l.$$

Iz SVD dekompozicije slijedi da su tražena rješenja  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$ . Slično kao za  $l = 1$ , dobije se da je maksimalna vrijednost koju funkcija postiže uz ove uvjete  $\sum_{i=1}^l \sigma_i^2$ .  $\square$

**Definicija 2.1.2.** Za  $l \in \{1, \dots, d\}$  vektori  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$  zovu se POD baza ranga  $l$ .

## 2.2 Algoritam

Imamo slijedeći algoritam za traženje POD baze: Ukoliko je  $n \ll m$ , POD bazu ranga  $l$

---

### Algoritam 1 POD baza ranga $l$

---

- 1: **ulaz:**  $\{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^m$ , POD rang  $l \leq d$  i zastavica(flag) za rješavač
  - 2: **ako** flag = 0 **onda**
  - 3:     Izračunaj  $[\Psi, \Sigma, \Phi] = \text{svd}(Y)$ ;
  - 4:     Postavi  $\psi_i = \Psi_{:,i} \in \mathbb{R}^m$  i  $\lambda_i = \sigma_i^2$  za  $i = 1, \dots, l$ ;
  - 5: **inače ako** flag = 1 **onda**
  - 6:     Odredi  $R = YY^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ;
  - 7:     Odredi svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti  $[\Psi, \Lambda] = \text{eig}(R)$ ;
  - 8:      $\psi_i = \Psi_{:,i} \in \mathbb{R}^m$  i  $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ , za  $i = 1, \dots, l$ ;
  - 9: **vrați** POD bazu  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$  i svojstvene vrijednosti;  $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$
- 

možemo odrediti tako da riješimo slijedeći svojstveni problem:

$$Y^T Y \phi_i = \lambda_i \phi_i, i = 1, 2, \dots, l.$$

Tada su vektori POD baze zadani s:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Y \phi_i.$$

Izbor odgovarajućeg ranga  $l$  kojim želimo aproksimirati rješenja baziran je na heuristikama i omjeru sačuvane i totalne energije sistema  $Y$  koji možemo izraziti kao

$$\varepsilon(l) = \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}.$$

Sada možemo proširiti Algoritam 1.

## 2.3 Primjeri

POD baza ima različite primjene. Neke od njih su kompresija podataka i vizualizacija.

### Kompresija slike

POD bazu koristimo kod kompresije slike. *RGB* slika je u računalu spremljena kao tenzor dubine 3, tj. imamo  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  matrice koje opisuju intenzitet crvene, zelene i plave

**Algoritam 2** POD baza ranga  $l$ 

- 
- 1: **ulaz:**  $\{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^m$ , POD rang  $l \leq d$  i zastavica(flag) za rješavač
  - 2: Postavi  $Y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - 3: **ako** flag = 0 **onda**
  - 4:     Izračunaj  $[\Psi, \Sigma, \Phi] = \text{svd}(Y)$ ;
  - 5:     Postavi  $\psi_i = \Psi_{:,i} \in \mathbb{R}^m$  i  $\lambda_i = \sigma_i^2$  za  $i = 1, \dots, l$ ;
  - 6: **inače ako** flag = 1 **onda**
  - 7:     Odredi  $R = YY^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ;
  - 8:     Odredi svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti  $[\Psi, \Lambda] = \text{eig}(R)$ ;
  - 9:      $\psi_i = \Psi_{:,i} \in \mathbb{R}^m$  i  $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ , za  $i = 1, \dots, l$ ;
  - 10: **inače ako** flag = 2 **onda**
  - 11:     Odredi  $K = Y^T Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;
  - 12:     Odredi svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti  $[\Phi, \Lambda] = \text{eig}(K)$ ;
  - 13:      $\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Y \Phi_{:,i} \in \mathbb{R}^m$  i  $\lambda_i = \Lambda_{ii}$ , za  $i = 1, \dots, l$ ;
  - 14: Izračunaj  $\varepsilon(l) = \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$ ;
  - 15: **vрати** POD bazu  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$ , svojstvene vrijednosti  $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$  i omjer  $\varepsilon(l)$ ;
- 

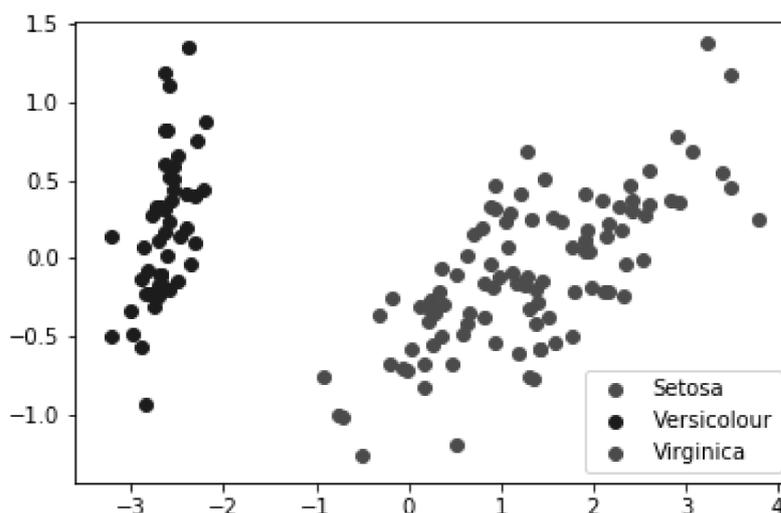
boje. Na svaku od tih matrica primjenimo  $SVD$ -dekompoziciju i odredimo POD bazu ranga  $l$ . Aproximaciju ranga  $l$  za intenzitet svake boje dobivamo kao  $\Psi(:, 1 : l)\Sigma(1 : l, 1 : l)\Phi(:, 1 : l)^T$ , gdje je  $\Psi(:, 1 : l)$  matrica koja sadrži prvih  $l$  stupaca matrice  $\Psi$ . Nakon toga spojimo aproksimaciju za svaku boju u novu sliku s puno manje podataka od početne slike. Kompresija slike ilustrirana je na slijedećim slikama, pri čemu je originalna slika dimenzija  $680 \times 453$ .



originalna slika i aproksimacije za  $k=1,10,20,30,50$

## Vizualizacija podataka

Smanjivanje dimenzionalnosti može poslužiti i za vizualizaciju podataka. Naime, ne možemo vizualizirati visokodimenzionalne podatke, ali pomoću POD baze ranga 2 ili 3 podatke možemo prikazati u ravnini ili prostoru. Primjer na kojem ćemo to demonstrirati je skup podataka o tri podvrste cvjeta Iris (*Iris setosa*, *Iris virginica* i *Iris versicolor*). O svakoj jedinki zapisane četiri veličine koje opisuju veličine latica i lapova. Pronalaženjem POD baze ranga 2, podatke možemo prikazati u ravnini te pomoću toga uočiti neke pravilnosti u podacima.



Iris skup podataka-dvije najznačajnije komponente

## 2.4 Primjena POD baze na dinamičkim sustavima

Promotrimo kako možemo koristiti POD bazu za dobivanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi manje dimenzije. Neka je dan sustav

$$Ey(t) = Ay_r(t) + f(y(t)) + Bg(t), \quad (2.3)$$

pri čemu je  $E, A \in R^{m \times m}$ ,  $B \in R^{m \times v}$ . Rješimo sustav pune dimenzije te dobijemo POD bazu  $\{\psi_i\}_{i=1}^l$  koji čine stupce matrice  $U$ . Neka je  $\Psi_r$   $r$ -dimenzionalni prostor kojeg razapinju vektori matrice  $U$ . Tada aproksimiramo  $y(t) \approx Uy_r(t)$ . Uvrstimo li tu aproksimaciju u početnu jednadžbu i pomnožimo ju s lijeva s  $U^T$ , dobivamo slijedeće:

$$E_r \dot{y}_r(t) = A_r y_r(t) + f_r(y_r(t)) + B_r g(t), \quad (2.4)$$

pri čemu je  $E_r, A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times v}$ , i  $f_r : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ .

$$E_r = U^T E U, A_r = U^T A U, B_r = U^T B, \text{ i } f_r(y_r(t)) = U^T f(U y_r(t)).$$

## 2.5 Ocjena greške

Napišimo dinamički sustav u  $\mathbb{R}^n$  slijedećem obliku:

$$\dot{x} = f(x, t).$$

Pretpostavimo da imamo stanja  $x_1, \dots, x_m$ . Prosječna vrijednost je  $\bar{x}$ . Promatramo vektore  $x_1 - \bar{x}, \dots, x_m - \bar{x}$  i za njih odredimo POD bazu ranga  $l$ . Neka je  $S \subset \mathbb{R}^n$  vektorski potprostor kojem je baza POD baza ranga  $l$ . Neka je  $\rho$  matrica čiji su retci vektori POD baze. Neka je  $x \approx \rho^T z + \bar{x}$ . Uvrstimo li tu aproksimaciju u sustav dobivamo slijedeće:

$$\rho^T \dot{z} = f(\rho^T z + \bar{x}, t), \text{ odnosno}$$

$$\dot{z} = \rho f(\rho^T z + \bar{x}, t).$$

Ukoliko imamo početni uvjet  $x(0) = x_0$ , u reduciranom modelu vrijedi  $z(0) = z_0$ , pri čemu je

$$z_0 = \rho(x_0 - \bar{x}).$$

Aproksimacija rješenje u  $\mathbb{R}^n$  je

$$\hat{x} = \rho^T z(t) + \bar{x}.$$

Odavde se vidi da je  $\tilde{x}$  rješenje slijedećeg sustava:

$$\dot{\tilde{x}} = P f(\tilde{x}, t); \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = P(x_0 - \bar{x}) + \bar{x},$$

pri čemu je  $P = \rho^T \rho$  projektor na  $S$ . Zanima nas greška  $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ . Neka je  $e_0(t)$  komponenta greške okomita na  $S$  i  $e_i(t)$  komponenta greške paralelna na  $S$ . Tada je  $P e_0(t) = 0$  i  $P e_i(t) = e_i$ . Deriviranjem greške  $e_0(t) + e_i(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$  dobivamo:

$$\dot{e}_0 + \dot{e}_i = P f(\tilde{x}, t) - f(x, t).$$

Množenjem s  $P$  i uvažavanjem  $P^2 = P$  dobivamo inicijalni problem za  $e_i(t)$ :

$$\dot{e}_i = P(f(x(t) + e_0(t) + e_i(t), t) - f(x(t), t)); e_i(0) = 0.$$

Početni uvjet  $e_i(0) = 0$  dolazi od toga što je  $\tilde{x}_0$  projekcija na  $x_0$  na  $S$ . O ocjeni greške govori slijedeći teorem iz [6].

**Teorem 2.5.1.** *Neka je dan problem  $\dot{x} = f(x, t), x(0) = x_0$ , koristeći POD reducirani model u intervalu  $[0, T]$ . Neka je  $\rho \in \mathbb{R}^{k \times n}$  relevantna matrica projekcije i neka je  $S$  potprostor na kojeg POD projicira. Napišimo rješenje punog modela  $x(t)$  i  $\tilde{x}(t)$  reduciranog modela kao:*

$$x(t) = \rho^T u(t) + \rho_c^T v(t) + \bar{x}$$

i

$$\tilde{x}(t) = \rho^T u(t) + \rho^T w(t) + \bar{x}$$

tako da su greške  $e_0(t)$  i  $e_i(t)$  i projicirano rješenje  $\hat{x}(t)$  dani s

$$e_0(t) = -\rho_c^T v(t),$$

$$e_i(t) = \rho^T w(t)$$

i

$$\hat{x}(t) = \rho^T w(t) + \bar{x}.$$

$u(t) \in \mathbb{R}^k$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^n$  i  $v(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Neka je  $\gamma \geq 0$  Lipshitzova konstanta funkcije  $\rho(x, t)$  u smjeru okomitom na  $S$  u području koje sadrži  $x(t)$  i  $\hat{x}(t)$ . Preciznije, pretpostavimo

$$\|\rho f(\hat{x}(t) + \rho_c^T v, t) - \rho f(\hat{x}(t), t)\| \leq \gamma \|v\|$$

za sve  $(v, t) \in \mathbb{R}^{n-k} \times [0, T]$ , gdje je  $D$  takvo područje da za  $\tilde{D} = (\hat{x}(t) + \rho_c^T v, t) : (v, t) \in D \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$  sadrži  $(\hat{x}(t), t)$  i  $(x(t), t)$  za sve  $t \in [0, T]$ . Neka je  $\mu(\rho \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + \rho^T z, t) \rho^T) \leq \bar{\mu} u$  za  $(z, t) \in V \subset \mathbb{R}^k \times [0, T]$ , gdje  $V$  sadrži  $(u(t), t)$  i  $(u(t) + w(t), t)$  za sve  $t \in [0, T]$  i  $\mu$  logaritamska norma vezana uz 2-normu. Neka je  $\epsilon = \|e_0\|_2$ . Tada greška  $e_i$  u  $\infty$ -normi zadovoljava

$$\|e_i\|_\infty \leq \epsilon \frac{\gamma}{\sqrt{2\bar{\mu}}} \sqrt{e^{2\bar{\mu}T} - 1},$$

i 2-norma za grešku zadovoljava

$$\|e\|_2 \leq \epsilon \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\bar{\mu}^2} (e^{2\bar{\mu}T} - 1 - 2\bar{\mu}T)}.$$

*Dokaz.* Vrijedi  $w(t) = \rho \tilde{x}(t) - \rho x(t)$ . Deriviranjem dobivamo

$$\dot{w}(t) = \rho f(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho^T w(t), t) - \rho f(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho_c^T v(t), t),$$

za  $h > 0$  koristeći Taylorov razvoj dobivamo

$$\begin{aligned} \|w(t+h)\| &= \|w(t) + hf(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho^T w(t), t) - \rho f(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho_c^T, t)\| + O(h^2) \\ &\leq \|w(t) + hf(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho^T w(t), t) - hf(\bar{x} + \rho^T u(t), t)\| \\ &\quad + h\|\rho f(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho_c^T v(t), t) - \rho f(\bar{x} + \rho^T u(t), t)\| + O(h^2). \end{aligned}$$

Koristeći teorem srednje vrijednosti na  $v \rightarrow v + hf(\bar{x} + \rho^T v, t)$ , dobivamo

$$\|w(t) + hf(\bar{x} + \rho^T u(t) + \rho^T w(t), t) - hf(\bar{x} + \rho^T u(t), t)\| \leq \left( \max_{v \in [u(t), u(t) + w(t)]} \|I + h\rho \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x} + \rho^T v, t)\rho^T\| \right) \|w(t)\|.$$

Slijedi da je

$$\frac{\|w(t+h)\| - \|w(t)\|}{h} \leq \tilde{\mu}\|w(t)\| + \gamma\|v(t)\| + O(h).$$

Tada imamo ocjenu

$$\|e_i(t)\| \leq \gamma \int_0^t e^{\tilde{\mu}(t-\tau)} \|v(\tau)\| d\tau.$$

Koristeći Cauchy-Svhwarzovu nejednakost dobivamo

$$\|e_i(t)\| \leq \frac{\gamma}{\sqrt{2\tilde{\mu}}} \sqrt{e^{2\tilde{\mu}t} - 1} \sqrt{\int_0^t \|e_0(\tau)\|^2 d\tau}.$$

Ocijenom  $\sqrt{\int_0^t \|e_0(\tau)\|^2 d\tau}$  s  $\epsilon$  dobivamo prvu ocjenu, dok integriranjem dobivamo gornju ogradu na  $\|e_i\|_2$  iz čega slijedi i druga ocjena.  $\square$

## 2.6 POD s težinskim skalarnim produktom

Pristup za traženje POD baze koji smo opisali može se poopćiti, kao što je opisano u [8]. Pretpostavimo da imamo stanja sustava  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ako želimo naglasiti važnost pojedinih elemenata vektora  $x$  ili naglasiti neku vezu između nekih njegovih elemenata, koristit ćemo se drugačijim skalarnim produktom. Ukoliko elementi vektora  $x$  nisu jednakog reda veličine, ali ih ipak smatramo podjednako važnima, koristit ćemo težinski skalarni produkt, definiran na slijedeći način:

$$\langle x, y \rangle_W = x^T W y = \langle x, W y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle W x, y \rangle_{\mathbb{R}^M}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je  $W \in R^{n \times n}$  simetrična pozitivno definitna matrica. Za  $W = I$ , težinski skalarni produkt je zapravo Euklidski skalarni produkt. Na sličan način kao i na početku možemo zadati problem traženja POD baze ranga  $l$ . Problem je naći  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l$  koji rješavaju slijedeći problem:

$$\max_{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l \in R^n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n |\langle y_j, \tilde{\psi}_i \rangle_W|^2, \text{ tako da je } \langle \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle_W = \delta_{ij}.$$

Definirajući Lagrangian i slijedeći isti postupak kao i prije, dobiva se  $\psi_i = W^{-1/2} \tilde{\Psi}_i$ , pri čemu je  $\tilde{\Psi}_i$   $i$ -ti lijevi singularni vektor matrice  $W^{1/2} Y$ .

