Stohastička stabilnost Markovljevih lanaca s diskretnim skupom stanja

Negovec, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Negovec

Stohastička stabilnost Markovljevih lanaca s diskretnim skupom stanja

Diplomski rad

Voditelj rada: Doc. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Pojam Markovljevog lanca prvi je uveo ruski matematičar Andrej Markov kao matematički model za pojave koje nemaju memoriju. Samim time Markovljevi lanci imaju vrlo široku primjenu, kako u matematici tako i u tehničkim, prirodnim i društvenim znanostima. Primjerice, služe za modeliranje duljine repa u pozivnim centrima, vrijeme čekanja u proizvodnji i uslužnim centrima, razine vode u branama, cijene dionica itd. Također, u današnje vrijeme temelj su internet pretraživača.
Poznato je da stupanj korištenja riječi autora zadovoljava Markovljevo svojstvo. Sada se primjerice možemo pitati je li W. Shakespeare imao neograničen vokabular? To se može formulirati kao pitanje stabilnosti pripadnog Markovljevog lanca. Da je zauvijek pisao, bi li veličina korištenog rječnika rasla na neograničen način? Tema ovog rada biti će stabilnost (povratnost i prolaznost) Markovljevih lanaca s diskretnim skupom stanja. Pokazuje se da u slučaju dovoljno pravilanog (ireducibilnog) Markovljevog lanca imamo dihotomiju između povratnosti i prolaznosti. Povratni Markovljev lanac ima svojstvo da svako svoje stanje posjećuje beskonačno mnogo puta s vjerojatnošću jedan, dok prolazan Markovljev lanac svako svoje stanje posjećuje najviše konačno mnogo puta s vjerojatnošću jedan.
U Poglavlju 1 uvesti i analizirati će se različiti stupnjevi stohastičke stabilnost Markovljevih lanaca s diskretnim skupom stanja: prolaznost, povratnost, nulpovratnost i pozitivna povratnost. Također, definiramo pojam stacionarne distribucije, te svojstva ireducibilnosti i aperiodičnosti. Navodimo rezultate koji govore da ireducibilan Markovljev lanac na konačnom prostoru stanja ili pozitivno povratan Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, te da uz dodatnu pretpostavku aperiodičnosti, marginalna distribucija lanca konvergira prema stacionarnoj distribuciji kada vrijeme teži u beskonačnost. Na početku Poglavlja 2 definiramo martingale i pokazujemo njihova osnovna svojstva. U ostatku poglavlja naglasak će biti na Foster-Lyapunovljevoj metodi kao moćnom alatu u analizi stohastičke stabilnosti. U Poglavlju 3 analizirati i simulirati će se stohastička stabilnost nekoliko klasičnih primjera Markovljevih lanaca.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci s diskretnim skupom stanja

U ovom poglavlju uvodimo pojam Markovljevog lanca te diskutiramo neka strukturalna svojstva ovih slučajnih procesa.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor. Za svaki $t \in T, T \neq \emptyset$, neka je $X_t : \Omega \to S$ funkcija izjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ (tj. slučajni element u S). Navedeni skup T se najčešće interpretira kao vrijeme, odnosno skup vremenskih trenutaka, a zove se *skup indeksa*. Najtipičniji primjeri skupa T su: $T = \mathbb{N}_0$ i $T = \mathbb{R}_+$. U ovakvoj situaciji familija $X = (X_t \colon t \in T)$ zove se *stohastički ili slučajni proces u diskretnom vremenu* ako je $T = \mathbb{N}_0$ ili *stohastički ili slučajni proces u neprekidnom vremenu* ako je $T = \mathbb{R}_+$.
Skup S se naziva *skupom stanja* od X te predstavlja skup svih mogućih realizacija slučajnih elemenata X_t, $t \in T$. Osim prema vremenskom prarametru, slučajne procese možemo klasificirati prema skupu stanja S. Taj skup može biti diskretan (konačan ili prebrojiv) ili opći (neprebrojiv).

1.1 Definicija i osnovna svojstva

U ovom radu bavimo se s Markovljevim lancima s diskretnim skupom stanja S. Uočimo, u toj situaciji uzimamo $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$.

Definicija 1.1.1. *Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je Markovljev lanac ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1.1}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo u relaciji (1.1) naziva se *Markovljevim svojstvom*. Interpretirati ga možemo tako da kažemo da je ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost, jednako ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno samo na sadašnjost.

1. Prethodna definicija daje distribuciju $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ na S $(\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i))$ i niz funkcija $p_n : S \times S \to [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, tako da za svaki $i \in S$ je $p_n(i, \cdot) : S \to [0, 1]$ distribucija na S te vrijedi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)& \\ = \lambda_{i_0} p_1(i_0, i_1) p_2(i_1, i_2) \cdots p_n(i_{n-1}, i_n).&\end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Obratno, ako krenemo od distribucije λ na S i familije preslikavanja $p_n : S \times S \to [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, tako da za sve $i \in S$ je $p_n(i, \cdot) : S \to [0, 1]$ distribucija na S, onda postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ na S.
Stavimo $\Omega = \{\omega; \omega = (x_n : n \geq 0), x_n \in S\}$. Za $m \geq 0$ i proizvoljne $i_0, i_1, \dots, i_m \in S$ stavimo
$$C(i_0, i_1, \dots, i_m) = \{\omega \in \Omega; x_k = i_k, k = 0, \dots, m\}. \tag{1.3}$$
Definirajmo funkciju $\mathbb{P}$ na klasi svih skupova oblika (1.3) tako da stavimo
$$\mathbb{P}(C(i_0, i_1, \dots, i_m)) = \lambda_{i_0} \prod_{k=1}^{m} p_k(i_{k-1}, i_k).$$
Za $E_k \subset S^k$ i $0 \leq n_1 < n_2 \cdots < n_k$ stavimo
$$A_{n_1, n_2, \dots, n_k}(E_k) = \{\omega \in \Omega : (x_{n_1}, \dots, x_{n_k}) \in E_k\}.$$
Skup $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}(E_k)$ zovemo cilindar s bazom E_k nad koordinatama $n_1, \dots, n_k$. Sa $\mathcal{F}_0 \subset \Omega$ označimo familiju svih cilindara u Ω. $\mathcal{F}_0$ je algebra na Ω, a budući da je svaki cilindar unija od najviše prebrojivo mnogo disjunktnih skupova oblika (1.3), fuknkciju $\mathbb{P}$ možemo po aditivnosti prirodno proširiti na $\mathcal{F}_0$ i to proširenje ne ovisi o reprezentaciji cilindara. Funkcija $\mathbb{P}$ je σ-aditivna na algebri $\mathcal{F}_0$. Neka je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Prema osnovnom teoremu o proširenju mjere odnosno vjerojatnosti postoji jedinstvena vjerojatnost na $\mathcal{F}$ čija se restrikcija na $\mathcal{F}_0$ podudara sa $\mathbb{P}$. Označimo tu vjerojatnost također sa $\mathbb{P}$. Dakle, imamo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Nadalje, definiramo niz funkcija $X_n : \Omega \longrightarrow S, n \geq 0$, sa
$$X_n(\omega) = x_n, \omega \in \Omega, n \geq 0.$$
X_n su slučajne varijable na Ω i čine Markovljev lanac.

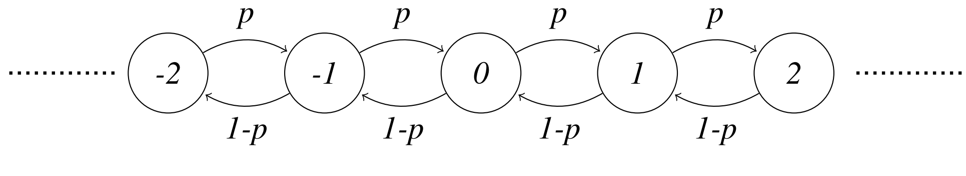
Iz 1. i 2. slijedi da je za svaki Markovljev lanac dovoljno promatrati njegovu kanonsku verziju komentiranu u 2.

Proces X je *vremenski homogen Markovljev lanac* ako $\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i)$ ne ovisi o n. Uočimo da Markovljevo svojstvo uz vremensku homogenost prelazi u $\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)$.
Dakle, $p_n(i, j) = p_1(i, j)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $i, j \in S$. Umjesto $p_1(i, j)$ koristimo oznaku p_{ij}. Uočimo da $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ definira jednu (beskonačnu) matricu. Uočimo da vrijedi $p_{ij} \geq 0$ i $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$ za sve $i, j \in S$. Takvu matricu nazivamo *stohastičkom matricom*. Nadalje, vremenski homogen Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ koji odgovara distribuciji $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ i stohastičkoj matrici $P = (p_{ij})_{ij\in S}$ ($\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ i $\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}$) nazivamo *$(\lambda, P)$-Markovljevim lancem*. Distribuciju λ zovemo *početnom distribucijom* od X, a matricu P *matricom prijelaza* od X.
U nastavku se bavimo samo vremenski homogenim Markovljevim lancima.

Ako je λ početna distribucija Markovljevog lanca $X = (X_n : n \geq 0)$ takva da je $\lambda_i > 0$ (tj. $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$), definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ formulom

$$\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|X_0 = i).$$

Primjer 1.1.1. *(Jednostavna slučajna šetnja u $\mathbb{Z}$)*
Neka je $Y = (Y_n : n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p, \mathbb{P}(Y_k = -1) = q = 1 - p, 0 < p < 1$. Slučajne varijable Y_k su Bernoullijeve na $\{-1, 1\}$. Jednostavna slučajna šetnja $X = (X_n : n \geq 0)$ definirana je s $X_n := X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$ za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje je X_0 nezavisna od Y_k, $k \in \mathbb{N}$, poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}$ i ima distribuciju λ. Pripadajući Markovljev lanac X pomiče se samo za jedno mjesto ulijevo ili udesno. Prijelazne vjerojatnosti su $p_{ii-1} = q = 1 - p$, $p_{ii+1} = p$, $p_{ij} = 0$, $j \neq i - 1, i + 1$. Prijelazni graf i prijelazna matrica su beskonačni:



$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & p & & & & & \\ & 1-p & 0 & p & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1-p & 0 & p & & \\ & & & & 1-p & 0 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Za jednostavnu slučajnu šetnju kažemo da je simetrična ako je $p = q = 1/2$.

Neka je P matrica prijelaza lanca $X = (X_n \colon n \geq 0)$. Pogledajmo matricu P^2 i označimo njene elemente s $p_{ij}^{(2)}$, $i, j \in S$. Znamo da je

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}.$$

Dakle, broj $p_{ij}^{(2)}$ predstavlja vjerojatnost da je lanac $X = (X_n \colon n \geq 0)$ došao iz stanja i u stanje j u dva koraka. Analogno, elementi matrice P^{n+1} su dani s

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \sum_{i_2 \in S} \cdots \sum_{i_n \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_n j}.$$

Dakle, brojevi $p_{ij}^{(n+1)}$ predstavljaju vjerojatnost prelaska lanca $X = (X_n \colon n \geq 0)$ iz stanja i u stanje j u $(n+1)$ koraka.

Na kraju, spomenimo rezultat poznat pod nazivom *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti*:

Teorem 1.1.1. *Za sve $m, n \geq 0$ i sva stanja $i, j \in S$*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

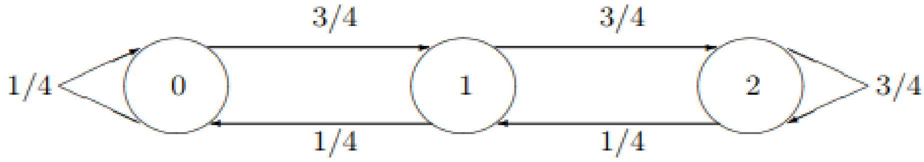
Interpretacija formule: vjerojatnost da lanac krenuvši iz stanja i prijeđe u stanje j u $(m+n)$ koraka jednaka je vjerojatnosti da lanac krenuvši iz stanja i prijeđe u stanje k u m koraka, te iz tog stanja k u preostalih n koraka dođe u stanje j.

Dokaz. Imamo,

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} = \mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) &= \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_m = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = k)\mathbb{P}(X_m = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.
\end{aligned}$$

□

Primjer 1.1.2. *(Jednostavan model sustava bonusa)*
Sustav bonusa (engl. No Claim Discount system) u osiguranju motornih vozila, po kojem premija ovisi o vozačevim prošlim odštetnim zahtjevima, osnovna je primjena Markovljevih lanaca.
Društvo za osiguranje motornih vozila svojim osiguranicima ili ne daje popust (stanje 0*), ili daje* 25% *popusta (stanje* 1*), ili* 50% *popusta (stanje* 2*). Godina bez odštetnog zahtjeva rezultira prijelazom u više stanje sljedeće godine (ili zadržavanjem maksimalnog bonusa). Slično, godina s jednim ili više odštetnih zahtjeva prouzrokuje prijelaz u sljedeće niže stanje (ili zadržavanje statusa bez popusta).*
Uz ta pravila, status popusta osiguranika tvori Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2\}$*. Ako je vjerojatnost godine bez odštetnih zahtjeva jednaka* $3/4$*, prijelazni graf i prijelazna matrica su*



$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Vjerojatnost maksimalnog popusta u godini $n+3$ *ako je poznato da nema nikakvog popusta u godini* n *je*

$$p_{02}^{(3)} = P_{02}^3 = \frac{9}{16}.$$

Primjer 1.1.3. *(Drugi model za sustav bonusa)*
Modificirajmo prethodni model na sljedeći način:

0: *bez popusta*

1: 25% *popusta*

2: 40% *popusta*

3: 60% *popusta*

Pravila za kretanje po ljestvici popusta su kao i prije, ali u slučaju odštetnog zahtjeva u tekućoj godini, status popusta kreće se nadolje jedan ili dva koraka, ovisno o tome je li prethodna godina bila bez odštetnog zahtjeva ili ne. Uz ta pravila, status popusta $X = (X_n\colon n \geq 0)$ *osiguranika ne čini Markovljev lanac na* $S = \{0, 1, 2, 3\}$*, jer*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 2, X_{n-1} = 1] = 0,$$

dok je

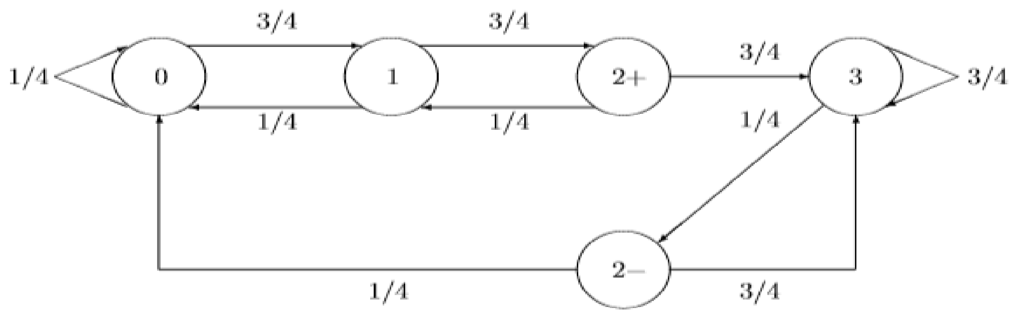
$$\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 2, X_{n-1} = 3] > 0.$$

Za konstrukciju Markovljevog lanca $Y = (Y_n : n \geq 0)$ *potrebno je ugraditi informaciju o protekloj godini u skup stanja. U stvari, to je potrebno samo za stanje* 2*, koje dijelimo na:*

2+: 40% *popusta i bez odštetnog zahtjeva prethodne godine*

2-: 40% *popusta i odštetni zahtjev prethodne godine.*

Pretpostavljajući kao i prije da je vjerojatnost godine bez odštetnog zahtjeva jednaka $3/4$*, imamo Markovljev lanac na prostoru stanja* $S' = \{0, 1, 2+, 2-, 3\}$ *s prijelaznim grafom i prijelaznom matricom*



$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Vjerojatnost 60% *popusta u godini* $n+3$ *uz dan popust od* 25% *u godini* n *je*

$$p_{13}^{(3)} = P_{13}^3 = 27/64.$$

1.2 Klasifikacija stanja Markovljevog lanca

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo *prvo vrijeme pogađanja* tog skupa kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz konvenciju da je $\min\emptyset = +\infty$. U slučaju $B = \{j\}$ za $j \in S$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto preciznijeg $T_{\{j\}}$.

Definicija 1.2.1. *Za stanja* $i, j \in S$ *kažemo da je* j *dostižno iz* i, $i \to j$, *ako vrijedi* $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0$.

Propozicija 1.2.1. *(Kriterij dostižnosti) Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

i) $i \to j$

ii) $p_{ij}^{(n)} > 0$ *za neko* $n \geq 1$

iii) $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$ *za neka stanja* $i_1, \dots, i_{n-1}$.

Dokaz. Budući da je $\{X_n = j\} \subset \cup_{k=1}^{\infty} \{X_k = j\} = \{T_j < \infty\}$, slijedi

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j) \leq \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(\cup_{k=1}^{\infty}\{X_k = j\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_k = j) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}.$$

To dokazuje ekvivalenciju (i) i (ii). Ekvivalencija tvrdnji (ii) i (iii) slijedi iz formule

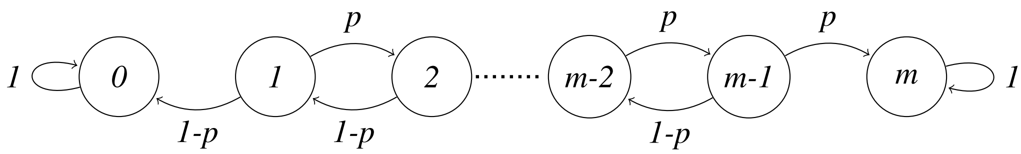
$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j}.$$

□

Nadalje, stanja $i, j \in S$ *komuniciraju*, $i \leftrightarrow j$, ako $i \to j$ i $j \to i$. Relacija komuniciranja je relacija ekvivalencije na $S \times S$ pa prostor stanja S možemo rastaviti na pripadne klase ekvivalencije. Uzmemo neko stanje $i \in S$ i stavimo njega i sva stanja koja komuniciraju s njim u jednu klasu, npr. C_i. Zatim uzmemo neko stanje $j \in S$ koje nije u C_i te stavimo njega i sva stanja koja komuniciraju s njim u drugu klasu, npr. C_j. Stanja koja ne komuniciraju stavimo u klasu T. Na taj način nastavimo dok nismo sva stanja rasporedili u klase. Dakle, imamo $C_i \cap C_j = \emptyset, C_i \cap T = \emptyset, T \cup (\bigcup_i C_i) = S$. Skupove $C_1, C_2, \cdots$ nazivamo *klase komuniciranja*.
Ako se S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. za sve $i, j \in S$ vrijedi $i \leftrightarrow j$, onda za X kažemo da je *ireducibilan*.
Uočimo, da su Markovljevi lanci iz Primjera (1.1.1),(1.1.2),(1.1.3) ireducibilni.
Za podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo da je *zatvoren* ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1$, tj. skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. S druge strane, u zatvoren skup se može ući.

Primjer 1.2.1. *Jednostavna slučajna šetnja u* $\{0, 1, 2, \dots, m\}, m \in \mathbb{N}$
Matrica prijelaza i prijelazni graf:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



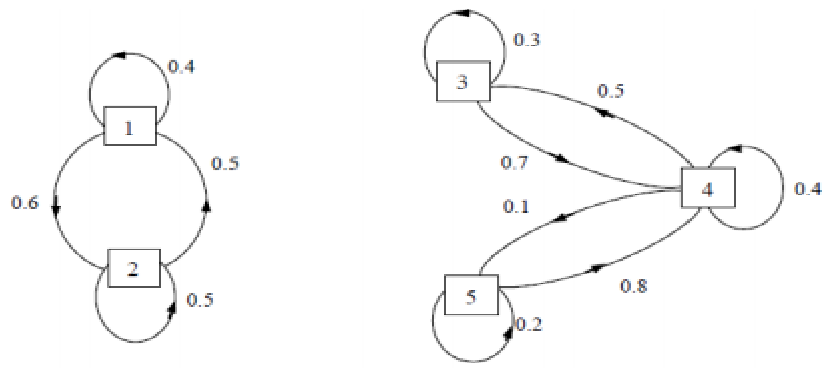
Imamo tri klase $\{0\}, \{1, \dots, m-1\}, \{m\}$. *U ovom slučaju, moguće je dostići prvu klasu i treću klasu iz druge klase, ali se iz prve klase i treće klase nije moguće vratiti u drugu klasu. Dakle, klase* $\{0\}$ *i* $\{m\}$ *su zatvorene, dok klasa* $\{1, \dots, m-1\}$ *nije zatvorena.*

Za stanje $j \in S$ kažemo da je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup. To znači da ako lanac eventualno uđe u stanje j tamo ostane zauvijek. Dakle, vrijedi sljedeća tvrdnja: stanje $j \in S$ je apsorbirajuće ako i samo ako je $p_{jj} = 1$.
U Primjeru (1.2.1) stanja 0 i m su apsorbirajuća.
Sljedećm primjerom objasnit ćemo navedene pojmove:

Primjer 1.2.2. *Zadana je matrica prijelaznih vrijednosti:*

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Pripradni graf:



Iz matrice prijelaznih vrijednosti i grafa vidimo da postoji staza od stanja 3 *do stanja* 5 $(3 \to 4 \to 5)$ *, pa kažemo da je stanje* 5 *dostižno iz stanja* 3*. Iz stanja* 5 *ne postoji staza do stanja* 2 *pa stanje* 2 *nije dostižno iz stanja* 5*. Stanja* 3 *i* 4 *komuniciraju jer je stanje* 3 *dostižno iz stanja* 4 *i obratno. Također, stanja* 1 *i* 2 *te* 4 *i* 5 *komuniciraju. Markovljev lanac dan matricom P ima dva zatvorena skupa* $S_1 = \{1, 2\}$ *i* $S_2 = \{3, 4, 5\}$*. Na grafu se vidi da nema lukova između skupova* S_1 *i* S_2 *koji povezuju elemente tih skupova. Uočimo da u našem primjeru nema apsorbirajućeg stanja.*

Stanja Markovljevog lanca klasificiramo obzirom na vrijeme koje sam lanac provede u stanju te ih na temelju toga možemo podijeliti na *povratna (rekurentna)* ili *prolazna (tranzijentna)*.
Da bi precizno definirali pojmove povratnosti i prolaznosti, najprije trebamo definirati vrijeme prvog povratka lanca u stanje $i \in S$.
Za stanje $i \in S$ definiramo slučajnu varijablu

$$T_i = T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\}$$

koju zovemo *prvo vrijeme povratka* lanca $(X_n : n \geq 0)$ u stanje i. Broj $\mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ je vjerojatnost da se lanac $(X_n : n \geq 0)$ vrati u stanje i ako kreće iz stanja i.

Uočimo da smo prilikom definicije slučajne varijable T_i isključili slučaj $n = 0$ (prvo vrijeme dolaska lanca u i), jer bi tada uvijek bilo $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$. Induktivno možemo definirati slučajne varijable koje opisuju k-to vrijeme povratka u promatrano stanje. Preciznije, za $i \in S$ i $k \in \mathbb{N}$ neka je

$$T_i^{(k)} = \min\{n > T_i^{(k-1)} : X_n = i\}.$$

Definirajmo sada precizno povratno i prolazno stanje lanca:

Definicija 1.2.2. *Stanje $i \in S$ je povratno ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1.$$

Stanje $i \in S$ je prolazno ako vrijedi

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1.$$

Označimo broj posjeta stanju $i \in S$ sa N_i tj.

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}.$$

$$\mathbb{E}_j N_i = \mathbb{E}_j\Big(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\Big) \stackrel{TMK}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_j 1_{\{X_n=i\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}.$$

Specijalno, u slučaju $j = i$ slijedi da je stanje i povratno ako i samo ako je $\mathbb{E}_i N_i = \infty$, tj. očekivani broj posjeta stanju i je beskonačan. Kako bismo to dokazali potrebne su nam neke dodatne tvrdnje.

Definicija 1.2.3. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ zove se vrijeme zaustavljanja ako je za sve $n \geq 0$*

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

t.j., događaj $\{T \leq n\}$ ovisi samo o $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Teorem 1.2.1. *(Jako Markovljevo svojstvo)*
Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ $(\lambda, \mathbb{P})$-Markovljev lanac sa prostorom stanja S, te neka je T vrijeme zaustavljanja. Tada je uvjetno na $X_T = i$, slučajni proces $(X_{T+n} : n \geq 0)$ $(\delta^i, \mathbb{P})$-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_T$.
(dokaz: vidi [5])

Također, uvedimo $\mathbb{P}_j$-distribuciju od T_i

$$f_{ji} = \mathbb{P}_j(T_i < \infty).$$

Želimo izračunati $\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty), n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) &= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty, T_i^{(n)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty)\mathbb{P}(T_i^{(n)} < \infty | T_i^{(n-1)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty)
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo jako Markovljevo svojstvo. Zaista, po Teoremu (1.2.1) uvjetno na $X_{T_i^{(n-1)}} = i$ je $(X_{T_i^{(n-1)}+m} : m \geq 0)$ $(\delta^i, \mathbb{P})$-Markovljev lanac nezavisan od $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i^{(n-1)}}$. Indukcijom slijedi

$$\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1}, n \geq 1.$$

Za $n = 1$ tvrdnja je istinita po definiciji. Pretpostavimo da gornja jednakost vrijedi za $n \geq 1$. Tada je

$$\mathbb{P}_j(T_i^{(n+1)} < \infty) = \mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1} f_{ii} = f_{ji} f_{ii}^{n}.$$

Nadalje,

$$\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(N_i > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_i^{(n+1)} < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji} f_{ii}^{n} = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}}.$$

Slijedi,

$$\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}}.$$

Sada je očito ako je i povratno onda je $f_{ii} = 1$ pa je

$$\mathbb{E}_i N_i = \infty.$$

Na isti način vrijedi obrat.
Nadalje, stanje i je prolazno ako i samo ako je $\mathbb{E}_i N_i < \infty$. U tom slučaju je $N_i < \infty$, $\mathbb{P}_i$-g.s.

Teorem 1.2.2. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $i \in S$ *je povratno;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

(iii) $\mathbb{E}_i N_i = \infty$;

(iv) $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$

(dokaz: vidi [5])

Teorem 1.2.3. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $i \in S$ *je prolazno;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

(iii) $\mathbb{E}_i N_i < \infty$;

(iv) $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$

(dokaz: vidi [5])

Dakle, reći ćemo da je stanje povratno ako se Markovljev lanac u njega vraća beskonačno mnogo puta, odnosno povratno stanje je stanje u koje se Markovljev lanac u konačno mnogo koraka vraća s vjerojatnošću 1. Slično, prolazno stanje je stanje u koje se lanac ne vraća beskonačno mnogo puta, odnosno u koje se u konačno mnogo koraka vraća s vjerojatnošću manjom od 1.

Propozicija 1.2.2. *Neka je $i \in S$ povratno stanje, te neka $i \leftrightarrow j$. Tada je $j \in S$ povratno stanje.*

Dokaz. U dokazu koristimo karakterizaciju (ii) iz Teorema (1.2.2), te kriterij dostižnosti (ii) iz Propozicije (1.2.1). Po tom kriteriju slijedi da postoje $n \geq 1$ i $m \geq 1$ takvi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Zato je za sve $k \geq 0$,

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)},$$

otkud slijedi

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(m)} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \Big) p_{ij}^{(n)} = +\infty$$

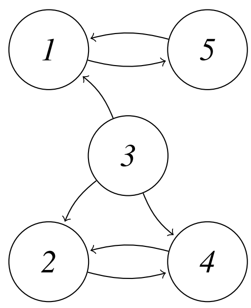
Dakle, $j \in S$ je povratno. □

Iz propozicije slijedi da ako je $i \in S$ prolazno, te $i \leftrightarrow j$, tada je $j \in S$ prolazno.
Dakle, povratnost i prolaznost su svojstva klase, tj. sva stanja koja se nalaze u istoj klasi (definiranoj poslije Propozicije (1.2.1)) su ili povratna ili prolazna. Specijalno, ako je lanac ireducibilan onda su sva stanja istog tipa. No, ukoliko je skup stanja S konačan ne mogu sva stanja biti prolazna, tj. tada S sadrži barem jedno povratno stanje (vidi [5]).