Dat ćemo jedan primjer korištenja takvog skalarnog produkta. Pretpostavimo da je  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  i promatramo funkcije iz  $L^2(\Omega)$ .  $L^2(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle \rho, \tilde{\rho} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \rho \tilde{\rho} dx$$

i normom  $\|\rho\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle \rho, \rho \rangle}$  za  $\rho \in L^2(\Omega)$ . Za korak  $h = 1/(m-1)$  imamo ekvidistantno mrežu s točkama

$$x_i = (i-1)h, i = 1, \dots, m.$$

Za  $\rho, \tilde{\rho} \in L^2(\Omega)$  uvodimo diskretni skalarni umnožak zadan s :

$$\langle \rho, \tilde{\rho} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = h(\rho_1^h \tilde{\rho}_1^h / 2 + \sum_{i=1}^{m-1} (\rho_i^h \tilde{\rho}_i^h) + \rho_m^h \tilde{\rho}_m^h / 2),$$

gdje su

$$\rho_1 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} \rho dx$$

$$\rho_i = \frac{1}{h} \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \rho dx, \text{ za } i = 2, \dots, m-1$$

$$\rho_m = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 \rho dx$$

i  $\tilde{\rho}_i$  su definirani analogno. Ukoliko stavimo  $W = \text{diag}(\frac{h}{2}, h, \dots, h, \frac{h}{2})$ ,  $\rho^h = (\rho_1^h, \dots, \rho_m^h)$ ,  $\tilde{\rho}^h = (\tilde{\rho}_1^h, \dots, \tilde{\rho}_m^h)$ , tada je

$$\langle \rho, \tilde{\rho} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \rho^h, \tilde{\rho}^h \rangle_W.$$

Dakle, diskretni  $L^2$  skalarni produkt može se napisati kao težinski skalarni produkt.

## 2.7 POD u kontinuiranom slučaju

Pristup koji smo koristili za pronalaženje POD baze koristan je i u kontinuiranom slučaju. Potencijalni problem POD baze je što ona ovisi o odabranim parametrima ili vremenskim trenucima u kojima gledamo stanje nekog sustava. Zato ćemo uvesti kontinuiranu verziju traženja POD baze. Konkretno, pretpostavimo da imamo slijedeći problem:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \text{ za } 0 < t \leq T \text{ i } y(0) = y_0.$$

Pretpostavimo da taj sustav ima jedinstveno rješenje  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  i želimo što bolje opisati njegovu trajektoriju. Promatramo slijedeći problem:

$$\max_{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_l \in \mathbb{R}^m} \int_0^T \left\| \sum_{i=1}^l \langle y(t), \tilde{\psi}_i \rangle \right\|_W^2 dt, \text{ t.d. } \langle \tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Sličnim postupkom kao i prije definiramo Lagrangian  $\mathcal{L}$  i dobivamo

$$\nabla_{\psi} \mathcal{L}(\psi, \Lambda) = 2 \left( \int_0^T \langle y(t), \psi \rangle_W W y(t) dt - \lambda W \psi \right),$$

što daje jednadžbu za stacionarne točke:

$$\int_0^T \langle y(t), \psi \rangle_W W y(t) dt = \lambda W \psi,$$

tj. množenjem s  $W^{-1}$  dobivamo:

$$\int_0^T \langle y(t), \psi \rangle_W y(t) dt = \lambda \psi \text{ u } \mathbb{R}^m.$$

Dakle, sada se traženje POD baze ranga  $l$  svodi na rješavanje svojstvenog problema

$$\mathcal{R}\psi = \lambda \psi,$$

pri čemu je  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiran s

$$\mathcal{R}\psi = \int_0^T \langle y(t), \psi \rangle \psi dt, \text{ za } \psi \in \mathbb{R}^m.$$

$\mathcal{R}$  je simetričan, neprekidan i nenegativan operator te posjeduje  $m$  svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ . Dakle, POD baza ranga  $l$  su svojstveni vektori operatora  $\mathcal{R}$  vezanih uz najvećih  $l$  svojstvenih vrijednosti.



## Poglavlje 3

# DEIM-Diskretna empirička interpolacijska metoda

### 3.1 Motivacija

Vratimo se na sustav:

$$E\dot{y}_r(t) = Ay(t) + fy_r(t) + Bg(t),$$

gdje je  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times \nu}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ . U danom problemu,  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  je stanje sustava, a  $g(t)$  vanjska sila i njegov reducirani model:

$$E_r\dot{y}_r(t) = A_r y_r(t) + f_r(y_r(t)) + B_r g(t),$$

pri čemu je  $E_r, A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{r \times \nu}$ , i  $f_r : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ .

$$E_r = V^T E V, A_r = V^T A V, B_r = V^T B, \text{ i } f_r(y_r(t)) = V^T f(V y_r(t)).$$

U primjenama često trebamo finu diskretizaciju domene, što rezultira velikom dimenzijom  $n$ . Već smo vidjeli kako možemo dobiti reducirani sustav pomoću POD baze ranga  $r$ . Iako je dimenzija takvog sustava puno manja od originalnog, u nelinearnom članu  $f_r(y_r(t)) = V^T f(V y_r(t))$ , vektor  $V y_r(t)$  je i dalje originalne dimenzije  $n$ , što i dalje predstavlja problem pri računanju nelinearnog člana. Cilj DEIM algoritma je pojednostavniti taj postupak. [7]

### 3.2 Algoritam

Označimo s  $f(t)$  nelinearni član  $f(V y_r(t))$ . Želimo ga projicirati na  $m$ -dimenzionalni vektorski prostor,  $m \ll n$ . Aproximacija projekcije nelinearnog člana na  $m$ -dimenzionalni prostor s bazom  $\{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$  je oblika

$$f(t) \approx Uc(t),$$

gdje je  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Ukoliko imamo zadane  $U$  i  $f(t)$ , imamo predeterminirani sustav jednadžbi, te iz njega odabiremo  $m$  različitih redaka. Promotrimo matricu

$$P = [e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_m}] \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

gdje je  $e_{\rho_i} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$   $\rho_i$ -ti vektor kanonske baze u  $\mathbb{R}^n$ . Pretpostavimo da je matrica  $P^T U$  regularna. Tada  $c(t)$  možemo jedinstveno odrediti iz sustava

$$P^T f(t) = (P^T U)c(t),$$

te aproksimacija postaje

$$f(t) \approx Uc(t) = U(P^T U)^{-1} P^T f(t).$$

Da bismo dobili posljednju aproksimaciju moramo odrediti bazu  $\{u_1, \dots, u_m\}$  i indekse  $\rho_1, \dots, \rho_m$ . Bazu  $\{u_1, \dots, u_m\}$  prostora na koji projiciramo za  $f$  dobivamo određivanjem neke POD baze iz originalnog sustava pune veličine. Indeksi interpolacije  $\rho_1, \dots, \rho_m$  biraju se induktivno iz baze  $\{u_1, \dots, u_m\}$  DEIM algoritmom.

DEIM algoritam u svakom koraku odabire indeks koji odgovara jednoj od točaka prostorne domene tako da se ograniči rast ocjene greške.

---

### Algoritam 3 DEIM

---

- 1: **ulaz:**  $\{u_l\}_{l=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  linearno nezavisni
  - 2: **izlaz:**  $\rho = [\rho_1, \dots, \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m$
  - 3:  $[\phi, \rho_1] = \max |u_1|$
  - 4:  $U = [u_1], P = [e_{\rho_1}], \rho = [\rho_1]$
  - 5: **za**  $l = 2$  **do**  $m$  **radi**
  - 6:     Riješi  $(P^T U)c = P^T u_l$  za  $c$
  - 7:      $r = u_l - Uc$
  - 8:      $[\phi, \rho_l] = \max |r|$
  - 9:      $U = [U, u_l] P = [P, e_{\rho_l}], \rho = [\rho, \rho_l]$
  - 10: **vрати**  $\rho$
- 

$[\phi, \rho_l]$  su maksimalna vrijednost i najmanji indeks na kojem se ona postiže redom.

Neka je  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  nelinearna vektorska funkcija s  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ . Neka je  $\{u_l\}_{l=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  linearno nezavisan za  $m \in \{1, \dots, n\}$ . Za  $\tau \in \mathcal{D}$  DEIM aproksimacija reda  $m$  za  $f(\tau)$  u prostoru razapetom s  $\{u_l\}_{l=1}^m$  dana je s:

$$\hat{f}(\tau) := U(P^T U)^{-1} P^T f(\tau),$$

gdje je  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $P = [e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_m}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , s  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  indeksima odabranim u Algoritmu 3. Primijetimo da  $\hat{f}(\tau)$  zbilja interpolacija funkcije  $f(\tau)$  za  $\tau \in \mathcal{D}$ :

$$P^T \hat{f}(\tau) = P^T (U(P^T U)^{-1} P^T f(\tau)) = (P^T U)(P^T U)^{-1} P^T f(\tau) = P^T f(\tau).$$

Primijetimo da je odabir indeksa ovisi o  $\{u_i\}_{i=1}^m$ , što znači da je bitno kako odabiremo te vektore. Obično su to vektori POD baze ranga  $m$  jer oni dobro opisuju dinamiku nelinearne funkcije koju aproksimiramo.

### 3.3 Ocjena greške

U slijedećem teoremu dajemo ocjenu greške pri aproksimaciji pomoću DEIM algoritma.

**Teorem 3.3.1.** *Neka je  $f \in \mathbb{R}^n$  proizvoljan vektor. Neka je  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  ortornormiran skup vektora. DEIM aproksimacija vektora  $f$  u prostoru razapetom s  $\{u_i\}_{i=1}^m$  je*

$$\hat{f} = U(P^T U)^{-1} P^T f,$$

gdje je  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  i  $P = [e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_m}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , s  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  izlaz DEIM algoritma s bazom  $\{u_i\}_{i=1}^m$ . Tada za grešku aproksimacije vrijedi:

$$\|f - \hat{f}\|_2 \leq C \epsilon_*(f), \quad (3.1)$$

gdje je:

$$C = \|(P^T U)^{-1}\|_2 \text{ i } \epsilon_*(f) = \|(I - UU^T)f\|_2.$$

Konstanta  $C$  ograničena je s:

$$C \leq \frac{(1 + \sqrt{2n})^{m-1}}{|e_{\rho_1}^T u_1|} = (1 + \sqrt{2n})^{m-1} \|u_1\|_\infty.$$

*Dokaz.* Neka je  $\hat{f}$  DEIM aproksimacija. Aproksimacija  $f$  sa stupcima matrice  $u$  je

$$f_* = UU^T f,$$

koja minimizira  $\|f - f_*\|_2$ , pri čemu je  $f_*$  u slici operatora  $U$ . Neka je

$$f = (f - f_*) + f_* = w + f_*,$$

gdje je  $w = f - f_* = (I - UU^T)f$ . Definiramo projektor  $\mathbb{P} = U(P^T U)^{-1} P^T$ . Tada vrijedi:

$$\hat{f} = \mathbb{P}f = \mathbb{P}(w + f_*) = \mathbb{P}w + f_*.$$

Dakle, vrijedi  $f - \hat{f} = (I - \mathbb{P})w$  i

$$\|f - \hat{f}\|_2 = \|(I - \mathbb{P})w\|_2 \leq \|I - \mathbb{P}\|_2 \|w\|_2.$$

Primijetimo da

$$\|I - \mathbb{P}\|_2 = \|\mathbb{P}\|_2 = \|U(P^T U)^{-1} P^T\|_2 \leq \|U\|_2 \|(P^T U)\|_2 \|P^T\|_2 = \|(P^T U)^{-1}\|_2.$$

$\|I - \mathbb{P}\|_2 = \|\mathbb{P}\|_2$  za svaki projektor  $\mathbb{P} \neq 0$  ili  $I$ . Posljednja jednakost vrijedi jer  $\|U\|_2 = \|\mathbb{P}\|_2 = 1$ . Primijetimo da je  $\epsilon_*(f) := \|w\|_2$ . Konačno za grešku aproksimacije vrijedi:

$$\|f - \hat{f}\|_2 \leq \|(P^T U)^{-1}\|_2 \epsilon_*(f).$$

Sada trebamo ocijeniti  $\|(P^T U)^{-1}\|_2$ . Pokazat ćemo da svaka iteracija DEIM algoritma izabire indeks kojim bi ograničila rast  $\|(P^T U)^{-1}\|_2$ , tj. ograničava ocjenu na grešku  $\|f - \hat{f}\|_2$ . Uvedimo notaciju  $\bar{U} = [u_1, \dots, u_{l-1}] \in \mathbb{R}^{n \times (l-1)}$ ,  $\bar{P} = [e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_{l-1}}] \in \mathbb{R}^{n \times (l-1)}$ ,  $u = u_l \in \mathbb{R}^n$ ,  $p = e_{\rho_l} \in \mathbb{R}^n$ ,  $U = [\bar{U}, u] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $P = [\bar{P}, p] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

Neka je  $M = P^T U$  i promatramo  $\|M^{-1}\|_2$  iz DEIM algoritma. U prvom koraku  $P = e_{\rho_1}$  i  $U = u_1$ , tj.

$$M = P^T U = e_{\rho_1}^T u_1, \|M^{-1}\|_2 = \frac{1}{|e_{\rho_1}^T u_1|} = \|u_1\|_\infty^{-1} \geq 1.$$

Dakle, za  $m = 1$ ,  $C = \|M^{-1}\|_2 = \|u_1\|_\infty^{-1}$ . Izbor prvog interpolacijskog indeksa  $\rho_1$  minimizira matičnu normu  $\|M^{-1}\|_2$ .

Promotrimo sada korak  $l \geq 2$ . S  $M = P^T U, \bar{M} = \bar{P}^T \bar{U}$  možemo napisati

$$M = \begin{bmatrix} \bar{M} & \bar{P}^T u \\ p^T \bar{U} & p^T u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ a^T & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$a^T = p^T \bar{U}$ ,  $c = \bar{M}^{-1} \bar{P}^T u$  i  $\rho = p^T u - a^T c = p^T (u - \bar{U} \bar{M}^{-1} \bar{P}^T u)$ ,  $|\rho| = \|r\|_\infty$ , gdje je  $r$  definiran kao u DEIM algoritmu. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{bmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ -\rho^{-1} a^T \bar{M}^{-1} & \rho^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\rho^{-1} a^T & \rho^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho^{-1} \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^T & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Granica za 2-normu od  $M^{-1}$  dana je s

$$\|M^{-1}\|_2 \leq \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 + |\rho|^{-1} \left\| \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^T & -1 \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|_2.$$

Primijetimo

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a^T & -1 \end{bmatrix} \right\|_2 &= \left\| \begin{bmatrix} \bar{U} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a^T & -1 \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \|\bar{U}c - u\|_2 \left\| \begin{bmatrix} a^T & -1 \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{1 + \|a\|_2} \sqrt{n} \|\bar{U}c - u\|_\infty \leq \sqrt{2n} |\rho|. \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u ocjenu na 2-normu od  $M^{-1}$  dobivamo

$$\|M^{-1}\|_2 \leq (1 + \sqrt{2n}) \|\bar{M}^{-1}\|_2 \leq (1 + \sqrt{2n})^{m-1} \|u_1\|_\infty^{-1},$$

gdje zadnju ocjenu dobivamo rekurzivno primjenjujući ocjenu za svaki korak  $m$  puta.  $\square$

### 3.4 Računanje aproksimacije

Pretpostavimo da smo dobili aproksimaciju nelinearne funkcije  $F$  pomoću POD-DEIM algoritama, tj.

$$F(V_k \tilde{y}(t)) = U(P^T U)^{-1} P^T F(V_k \tilde{y}(t)).$$

Primijetimo da matrica  $U(P^T U)^{-1}$  ne ovisi o  $\tilde{y}$  pa nju možemo izračunati unaprijed. Ukoliko je  $F = [F(y_1(t)), \dots, F(y_n(t))]^T, F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , za  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ , tada aproksimacija glasi:

$$F(V_k \tilde{y}(t)) = U(P^T U)^{-1} F(P^T V_k \tilde{y}(t)).$$

Primijetimo da  $P^T V_k$  također ne ovisi o  $\tilde{y}$  te se može izračunati unaprijed. Konačno, pri evaluiranju nelinearne funkcije, umjesto da ju evaluiramo  $n$  puta, evaluiramo ju  $m$  puta,  $m \ll n$ .

Ukoliko je  $F$  općenitog oblika  $[F(y)]_i = F_i(y) = F_i(y_{j_1}^i, \dots, y_{j_{n_i}}^i)$   $J_i = [j_1^i, \dots, j_{n_i}^i]$ , tada pri računanju  $P^T F(V_k \tilde{y}(t))$  moramo drugačije postupati. Primijetimo:

$$F(V_k \tilde{y}) = [F_1(V_k(J_1, \cdot) \tilde{y}), \dots, F_n(V_k(J_n, \cdot) \tilde{y})],$$

odnosno

$$F(V_k \tilde{y}) = [F_{\rho_1}(V_k(J_{\rho_1}, \cdot) \tilde{y}), \dots, F_{\rho_m}(V_k(J_{\rho_m}, \cdot) \tilde{y})].$$

U ovom zapisu funkciju  $F$  također evaluiramo u  $m$  točaka, ali pitanje je kako to implementirati. Možemo koristiti dva vektora: *irstart* duljine  $m + 1$  i *jrow* duljine  $\sum_{i=1}^m n_{\rho_i}$ . Ovisnost  $F_i$  o pojedinim varijablama može se opisati pomoću ta dva vektora i to tako da  $F_i$  ovisi o varijablama s indeksima na lokacijama *jrow*(*irstart*(*i*)) do *jrow*(*irstart*(*i*+1))−1. Ukoliko imamo  $V_k$  i  $\tilde{y}$ ,  $F_{\rho_i}(V_k \tilde{y})$  računamo na slijedeći način:

za  $i = 1 : m$   
 za  $j = 1 : m$   
 $J_{\rho_i} = \text{jrow}(\text{irstart}(i) : \text{irstart}(i + 1) - 1)$   
 $\tilde{F}_{\rho_i}(\tilde{y}) = F_{\rho_i}(V_k(J_{\rho_i}, :)\tilde{y})$

### 3.5 Q-DEIM

Vođeni idejom DEIM algoritma, možemo probati odabrati indekse interpolacije na različite načine, a jedan od njih je i Q-DEIM, u kojem se indeksi interpolacije biraju pomoću QR-faktorizacije s pivotiranjem. [9] U ovoj verziji algoritma izbor indeksa ne ovisi o poretku

---

#### Algoritam 4 Q-DEIM

---

- 1: **ulaz:**  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{R}^n$  linearno nezavisni
  - 2:  $Q, R, P = \text{qr}(U^T)$
  - 3: Vрати  $P(1 : m)$
- 

baze te također imamo bolju gornju ogradu za grešku interpolacije, o čemu govori slijedeći teorem.

**Teorem 3.5.1.** *Neka je  $U \in \mathbf{R}^{n \times m}$  ortogonalna,  $m < n$ . Neka su  $\rho_1, \dots, \rho_m$  indeksi odabrani Q-DEIM algoritmom, gdje ulaz čine stupci matrice  $U$  i neka je  $P = [e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_n}]$ . Tada vrijedi:*

$$\|(P^T U)^{-1}\|_2 \leq \frac{\sqrt{n - m + 1}}{\sigma_{\min}(U)} \frac{\sqrt{4^m + 6m - 1}}{3}$$

i za svaki  $f \in \mathbf{R}^n$

$$\|f - U(P^T U)^{-1} P^T f\|_2 \leq \sqrt{1 + m(n - m)} \|f - U U^T f\|_2.$$

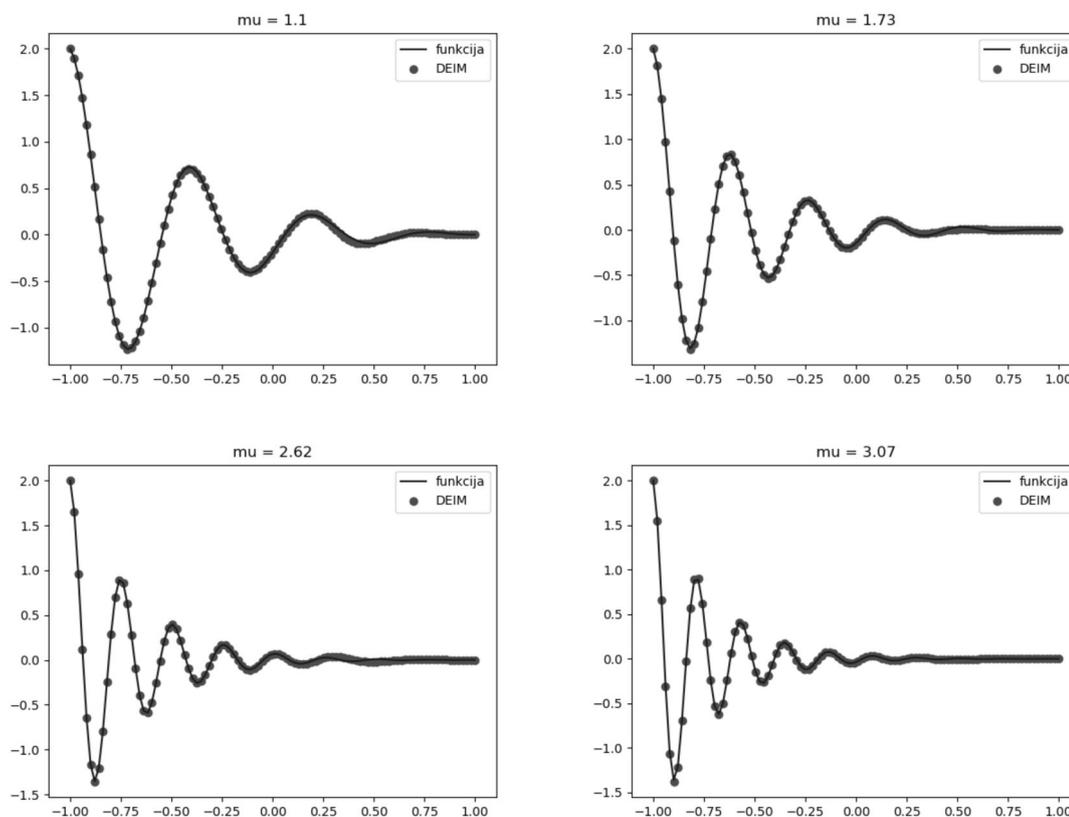
### 3.6 Primjeri

#### Nelinearna parametrizirana funkcija s prostornim točkama u jednoj dimenziji

Neka je dana funkcija  $s : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$s(x; \mu) = (1 - x) \cos(3\pi\mu(x + 1)) e^{-(1+x)\mu},$$

gdje je  $x \in \Omega = [-1, 1]$  i  $\mu \in \mathcal{D} = [1, \pi]$ . Neka je  $[x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ , gdje su  $x_i$  ekvidistantne točke u  $\Omega$  za  $i = 1, \dots, n$ ,  $n = 100$ . Definiramo  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$  s:



Slika 3.1: Razlike između aproksimacije i funkcije za  $\mu_0 = 1.1$ ,  $\mu_1 = 1.73$ ;  $\mu_0 = 2.62$ ,  $\mu_1 = 3.07$

$$f(\mu) = [s(x_1; \mu), \dots, s(x_n; \mu)]^T \in \mathbf{R}^n$$

za  $\mu \in \mathcal{D}$ . U ovom primjeru koristit ćemo 51 sliku  $f(\mu_j)$ , gdje su  $\mu_1, \dots, \mu_{51}$  ekvidistantne točke u  $[1, \pi]$ . Na sljedećim slikama usporedit ćemo rezultate DEIM aproksimacije dimenzije 10 i početne funkcije.

### Nelinearna parametrizirana funkcija s prostornim točkama u dvije dimenzije

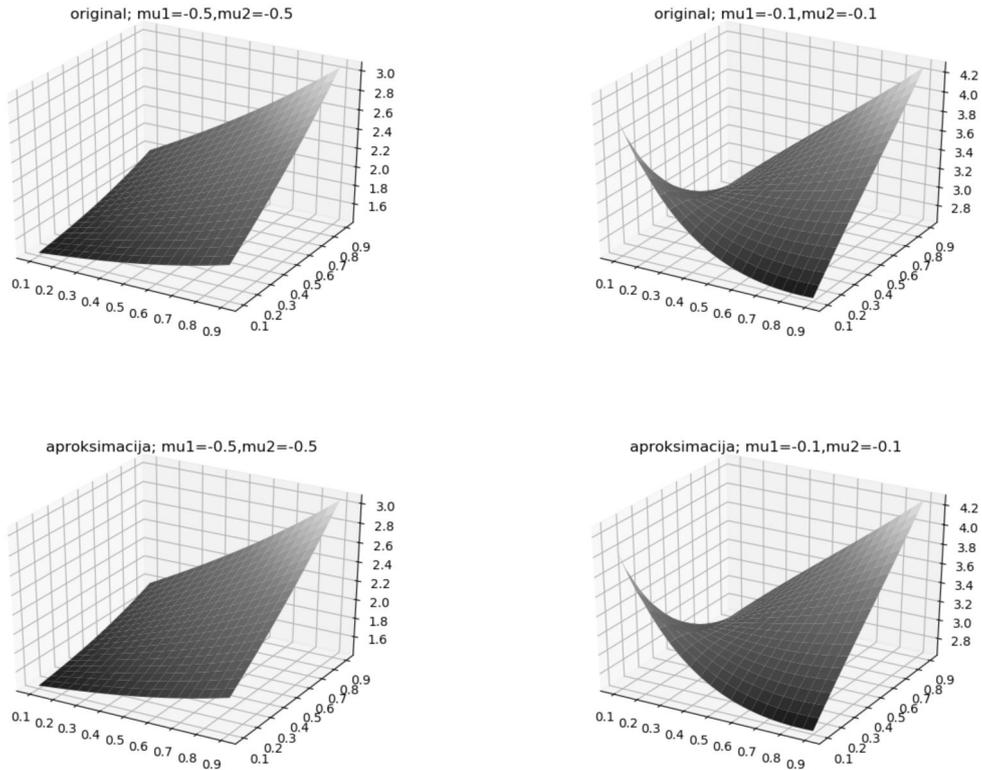
Neka je dana funkcija  $s : \Omega \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$s(x, y; \mu) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{(x - \mu_1)^2 + (y - \mu_2)^2 + 0.01}},$$

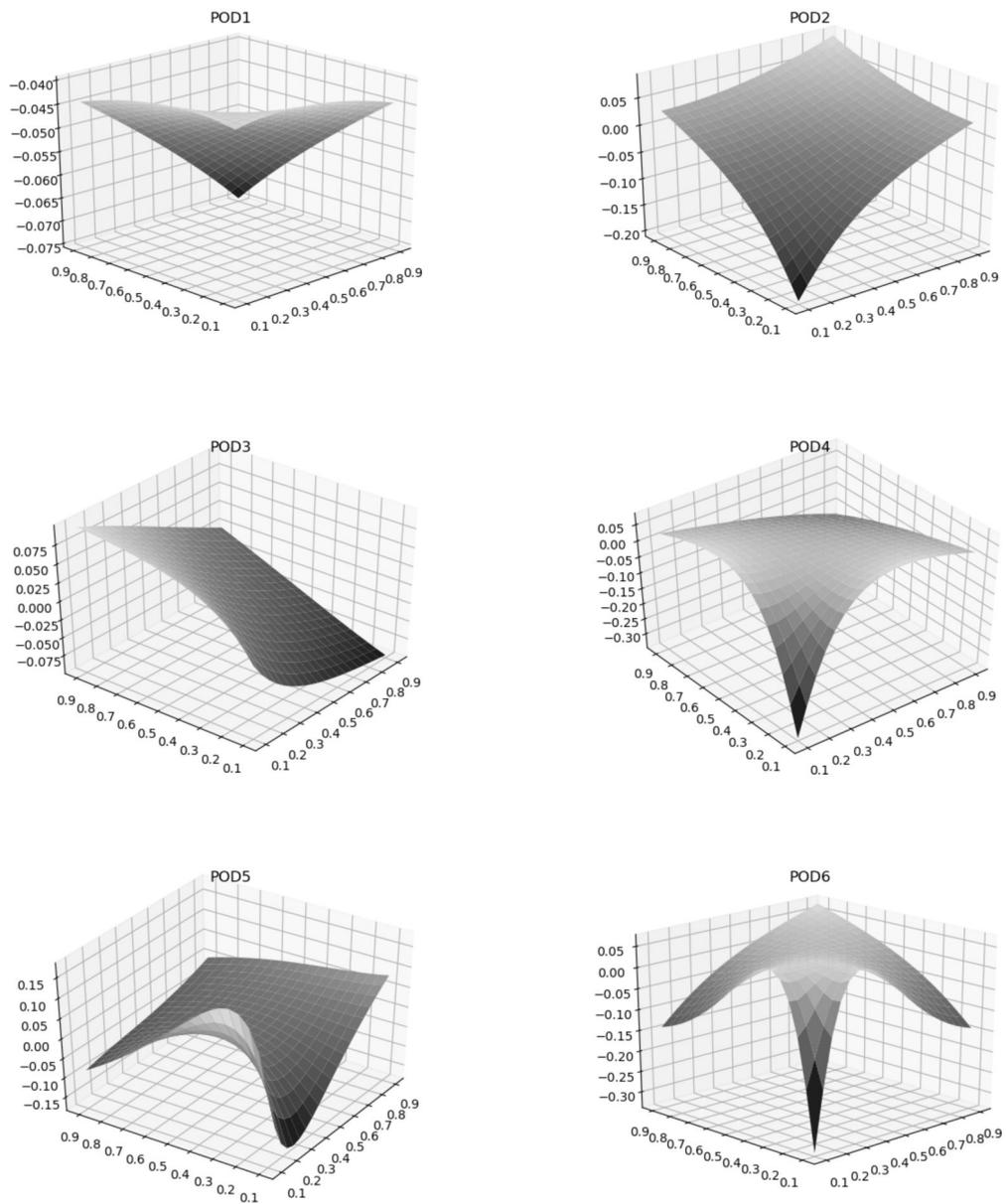
gdje je  $(x, y) \in \Omega = [0.1, 0.9]^2 \subset \mathbf{R}^2$  i  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D} = [-1, -0.1]^2 \subset \mathbf{R}^2$ . Neka je  $(x_i, y_j)$  uniformna mreža u  $\Omega$  za  $i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y$ . Definiramo  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^{n_x \times n_y}$  s:

$$s(\mu) = [s(x_i, y_j; \mu)] \in \mathbf{R}^{n_x \times n_y}, i = 1, \dots, n_x, j = 1, \dots, n_y, \mu \in \mathcal{D}.$$

Puna dimenzija je  $n = n_x n_y = 400$  ( $n_x = n_y = 20$ ). Odgovarajuću funkciju  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$  kao u prethodnom primjeru dobivamo razmotavanjem  $s(\mu)$  u vektor za svaki odabrani parametar  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ . Odabrano je uniformno 225 parametara. Najveće singularne vrijednosti su: 621.93, 34.92, 21.27, 3.98, 2.34, 0.79, 0.33, 0.27, 0.09, 0.05) Na slijedećim slikama vidimo funkciju i njenu aproksimaciju za određene parametre te prvih 6 vektora POD baze.