Primjer 1.2.3. *Promotrimo Primjer (1.1.2). Budući da je Markovljev lanac ireducibilan, a skup stanja S konačan (S konačan $\Longrightarrow$ S sadrži barem jedno povratno stanje) onda su sva stanja skupa S povratna.*

Primjer 1.2.4. *Promotrimo Primjer (1.2.2) sa konačnim skupom stanja $S = \{1,2,3,4,5\}$. Budući da je $S_1 \subset S$ zatvoren skup stanja, možemo promatrati restrikciju Markovljevog lanca na S_1. To je ponovno Markovljev lanac, ali na skupu stanja $\tilde{S} = S_1 = \{1,2\}$ i s matricom prijelaza $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$. Uočimo, da je lanac ireducibilan i $\tilde{S} = S_1$ konačan pa je $\tilde{S} = S_1$ povratna klasa. Analogno, pokaže se da je S_2 povratna klasa.*

Primjer 1.2.5. *Neka je X Markovljev lanac sa pripadnim grafom*



Neka je T skup svih $i \in S$ za koje postoji $j \in S$ takav da je $i \to j$ i $j \nrightarrow i$ (iz stanja i dolazimo u stanje j s pozitivnom vjerojatnošću, ali nije sigurno da ćemo se vratiti nazad u i tj. oznaka $j \nrightarrow i$ sugerira da je vjerojatnost prelaska iz stanja j u stanje i jednaka 0). Tada skup T sadrži samo prolazna stanja. Iz slike zaključujemo da je $T = \{3\}$ jer $3 \to 1, 1 \nrightarrow 3$, $3 \to 2, 2 \nrightarrow 3$, $3 \to 4, 4 \nrightarrow 3$, tj. stanje 3 je prolazno, a sva ostala stanja su povratna. Nadalje, jasno je da su $C_1 = \{1,5\}$ i $C_2 = \{2,4\}$ zatvoreni i ireducibilni skupovi.

Primjer 1.2.6. *Izračunajmo m-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{00}^{(m)}$ jednostavne slučajne šetnje u $\mathbb{Z}$ definirane u Primjeri (1.1.1). Ukoliko je $m = 2n+1$ neparan, tada je $p_{00}^{(m)} = 0$ (u početno stanje šetnja se može vratiti samo u parnom broju koraka). Za $m = 2n$ vrijedi*

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n} e^{-2n}(2n)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} e^{-n}(n)^n)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Gornja asimptotska jednakost povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \geq n_0$

$$2\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \geq p_{00}^{(2n)} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n.$$

Pretpostavimo $p = q = 1/2$, odnosno X je jednostavna simetrična slučajna šetnja. Tada je $4pq = 1$, pa je

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty.$$

Po Teoremu 1.2.2 slijedi da je X povratan.
Ako je $p \neq q$, tada je $4pq < 1$, pa imamo

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n < +\infty.$$

Po Teoremu 1.2.3 slijedi X je prolazan.

Na sličan način se pokaže da je jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^2$ povratna te da je prolazna u svim dimenzijama većim ili jednakim 3 ($\mathbb{Z}^n, n \geq 3$). (dokaz: vidi [5]). U nastavku ćemo to pokazati drugim metodama.

1.3 Stacionarna i granična distribucija

U ovom poglavlju definiramo stacionarnu distribuciju i graničnu distribuciju te pokazujemo njihovu povezanost.
Stacionarnost kod slučajnih procesa znači da se vjerojatnosna svojstva procesa ne mijenjaju kroz vrijeme.

Definicija 1.3.1. *Za slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da je stacionaran ako za sve $k \geq 0$ i sve $n \geq 0$, slučajni vektori $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$).*

Primjer 1.3.1. *Svaki niz $(X_n : n \geq 0)$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli je stacionaran proces.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in S)$ na S je stacionarna (ili invarijantna) distribucija Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\pi = \pi P$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \ \text{za sve } j \in S$$

Primjer 1.3.2. *(Lanac rađanja i umiranja (eng. Birth-death chains))*
Neka je X vremenski homogen Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ *i neka je matrica prijelaza P dana sa*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & & & & \\ & q_2 & r_2 & p_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & q_i & r_i & p_i & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ gdje } p_{ii+1} = p_i, p_{ii-1} = q_i, q_0 = 0, p_{ii} = r_i.$$

To se zove lanac rađanja i umiranja. Pretpostavimo $p_i > 0, q_i > 0, p_i + q_i + r_i = 1$ *za sve* $i \in \{1, 2, \dots\}$. *Da bi* π *bila stacionarna distribucija za stanja* $i \in \{1, 2, \dots\}$ *mora zadovoljavati sljedeće*

$$\pi_i = p_{i-1}\pi_{i-1} + r_i\pi_i + q_{i+1}\pi_{i+1},$$

i za granično stanje,

$$\pi_0 = \pi_1 q_1.$$

Naravno, π *mora biti vjerojatnosna, stoga* $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$. *Stavimo* $r_i = 1 - p_i - q_i$ *i pregrupiranjem izraza za* $i \in \{2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \pi_{i+1}q_{i+1} - \pi_i p_i &= \pi_i q_i - \pi_{i-1}p_{i-1} \\ \pi_1 q_1 - \pi_0 &= 0 \\ \pi_2 q_2 - \pi_1 p_1 &= \pi_1 q_1 - \pi_0. \end{aligned}$$

Stoga, $\pi_1 q_1 = \pi_0$ *i za* $i \in \{2, 3, \dots\}$, $\pi_i q_i = \pi_{i-1}p_{i-1}$. *To daje* $\pi_1 = \pi_0 \frac{1}{q_1}$ *i za* $i \in \{2, 3, \dots\}$,

$$\pi_i = \pi_0 \frac{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}.$$

Slijedi,

$$\pi_0 \left(1 + \frac{1}{q_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2 \cdots p_j}{q_1 q_2 \cdots q_{j+1}} \right) = 1.$$

Stacionarna distribucija postoji ako i samo ako

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1 p_2 \cdots p_j}{q_1 q_2 \cdots q_{j+1}} < \infty.$$

Neki slučajni procesi nemaju stacionarnu distribuciju, no imaju svojstvo $\lambda = \lambda P$ za neku mjeru $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ na S. Za takve nizove kažemo da imaju samo invarijantnu mjeru.

Definicija 1.3.3. *Stanje $i \in S$ je pozitivno povratno ako je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$.*

Uočimo da je pozitivno povratno stanje uvijek povratno (jer iz $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ slijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$)).
Povratno stanje koje nije pozitivno povratno naziva se *nul-povratnim*.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za stanje $j \in S$ definiramo*

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1_{(X_n = j)}.$$

Tada je ν invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno povratno tada je

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\mathbb{E}_i(T_i)}, \ j \in S$$

stacionarna distribucija.
(dokaz: vidi [5])

Teorem 1.3.1. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada je $\nu = (\nu_j : j \in S)$ invarijantna mjera takva da vrijedi $\nu_j > 0$ za sve $j \in S$. Ako je $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ neka druga invarijantna mjera za X tada postoji $c > 0$ takav da je $\lambda = c\nu$.*
(dokaz: vidi [5])

Teorem 1.3.2. *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) svako stanje je pozitivno povratno;

(b) postoji pozitivno povratno stanje $i \in S$;

(c) X ima stacionarnu distribuciju π.

Nadalje, ako vrijedi (c), tada je $\mathbb{E}_j(T_j) = 1/\pi_j$, za sve $j \in S$.
(dokaz: vidi [5])

Dakle, ako je lanac ireducibilan i povratan onda znamo da je invarijantna mjera jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. Specijalno, ako je lanac pozitivno povratan onda dopušta samo jednu invarijantnu distribuciju.
Zaključujemo da ireducibilan i konačan lanac ima samo jednu stacionarnu distribuciju.

Primjer 1.3.3. *Izračunajmo stacionarnu distribuciju za model bonusa iz Primjera (1.1.3). Jednadžbe glase:*

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_{2-} \\
\pi_1 &= \frac{3}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_{2+} \\
\pi_{2+} &= \frac{3}{4}\pi_1 \\
\pi_{2-} &= \frac{1}{4}\pi_3 \\
\pi_3 &= \frac{3}{4}\pi_{2+} + \frac{3}{4}\pi_{2-} + \frac{3}{4}\pi_3
\end{aligned}
$$

Ovaj linearni sustav nije linearno nezavisan, budući da zbrajanjem svih jednadžbi dolazimo do identiteta. Zbog toga možemo odbacimo jednu od jednadžbi. Ovdje su prva ili zadnja očigledan izbor. Izbacimo zadnju. Riješimo jedndažbe te dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\pi_{2+} = \frac{3}{4}\pi_1, \quad \pi_0 = \frac{\pi_1}{4}(4 - \frac{3}{4}) = \frac{13}{12}\pi_1 \\
\pi_{2-} = \pi_1(-1 + \frac{13}{4}) = \frac{9}{4}\pi_1, \quad \pi_3 = 9\pi_1.
\end{aligned}
$$

Sada računamo π_1:

$$\pi = \pi_1(13/12, 1, 3/4, 9/4, 9)$$

$$\sum_j \pi_j = \frac{\pi_1}{12}(13 + 12 + 9 + 27 + 108) = \frac{169}{12}\pi_1 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{12}{169}$$

Odavde slijedi:

$$\pi = \left(\frac{13}{169}, \frac{12}{169}, \frac{9}{169}, \frac{27}{169}, \frac{108}{169}\right)$$

Budući da ireducibilan Markovljev lanac s konačnim skupom stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, slijedi π je jedinstvena.

Primjer 1.3.4. *Lanac iz Primjera (1.2.4) na skupu stanja $\tilde{S}$ s matricom prijelaza $\tilde{P}$ je ireducibilan, a budući da je $\tilde{S}$ konačan postoji jedinstvena stacionarna distribucija $\tilde{\pi} = \left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)$.*

Uobičajeno je da Markovljev lanac s beskonačnim skupom stanja nema stacionarnu distribuciju, čak i kada je ireducibilan. To je slučaj kod jednostavne slučajne šetnje X definirane u Primjeru (1.1.1). Budući da X nema stacionarnu distribuciju onda po negaciji Teorema (1.3.2) slijedi X nije pozitivno povratan. Ako je šetnja simetrična onda iz Primjera (1.2.6) znamo da je X povratan, a budući da nije pozitivno povratan onda je X nul-povratan.

Pokažimo sada da jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ nema stacionarnu distribuciju. Zamislimo da u svakoj točki od $\mathbb{Z}$ imamo česticu mase 1. Svaka od tih čestica podijeli se u skladu s prijelaznim vjerojatnostima i pomakne na odgovarajuće mjesto. Konkretnije, čestica u stanju i podijeli se na dvije čestice, svaka mase $1/2$ od kojih se jedna pomakne u $i-1$, a druga u $i+1$. S druge strane, u stanje i dolaze dvije čestice, svaka mase $1/2$, jedna iz $i-1$, a druga iz $i+1$. Nakon simultane podjele svih čestica, odgovarajućih pomaka i sljepljivanja, očito je da u svakom stanju i imamo opet česticu mase 1. Preciznije, neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in \mathbb{Z})$ definirano s $\lambda_i = 1, i \in \mathbb{Z}$. Tada se gornji postupak kratko može zapisati kao

$$\lambda = \lambda P,$$

gdje je P prijelazna matrica jednostavne simetrične slučajne šetnje. Drugim riječima, λ nije stacionarna distribucija zato što nije nije vjerojatnosna distribucija (suma komponenti nije jednaka 1). Štoviše, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i = +\infty$, što znači da se λ ne može normirati tako da postane stacionarnom distribucijom. Intuitivno je jasno da bi stacionarna distribucija π trebala imati svojstvo da je $\pi_i = \pi_j$ za sve $i, j \in \mathbb{Z}$ t.j. da je konstantna. Međutim, takva vjerojatnost na $\mathbb{Z}$ ne postoji. Zaključujemo da jednostavna simetrična slučajna šetnja nema stacionarnu distribuciju. To vrijedi i za bilo koju slučajnu šetnju.

Definicija 1.3.4. *Neka je $X = (X_n \colon n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i \colon i \in S)$ naziva se granična distribucija Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako za sve $i, j \in S$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

Vrijednosti π_j govore nam da vjerojatnost da se Markovljev lanac nađe u stanju j nakon velikog broja koraka teži prema vrijednosti π_j, neovisno o vjerojatnosnoj distribuciji početnog stanja.

Vrijednosti π_j nazivaju se granične vjerojatnosti.

Uočimo da može vrijediti da je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \rho_j$ za sve $i, j \in S$, ali da $\rho = (\rho_j \colon j \in S)$ nije granična distribucija. Pokažimo to primjerom. Neka je X Markovljev lanac čija su sva stanja prolazna. Tada za prolazno stanje j vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ pa je $\rho_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. Dakle, limes postoji, ali ne definira graničnu distribuciju.

Propozicija 1.3.2. *Neka je π granična distribucija Markovljevog lanca X s konačnim ili prebrojivim skupom stanja. Tada je π i stacionarna distribucija.*

Dokaz. (i) S konačan skup stanja
Imamo,

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}.$$

Zamjena limesa i sume je opravdana zbog konačnosti od S. Dakle, π je stacionarna distribucija.
(ii) S prebrojiv skup stanja
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Za svako stanje $j \in S$ i svaki $M \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj}.$$

Pustimo $M \to \infty$ i dobivamo

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}, \quad j \in S. \tag{1.4}$$

Pretpostavimo da za neko $j_0 \in S$ vrijedi stroga nejednakost

$$\pi_{j_0} > \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj_0} \tag{1.5}$$

Zbrojimo nejednakosti (1.4) po $j \in S$. Uzevši u obzir strogu nejednakost (1.5) dobivamo

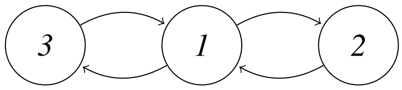
$$\sum_{j\in S} \pi_j > \sum_{j\in S} \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj} = \sum_{k\in S} \pi_k \left(\sum_{j\in S} p_{kj} \right) = \sum_{k\in S} \pi_k = 1.$$

Dobili smo kontradikciju s π vjerojatnosna distribucija (tj. $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$).
Dakle, u (1.4) vrijedi jednakost za sve $j \in S$ što znači da je π stacionarna distribucija. □

Primjer 1.3.5. *Neka je $(X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac zadan matricom prijelaza*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pripadni graf je



Dakle, lanac je ireducibilan sa stacionarnom distribucijom $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *te je periodičan s periodom* 2*. Nadalje, uočimo da je zbog periodičnosti* $p_{11}^{(2n)} = 1$ *i* $p_{11}^{(2n+1)} = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$*. Dakle,* $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}$ *ne postoji. Stoga, stacionarna distribucija nije i granična distribucija.*

Motivirani prethodnim primjerom definirajmo aperiodično stanje Markovljevog lanca.

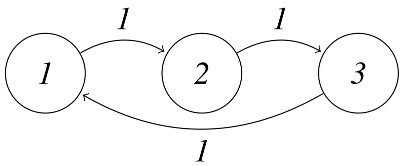
Definicija 1.3.5. *Neka je X Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$, označimo s $d(i)$ najveći zajednički djelitelj (nzd) skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$, gdje je $d(i) = 1$ ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i aperiodično, ako je $d(i) = 1$. U suprotnom kažemo da je i periodičko stanje, a $d(i)$ se zove period od i.*

Aperiodičnost je svojstvo klase komuniciranja, štoviše period svih stanja unutar iste klase komuniciranja je jednak (vidi [5]). Uočimo da ako za stanje $i \in S$ vrijedi $p_{ii} > 0$, tada je i nužno aperiodično.

Primjer 1.3.6. *Promotrimo Markovljev lanac s matricom prijelaza*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pripadnim grafom



Uočimo, ako krenemo iz stanja 1*, stazom* $1 \to 2 \to 3 \to 1$ *ponovo ćemo se vratiti u stanje* 1*. No, to vrijedi i za sva ostala stanja. Dakle, ovaj Markovljev lanac je periodičan sa periodom* 3*.*

Teorem 1.3.3. *Neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan, te ima stacionarnu distribuciju π. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \text{ za sve } j \in S.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \text{ za sve } i, j \in S$$

tj., stacionarna distribucija ujedno je i granična.
(dokaz: vidi [5])

U slučaju konačnog skupa stanja posrijedi je konvergencija obzirom na normu totalne varijacie (što je komentirano niže) te isto vrijedi i za slučaj prebrojivog skupa stanja.

Definicija 1.3.6. *Neka je μ i ν dvije vjerojatnosne mjere na S. Udaljenost totalne varijacije deinirana je sa*

$$||\mu - \nu|| = 2 \sup_{A\subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

To je najveća moguća razlika između vjerojatnosti koje dvije vjerojatnosne distribucijie mogu dodijeliti istom događaju.

Lema 1.3.1. *Neka su μ i ν vjerojatnosne distribucije skupa S. Vrijedi*

$$||\mu - \nu|| = \frac{1}{2} \sum_{j\in S} |\mu_j - \nu_j|.$$

(dokaz: vidi [2])

Neka je zadana ireducibilna i aperiodična prijelazna matrica P na konačnom prostoru stanja, te neka je π njena stacionarna distribucija. Zanima nas da li $p^{(n)}(i, \cdot)$ konvergira prema π u smislu da udaljenost totalne varijacije među njima teži u 0. Iz Teorema (1.3.3) slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| = 0, \text{ za sve } i, j \in S.$$

Za proizvoljan $i \in S$ vrijedi

$$||p^{(n)}(i, \cdot) - \pi|| = \frac{1}{2} \sum_{j\in S} |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \to 0, n \to \infty.$$

Isto vrijedi i u slučaju prebrojivog skupa stanja. (vidi [2],[3])
Podsjetimo se vrlo važnog rezultata iz teorije vjerojatnosti.

Teorem 1.3.4. *(Jaki zakon velikih brojeva) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvih da je $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, te stavimo $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$. Tada je*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mu\Big) = 1.$$

Na kraju, dajemo jedan od najvažnijih rezultata teorije Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja.

Teorem 1.3.5. *(Ergodski teorem) Pretpostavimo da je Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na S. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j \Big) = 1.$$

(dokaz: vidi [5])

Interpretacija ergodskog teorema:
O izrazu $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ razmišljamo kao o vremenskom usrednjenju funkcije po putu Markovljevog lanca. S druge strane, $\pi(f) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j$ je prostorno usrednjenje funkcije po (stacionarnoj) distribuciji π.
Ergodski teorem kaže da je za gotovo sve putove granično vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju.

Poglavlje 2

Lyapunovljeva metoda i martingali

U ovom poglavlju promatramo homogen Marovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ sa prebrojivim skupom stanja S i marticom prijelaza $P = \{p(i,j)\}_{i,j\in S} = \{p_{i,j}\}_{i,j\in S}$. Pretpostavljamo da je X konstruiran na prostoru stanja $\Omega = S^{\{0,1,2,\dots\}} = \{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : \omega_n \in S\}$ i da je $\mathbb{P}_i$ vjerojatnosna mjera na Ω koja odgovara početnom uvjetu $X_0 = i$.

2.1 Martingali i harmonijske funkcije

U teoriji vjerojatnosti, martingal je familija slučajnih varijabli za koje vrijedi da je u svakom promatranom trenutku očekivana sljedeća vrijednost jednaka trenutačnoj vrijednosti pri čemu su nam poznate sve prethodne vrijednosti procesa, uključujući sadašnju. U ovom odjeljku uvodimo pojam martingala za što nam je potrebno definirati osnovne pojmove kao što su filtracija i adaptiranost. Također, navesti ćemo osnovna svojstva martingala te ćemo definirati harmonijske funkcije.

Definicija 2.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.*

(a) Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.

(b) Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ je adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.

(c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces. Za $n \geq 0$ definiramo $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Tada se filtracija $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0)$ zove prirodna filtracija od X.

Definicija 2.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je X adaptiran obzirom na* $\mathbb{F}$*, te da je* $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *za sve* $n \geq 0$.

(a) X se zove martingal (preciznije, $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$*-martingal), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0. \tag{2.1}$$

(b) X se zove supermartingal (preciznije, $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$*-supermartingal), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

(c) X se zove submartingal (preciznije, $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$*-submartingal), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \text{ g.s., za sve } n \geq 0.$$

Primjetimo da je X supermartingal ako i samo ako je $-X$ submartingal. Također, X je martingal ako i samo ako je istovremeno supermartingal i submartingal. Nadalje, ako nije specificirana filtracija s obzirom na koju je X martingal, uvijek se podrazumijeva da se radi o prirodnoj filtraciji $\mathbb{F}^0$ procesa $X = (X_n : n \geq 0)$. Uzimanjem očekivanja iz relacije (2.1), slijedi da svaki martingal $X = (X_n : n \geq 0)$ ima konstantno očekivanje, tj.

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Ipak, nisu svi procesi sa konstantnim očekivanjem martingali. Trivijalan primjer takvog procesa je niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli za koje postoji očekivanje. Zaista, za takav proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zbog nezavisnosti vrijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^0] = \mathbb{E}X_{n+1} \neq X_n.$$

U slučaju da je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal, odmah zaključujemo da je

$$\mathbb{E}X_{n+1} \leq \mathbb{E}X_n, \text{ za sve } n \geq 0$$

tj.

$$\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Jasno je da vrijede analogne nejednakosti u slučaju kad je X submartingal.

Primjer 2.1.1. *Neka je* $Y = (Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom* $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p, \mathbb{P}(Y_n = -1) = q = 1 - p, 0 < p < 1$. *Slučajne varijable* Y_n *su Bernoullijeve na* $\{-1, 1\}$. *Definiramo* $X_0 = 0, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, *te* $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k, \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), n \in \mathbb{N}$. *Pretpostavimo da je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *adaptiran s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$. *Familija* $X = (X_n : n \geq 0)$ *je slučajan proces koji zovemo slučajna šetnja.*

- *Ako je* $\mathbb{P}[Y_n = -1] = \mathbb{P}[Y_n = 1] = \frac{1}{2}, n \geq 1,$ *onda je* $\mathbb{E}[Y_n] = 0, n \geq 1,$ *stoga je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *martingal.*
  Zaista, vrijedi
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (X_n \text{ je } \mathcal{F}_n \text{ izmjeriva}) \\ &= X_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n \ (g.s)\ .\end{aligned}$$

- *Ako je* $\mathbb{P}[Y_n = 1] > \frac{1}{2}, n \geq 1,$ *onda je* $\mathbb{E}[Y_n] > 0, n \geq 1,$ *stoga je*
  $$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}] > X_n \ (g.s)\ .$$
  Dakle, $X = (X_n : n \geq 0)$ *submartingal.*

- *Ako je* $\mathbb{P}[Y_n = 1] < \frac{1}{2}, n \geq 1,$ *onda je* $\mathbb{E}[Y_n] < 0, n \geq 1,$ *stoga je*
  $$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}] < X_n \ (g.s)\ .$$
  Dakle, $X = (X_n : n \geq 0)$ *supermartingal.*

Definicija 2.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor s filtracijom* $\mathbb{F}$.
Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ *zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *(ili* $\mathbb{F}$*-vrijeme zaustavljanja), ako vrijedi*
$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad za\ sve\ n \geq 0.$$

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces i T vrijeme zaustavljanja. Na događaju $\{T < \infty\}$ definiramo X_T formulom
$$X_T = \sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{T=n\}}.$$
Riječima, $X_T = X_n$ na događaju $\{T = n\}$.

Definicija 2.1.4. *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces i* T *vrijeme zaustavljanja. Proces zaustavljen u vremenu* T, $X^T = (X_n^T : n \geq 0)$ *, definira se formulom*
$$X_n^T := X_{T \wedge n} = \begin{cases} X_n, & n < T \\ X_T, & n \geq T \end{cases}, \quad n \geq 0.$$

Budući da su konstante trivijalno martingali, očekujemo da će i proces X^T također biti martingal. Zaista, za proizvoljno $n \geq 1$, budući da je $\{k \leq T\} = \{T < k\}^c =$

$\{T \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ za sve $k \leq n$ i X je martingal, slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_0 + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{k\leq T\}}(X_k - X_{k-1}) + 1_{\{n\leq T\}}\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= X_{T\wedge(n-1)}.
\end{aligned}$$

Specijalno, znamo da je tada

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0. \tag{2.2}$$

Analogno se pokaže da, u slučaju kada je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal (submartingal), vrijedi da je i zaustavljen proces X^T također supermartingal (submartingal). Specijalno, u slučaju supermartingala vrijedi

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0,$$

a u slučaju submartingala vrijedi

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} \geq \mathbb{E}X_0, \text{ za sve } n \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Tada gotovo sigurno vrijedi

$$X_{T\wedge n} \to X_T, n \to \infty.$$

Zanima nas pod kojim uvjetima možemo u (2.2) zamijeniti limes i integral, tj. zaključiti da vrijedi

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0.$$

Rezultati koji daju uvjete pod kojim gornja jednakost vrijedi zovu se teoremi o opcionalnom zaustavljanju.

Teorem 2.1.1. *(Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju)*
Neka je T vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, takvo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

(a) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal (submartingal) s obzirom na $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

(i) Postoji $N > 0$ takvo da je $T \leq N$ g.s. tj. T je omeđeno;

(ii) Postoji $K > 0$ takav da je $|X_{T\wedge n}| \leq K$, za sve $n \geq 0$.

Tada je X_T integrabilna slučajna varijabla i u slučaju supermartingala vrijedi $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_0$, dok u slučaju submartingala vrijedi $\mathbb{E}X_T \geq \mathbb{E}X_0$.

(b) Ako je X martingal i vrijedi (i) ili (ii), tada je X_T integrabilna i vrijedi $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je X supermartingal. Tada je zaustavljen proces X^T također supermartingal i vrijedi $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$, za sve $n \geq 0$. U slučaju (i), imamo da je $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} \leq \mathbb{E}X_0$. U slučaju (ii) je $|X_{T\wedge n}| \leq K$, za sve $n \geq 0$, pa upotrebom teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0.$$

Analognu tvrdnju dobijemo i za submartingal X, tako da već dokazano primjenimo na supermartingal $-X$.
(b) Primjenimo (a) na supermartingale X i $-X$. □

Teorem 2.1.2. *(Opcionalni teorem zaustavljanja za nenegativne supermartingale)*
Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ nenegativan supermartingal i T vrijeme zaustavljanja onda

$$\mathbb{E}[X_0] \geq \mathbb{E}[X_T; T < \infty].$$

Dokaz. Kako je $X_T = \lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}$ na $\{T < \infty\}$, Fatouova lema implicira

$$\mathbb{E}[X_0] \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] \geq \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_{T\wedge n}] \geq \mathbb{E}[X_T; T < \infty]$$

□

Pokažimo vezu Markovljevih lanaca i martingala.
Neka je S diskretan skup, $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s vrijednostima u S definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s početnom distribucijom λ, $\lambda(j) = \mathbb{P}(X_0 = j)$, te matricom prijelaza $P = (p_{ij} : i, j \in S)$. Definiramo σ-podalgebre $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n), n \geq 0$.
Za nenegativnu funkciju $h : S \to [0, \infty)$ definiramo funkciju $Ph : S \to [0, \infty)$ kao

$$Ph(i) := \sum_{j\in S} p_{ij}h(j).$$

Funkcija h zove se *harmonijska* ako vrijedi $Ph = h$ na S.
Funkcija h zove se *superharmonijska* ako vrijedi $Ph \leq h$ na S.

Funkcija h zove se *subharmonijska* ako vrijedi $Ph \geq h$ na S.
Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j|\sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j|\sigma(X_n)) \\ &= p(X_n, j).\end{aligned}$$

Ako je $h : S \to [0, \infty)$, tada iz gornje relacije slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j\in S} h(X_{n+1}) 1_{\{X_{n+1}=j\}}|\mathcal{F}_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j\in S} h(j) 1_{\{X_{n+1}=j\}}|\mathcal{F}_n\Big] \\ &= \sum_{j\in S} h(j)\mathbb{P}(X_{n+1} = j|\mathcal{F}_n) = \sum_{j\in S} p(X_n, j)h(j),\end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi iz uvjetnog teorema o monotonoj konvergenciji.