Slika 3.2: usporedba originala i POD-DEIM aproksimacije za neke parametre, vidimo da su gotovo identični



Slika 3.3: prvih 6 vektora POD baze

### 3.7 Primjena DEIM algoritma za smanjivanje dimenzije parametarski ovisnih dinamičkih sustava

Neka je zadan sustav:

$$E\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + Bg(t), \quad t \geq 0,$$

neka je dana POD baza ranga  $k$  i neka njeni vektori čine matricu

$$E_r \dot{y}_r(t) = A_r y_r(t) + f_r(y_r(t)) + B_r g(t),$$

pri čemu je

$$E_r = V^T E V, A_r = V^T A V, B_r = V^T B, \text{ i } f_r(y_r(t)) = V^T f(V y_r(t)).$$

Pri konstruiranju POD baze, također posebno evaluiramo nelinearni član  $f_r(y_r(t))$  i rezultate spremamo u matricu  $F$  te za nelinearni član odredimo POD bazu ranga  $l$ , čiji bazni vektori čine matricu  $U$ , pomoću DEIM algoritma primjenjenog na stupcima matrice  $U$  dobivamo interpolacijske indekse  $i$  i matricu  $P$ . Neka je  $f_{deim}(y_r) = U(P^T U)^{-1} P^T f(V y_r)$ . Konačno, reducirani sustav koji rješavamo glasi:

$$E_r \dot{y} = A_r y + V^T f_{deim}(y_r) + B_r g(t).$$

### 3.8 Ostale primjene

POD-DEIM možemo primijeniti na različite tipove problema. Jedan od njih je i postavljanje senzora. Pretpostavimo da imamo neku domenu dimenzije  $n$  i određen broj senzora  $p \ll n$ , tj. točaka u kojima možemo napraviti mjerenja. Želimo senzore postaviti tako da naša mjerenja budu što bolja, odnosno da preko stanja izmjenjenog u manjem broju točaka možemo opisati stanje sustava. Obično se senzori postavljaju po nekim heuristikama ili intuitivno te je važno razviti preciznu matematičku metodu za taj problem. Kad bismo probali sve moguće kombinacije, imali bismo  $\binom{n}{p}$  kombinacija što je previše da bismo mogli isprobati svaku od njih. Brza metoda za određivanje položaja senzora koristi se za kontrolu toka, u epidemiologiji, u neuroznanosti itd. Nakon što i formuliramo problem postavljanja senzora, demonstrirat ćemo pronalaženja ključnih točaka na licu pomoću ove tehnike, što može olakšati brzo uočavanje i prepoznavanje lica s fotografija ili videa.

Mnogi fizikalni sustavi opisani su sa stanjem  $x \in \mathbb{R}^n$ , ali dinamika evoluira na niže-dimenzionalnom prostoru. Pretpostavimo da stanje  $x$  evoluira po pravilu  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Neka je  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrica čiji su stupci vektori prigodne baze preko koje možemo opisati  $x$ :

$$x = \Psi s, s \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je  $s$  *sparse*, tj. ima puno nula. U posebnoj bazi  $\Psi_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , kao što je POD baza, imamo reprezentaciju nižeg ranga, tj.

$$x = \Psi_r a, a \in \mathbb{R}^r.$$

Cilj je naći matricu  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , takvu da pomoću malog broja mjerenja  $p \ll n$

$$y = Cx, y \in \mathbb{R}^p,$$

možemo rekonstruirati vektore  $s$  ili  $a$ , te samim time i  $x$ . Vrijedi

$$Y = (C\Psi)s = \Phi s$$

ili ako gledamo reprezentaciju nižeg ranga

$$Y = (C\Psi_r)a = \Phi_r a.$$

U oba slučaja,  $C$  se obično sastoji od redaka jedinične matrice koji odgovaraju točkama na kojima se nalaze senzori.  $C$  je odabrana tako da je operator  $\Phi$  pogodan za rekonstrukciju signala, bilo s  $\downarrow_1$  minimizacijom ili prekopsedoinverza. Obično gledamo  $p > r$  i tada  $x$  možemo rekonstruirati kao:

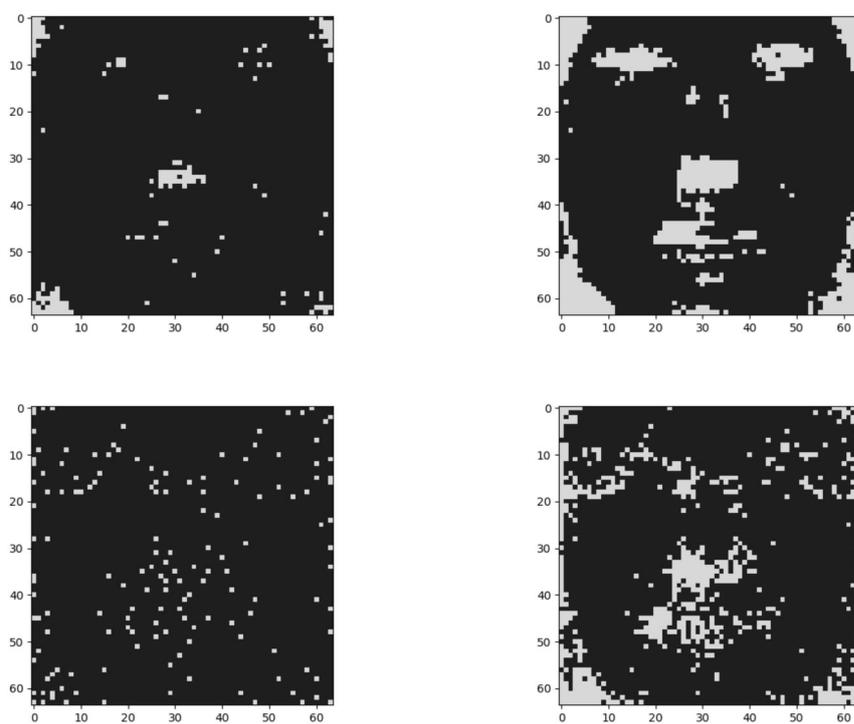
$$x \approx \Phi_r (C\Phi_r)^\dagger y. \quad (3.2)$$

Inspirirano Q-DEIM algoritmom, u [5], matrica  $C$  dana je s  $C = [e_{\gamma_1} \ e_{\gamma_2} \ \dots \ e_{\gamma_p}]$ , pri čemu su  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  točke na kojima su senzori određeni kao poredak pivotiranja u QR faktorizaciji matrice  $\Phi_r \Phi_r^T$ . Demonstrirajmo to sada na problemu rekonstrukcije slike.

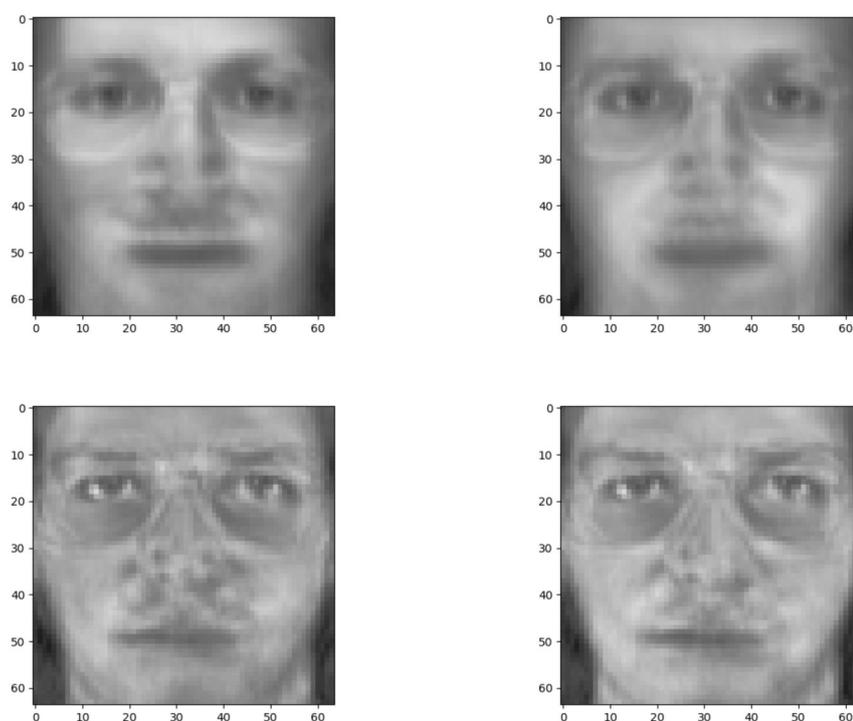
Dan je skup lica 40 osoba i to po 10 slika svake osobe. Slike su dimenzija  $64 \times 64$  piksela. Sliku svakog lica možemo zapisati kao vektor duljine 4096. Konstruiramo matricu čiji su stupci vektorizirani zapisi slika. Na toj matrici odredimo POD bazu. Vektore te baze također možemo prikazati kao  $64 \times 64$  sliku, što je prikazano na slijedećoj slici. Sada ćemo probati odrediti senzore, tj. u ovom slučaju ključne točke na licu. Već sa 150 senzora, što je nešto više od 3% podataka, možemo rekonstruirati cijelu sliku. Rezultati su prikazani na slijedećim slikama:



Slika 3.4: Prvih 20 vektora POD baze, možemo vidjeti da prvi vektori POD baze općenite značajke lica poput očiju, usta, nosa i obrva, dok daljnji vektori opisuju konkretnije detalje na licima.



Slika 3.5: Razmještaj senzora redom za POD bazu dimenzije 20 i 150 i 650 senzora te, razmještaj senzora za POD bazu dimenzije 100, s 150 i 650 senzore: Vidimo da senzori detektiraju točke na kojima je jači kontrast poput obrva, nosa, usana i obrisa glave.



Slika 3.6: Rekonstrukcija slike lica s istim parametrima

# Poglavlje 4

## Dinamička modalna dekompozicija

### 4.1 Uvod

Promatramo podatke prikupljene iz sustava

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu), \quad (4.1)$$

gdje je  $x(t) \in \mathbb{R}$  stanje sustava u trenutku  $t$ ,  $\mu$  parametar sustava a  $f(\cdot)$  predstavlja dinamiku sustava. Stanje je obično velike dimenzije i često dolazi od diskretizacije parcijalne diferencijalne jednačbe. Prikupljamo stanja koja su vremenski udaljena za  $\Delta t$  i stanja  $x_k = x(k\Delta t)$ . Označimo diskretni vremenski tok za  $\Delta t$  s  $F$ :

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

i mjerenja sustava

$$y_k = g(x_k).$$

Često promatramo upravo slučaj  $y_k = x_k$ . U DMD pristupu ne moramo nužno znati dinamiku  $f(x, t; \mu)$  već koristimo mjerenja  $y_k$  da bismo opisali buduća stanja sustava. DMD algoritam konstruira linearni sustav koji lokalno aproksimira početni, tj. konstruira se  $\mathcal{A}$  i

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x$$

s početnim uvjetom  $x(0)$  i rješenjem:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \phi_k e^{\omega_k t} b_k = \Phi e^{\Omega t} b,$$

gdje su  $\phi_k$  i  $\omega_k$  svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti matrice  $\mathcal{A}$  i  $b_k$  koordinate početnog uvjeta  $x(0)$  u bazi svojstvenih vektora. U diskretnom slučaju to možemo zapisati kao

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

gdje je

$$A = e^{\mathcal{A}\Delta t}.$$

Rješenje u diskretnom slučaju može se napisati u terminima svojstvenih vrijednosti  $\lambda_k$  i svojstvenih vektora  $\psi_k$ :

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \psi_i \lambda_i^k b_i = \Psi \Lambda^k b,$$

pri čemu je  $b$  raspis početnog uvjeta  $x_1$  u bazi svojstvenih vektora, tj.  $x_1 = \Psi b$ . DMD algoritam određuje matricu  $A$  tako je

$$\|x_{k+1} - Ax_k\|_2$$

minimizirana po svim točkama  $k = 1, 2, \dots, m-1$ . Optimalnost vrijedi samo na stanjima koje smo odredili, ali može biti korišteno za predviđanje budućih stanja i za dekompoziciju dinamike u različite vremenske raspone.

## 4.2 Matematičko rješenje

Pretpostavimo da imamo stanja sustava  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Neka su dane matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \end{bmatrix} \text{ i } X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_m \end{bmatrix}.$$

Tražimo kvadratnu matricu  $A$  tako da vrijedi

$$X' \approx AX.$$

Želimo minimizirati

$$\|X' - AX\|_F,$$

gdje je  $\|\cdot\|_F$  Frobeniusova norma matrice. Rješenje tog problema je dano s

$$A = X'X^\dagger.$$

Primjetimo da čim je dimenzija stanja  $x_i$  velika, da je i  $A$  jako skupa za računanje zbog njene veličine i zbog tog što je  $X^\dagger$  također skupo. Ovu poteškoću bismo željeli zaobići i to ćemo postići projiciranjem podataka na niže-dimenzionalni potprostor definiran s POD bazom najviše  $m - 1$  ćemo zatim riješiti evouciju  $\tilde{A}$  te ćemo taj operator koristiti da bismo rekonstruirali vodeće svojstvene vrijednosti različite od nule i pripadajuće svojstvene vektore bez eksplicitnog računanja matrice  $A$ . Sada možemo izraziti definiciju dinamičke modalne dekompozicije.

**Definicija 4.2.1.** *Pretpostavimo da imamo sustav*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu)$$

*i dva skupa podataka  $X$  i  $X'$  definirani kao prije i neka je  $x'_k = F(x_k)$ , gdje pomoću  $F$  određujemo evoluciju za  $\Delta t$ . DMD računa vodeće svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti operatora  $A$  koji opisuje podatke  $X' \approx AX$  i zadan je s:*

$$A = X'X^\dagger.$$

*DMD modovi ili dinamički modovi su svojstveni vektori od  $A$  i svaki DMD mod odgovara određenoj svojstvenoj vrijednosti od  $A$ .*

### 4.3 DMD algoritam

U praksi, kad je dimenzija stanaj  $n$  velika, matricu  $A$  ne može analizirati direktno. Umjesto toga, DMD dobiva svojstvene vrijednosti i vektore od  $A$  pomoću reducirane reprezentacije u teminima POD-projicirane matrice  $\tilde{A}$ . Tijek algoritma ide ovako:

1. Prvo, uzmimo SVD dekompoziciju od  $X$ :

$$X = U\Sigma V^*,$$

gdje je  $U \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{C}^{r \times r}$  i  $V \in \mathbb{C}^{m \times r}$ . Ovdje je  $r$  rang reducirane SVD aproksimacije  $X$  (tj. i rang matrice  $X$ ). Lijevi singularni vektori  $U$  su POD modovi.

2. Matricu  $A$  sada možemo dobiti računanjem pseudo-inverza od  $X$  preko SVD dekompozicije:

$$A = X'V\Sigma^{-1}U^*.$$

U praksi, efikasnije je računati  $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ :

$$\tilde{A} = U^*AU = U^*X'V\Sigma^{-1}.$$

Matrica  $\tilde{A}$  definira nižedimenzionalni linearni model za dinamički sustav u POD koordinatama:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k.$$

Originalno stanje možemo rekonstruirati kao  $x_k = U\tilde{x}_k$ .

3. Izračunajmo svojstvene vektore i vrijednosti od  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}W = W\Lambda,$$

gdje su stupci matrice  $W$  svojstveni vektori i  $\Lambda$  dijagonalna matrica s odgovarajućim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_k$ .

4. Konačno, možemo rekonstruirati svojstvenu dekompoziciju od  $A$  u terminima  $W$  i  $\Lambda$ . Svojstvene vrijednosti od  $A$  dane su s  $\lambda$ , a svojstveni vektori od  $A$  (DMD modovi) dani su sa stupcima matrice  $\Phi$ :

$$\Phi = X'V\Sigma^{-1}W.$$

Primijetimo da na ovaj način dobivamo sve svojstvene vektore za svojstvene vrijednosti različite od 0. S aproksimacijom nižeg ranga, rješenja za buduća vremena mogu biti stalno konstruirana. Neka je  $\omega_k = \ln(\lambda_k/\Delta t)$ . Tada je aproksimirano rješenje jednako:

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^r \phi_k e^{\omega_k t} b_k = \Phi e^{\Omega t} b,$$

gdje je  $\Phi$  matrica čiji su stupci DMD modovi  $\phi_k$  i  $\Omega = \text{diag}(\omega)$  je dijagonalna matrica čije su vrijednosti na dijagonali  $\omega_k$ ,  $b_k$  je početna vrijednost u  $k$ -tom DMD modu.  $\Phi_k$  je istih dimenzija kao i stanje  $x$ .

Trebamo još izračunati početne koeficijente  $b_k$ . Ukoliko pogledamo inicijalno stanje  $x_1$  u vremenu  $t_1 = 0$ , tada je  $x_1 = \Phi b$ . Matrica svojstvenih vrijednosti  $\Phi$  općenito nije kvadratna matrica pa se početni koeficijenti mogu izračunati koristeći pseudoinverz:

$$b = \Phi^\dagger x_1.$$

To je ekvivalentno pronalaženju najboljeg rješenja  $b$  u smislu najmanjih kvadrata. Sažeto, imamo slijedeći algoritam:

---

**Algoritam 5 DMD**


---

```

1: ulaz: matrica  $X$  i pomaknuta matrica  $X'$   $r =$  ciljani rang SVD dekompozicije  $dt =$ 
   vremenski korak u kojem  $X$  prelazi u  $X'$ 
2:  $U, S, V = svd(X1)$ 
3:  $r = \min(r, \text{size}(U, 2))$ 
4:  $U_r = U(:, 1 : r)$ 
5:  $V_r = V(:, 1 : r)$ 
6:  $\tilde{A} = U_r' X' V_r / S_r$ 
7:  $W_r, D = eig(\tilde{A})$ 
8: Izračunaj DMD modove:  $\Phi = X' V_r / S_r W_r$ 
9: Diskretne svojstvene vrijednosti:  $\lambda = diag(D)$ 
10: Kontinuirane svojstvene vrijednosti  $\omega = \log(\lambda) / dt$ 
11:  $b = \Phi x_1$ 
12:  $mm1 = \text{size}(X, 2)$  ( $mm1 = m - 1$ )
13:  $\text{vremenskaDinamika} = \text{zeros}(r, mm1)$ 
14: Vremenski vektor:  $t = (0 : mm1 - 1) * dt$ 
15: za  $iter = 1 : mm1$  radi
16:    $\text{vremenskaDinamika}(:, iter) = (b * \exp(\omega * t(iter)))$ 
17:  $X_{dmd} = \Phi * \text{vremenskaDinamika}$ 
18: vrati  $\Phi, \omega, \lambda, b, X_{dmd}$ 

```

---

## 4.4 Koopmanova spektralna teorija

**Definicija 4.4.1.** *Promotrimo dinamički sustav*

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

*Neka je funkcija  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^n$  opservabla. Koopmanov operator  $K$  je beskonačno- dimenzionalni operator definiran s*

$$Kg(x) = g(f(x)).$$

Koopmanov operator je linearan na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$  svih opservabli  $g$ . Koopmanov operator može se definirati i za dinamičke sustave u diskretnom vremenu. Iz dinamičkog sustava u kontinuiranom vremenu dobivamo  $F_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  koje preslikava

početno stanje  $x(t_0)$  u stanje  $x(t_0 + t)$ :

$$F_t(x(t_0)) = x(t_0 + t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} f(x(\tau))d\tau,$$

tj. imamo dinamički sustav u diskretnom vremenu

$$x_{k+1} = F_t(x_k),$$

gdje je  $x_k = x(kt)$ . Sada Koopmanov operator  $\mathcal{K}_t$  definiramo s  $\mathcal{K}_t g = g \circ F_t$ , tj. vrijedi

$$\mathcal{K}_t g(x_k) = g \circ F_t(x_k) = g(x_{k+1}).$$

Od interesa je odrediti spektar i svojstvene vektore Koopmanovog operatora, tj riješiti svojstvenu zadaću

$$\mathcal{K}_t \rho_k = \lambda_k \rho_k.$$

Neka je  $g$  vektor opservabli, tj.

$$g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{bmatrix}.$$

Kod promatranja vektora  $g$ , imamo slijedeći zapis

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(x) v_k,$$

gdje je  $v_k$   $k$ -ti Koopmanov mod vezan uz  $k$ -tu Koopmanovu svojstvenu funkciju  $\rho_k$ .

Dinamička modalna dekompozicija korsi se za aproksimaciju svojstvenih vektora  $\lambda_k$  i modova  $v_k$  Koopmanovog operatora. Ključnu ulogu igra izbor opservabli. Neka je  $g$  opservabla. Neka je  $X$  matrica ulaznih podataka i  $Y = (y_k)$ , pri čemu je  $y_k = g(x_k)$  i  $Y' = (y_k)'$ , pri čemu je  $y'_k = g(f(x_k))$ . Ukoliko napravimo DMD na matricama  $Y$  i  $Y'$  dobit ćemo spektralnu dekompoziciju matrice  $A = Y'Y^\dagger$ . Jedina razlika je što je DMD izračunat na prostoru opservabli, a ne na prostoru stanja sustava. Svojstvene funkcije Koopmanovog operatora  $\rho_k(x)$  definiraju koordinate na kojima je moguće opisati mjerenja s linearnim dinamičkim sustavom. Slijedeći teorem povezuje DMD i Koopmanov operator.

**Teorem 4.4.2.** *Neka je  $(\lambda_k, \rho_k)$  svojstveni par Koopmanovog operatora  $K$  i neka je  $\rho_k \in \text{span}\{g_j : j = 1, \dots, p\}$ , za svaki  $k$  pa za svaki  $w \in \mathbb{C}^p$  možemo pisati:*

$$\rho_k = w_1 g_1(x) + w_2 g_2(x) + \dots + w_p g_p(x) = w \cdot g.$$

*Ako je  $w \in \text{Im}(Y)$ , onda je  $w$  lijevi svojstveni vektor od  $A$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda_k$ , tj.*

$$w^* A = \lambda_k w^*.$$

Dakle, to pokazuje da su svojstvene vrijednosti Koopmanovog operatora također i DMD svojstvene vrijednosti uz uvjet da je skup opservabli dovoljno velik tako da je  $\rho_k(x) \in \text{span}\{g_j\}$  i da su podaci dovoljno bogati. To pokazuje da je izbor opservabli ključan za povezivanje DMD teorije i Koopmanove spektralne analize. Ako to možemo postići, možemo uzeti stanja konačno-dimenzionalnog nelinearnog sustava u vremenu i reparametrizirati ga kao linearni, beskonačno-dimenzionalni sustav. Ta reprezentacija dijagonalizira dinamiku i pokazuje vremensku evoluciju svake svojstvene funkcije.

## 4.5 Online DMD

DMD algoritam ima 2 nedostatka. Prvo, potrebno je računati pseudoinverz od  $X_k$  svaki put kad dobijemo nova mjerenja. Drugo, sva mjerenja spremamo u jednu matricu te ukoliko imamo puno mjerenja, samo spremanje u memoriju može biti jako zahtjevno. Da bismo riješili prvi problem, opisat ćemo Online DMD algoritam, opisan u [2], koji je baziran na ideji da je matrica  $A_{k+1}$  u nekom smislu bliska matrici  $A_k$ .

Promatrajmo malo općenitiji problem. Pretpostavimo da imamo matrice  $X_k = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{bmatrix}$  i  $Y_k = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_k \end{bmatrix}$  i želimo naći  $A$  tako da je  $\|Y_k - AX_k\|_F$  minimalno.

Pretpostavimo da je  $k$ , odnosno broj mjerenja puno veći od  $n$  i da je  $X_k$  ranga  $n$ , tj.  $X_k X_k^T$  je invertibilna i vrijedi:

$$X_k^\dagger = X_k^T (X_k X_k^T)^{-1}.$$

Sada, rješenje  $A_k$  dano je s

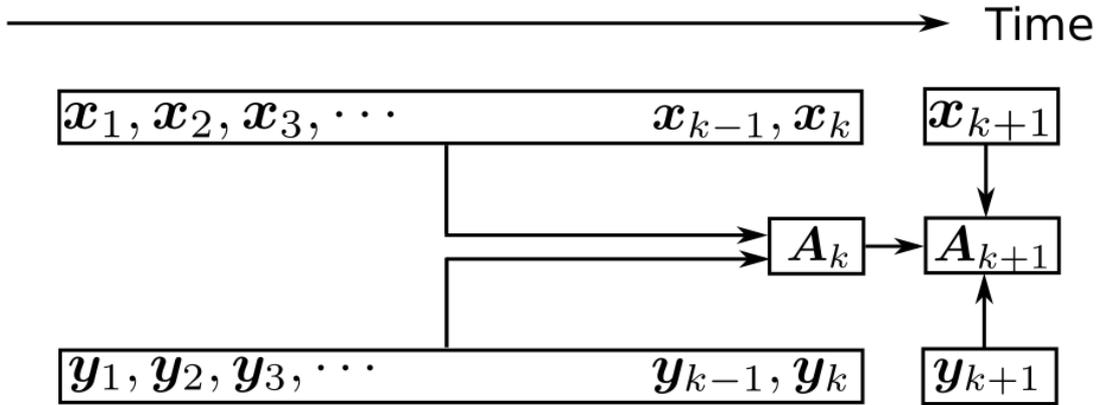
$$A_k = Y_k X_k^T (X_k X_k^T)^{-1} = Q_k P_k,$$

gdje su  $Q_k$  i  $P_k$   $n \times n$  matrice dane s

$$Q_k = Y_k X_k^T \text{ i } P_k = (X_k X_k^T)^{-1}.$$

U  $k + 1$ -vom vremenskom koraku, želimo izračunati  $A_{k+1} = Q_{k+1} P_{k+1}$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= Y_{k+1} X_{k+1}^T = \begin{bmatrix} Y_k & y_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k & x_{k+1} \end{bmatrix}^T = Y_k X_k^T + y_{k+1} x_{k+1}^T \\ P_{k+1}^{-1} &= X_{k+1} X_{k+1}^T = \begin{bmatrix} X_k & x_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k & x_{k+1} \end{bmatrix}^T = X_k X_k^T + x_{k+1} x_{k+1}^T. \end{aligned}$$



Slika 4.1: Shematski prikaz online DMDa

Ove jednakosti pokazuju pomoću  $Q_k$  i  $P_k^{-1}$  jednostavno možemo naći  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= Q_k + y_{k+1}x_{k+1}^T \\ P_{k+1}^{-1} &= P_k^{-1} + x_{k+1}x_{k+1}^T. \end{aligned}$$

Sada, ažurirana DMD matrica  $A_{k+1}$  dana je s

$$A_{k+1} = Q_{k+1}P_{k+1} = (Q_{k+1} + y_{k+1}x_{k+1}^T)(P_k^{-1} + x_{k+1}x_{k+1}^T)^{-1}.$$

Slijedeći problem je kako efikasno izračunati  $P_{k+1}$  iz  $P_k$ . Naime, direktno računanje inverza ne bi bilo efikasno, ali kako su  $P_{k+1}$  i  $P_k$  vezani na poseban način, možemo iskoristiti formulu inverzije poznatiju kao Sherman-Morrisonova formula.

Pretpostavimo da je  $A$  invertibilna kvadratna matrica i  $u$  i  $v$  stupčani vektori. Tada je  $A + uv^T$  invertibilna akko je  $1 + v^T A^{-1}u \neq 0$  i u tom slučaju inverz je dan sa Sherman-Morrisonovom formulom:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}.$$

Koristeći tu formulu, dobivamo:

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + x_{k+1}x_{k+1}^T)^{-1} = P_k - \gamma_{k+1}P_k x_{k+1}x_{k+1}^T,$$

gdje je

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1}}.$$

Primjetimo da je zbog pozitivne definitnosti matrice  $P_k 1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1}$  uvijek različit od nule pa je  $\gamma_{k+1}$  dobro definiran. Dakle, ažurirana DMD matrica može se zapisati

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (Q_k + y_{k+1} x_{k+1}^T)(P_k - \gamma_{k+1} P_k x_{k+1}^T P_k) \\ &= Q_k P_k - \gamma_{k+1} Q_k P_k x_{k+1} x_{k+1}^T + y_{k+1} x_{k+1}^T P_{k+1} - \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k. \end{aligned}$$

Zadnja dva člana možemo pojednostavniti jer

$$\begin{aligned} x_{k+1} x_{k+1}^T P_k - \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k &= \gamma_{k+1} y_{k+1} (\gamma_{k+1}^{-1} - x_{k+1}^T P_k x_{k+1}) x_{k+1} P_k \\ &= \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k. \end{aligned}$$

Dakle, za ažuriranu matricu  $A_{k+1}$  vrijedi

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= Q_k P_k - \gamma_{k+1} Q_k P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k \\ &= A_k - \gamma_{k+1} A_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k. \end{aligned}$$

Konačno:

$$A_{k+1} = A_k + \gamma_{k+1} (y_{k+1} - A_k x_{k+1}) x_{k+1}^T P_k.$$

Intuitivno,  $y_{k+1} - A_k x_{k+1}$  može se gledati kao greška trenutnog modela  $A_k$ , tj. DMD matrica ažurira se dodajući član proporcionalan toj greški.