Pretpostavimo da je h superharmonijska. Računamo,

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \sum_{j\in S} p(X_n, j)h(j) = Ph(X_n) \leq h(X_n), \quad n \geq 0,$$

što znači da je slučajan proces $(h(X_n) : n \geq 0)$ nenegativan supermartingal.
Uočimo da to vrijedi za svaku početnu distribuciju λ.
Za $i, j \in S$ definiramo

$$f(i, j) := \mathbb{P}_i(T_j < \infty),$$

gdje je $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|X_0 = i)$, a $T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$ prvo vrijeme povratka u j (uz ovakvu definiciju vremena T_j je $f(j, j)$ vjerojatnost povratka u stanje j).
Pretpostavimo da je X ireducibilan i povratan što povlači da je $f(i, j) = 1$ za sve $i, j \in S$. Neka je h superharmonijska funkcija. Zbog $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = f(i, j) = 1$, zaključujemo da je $\mathbb{E}_i[h(X_{T_j})] = h(j)$. Budući da je $(h(X_n) : n \geq 0)$ supermartingal, slijedi $\mathbb{E}_i[h(X_{T_j})] \leq h(i)$. Dakle, za proizvoljne $i, j \in S$ vrijedi $h(j) \leq h(i)$. To očigledno povlači da je h konstanta.
Dakle, svaka superharmonijska funkcija ireducibilnog i povratnog Markovljevog lanca je konstanta.

Teorem 2.1.3. *(O konvergenciji martingala)*
Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal takav da vrijedi $\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty$. Tada postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s, te vrijedi $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.
(Dokaz: vidi [6])

Korolar 2.1.1. *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal takav da je $X_n \geq 0$ g.s. za sve $n \geq 0$, tada postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s, te vrijedi $\mathbb{E}X_\infty \leq \mathbb{E}X_0$.*
(Dokaz: vidi [6])

2.2 Foster–Lyapunovljev drift kriterij za prolaznost i povratnost

Foster–Lyapunovljev drift kriterij za povratnost i prolaznost Markovljevih lanaca bazira se na pronalasku odgovarajuće testne funkcije $V(x)$ (nenegativne, neograničene u slučaju za povratnost i nenegativne, ograničene u slučaju za prolaznost), i odgovarajućeg skupa $C \in \mathcal{P}(S)$ takvog da $\int p(x,dy)V(y) - V(x) \leq 0$ u slučaju za povratnost, i $\int p(x,dy)V(y) - V(x) \geq 0$ slučaju za prolaznost, za svaki $x \in C^c$.

Definicija 2.2.1. *Drift operator za Markovljeve lance*
Drift operator $\triangle$ *za bilo koju nenegativnu izmjerivu funkciju* V *definira se relacijom*

$$\triangle V(x) := (PV)(x) - V(x) = \int p(x,dy)V(y) - V(x), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Funkciju V u gornjoj definciji zovemo *Lyapunovljeva funkcija.* Također, uočimo da $\Delta = P - I$, gdje je I operator (matrica) identitete, predstavlja infinitezimalni generator od X.
Nadalje, vrijedi:

$$\triangle V(X_n) = \mathbb{E}[V(X_{n+1}) - V(X_n)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[V(X_1) - V(X_0)], \forall n \geq 0.$$

Infinitezimalni generator se može upotrijebiti za identifikaciju martingala povezanih s Markovljevim lancem. Za danu funkciju $f : S \to [0,\infty)$ definirajmo $g = \triangle f$ te promotrimo stohastički proces

$$M_n := f(X_n) - f(X_0) - \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k), \quad n \geq 1.$$

Ovaj proces je martingal uz određene uvjete na f. Primjerice, to je slučaj kada je f omeđena. Doista, ako je f omeđena funkcija, reći ćemo omeđena sa $K < \infty$, tada

$$|(Pf)(x)| = \left|\sum_{y \in S} p_{xy} f(y)\right| \leq K.$$

Stoga, $|M_n| \leq 2(n+1)K < \infty$; posebno, M_n je integrabilan. Također,

$$M_{n+1} - M_n = f(X_{n+1}) - Pf(X_n),$$

i kako je

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n] = Pf(X_n)$$

imamo

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = 0.$$

Za funkciju $V : S \to [0, \infty)$ i $M \geq 0$ definiramo *nivo skup* $C_V(M)$ od V nivoa M kao

$$C_V(M) := \{x : V(x) \leq M\}.$$

Definicija 2.2.2. *Drift svojstvo za prolaznost*
(**V0**) *Postoji nenegativna ograničena funkcija V i skup $C \subset S$ takvi da*

$$\triangle V(x) \geq 0, \quad x \in C^c$$

Definicija 2.2.3. *Drift svojstvo za povratnost*
(**V1**) *Postoji nenegativna funkcija V i skup $C \subset S$ takvi da*

$$\triangle V(x) \leq 0, \quad x \in C^c$$

Propozicija 2.2.1. *Neka $f \colon S \to [0, \infty)$ zadovoljava $Pf(x) \leq f(x)$ za svaki $x \in S \setminus C$, gdje je $C \subset S$. Definiramo vrijeme zaustavljanja sa $D := inf\{n \geq 0 \colon X_n \in C\}$. Tada je zaustavljen proces $(f(X_{n \wedge D}))_{n \geq 0}$ $\mathbb{P}_x$-supermartingal za svaki $x \in S$.*

Dokaz. Računamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{(n+1) \wedge D}) | \mathcal{F}_n] &= 1_{\{n<D\}} \mathbb{E}_x[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}_x[f(X_D) 1_{\{D \leq n\}} | \mathcal{F}_n] \\
&= 1_{\{n<D\}} \mathbb{E}_x[f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] + f(X_D) 1_{\{D \leq n\}} \\
&= 1_{\{n<D\}} Pf(X_n) + f(X_D) 1_{\{D \leq n\}} \\
&\leq 1_{\{n<D\}} f(X_n) + f(X_D) 1_{\{D \leq n\}} \\
&= f(X_{n \wedge D}).
\end{aligned}$$

Nejednakost u gore navedenom računanju slijedi iz pretpostavke jer $X_n \in S \setminus C$ kada $n < D$. Izračuni uvjetnog očekivanja vrijede čak i bez znanja da je $\mathbb{E}_x[f(X_{n \wedge D})]$ konačno, jer $f \geq 0$. Pokazavši nejednakost supermartingala, sada možemo provjeriti potrebnu integrabilnost:

$$\mathbb{E}_x[f(X_{n \wedge D})] \leq \mathbb{E}_x[f(X_{0 \wedge D})] = f(x) < \infty.$$

□

Uočimo da isti dokaz pokazuje da je $f(X_{n \wedge D})$ martingal ako je $Pf = f$ na $S \setminus C$.

Teorem 2.2.1. *(Pigeonhole Principle)*
Pretpostavimo da imamo $n + 1$ (ili više) objekata stavljenih u n kutija. Tada neka kutija sadrži najmanje dva objekta.

Dokaz. Pretpostavimo da svaka kutija sadrži točno jedan objekt. Tada je ukupan broj objekata najviše $1 + 1 + \cdots + 1 = n$. Dobili smo kontradikciju. □

Ova naizgled jednostavna činjenica može se koristiti na iznenađujuće načine. Ključ je obično stavljanje predmeta u okvire prema nekom pravilu, tako da kada dva predmeta završi u istoj kutiji, to je zato što imaju neki željeni odnos.
Teorem (2.2.1), također, primjenit ćemo u dokazu Teorema Foster-Lyapunovljev kriterij za povratnost koji slijedi.

Teorem 2.2.2. *(Foster-Lyapunovljev kriterij za povratnost)*
Neka je X ireducibilan. Pretpostavimo da postoji $C \subset S$ konačan skup i funkcija $f : S \to [0, \infty)$ tako da

(a) $Pf(x) \leq f(x)$ *za sve* $x \notin C$

(b) $C_f(M) = \{x \in S : f(x) \leq M\}$ *je konačan skup za sve* $M > 0$.

Tada je Markovljev lanac X povratan.

Dokaz. Definirajmo, najprije, vremena zaustavljanja $D := inf\{n \geq 0\colon X_n \in C\}$ i za $M \in \mathbb{N}$, $S_M := inf\{n \geq 0\colon f(X_n) > M\}$. Fiksirajmo $x \in S$ i pretpostavimo da $\mathbb{P}_x[S_M = \infty] > 0$ za neke $M \in \mathbb{N}$. Primijetimo da

$$\{S_M = \infty\} \subseteq \{f(X_n) \leq M \text{ za sve } n\}.$$

Stoga, postoji pozitivna vjerojatnost $\mathbb{P}_x$ da Markovljev lanac X ostaje u konačnom skupu $\{x\colon f(x) \leq M\}$ zauvijek. Ovo zauzvrat podrazumijeva da, uz pozitivnu vjerojatnost $\mathbb{P}_x$, jedno stanje iz $\{x\colon f(x) \leq M\}$ se posjećuje beskonačno mnogo puta. Takvo stanje mora biti povratno; zaključujemo da je svaki element iz S povratan jer je X ireducibilan. U kratko, ako je $\mathbb{P}_x[S_M = \infty] > 0$ za neki $x \in S$, tada je X povratan i mi smo gotovi.
Pretpostavimo da je $\mathbb{P}_x[S_M = \infty] = 0$ za sve $x \in S$ i sve $M \in \mathbb{N}$; to je, $\mathbb{P}_x[S_M < \infty] = 1$ za sve $x \in S$ i sve $M \in \mathbb{N}$. Znamo da je $f(X_{n\wedge D})$, $n \geq 0$, nenegativan $\mathbb{P}_x$–supermartingal za sve $x \in S$.
Prema Opcionalnom teoremu zaustavljanja za nenegativne supermartingale (2.1.2) imamo

$$\begin{aligned} f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_{0\wedge D})] &\geq \mathbb{E}_x[f(X_{S_M\wedge D})] \\ &\geq \mathbb{E}_x[f(X_{S_M\wedge D}); S_M < D] \geq M\mathbb{P}_x[S_M < D]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Konačna nejednakost slijedi iz činjenice da $S_M \wedge D = S_M$ na $\{S_M < D\}$ i zato je $f(X_{S_M\wedge D}) = f(X_{S_M}) \geq M$ na $\{S_M < D\}$. Uspoređujući početaki kraj u (2.4) dolazimo do

$$\mathbb{P}_x[S_M < D] \leq f(x)/M, \quad \forall x \in S, \forall M \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Događaji $\{S_M < D\}$ su padajući tj. vrijedi $\{S_{M+1} < D\} \subseteq \{S_M < D\}$ za sve $M \in \mathbb{N}$. Pustimo sada $M \to +\infty$ u (2.5) te dobijemo

$$\mathbb{P}_x[\cap_{M\in\mathbb{N}}\{S_M < D\}] = 0, \quad \forall x \in S. \tag{2.6}$$

Dakle,

$$\mathbb{P}_x[D \leq S_M \text{ za neke } M \in \mathbb{N}] = 1, \quad \forall x \in S. \tag{2.7}$$

Kada kombiniramo (2.7) s činjenicom $\mathbb{P}_x[S_M < \infty] = 1$ za sve $x \in S$ i sve $M \in \mathbb{N}$ dobijemo

$$\mathbb{P}_x[D < \infty] = 1, \quad \forall x \in S. \tag{2.8}$$

Stoga je povratak na C siguran;

$$\mathbb{P}_x[X_n \in C \text{ za beskonačno mnogo } n] = 1. \tag{2.9}$$

Ali C je konačan skup, pa po Teoremu (2.2.1) "Pigeonhole principle" , (2.9) implicira da postoji $x_0 \in C$ tako da

$$\mathbb{P}_x[X_n = x_0 \text{ za beskonačno mnogo } n] = 1.$$

Naravno, stanje x_0 mora biti povratno i lanac X je povratan jer je ireducibilan. □

Primjer 2.2.1. *Neka je $\{\xi\}_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih Bernulijevih slučajnih varijabli: $\mathbb{P}[\xi_n = k] = \mathbb{P}[\xi_n = -k] = \frac{1}{2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zadovoljava:*

(i) $|b(x)| < |x|$ *za sve* $x \neq 0$*,*

(ii) $b(x) < 0$ *za* $x > 0$*,*

(iii) $b(x) > 0$ *za* $x < 0$*.*

Promotrimo Markovljev lanac $X = \{X_n : n \geq 0\}$ generiran rekurzivno s

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n) + \xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pretpostavimo da je X ireducibilan Markovljev lanac te koristeći Teorem (2.2.2) pokažimo da je X povratan.
Uzmimo $f(x) := |x|$. Tada

$$Pf(x) = \mathbb{E}_x|X_1| = \mathbb{E}_x|x + b(x) + \xi_1| = \frac{1}{2}(|x + b(x) + k| + |x + b(x) - k|).$$

Radi jednostavnosti dokaza uzmimo $k = 1$.
Pretpostavimo da je $x > 0$. Tada po (i) i (ii) imamo $0 \leq -b(x) < x$, pa je $x + b(x) \pm 1 \geq 0$, odakle

$$\frac{1}{2}(|x + b(x) + 1| + |x + b(x) - 1|) = x + b(x) < x = |x| = f(x),$$

što potvrđuje da je $Pf(x) \leq f(x)$ ako $x > 0$.

Pretpostavimo sada da je $x < 0$. Tada po (i) i (iii) imamo $0 \leq b(x) < -x$, pa je $-x - b(x) \pm 1 \geq 0$, stoga je

$$\frac{1}{2}(|x + b(x) + 1| + |x + b(x) - 1|) = -x - b(x) < -x = |x| = f(x),$$

što potvrđuje da je $Pf(x) \leq f(x)$ ako $x < 0$.
Stoga se Teorem (2.2.2) odnosi na ovakav izbor f s $C = \{0\}$. Zaključujemo X je povratan.

Napomenimo da vrijedi sljedeće:
Ireducibilan Makovljev lanac X je povratan ako i samo ako postoji konačan skup $C \subset S$ i funkcija $f : S \to [0, \infty)$ takva da vrijedi $(V1)$ na C^c i $\{x \in S : f(x) \leq M\}$ je konačan skup za sve $M > 0$.
Implikaciju $\Longleftarrow$ smo dokazali u Teoremu (2.2.2). Dokaz obratne implikacije možemo naći u [3].