## 4.6 Težinski online DMD

Pretpostavimo da stalno ažuriramo naša mjerenja. Za pretpostaviti je da će vrijednosti nedavnih mjerenja biti puno važnije za predikciju novih stanja. Želimo smanjiti važnost početnih stanja. To možemo s malom modifikacijom Online DMD algoritma. Promotrimo sad modificiranu funkciju greške:

$$\tilde{J}_k = \sum_{i=1}^k \rho^{k-i} \|y_i - A_k x_i\|^2, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

$\rho$  je težinski faktor, kojim određujemo koliko brzo "zaboravljamo" prijašnja stanja. Radi lakšeg zapisa uvedimo  $\rho = \sigma^2$  i napišimo funkciju greške kao

$$\tilde{J}_k = \sum_{i=1}^k \|\sigma^{k-i} y_i - A_k \sigma^{k-i} x_i\|^2.$$

Ukoliko uvedemo matrice:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k &= \begin{bmatrix} \sigma^{k-1} x_1 & \sigma^{k-2} x_2 & \dots & x_k \end{bmatrix}, \\ \tilde{Y}_k &= \begin{bmatrix} \sigma^{k-1} y_1 & \sigma^{k-2} y_2 & \dots & y_{k+1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Tada se funkcija greške može zapisati na slijedeći način:

$$\tilde{J}_k = \|\tilde{Y}_k - A\tilde{X}_k\|_F^2.$$

Ovaj problem sveli smo na problem koji rješavamo DMD algoritmom te možemo razviti i *online* postupak, samo što je veza između  $\tilde{X}_{k+1} = [\rho X_k \quad x_{k+1}]$  i  $\tilde{Y}_{k+1} = [\rho Y_k \quad y_{k+1}]$ . Sličnim postupkom kao i kod određivanja ažuriranja za običan DMD, dobivamo

$$A_{k+1} = A_k + \gamma_{k+1}(y_{k+1} - A_k x_{k+1})x_{k+1}^T \hat{P}_k,$$

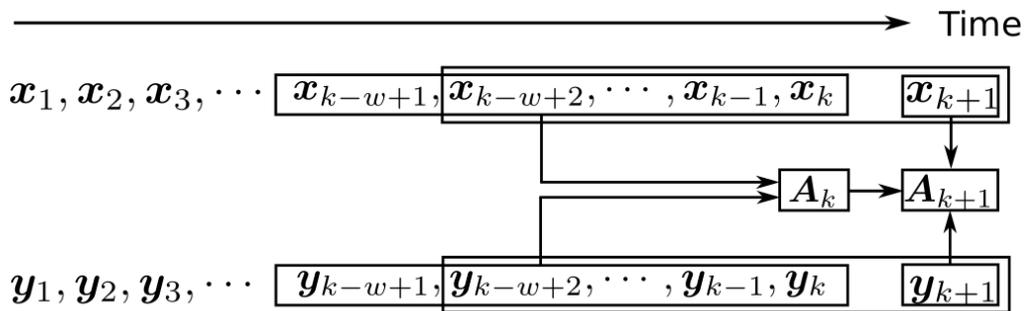
gdje je

$$\hat{P}_k = \frac{1}{\rho}(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T)^{-1} \text{ i } \gamma_{k+1} = \frac{1}{1 + x_{k+1}^T \hat{P}_k x_{k+1}}.$$

## 4.7 DMD s klizećim vremenskim prozorom

Ukoliko imamo jako puno stanja sustava, matrica  $X$  će biti jako velika i možda će njeno spremanje u memoriju biti jako zahtjevno. Kod težinskog DMDa, početna stanja će ubrzo izgubiti na važnosti u modelu pa nakon ih nakon nekog vremena možemo odbaciti. Ako pratimo sustav kroz vrijeme, možda nam ni ne trebaju sva stanja, već samo nekoliko prethodnih stanja. Sada formuliramo nešto drugačiji problem. Neka je  $w$  veličina prozora koji promatramo i mjerenja u zadnjih  $w$  koraka:

$$X_k = [x_{k-w+1} \quad x_{k-w+2} \quad \dots \quad x_k], \quad Y_k = [y_{k-w+1} \quad y_{k-w+2} \quad \dots \quad y_k].$$



Slika 4.2: Shematski prikaz DMDa s klizećim vremenskim prozorom

Tražimo  $n \times n$  matrixu  $A_k$  tako da vrijedi  $Y_k \approx A_k X_k$ , tj. minimiziramo

$$J_k = \|Y_k - A_k X_k\|_{k+1}^2.$$

Pretpostavljamo da je rang od  $X_k$  jednak  $n \leq w$  i tada je jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata dano s

$$A_k = Y_k X_k^\dagger.$$

Kao i kod razvoja online DMDa, imamo

$$A_k = Y_k X_k^\dagger = Y_k X_k (X_k X_k^T)^{-1} = Q_k P_k,$$

gdje

$$Q_k = Y_k X_k^T = \sum_{i=k-w+1}^k y_i x_i^T,$$

$$P_k = (X_k X_k^T)^{-1} = \left( \sum_{i=k-w+1}^k x_i x_i^T \right)^{-1}.$$

U  $k + 1$ -vom koraku želimo izračunati  $A_{k+1}$ . Kao kod online DMDa, želimo naći vezu između  $A_k$  i  $A_{k+1}$ . Vrijedi

$$Q_{k+1} = Y_{k+1} X_{k+1} = \sum_{i=k-w+2}^{k+1} y_i x_i^T = Q_k - y_{k-w+1} x_{k-2+1}^T + y_{k+1} x_{k+1}^T,$$

$$P_{k+1}^{-1} = \sum_{i=k-w+2}^{k+1} x_i x_i^T = Q_k - x_{k-w+1} x_{k-w+1}^T + x_{k+1} x_{k+1}^T.$$

Intuitivno,  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$  zaboravljaju najstariji podatak da bi zapamtili novi. Opet imamo problem kod računanja  $P_{k+1}$  jer računamo inverz matrice, ali s obzirom na vezu  $P_{k+1}$  i  $P_k$  to se može pojednostavniti.

Neka je

$$U = \begin{bmatrix} x_{k-w+1} & x_{k+1} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} y_{k-w+1} & y_{k+1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Možemo napisati  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$  kao

$$Q_{k+1} = Q_k + VCU^T$$

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + UCU^T,$$

tj.

$$A_{k+1} = Q_{k+1} P_{k+1} = (Q_k + VCU^T)(P_k^{-1} + UCU^T)^{-1}.$$

Sada, koristimo Woodburyjevu lemu:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA,$$

kad god su  $A, C$  i  $A + UCV$  invertibilne. Koristeći lemu na izrazu za  $P_{k+1}$  dobivamo

$$P_{k+1} = P_k - P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k,$$

gdje je

$$\Gamma_{k+1} = (C^{-1} + U^T P_k U)^{-1}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (Q_k + VCU^T)(P_k - P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k) \\ &= Q_k P_k - Q_k P_k \Gamma_{k+1} U^T P_k \\ &\quad + VCU^T P_k - VCU^T P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k. \end{aligned}$$

Zadnja dva člana se pojednostave

$$\begin{aligned} VCU^T P_k - VCU^T P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k &= VC(\Gamma_{k+1}^{-1} - U^T P_k U) \Gamma_{k+1} U^T P_k \\ &= VCC^{-1} \Gamma_{k+1} U^T P_k = V \Gamma_{k+1} U^T P_k. \end{aligned}$$

Na kraju, pravilo ažuriranja glasi

$$A_{k+1} = A_k + (V - A_k U) \Gamma_{k+1} U^T P_k. \quad (4.2)$$

Ova formula je slična kao formula za ažuriranje u online DMDu. Matrica  $V - A_k U$  može se shvatit kao greška predikcije trenutnog modela  $A_k$  i ažuriranje  $A_{k+1}$  je proporcionalno toj grešci. [2]

## 4.8 Primjena DMDa

DMD ima brojne primjere u modeliranju neronske aktivnosti, mehanici fluida, epidemiologiji, financijama, procesiranju videa itd. U ovoj sekciji ćemo detaljnije objasniti kako se DMD primjenjuje za procesiranje videa. [3]

U mnogim situacijama želimo odvojiti statične i dinamične objekte u videu, tj. pozadinu i dinamične objekte. To je korisno kod detektiranja, praćenja i identificiranja objekata u videu. Video je zapravo niz slika(matrica) koje su snimane u jednakim vremenskim razmacima, te je kao takav pogodan za korištenje DMDa. Odvajanje pozadine i dinamičnih objekata možemo postaviti kao problem nalaženja matrica  $L$  koja je nižeg ranga i  $S$  koja je rijetka tako da za podatke  $X$  vrijedi:

$$X = L + S.$$

Kako u videu slike slijede jedna za drugom, pikseli u uzastopnim slikama su jako povezani pa je za prepostaviti da postoji niže-dimenzionalni prostor kojim možemo opisati slike u videu. Separacija se temelji na interpretaciji frekvencija  $\omega_k$ . Ako je  $|\omega_k| \leq \epsilon$ , za neki mali  $\epsilon$ , tada se mod vezan uz njega neće puno mijenjati kroz vrijeme te ga pripisujemo matrici nižeg ranga, a inače ga pripisujemo matrici  $S$ , tj.

$$L \approx \sum_{|\omega_k| \leq \epsilon} b_k \Phi_k e^{\omega_k t}$$

$$S \approx \sum_{|\omega_k| > \epsilon} b_k \Phi_k e^{\omega_k t}.$$

Svaku sliku napišemo kao vektor, a  $x(t)$  je slika u trenutku  $t$ . Sada na tako organizirane podatke možemo primijeniti DMD. Procjenu za sliku u trenutku  $t$  dobijemo kao

$$X(t) = \sum_{k=1}^r b_k \Phi_k e^{\omega_k t} = \Phi \text{diag}(\exp(\Omega t)) b.$$

Pozadina videa opisana je matricom  $L$  jer pretpostavljamo da se pozadina ne mijenja puno pa je vezana uz frekvencije  $\omega_p$  koje su blizu nuli, a  $S$  sadrži podatke o dinamičnim objektima.



# Poglavlje 5

## Primjeri

U ovom poglavlju ilustrirat ćemo opisane metode opisane u ovom radu, najprije na običnim diferencijalnim jednačbama te zatm na parcijalnim diferencijalnim jednačbama.

### 5.1 Primjena na nelinearnom sustavu

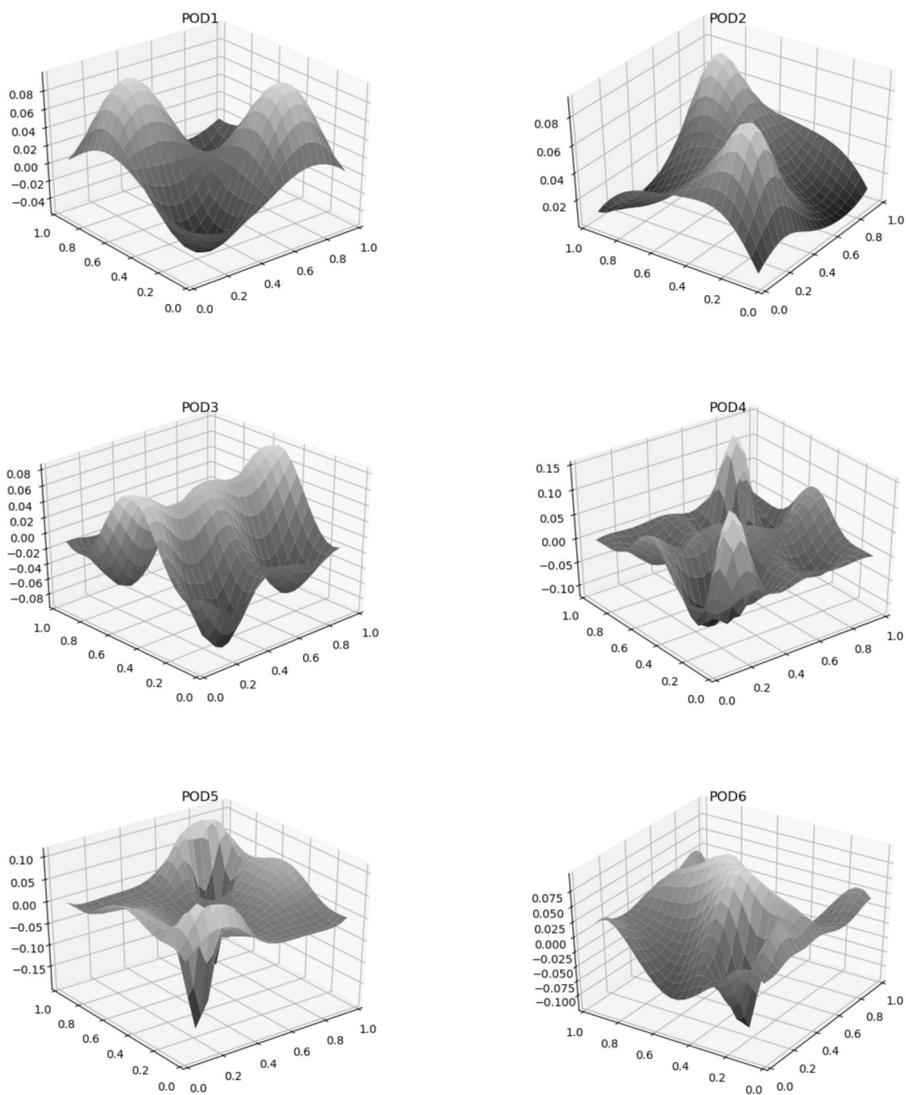
Neka je dana nelinearna parcijalna diferencijalna jednačba u  $2 - D$  prostornoj domeni [7]. Jednačba glasi:

$$-\Delta u(x, y) + s(u(x, y); \mu) = 100 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y),$$

$$s(u; \mu) = \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{\mu_2 u} - 1),$$

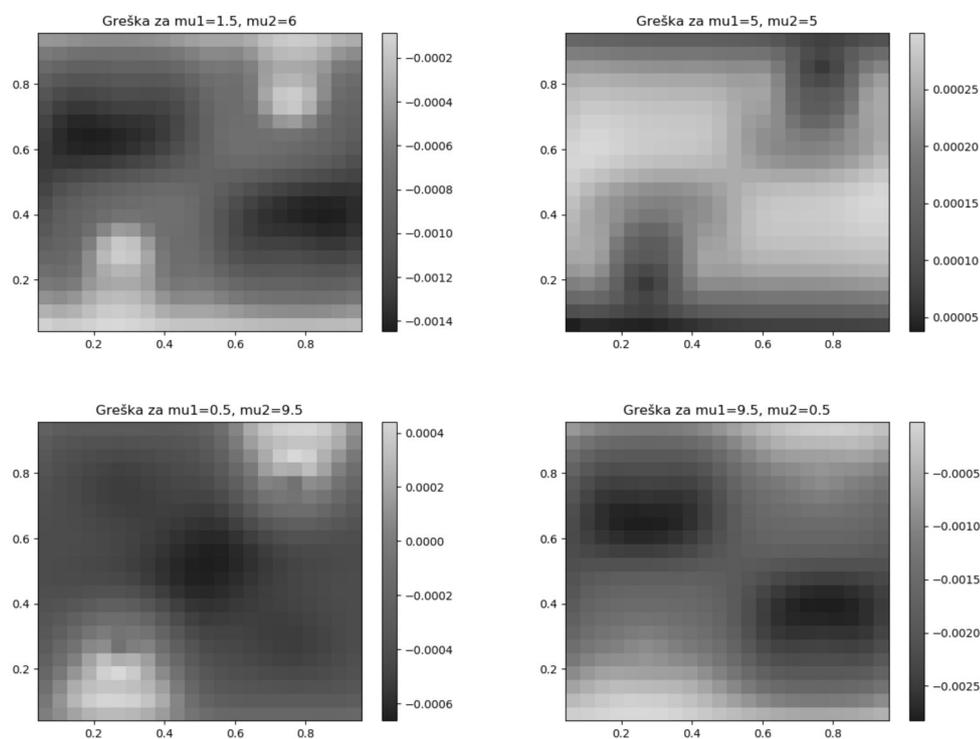
gdje su prostorne varijable  $(x, y) \in \Omega = [0, 1]^2$  i parametri su  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D} = [0.01, 10]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom. Ovu jednačbu svesti ćemo na sustav običnih diferencijalnih jednačbi koristeći konačne razlike.