Teorem 2.2.3. *(Foster-Lyapunovljev dovoljan kriterij za prolaznost)*
Neka je Markovljev lanac X sa matricom prijelaza P ireducibilan i neka je $g : S \to [0, \infty)$ ograničena funkcija takav da

$$Pg(x) \leq g(x), \ \textit{za sve } x \notin C,$$

za neki skup C, bez pretpostavke konačnosti. Pretpostavimo, štoviše, da postoji $x \notin C$ takav da

$$g(x) < g(y), \ \textit{za sve } y \in C.$$

Tada je lanac prolazan.

Dokaz. Neka je D vrijeme povratka u C i neka $x \notin C$ zadovoljava $g(x) < g(y)$ za sve $y \in C$. Definiramo $M_n = g(X_{n\wedge D})$. Po Propoziciji (2.2.1) slijedi M_n je $\mathbb{P}_x$-supermartingal. Po Teoremu o konvergenciji martingala, limes M od $M_n = g(X_{n\wedge D})$ postoji i konačan je, $\mathbb{P}_x$-g.s. Stoga je,

$$\mathbb{E}_x[M] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[M_n]$$

i

$$\mathbb{E}_x[M_n] \leq \mathbb{E}_x[M_0] = g(x).$$

Zaključujemo,

$$\mathbb{E}_x[M] \leq g(x). \tag{2.10}$$

Ako je $D < \infty$ $\mathbb{P}_x$-g.s. onda $\mathbb{E}_x[M] \geq \inf_{y \in C} g(y) > g(x)$, a to je kontradikcija sa (2.10). Stoga, $\mathbb{P}_x(D < \infty) < 1$, što znači da striktno pozitivnom vjerojatnošću, lanac koji kreće iz $x \notin C$ neće se vratiti u C. Dakle, lanac X je prolazan. □

Primjer 2.2.2. *Neka je $\{\xi\}_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih Bernulijevih slučajnih varijabli: $\mathbb{P}[\xi_n = k] = \mathbb{P}[\xi_n = -k] = \frac{1}{2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zadovoljava:*

(i) $|b(x)| < |x|$ *za sve* $x \neq 0$,

(ii) $b(x) > 0$ *za* $x > 0$,

(iii) $b(x) < 0$ *za* $x < 0$.

Promotrimo Markovljev lanca $X = \{X_n : n \geq 0\}$ generiran rekurzivno s

$$X_{n+1} = X_n + b(X_n) + \xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pretpostavimo da je X ireducibilan Markovljev lanac te primjenom Teorema (2.2.3) pokažimo da je X prolazan.
Uzmimo $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|+1}, x \in S = \mathbb{Z}$. Tada je $g(x) = \frac{1}{|x|+1}, x \in S$. Funkcije f i g su ograničene i nenegativne. Nadalje, moramo pokazati da zadovoljava $Pf(x) \geq f(x), x \notin C$ tj. želimo $\underline{\lim}_{|x|\to\infty}(Pf(x) - f(x)) > 0$. Dovoljno je dokazati da je $Pg(x) \leq g(x)$.

$$\begin{aligned}
g(x) - Pg(x) &= \frac{1}{1+|x|} - \mathbb{E}_x\left(\frac{1}{1+|X_1|}\right) \\
&= \frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+|x+b(x)+k|} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+|x+b(x)-k|}
\end{aligned}$$

Radi jednostavnosti dokaza uzmimo $k = 1$.
Uzmimo prvo $x > 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x+b(x)+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x+b(x)-1}\\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x+b(x)} + \frac{1}{x+b(x)}\right)\\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2+2x+2b(x)}{(2+x+b(x))(x+b(x))}\\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1+x+b(x)}{(2+x+b(x))(x+b(x))} \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{x+b(x)}\\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+b(x)} = \frac{x+b(x)-x}{x(x+b(x))} = \frac{b(x)}{x(x+b(x))} > 0,
\end{aligned}$$

gdje kod četvrte jednakosti, za dovoljno veliki x, možemo zanemariti konstante 1 i 2.
Dakle, pokazali smo $Pg(x) \leq g(x), x \notin C$.

Uzmimo sada $x < 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x-b(x)-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x-b(x)+1}\\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+b(x)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+b(x)-2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2b(x)-2}{(x+b(x))(x+b(x)-2)}\\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{x+b(x)-1}{(x+b(x))(x+b(x)-2)} \approx \frac{1}{-x} + \frac{1}{x+b(x)} = \frac{b(x)}{-x(x+b(x))} > 0
\end{aligned}$$

gdje kod četvrte jednakosti, za dovoljno veliki x, možemo zanemariti konstante 1 i 2.
Pokazali smo $Pg(x) \leq g(x), x \notin C$. Stoga se Teorem (2.2.3) odnosi na ovakav izbor f odnosno g s $C = \{-n, \ldots, 0, \ldots, n\}$ za neki $n > 0$ dovoljno veliki. Uočimo, da za svaki $x \notin C$ vrijedi

$$g(x) < g(y), y \in C.$$

Dakle, svi uvjeti Teorema (2.2.3) su zadovoljeni. Slijedi, X je prolazan.

Poglavlje 3

Primjeri

U prvom podpoglavlju pokazujemo da je simetrična slučajna šetnja u dimenzijama 1 i 2 povratna, a u dimenzijama strogo većim od 2 prolazna te simuliramo slučajnu šetnju u dimenzijama 1 i 2. U drugom podpoglavlju bavimo se slučajnom šetnjom na polupravcu dok u trećem podpoglavlju diskutiramo AR(1) proces.
Sve simulacije radimo u programskom jeziku R.

3.1 Slučajna šetnja

Definicija 3.1.1. *Slučajna šetnja*
Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ *skup slučajnih varijabli definiran odabirom proizvoljne distribucije za* X_0 *i neka za* $n \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi*

$$\textit{(RW)} \qquad X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$$

gdje su W_n *nezavisne su jednako distribuirane slučajne varijable s vrijednostima u* $\mathbb{R}$, $\Gamma(-\infty, y] = \mathbb{P}(W_n \leq y)$ *te je* X_0 *nezavisna od* W_n *za sve* $n \in \mathbb{N}$. *Tada* X *zovemo slučajna šetnja na* $\mathbb{R}$.

Kada W poprima vrijednosti na diskretnom skupu pišemo $\Gamma(y) = \mathbb{P}(W = y)$. Tada za $x, y \in \mathbb{Z}$ imamo,

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_0 + W_1 = y | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(W_1 = y - x) = \Gamma(y - x). \end{aligned}$$

Drift uvjet u Teoremu (2.2.2) zapravo kaže, kad god je lanac izvan C, on se "kreće" prema dijelu prostora opisanog konačnim skupovima izvan kojih V teži u beskonačnost. Da bi se ilustrirala uporaba kriterija za drift, razmotriti ćemo slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$ s konačnim rasponom r. Dakle, pretpostavljamo da je distribucija prirasta Γ koncentrirana na cjelobrojnim brojevima i takava da $\Gamma(x) = 0$ za $|x| > r$.

Propozicija 3.1.1. *Pretpostavimo da je X ireducibilna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$. Ako distribucija prirasta Γ ima ograničen raspon i očekivanje od Γ je 0 onda je X povratna.*

Dokaz. Neka je $V(x) = |x|$. Tada za $x > r$ imamo

$$\sum_y p(x,y)[V(y) - V(x)] = \sum_z \Gamma(z)z,$$

dok za $x < -r$ imamo

$$\sum_y p(x,y)[V(y) - V(x)] = -\sum_z \Gamma(z)z.$$

Pretpostavimo da je "očekivani drift"

$$\beta = \sum_z \Gamma(z)z = 0.$$

Tada su uvjeti Teorema (2.2.2) zadovoljeni za $C = \{-r, \ldots, r\}$ i vrijedi $(V1)$ za $x \in C^C$. Dakle, X je povratna. □

Propozicija 3.1.2. *Pretpostavimo da je X ireducibilna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$. Ako distribucija prirasta Γ ima ograničen raspon i očekivanje od Γ je različito od nula onda je X prolazna.*

Dokaz. Pretpostavimo da Γ ima ne-nul očekivanje $\beta > 0$. U nastavku ćemo pokazati da postoji ograničena monotono rastuća funkcija V koja zadovoljava sljedeću relaciju

$$\sum_y p(x,y)V(y) = V(x) \tag{3.1}$$

za $x \geq r$. Neka je testna funkcija $V(x) = 1 - \rho^x$ za $x \geq 0$ i $V(x) = 0$ za $x < 0$. Nivo skupovi funkcije V su oblika $(-\infty, r]$ sa $r \geq 0$. Ova funkcija zadovoljava (3.1) ako i samo ako za $x \geq r$ vrijedi

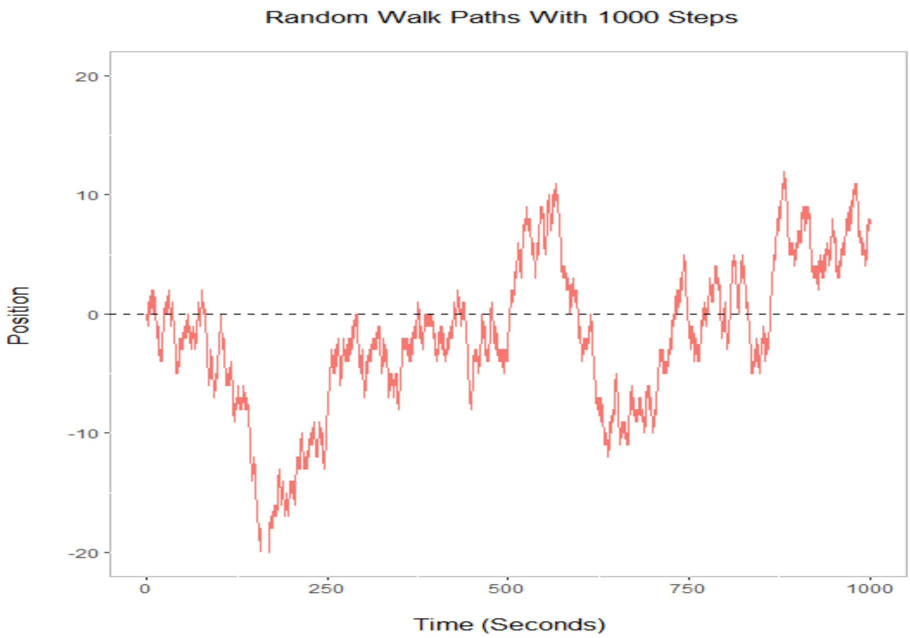
$$\sum_y p(x,y)[\rho^y/\rho^x] = 1$$

pa je V konstruirana kao valjana testna funkcija ako (i samo ako) je $\rho < 1$ s

$$\sum_z \Gamma(z)\rho^z = 1. \tag{3.2}$$

Stoga postojanje rješenja za (3.2) implicira da je lanac prolazan, jer se lanac ne vraća na $(-\infty, r]$.
Neka je $\beta(s) = \sum_z \Gamma(z)s^z$: tada je β dobro definirana za $s \in (0, 1]$ s pretpostvkom ograničenog raspona. Po ireducibilnosti, moramo imati $\Gamma(z) > 0$ za neke $z < 0$, stoga $\beta(s) \to \infty$ kada $s \to 0$. Od $\beta(1) = 1$ i $\beta'(1) = \sum_z z\Gamma(z) = \beta > 0$, slijedi da takav ρ postoji, pa je lanac prolazan.
Slično, ako je očekivanje od Γ negativno, možemo simetrijom dokazati prolaznost jer se lanac ne vraća na $[-r, \infty)$. □

Iz prethodna dva primjera zaključujemo da je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ povratna, dok je jednostavna nesimetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ prolazna. To vidimo i iz Slika (3.1) i (3.2).



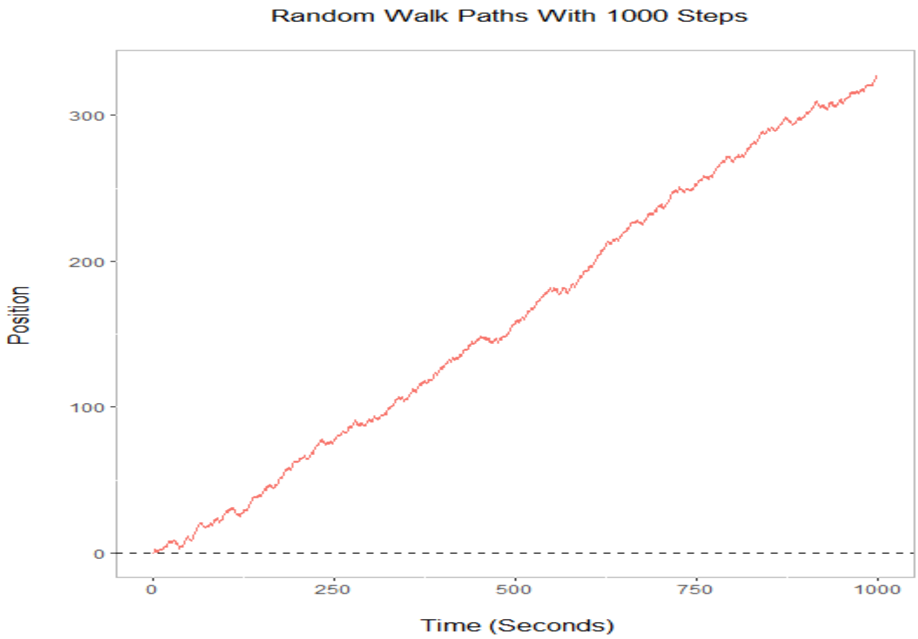
Slika 3.1: Simulacija simetrične slučajne šetnje u dimenziji 1. Šetnja je povratna.

Razmotrimo kako primijeniti Teorem (2.2.2) na jednostavnu slučajnu šetnju u $\mathbb{Z}^2$. Moramo naći funkciju $V : \mathbb{Z}^2 \to [0, \infty)$ tako da vrijedi

$$\mathbb{E}[V(X_{n+1}) - V(X_n)|X_n = x] \leq 0$$

za sve $x \notin C$, gdje je C konačan podskup od $\mathbb{Z}^2$. Neka je

$$V(x) = \ln^\alpha \|x\|$$



Slika 3.2: Simulacija nesimetrične ($p = 1/3$) slučajne šetnje u dimenziji 1. Šetnja je prolazna.

gdje je $\alpha \in (0,1)$. Neka je e vektor ($\pm e_1$ ili $\pm e_2$). Za $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ vrijedi

$$\sum_{e \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} \langle x, e\rangle = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{e \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} \langle x, e\rangle^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 = 2\|x\|^2 \tag{3.3}$$

Ako promatramo $|\langle x, e\rangle| \leq \|x\|$ onda bi izraz $\frac{2\langle x,e\rangle+1}{\|x\|^2}$ trebao biti mali (najviše $O(\|x\|^{-1})$); prisjetimo se Taylorovog proširenja $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$ i

$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2})y^2 + O(y^3)$. Računamo,

$$\begin{aligned}
V(x+e) - V(x) &= \ln^\alpha \|x+e\| - \ln^\alpha \|x\| = \ln^\alpha \|x\| \left(\frac{\ln^\alpha \|x+e\|}{\ln^\alpha \|x\|} - 1 \right) \\
&= \ln^\alpha \|x\| \left(\left(\frac{\ln \|x+e\|^2}{\ln \|x\|^2} \right)^\alpha - 1 \right) = \ln^\alpha \|x\| \left(\left(\frac{\ln(\|x\|^2 + 2\langle x, e\rangle + 1)}{\ln \|x\|^2} \right)^\alpha - 1 \right) \\
&= \ln^\alpha \|x\| \left(\left(\frac{\ln\left(\|x\|^2 \left(1 + \frac{2\langle x,e\rangle + 1}{\|x\|^2}\right)\right)}{\ln \|x\|^2} \right)^\alpha - 1 \right) \\
&= \ln^\alpha \|x\| \left(\left(1 + (\ln \|x\|^2)^{-1} \ln \left(1 + \frac{2\langle x, e\rangle + 1}{\|x\|^2}\right) \right)^\alpha - 1 \right) \\
&= \ln^\alpha \|x\| \left(\left(1 + (\ln \|x\|^2)^{-1} \left(\frac{2\langle x, e\rangle}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, e\rangle^2}{\|x\|^4} + O(\|x\|^{-3}) \right) \right)^\alpha - 1 \right) \\
&= \ln^\alpha \|x\| \left(\alpha (\ln \|x\|^2)^{-1} \left(\frac{2\langle x, e\rangle}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, e\rangle^2}{\|x\|^4} + O(\|x\|^{-3}) \right) \right) \\
&- \ln^\alpha \|x\| \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} (\ln \|x\|^2)^{-2} \frac{4\langle x, e\rangle^2}{\|x\|^4} + O((\|x\| \ln \|x\|)^{-3}) \right)
\end{aligned}$$

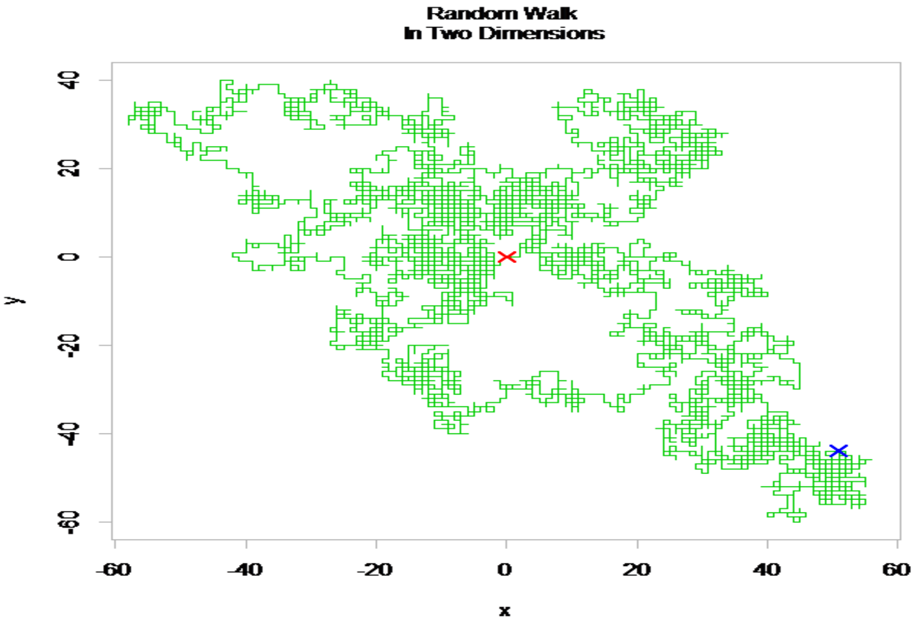
Koristeći (3.3) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V(X_{n+1}) - V(X_n) | X_n = x] = \mathbb{E}[V(X_n + W_{n+1}) - V(X_n) | X_n = x] \\
&= \mathbb{E}[V(x + W_{n+1}) - V(x) | X_n = x] = \frac{1}{4} \sum_{e \in \{\pm e_1, \pm e_2\}} [V(x+e) - V(x)] \\
&= \alpha \ln^{\alpha-1} \|x\| \left(\frac{1}{\|x\|^2} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^4} + O(\|x\|^{-3}) - \frac{(1-\alpha)}{2} (\ln \|x\|^2)^{-1} \frac{2\|x\|^2}{\|x\|^4} + O((\|x\| \ln \|x\|)^{-2}) \right) \\
&= -\frac{\alpha}{\|x\|^2 \ln^{2-\alpha} \|x\|} \left(\frac{1-\alpha}{2} + O((\ln \|x\|)^{-1}) \right)
\end{aligned}$$

što je negativno za dovoljno veliki x. Dakle, pokazali smo da je jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^2$ povratna.
Koristeći funkciju $V(x) = \|x\|^{-\alpha}$, za neke $\alpha \geq 0$ možemo pokazati (analogno gornjem postupku) da je jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^n, n \geq 3$, prolazna.

Simulirajmo sada Markovljeve lanace definirane u primjerima (2.2.1) i (2.2.2). Uzmimo radi jednostavnost $k = 2$ tj. $\mathbb{P}[\xi_n = 2] = \mathbb{P}[\xi_n = -2] = \frac{1}{2}$. Neka je funkcija $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ u Primjeru (2.2.1) dana sa

$$b(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$



Slika 3.3: Simulacija slučajne šetnje u dimenziji 2

Uočimo da b zadovoljava svojstva $i), ii), iii)$ iz Primjera (2.2.1) te da je X ireducibilan :

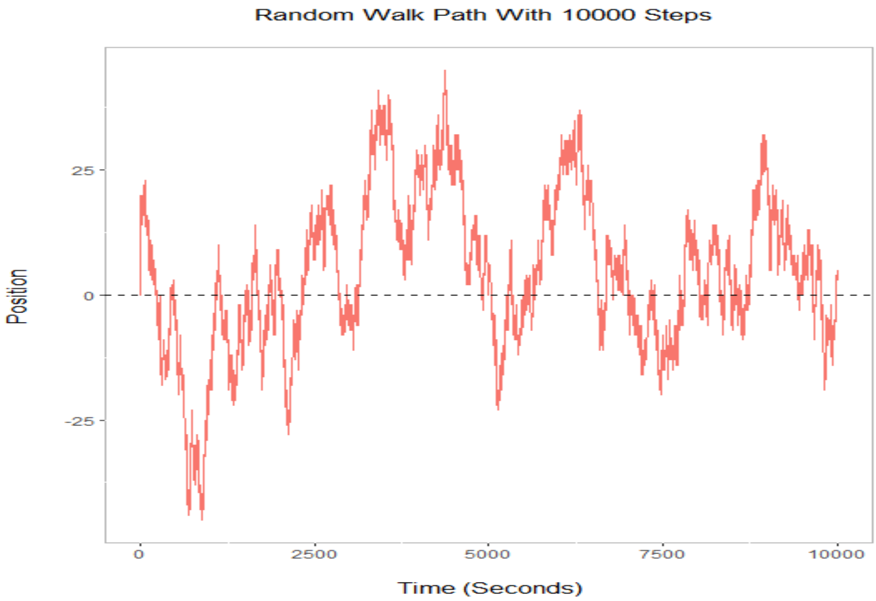
$$\begin{aligned} p(x,y) &= \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_0 + b(X_0) + \xi_1 = y | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 = y - x - b(x)) = \frac{1}{2} > 0 \qquad (3.4) \\ &\text{ako i samo ako } y - x - b(x) = 2 \text{ ili } y - x - b(x) = -2 \end{aligned}$$

Imamo,

$$\begin{array}{llllll} x > 0: & y = x + 1 & x = 0: & y = 2 & x < 0: & y = x + 3 \\ & y = x - 3 & & y = -2 & & y = x - 1 \end{array}$$

Pokažimo da npr. $4 \leftrightarrow -3$: $4 \to 1 \implies 1 \to -2 \implies -2 \to -3$, obratno $-3 \to -4 \implies -4 \to -1 \implies -1 \to 2 \implies 2 \to 3 \implies 3 \to 4$. Analogno, zaključujemo za sva ostala stanja. Dakle, X je ireducibilan. U istom primjeru pokazali smo da je taj lanac povratan što također vidimo i iz Slike (3.4).
Neka je funkcija $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ u Primjeru (2.2.2) dana sa

$$b(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Slika 3.4: Simulacija slučajne šetnje iz Primjera (2.2.1)

Uočimo da b zadovoljava svojstva $i), ii), iii)$ iz Primjera (2.2.2) te da je X iredu-cibilan: vrijedi (3.4) te imamo,

$$
\begin{array}{llllll}
x > 0: & y = x + 3 & x = 0: & y = 2 & x < 0: & y = x + 1 \\
 & y = x - 1 & & y = -2 & & y = x - 3
\end{array}
$$

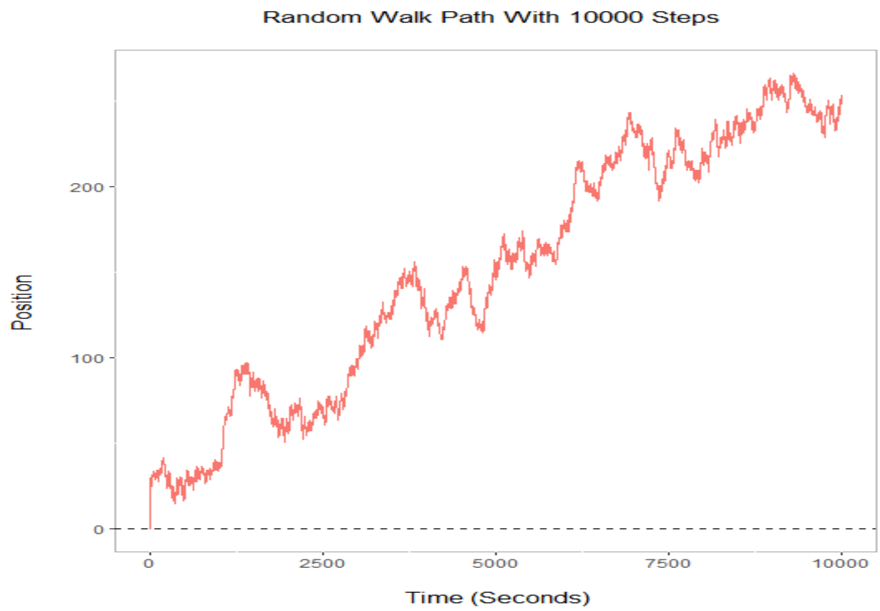
Pokažimo da npr. $-1 \leftrightarrow 3$: $-1 \to 0 \Longrightarrow 0 \to 2 \Longrightarrow 2 \to 1 \Longrightarrow 1 \to 4 \Longrightarrow 4 \to 3$, obratno $3 \to 2 \Longrightarrow 2 \to 1 \Longrightarrow 1 \to 0 \Longrightarrow 0 \to -2 \Longrightarrow -2 \to -1$. Analogno, zaključujemo za sva ostala stanja. Dakle, X je ireducibilan. U istom primjeru pokazali smo da je taj lanac prolazan što također vidimo i iz Slike (3.5).

3.2 Slučajna šetnja na polupravcu

Definicija 3.2.1. *Slučajna šetnja na polupravcu*
Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran odabirom proizvoljne distribucije za X_0 i uzimimo

$$(RWHL1) \qquad X_{n+1} = [X_n + W_{n+1}]^+$$

gdje je $[X_n + W_{n+1}]^+ := \max(0, X_n + W_{n+1})$ i W_n su nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{R}$, $\Gamma(-\infty, y] = \mathbb{P}(W_n \leq y)$ te je X_0 nezavisna od W_n za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada X zovemo slučajna šetnja na polupravcu.



Slika 3.5: Simulacija slučajne šetnje iz Primjera (2.2.2)

Za $y > 0$ imamo, kao i kod slučajne šetnje, $p(x, y) = \Gamma(y - x)$.
Za $y = 0$ slijedi

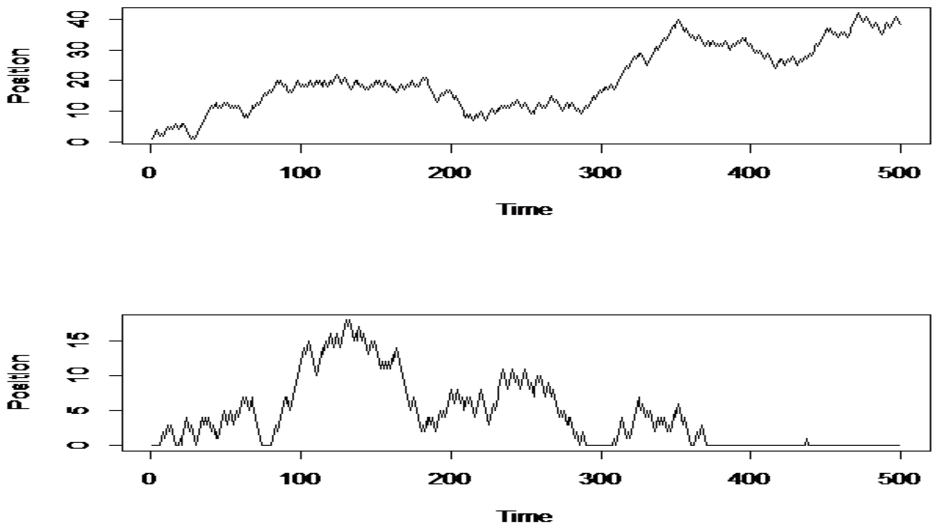
$$\begin{aligned} p(x, 0) &= \mathbb{P}(X_1 \leq 0 | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_0 + W_1 \leq 0 | X_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(W_1 \leq -x) = \Gamma(-\infty, -x]. \end{aligned}$$

Ovaj lanac slijedi put slučajne šetnje, ali se zadržava na nuli kada temeljna slučajna šetnja postaje negativna.