Sustav rješavamo numerički koristeći Newtonovu metodu. Prostorna mreža  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 25$  je ekvidistantna. Tada je puna dimenzija sustava  $n = 625$ . Za POD-DEIM metodu odredit ćemo rješenja sustava dimenzije  $n$  za 144 parametra  $\mu$ , tako da su oni također uniformno raspoređeni u  $[0.01, 10]^2$ . Na slijedećoj slici prikazano je prvih 6 vektora POD baze za rješenja.



prvih 6 vektora POD baze

Zatim smo testirali POD-DEIM algoritam na novim parametrima iz  $[0.01, 10]^2$ . Na slijedećim slikama prikazane su razlike između rješenja dobivenog iz punog sustava i reduciranog sustava:



razlika između aproksimacije i izračunatog rješenja iz punog sustava

## 5.2 Fitz-Nagumo (F-N) sustav

F-N sustav koristi se za modeliranje neurona. Zadan je za  $x \in [0, L]$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\epsilon v_t(x, t) = \epsilon^2 v_{xx}(x, t) + f(v(x, t)) - \omega(x, t) + x,$$

$$w_t(x, t) = bv(x, t) - \gamma\omega(x, t) + c,$$

s nelinearnom funkcijom  $f(v) = v(v - 0.1)(v - 1)$  te početnim i rubnim vjetima

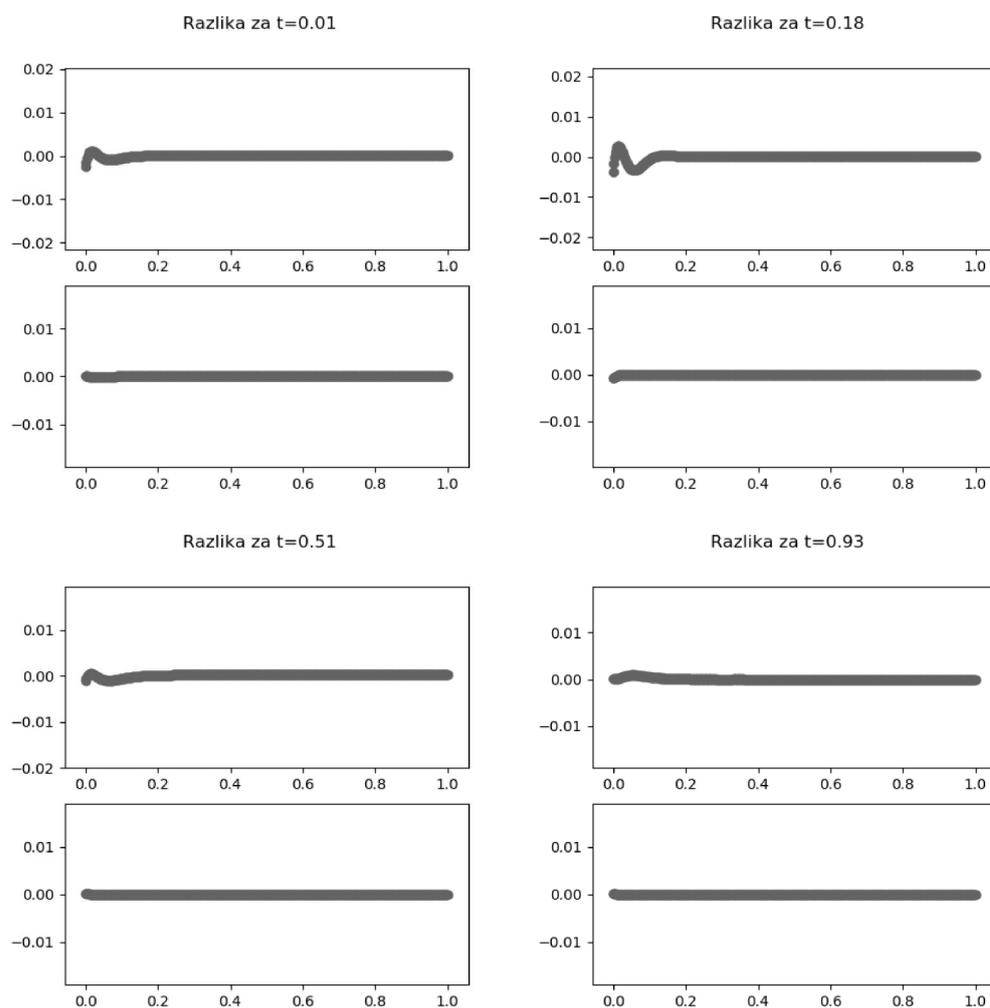
$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 0, \omega(x, 0) = 0, x \in [0, L] \\ v_x(0, t) &= -i_0(t), v_x(L, t) = 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

gdje su parametri  $L = 1$ ,  $\epsilon = 0.015$ ,  $b = 0.5$ ,  $\gamma = 2$  i  $c = 0.05$  i stimulans  $i_0(t) = 50000t^3 e^{-15t}$ . Funkcije  $v$  i  $\omega$  su voltaža i povrat voltaže. U prostornoj domeni promatramo ekvidistantnu mrežu s 1024 točke. U vremenskoj domeni gledamo 20 jednako udaljenih

vremenskih trenutaka u intervalu  $[0, 1]$ . Pomoću njih ćemo konstruirati POD bazu. Ako raspišemo:

$$v_{xx}(x_i, t) \approx \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2},$$

dobivamo sustav običnih diferencijalnih dimenzije 1024. Rješavamo taj sustav te dobivamo *POD* bazu. Također, za nelinearni član uzimamo DEIM aproksimaciju ranga 5. Na slijedećim slikama prikazane su razlike rješenja sustava i *POD-DEIM* aproksimacije za neke odabrane vremenske trenutke:



Slika 5.1: Razlika između rješenja sustava  $v$  i  $\omega$  i aproksimacije preko reduciranog sustava

### 5.3 Primjena na parcijalnim diferencijalnim jednadžbama

U ovoj sekciji promatramo parcijalne diferencijalne jednadžbe čije rješavanje možemo svesti na zadaću pronalaženja  $u(\mu) \in \mathbf{V}$  takvo da je

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu), \forall v \in \mathbf{V},$$

gdje je  $a$  bilinearna forma a  $f$  linearan funkcional na  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{V}$  je Hilbertov prostor. Pretpostavimo da bilinearna forma i funkcional zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramove leme. Definiramo mnogostrukost rješenja kao sva rješenja parametarskog problema, tj.

$$\mathcal{M} = \{u(\mu) | \mu \in \mathbb{P}\},$$

gdje je  $\mathbb{P}$  skup parametara. U praksi najčešće ne znamo analitičko rješenje problema, već ga aproksimiramo sa rješenjem problema:

$$(u_\delta(\mu), v_\delta; \mu) = f(v_\delta; \mu), \forall v_\delta \in \mathbf{V}_\delta,$$

pri čemu je  $\mathbf{V}_\delta$   $N_\delta$ -dimenzionalan potprostor od  $\mathbf{V}$ . Definiramo i diskretnu verziju mnogostrukosti rješenja:

$$\mathcal{M}_\delta = \{u_\delta(\mu) | \mu \in \mathbb{P}\} \subset \mathcal{V}_\delta,$$

gdje je svaki  $u_\delta(\mu) \in \mathcal{V}_{delta}$  rješenje reduciranog parametarskog problema. Cilj nam je naći  $N_\delta$ -dimenzionalni potprostor  $\mathbf{V}_{rb}$  prostora  $\mathcal{V}_\delta$  takav da je  $N_\delta \ll N$  i takav da za svaki  $\mu \in \mathbf{P}$  da rješenje parametarskog problema možemo dobro aproksimirati s  $u_{rb}(\mu) \in \mathbf{V}_{rb}$ , koje je rješenje problema:

$$a(u_{rb}(\mu), v_{rb}; \mu) = f(v_{rb}; \mu), \forall v_{rb} \in \mathbf{V}_{rb}$$

$u_\delta(\mu)$  možemo napisati kao linearnu kombinaciju vektora baze prostora  $\mathbf{V}_\delta$ , označimo je s  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Tada je:

$$u_\delta(\mu) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Kako je  $a$  bilinearna forma i  $f$  linearni funkcional, dovoljno je da parametarska jednadžba vrijedi za vektore baze prostora  $\mathbf{V}$ , tj.:

$$a(u_\delta(\mu), \varphi_i; \mu) = f(\varphi_i; \mu), \text{ za } i = 1, 2, \dots, N.$$

Uvrštavanjem zapisa rješenja u toj bazi dobivamo sustav linearnih jednadžbi  $Ax = b$ , pri čemu je  $A_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j; \mu)$  i  $b_i = f(\varphi_i)$ , a nepoznanica su koeficijenti  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Cilj nam je naći potprostor  $\mathbf{V}_{rb}$  takav da rješenje  $u_{rb}(\mu)$  dobro aproksimira  $u_\delta(\mu)$  jer tada ono dobro aproksimira i rješenje originalnog problema  $u(\mu)$  zbog:

$$\|u - u_{rb}\|_{\mathbf{V}} \leq \|u - u_{\delta}\|_{\mathbf{V}} + \|u_{\delta} - u_{rb}\|_{\mathbf{V}}.$$

Prednost ovog pristupa je što pri evaluiranju rješenja za nove vrijednosti parametara trebamo riješiti sustav linearnih jednadžbi koji je puno manje dimenzije od početnog.

Ovaj pristup ilustrirat ćemo na primjeru problema stacionarnog provođenja topline, opisanog u [4]. Domena na kojoj rješavamo problem je  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Rub domene podijeljen je na tri dijela:  $\Gamma_{baza} = [-1, 1] \times \{-1\}$ ,  $\Gamma_{strana} = \{\pm 1\} \times [-1, 1]$  i  $\Gamma_{vrh} = [-1, 1] \times \{1\}$ . Domena je podijeljena na dva dijela: krug oko ishodišta radijusa 0.25 koju označavamo s  $\Omega_0$  i  $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$  koji su napravljeni od različitih materijala s provodljivosti  $\kappa|_{\Omega_0} = \kappa_0$  i  $\kappa|_{\Omega_1} = 1$ . Kod ovog problema promatramo 2 parametra:  $\mu_0$  i  $\mu_1$ . Prvi se odnosi na provodljivost materijala na  $\Omega_0$ , a drugi na konstantan tok topline na  $\Gamma_{baza}$ . Promatramo  $\mathbf{P} = [\mu_0^{min}, \mu_0^{max}] \times [\mu_1^{min}, \mu_1^{max}]$ . Funkciju koja ovisi o  $\mu_0$  možemo napisati kao  $\kappa_{\mu} = \mathbf{1}|_{\Omega_1} + \mu_0 \mathbf{1}|_{\Omega_0}$ . Vektor parametara dan je s  $\mu = (\mu_0, \mu_1)$ .

Imamo Dirichletov (temperaturni) rubni uvjet na  $\Gamma_{top}$ , homogene Neumannove uvjete duž  $\Omega_{strana}$  i parametrizirani Neumannov uvjet duž donje granice  $\Gamma_{baza}$ . Za dani vektor parametara  $\mu$ , jaka formulacija dana je s :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \kappa_{\mu} \nabla u(\mu) &= 0 \text{ na } \Omega \\ u(\mu) &= 0 \text{ na } \Gamma_{vrh} \\ \kappa_{\mu} \nabla u(\mu) \cdot n &= 0 \text{ na } \Gamma_{strana} \\ \kappa_{\mu} \nabla u(\mu) \cdot n &= \mu_1 \text{ na } \Gamma_{baza} \end{aligned}$$

Funkcijski prostor u kojem tražimo rješenje je  $\mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega) : \Gamma_{vrh} = 0\}$ . Množenjem jake formulacije s test funkcijom  $v$  i parcijalnog integracijom dobivamo slabu formulaciju: Za parametre  $\mu$  naći  $u(\mu)$ , tako da za svaki  $v \in \mathbf{V}$  vrijedi:

$$a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu),$$

pri čemu je

$$a(\omega, v; \mu) = \int_{\Omega} \kappa_{\mu} \nabla \omega \cdot \nabla v$$

$$f(v; \mu) = \mu_1 \int_{\Gamma_{baza}} v.$$

Definiramo skalarni produkt na prostoru  $\mathbf{V}$  s  $(v, \omega)_{\mathbf{V}} = a(v, \omega; \mu) = \int_{\Omega} \kappa_{\mu} \nabla \omega \cdot \nabla v$ . Za  $\mu_0^{min} > 0$  je bilinearna forma  $a$  koercitivna. Bilinearnost forme  $a$  i linearnost od  $f$  slijede iz linearnosti integrala. Neprekidnost formi  $a$  i  $f$  može se dobiti iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti. Stoga, možemo primijeniti Lax-Milgramov teorem koji garantira egzistenciju i

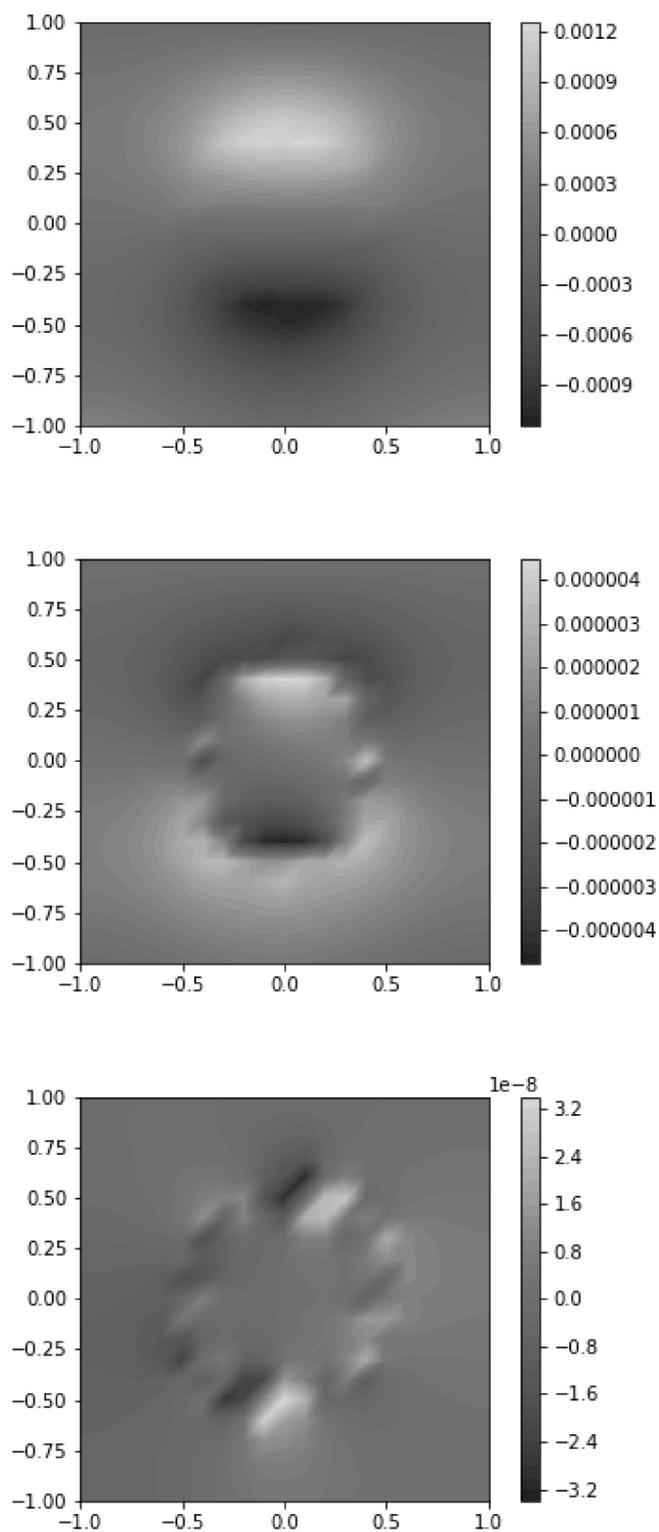
jedinstvenost rješenja  $u(\mu) \in \mathbf{V}$  za svaku vrijednost parametra  $\mu \in \mathbf{P}$ .

Promatramo parametre  $\mu = (\mu_0, \mu_1) \in \mathbf{P} = [0.1, 10] \times [-1, 1]$ . Formu  $a(u, v; \mu)$  možemo napisati u obliku  $a(u, v; \mu) = \mu_0 a_0(u, v) + a_1(u, v)$ , gdje je  $a_0(u, v) = \int_{\Omega_0} \nabla u \nabla v$  i  $a_1(u, v) =$

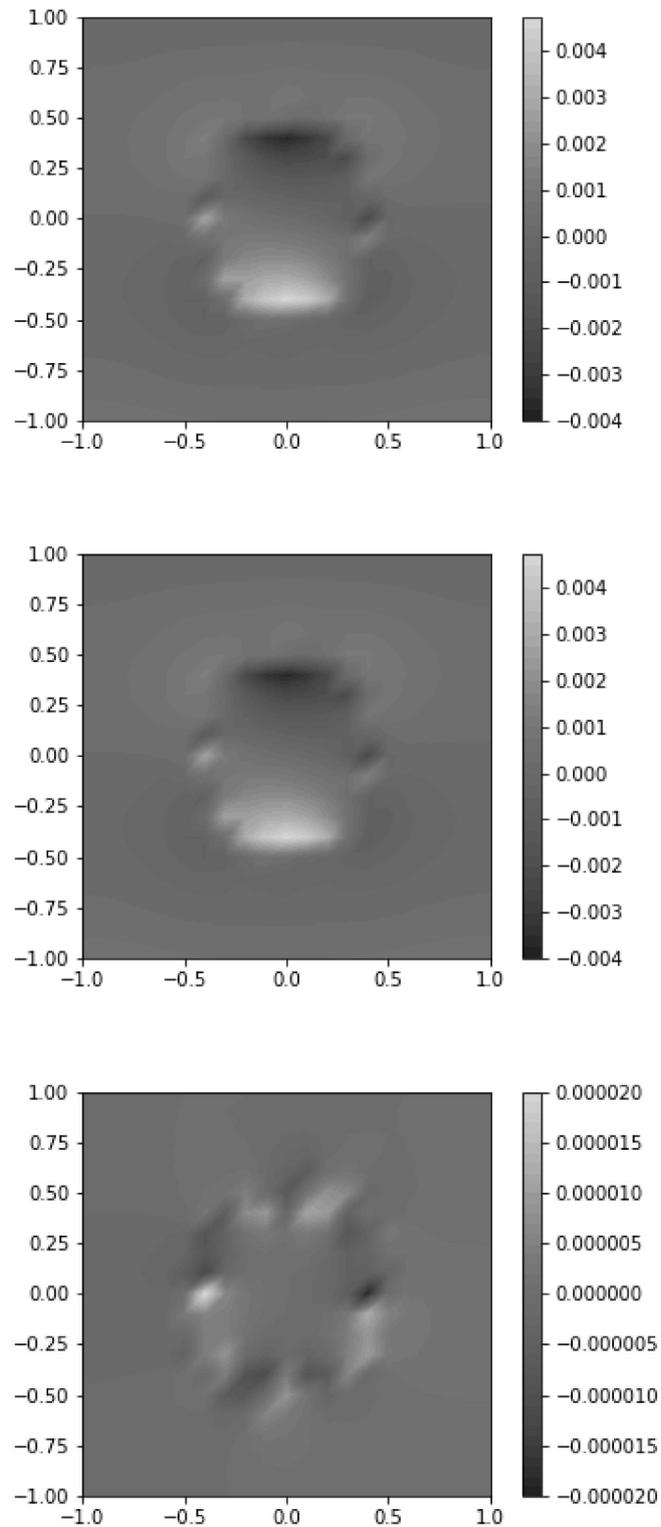
$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v$ . Sada se za bazu  $\phi_0, \dots, \phi_l$   $a_0(\phi_i, \phi_j), a_1(\phi_i, \phi_j)$  računaju u *offline* fazi te se pri eva-

luaciji rješenja s novim parametrima lako dobiva  $a(\phi_i, \phi_j; \mu)$ . Nakon što odredimo rješenja u *offline* fazi, odredimo POD bazu te rješavamo sustav manje dimenzije.

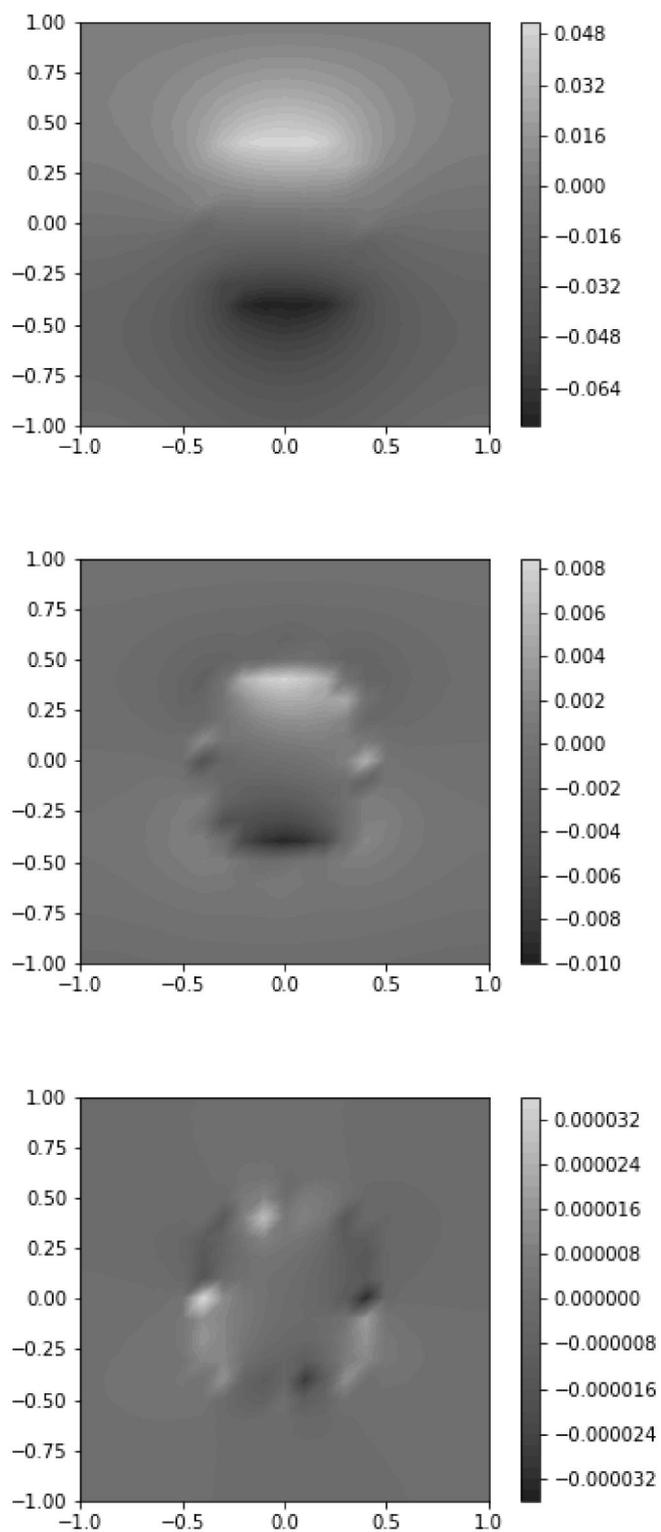
Na slijedećim slikama su prikazane greške aproksimacije različitih parametara različitom dimenzijom  $r$ . Promatramo razliku između rješenja direktno izračunatog numeričkom metodom i rješenja reduciranog modela. Razlike su prikazane za POD baze dimenzije 1, 2 i 5.



Slika 5.2: Razlike između aproksimacije i točnog rješenja za parametre  $\mu_0 = 1.725$ ,  $\mu_1 = 0.05$



Slika 5.3: Razlike između aproksimacije i točnog rješenja po retcima za parametre  $\mu_0 = 9.2$ ,  $\mu_1 = 0.9$ ;



Slika 5.4: Razlike između aproksimacije i točnog rješenja po retcima za parametre  $\mu_0 = 1.75$ ,  $\mu_1 = -2$

## 5.4 DMD-ilustracija

Neka je dan slijedeći sustav:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega(t)x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega(t)x_1(t),\end{aligned}$$

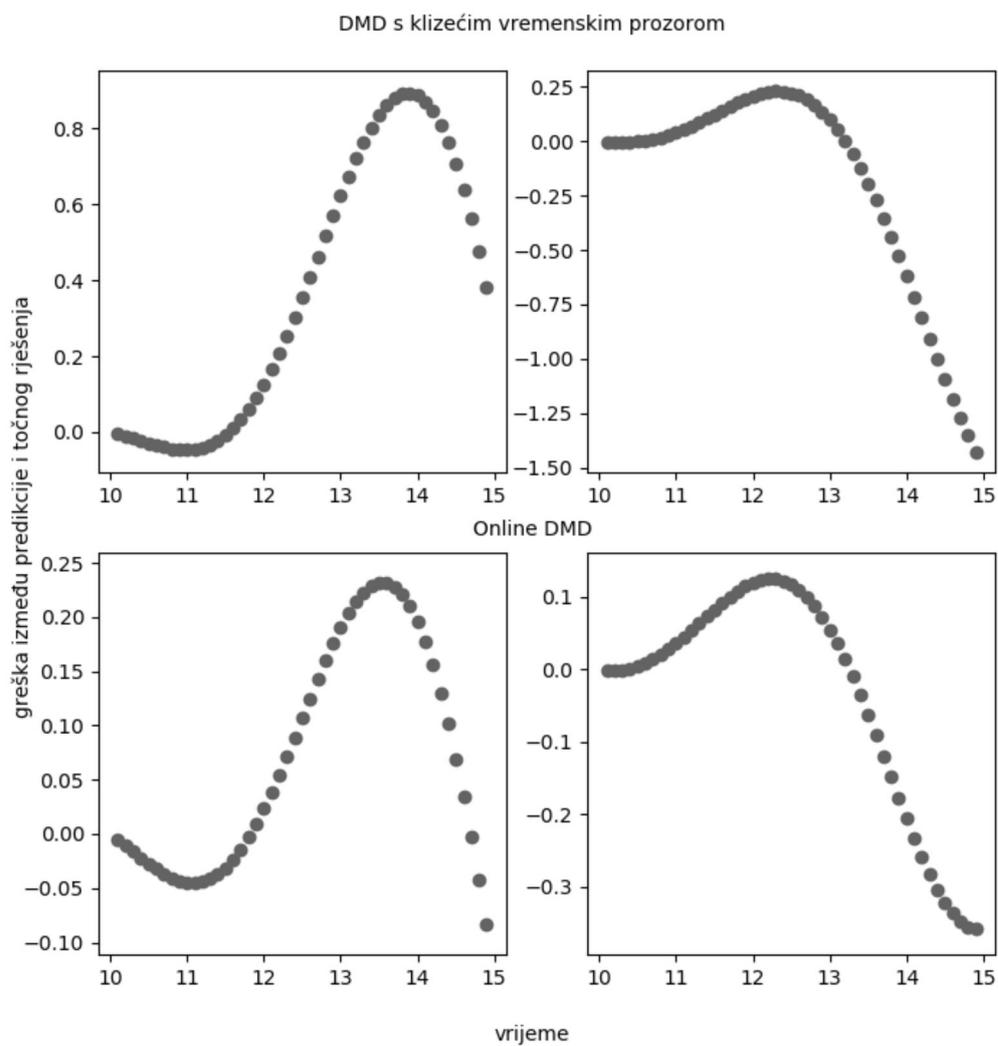
s početnim uvjetom  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$  i  $\omega(t) = 1 + 0.01t$ . Matrično možemo napisati

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),$$

pri čemu je

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t) \\ -\omega(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Riješimo sustav za  $\delta t = 0.1$ , na intervalu  $[0, 10]$ . Iz tih rješenja konstruiramo DMD matricu  $A$ . Demonstrirat ćemo online DMD i DMD s klizećim vremenskim prozorom. Radimo predikciju za  $10 < t < 15$  i to tako da u svakom koraku predikciju koju dobijemo pomoću DMD matrice koristimo kao stvarno rješenje u tom vremenskom trenutku te radimo iteraciju obje varijante DMD algoritma. Na slijedećim slikama prikazane su razlike između predikcije i točnog rješenja:



Slika 5.5: Greška pri aproksimaciji  $x_1$  i  $x_2$  po stupcima i DMDa s klizećim vremenskim prozorom i online DMDa po recima, oba modela dobro predviđaju otprilike 20 budućih stanja

# Bibliografija

- [1] *Predavanja iz numeričke analize*, [https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/NA\\_0910/25.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/25.pdf).
- [2] E. A. Deem L. N. Cattafesta H. Zhang, C. W. Rowley, *Online dynamic mode decomposition for time-varying systems*, CoRR abs/1707.02876 (2017) **38** (2017).
- [3] B. W. Brunton i J. L. Proctor J. N. Kutz, S. L. Brunton, *Dynamic Mode Decomposition*, SIAM, 2016.
- [4] B. Stamm J. S. Hesthaven, G. Rozza, *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*, SpringerBriefs in Mathematics, 2016.
- [5] J. Nathan Kutz S. L. Brunton K. Manohar, B. W. Brunton, *Data-Driven Sparse Sensor Placement for Reconstruction*, (2017), <https://arxiv.org/abs/1701.07569>.
- [6] L. R. Petzold M. Rathiman, *A new look at proper orthogonal decomposition*.
- [7] D. Sorensen S. Chaturantabut, *Nonlinear model reduction via Discrete Empirical Interpolation*, SIAM J. Sci. COMPUT. **38** (2010), br. 5, 2737–2764.
- [8] S. Volkwein, *Proper Orthogonal Decomposition: Theory and Reduced-Order Modeling*, Lecture notes, 2013.
- [9] S. Gugercin Z. Drmač, *Nonlinear model reduction via Discrete Empirical Interpolation*, SIAM J. Sci. COMPUT. **38** (2016), br. 2, A631–A648.



# Sažetak

U današnje vrijeme mjerenja stanja nekog sustava od interesa su sve opširnija i sve točnija. Za opisivanje sustava koji ovise o različitim parametrima zato je sve popularniji pristup koji se upravo temelji na modeliranju ponašanja sustava pomoću već prikupljenih podataka. POD i DEIM pokazale su se kao dobre metode za redukciju dimenzionalnosti dinamičkih sustava i sustava nelinearnih jednadžbi. Pomoću reduciranih modela lako možemo opisati sustav za parametre za koje nismo napravili mjerenje. Pomoću DMDa i njegovih varijanti možemo opisati ponašanje sustava kao lokalno linearnog dinamičkog sustava, što nam omogućava procjenu budućih stanja temeljenoj samo na izmjerenim podacima, a ne na rješavanju sustava. U ovom radu opisani su navedeni algoritmi s primjenama na odabranim primjerima.



# Summary

Nowadays measuring states of a system we are interested in can be done more accurately and in more detail than ever before. That's why there are different approaches which use collected data for describing systems which depend on different parameters. POD and DEIM proved to be good methods for reducing dimension of dynamical systems and systems of nonlinear equations. With reduced model we can easily describe system for parameters for which we don't have measured data or numerical solution. With DMD and it's versions we can describe behaviour of system like a locally linear dynamical system, which provides an estimate of future state, which depend only on measured data and not on solving the system for that time. In this work, such algorithm were described with applications on selected examples.





# Životopis

## OSNOVNI PODACI

Iva Manojlović.



## OBRAZOVANJE

*Srednja škola* 2009-2013

Gimnazija Bernardina Frankopana, Ogulin

*Visoko obrazovanje*

2013-2016

Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu sveučilišta u Zagrebu

prosjek ocjena: 4,93

Stečena titula prvostupnika matematike (univ. bacc. math.)

2016-2018

Diplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu - smjer Primjenjena matematika

prosjek ocjena: 4,95

Tema diplomskog rada: Redukcija dimenzije parametarski ovisnih nelinearnih sustava

## REZULTATI I NAGRADE

Stipendist Sveučilišta u Zagrebu (2015-2018)

Mozgalo 2017., 3. nagrada

Mozgalo 2018., 1. nagrada

## AKADEMSKI RAD

Demonstrator kolegija Programiranje 1 i 2, Vjerojatnosti, Numerička matematika, Obične diferencijalne jednačbe i Metode matematičke fizike1 - May 2012

## JEZICI

Jezici: Engleski jezik (C1 razina)

Njemački jezik (A2 razina)