Propozicija 3.2.1. *Ako postoji slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ s distribucijom prirasta Γ koja ima očekivanje β i ograničen raspon, tada je slučajna šetnja na $\mathbb{Z}_+$ povratna ako i samo ako je $\beta \leq 0$.*

Dokaz. Ako je $\beta > 0$ onda po prvom dijelu dokaza Propozicije (3.1.2) znamo da je slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ prolazna za polazne točke iznad r jer se lanac ne vraća na $(-\infty, r]$. Stoga zaključujemo da je za $\beta > 0$ i slučajna šetnja na $\mathbb{Z}_+$ prolazna jer se lanac ne vraća na $[0, r]$.
Za $\beta \leq 0$ neka je testna funkcija dana sa $V(x) = x$ i za sve $x \geq r$

$$\sum_y p(x, y)[V(y) - V(x)] = \sum_z \Gamma(z) z \leq 0;$$



Slika 3.6: Putovi slučajnih šetnji na polupravcu $\mathbb{Z}_+$ reflektirani na nulu. Za grafikon prikazan dolje koristili smo $\beta \leq 0$, dok smo za grafikon prikazan gore koristili smo $\beta > 0$.

Budući da je u ovom slučaju skup $\{x \leq r\}$ konačan te vrijedi $(V1)$, slijedi lanac je povratan. □

Propozicija 3.2.2. *Ako X označava slučajnu šetnju na polupravcu* $\mathbb{Z}_+$ *takvu da* $\Gamma(x) = 0$ *za* $x > 1$ *i ako*

$$\beta = \sum_z z\Gamma(z) > 0$$

tada je X prolazan.

Dokaz. Možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da $\Gamma(-\infty, 0) > 0$: ako $\Gamma[0, \infty) = 1$ tada $\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) = 0, x > 0$, i lanac se kreće u beskonačnost; stoga nije ireducibilan te je prolazan.
Pokazat ćemo da je za dan lanac uvjet $\beta > 0$ dovoljan za prolaznost ukoliko postoji ograničena ne-konstantna pozitivna funkcija V koja zadovoljava sljedeću relaciju

$$\sum_y p(x, y)V(y) = V(x), \quad x \geq 1 \tag{3.5}$$

Pretpostavimo $V(0) = 0$ i zapišimo jednadžbu (3.5) na sljedeći način:

$$V(x) = \Gamma(-x + 1)V(1) + \Gamma(-x + 2)V(2) + \cdots + \Gamma(1)V(1 + x). \tag{3.6}$$

Nakon što se odabere prva vrijednost u nizu $V(x)$, imamo i ostale vrijednosti dane inicijalnim procesom. Naš cilj je definirati niz na način kojim dobivamo ne-konstantno pozitivno ograničeno rješenje od (3.6).
Da bismo to učinili najprije ćemo napisati

$$V^*(z) = \sum_0^{\infty} V(x) z^x$$
$$\Gamma^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x) z^x$$

gdje se za $V^*(z)$ još mora pokazati da je definirana za bilo koji z, a $\Gamma^*(z)$ je definirano barem za $|z| \geq 1$. Množeći (3.6) sa z^x i sumiranjem dobivamo

$$V^*(z) = \Gamma^*(z^{-1}) V^*(z) - \Gamma(1) V(1). \tag{3.7}$$

Sada pretpostavimo da možemo pokazati da postoji analitička ekspanzija funkcije

$$z^{-1}[1 - z]/[\Gamma^*(z^{-1}) - 1] = \sum_0^{\infty} b_n z^n \tag{3.8}$$

gdje je $0 < z < 1$ s $b_n \geq 0$. Tada ćemo imati identitet

$$\begin{aligned} V^*(z) &= z\Gamma(1)V(1)z^{-1}/[\Gamma^*(z^{-1}) - 1] \\ &= z\Gamma(1)V(1)\left(\sum_0^{\infty} z^n\right) z^{-1}[1 - z]/[\Gamma^*(z^{-1}) - 1] \\ &= z\Gamma(1)V(1)\left(\sum_0^{\infty} z^n\right)\left(\sum_0^{\infty} b_m z^m\right). \end{aligned}$$

Slijedi,

$$V^*(z) = z\Gamma(1)V(1) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{m=0}^{n} b_m \tag{3.9}$$

te izjednačavanje koeficijenata uz z^n u (3.9) daje

$$V(x) = \Gamma(1)V(1) \sum_{m=0}^{x-1} b_m.$$

Jasno je da je V ograničena i ne-konstantna ako

$$\sum_m b_m < \infty. \tag{3.10}$$

Tako smo reducirali pitanje prolaznosti u prepoznavanju uvjeta pod kojima ekspanzija u (3.8) drži koeficijente b_j pozitivnim i sumabilnim.
Napišimo $a_j = \Gamma(1-j)$ tako da

$$A(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = z\Gamma^*(z^{-1})$$

i za $0 < z < 1$ imamo

$$\begin{aligned} B(z) := z[\Gamma^*(z^{-1}) - 1]/[1-z] &= [A(z) - z]/[1-z] \\ &= 1 - [1 - A(z)]/[1-z] \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sada, ako imamo pozitivno očekivanje za distribuciju prirasta,

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_n n a_n < 1$$

i zato je $B(z)^{-1}$ dobro definiran za $|z| < 1$; štoviše, širenjem u (3.11)

$$B(z)^{-1} = \sum_j b_j z^j$$

za sve $b_j \geq 0$ i stoga

$$\sum_j b_j = [1 - \sum_n n a_n]^{-1} = \beta^{-1}$$

koji je konačan prema potrebi.

□

3.3 AR(1) proces

Definicija 3.3.1. *Proces $X = (X_n : n \geq 0)$ se naziva jednostavnim linearnim procesom ili autoregresivnim procesom reda 1, tj. AR(1) procesom ako zadovoljava:*

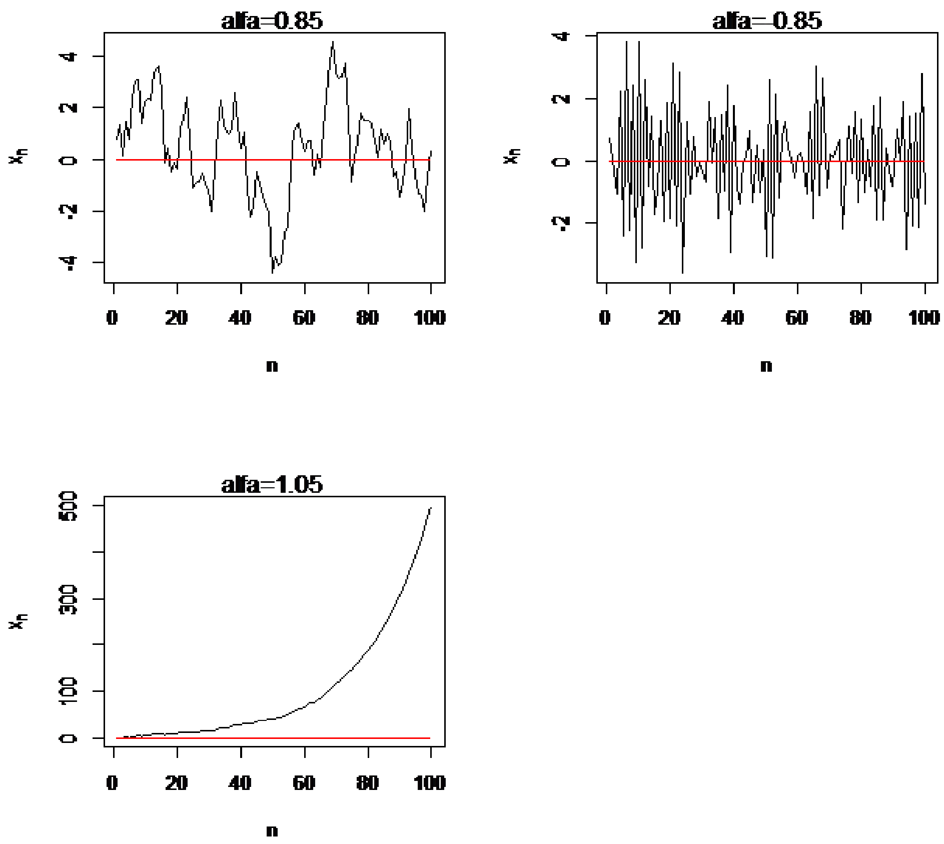
(SLM1) za svaki $n \geq 0$, X_n i W_n su slučajne varijable na $\mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1}$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$.

(SLM2) niz slučajnih varijabli $W = \{W_n\}$ je niz nezavisnih jednako distribuiranih (n.j.d) slučajnih varijabli sa distribucijom Γ na $\mathbb{R}$.

Primijetimo, AR(1) proces je trivijalno Markovljev lanac; nezavisnost X_{n+1} od $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$ za dano $X_n = x$ slijedi iz (SLM1) jer vrijednosti od W_n, po (SLM2), ne ovise o nijednom $\{X_1, X_2, \ldots\}$.
AR(1) proces možemo smatrati proširenjem slučajne šetnje, gdje, u svakom novom trenutku uzimamo dio prethodne vrijednosti i dodajemo mu slučajnu vrijednost ("šum" ili "grešku"). Nadalje, izbor α dosta utječe na ponašanje lanca. Za $|\alpha| < 1$ proces bi trebao biti povratan, a za $|\alpha| > 1$ bi trebao biti prolazan. To možemo vidjeti iz Slike (3.7).



Slika 3.7: Na prvoj i drugoj slici vidimo da za $|\alpha| = 0.85$ proces je povratan. Na zadnjoj slici vidimo da za $\alpha = 1.05$ proces je prolazan. U svim slučajevima koristimo diskretan skup stanja.

Propozicija 3.3.1. *Pretpostavimo da su varijable prirasta $W_n, n \in \mathbb{N}$, u skalarnom linearnom modelu simetrične s omeđenim rasponom. Tada je skalarni linearni model povratan ako i samo ako je $|\alpha| \leq 1$.*

Dokaz. Radi jednostavnosti dokazat ćemo propoziciju za slučajne varijable W_n koje su simetrične na $\{-1, 1\}$ tj. $\mathbb{P}[W_n = -1] = \mathbb{P}[W_n = 1] = 1/2, n \geq 1$. Neka je $|\alpha| \leq 1$. Uzmimo testnu funkciju $V(x) = |x|$. Računamo,

$$\begin{aligned}\triangle V(x) = (PV)(x) - V(x) = \mathbb{E}_x|X_1| - V(x) &= \mathbb{E}_x|W_1 + \alpha x| - V(x) \\ &= \frac{1}{2}|1 + \alpha x| + \frac{1}{2}| - 1 + \alpha x| - |x|\end{aligned}$$

Radi jednostavnost uzmimo $\alpha = 1/2$ te pretpostavimo da je x dovoljno velik. Ako je $x > 0$ onda

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{x}{2}\right) - x = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - x = \frac{x}{2} - x < 0.$$

Ako je $x < 0$ onda

$$\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + x = -\frac{x}{2} + x < 0.$$

Za $\alpha = 1$ i $\alpha = -1$ dobivamo $\triangle V(x) = 0 \leq 0$.
Zaključujemo, skalarni linearni model je povratan za $|\alpha| \leq 1$.
Promotrimo slučaj kada je $|\alpha| > 1$. Radi jednostavnost uzmimo $\alpha = 3/2$ te pretpostavimo da je x dovoljno velik. Ako je $x > 0$ onda

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{3}{2}x\right) - x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - x = \frac{6x}{4} - x = \frac{1}{2}x > 0.$$

Ako je $x < 0$ onda

$$\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + x = -\frac{6x}{4} + x = -\frac{1}{2}x > 0.$$

Zaključujemo, skalarni linearni model nije povratan za $|\alpha| > 1$.

□

Bibliografija

[1] P. Brémaud, *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer

[2] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples, Second Edition*, Cornell University

[3] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Cambridge University Press, 2009.

[4] N.Sarapa, *Teorija vjerojatnosti* treće, prerađeno izdanje, Školska knjiga-Zagreb, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci* predavanja, dostupno na http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml13-predavanja.html, (srpanj 2014.)

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi* predavanja, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp17-predavanja.html, (veljača 2010.)

Sažetak

Na početku ovog rada dajemo uvod u teoriju Markovljevih lanaca na diskretnom skupu stanja. Analiziramo njihovu prolaznost, povratnost, pozitivnu povratnost te nul-povratnost. Glavni rezultat je da ireducibilan Markovljev lanac na konačnom skupu stanja ili pozitivno povratan Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, te da uz dodatni zahtjev aperiodičnosti, prijelazne vjerojatnosti lanca konvergiraju prema stacionarnoj distribuciji. U središnjem dijelu ovoga rada uvodimo martingale te diskutiramo njihova osnovna svojstva. Navodimo teoreme o opcionalnom zaustavljanju te pokazujemo vezu između Markovljevih lanaca i martingala. Nadalje, uvodimo drift operator te razmatramo Foster-Lyapunovljeve kriterije za prolaznost i povratnost. Drift uvjet za povratnost temelji se na postojanju nenegativne, neograničene funkcije V i odgovarajućeg skupa $C \in \mathcal{P}(S)$ tako da $E^x[V(X_1)] - V(x) \leq 0$, za svaki $x \in C^c$, dok se drift svojstvo za prolaznost temelji na postojanju nenegativne, ograničene funkcije V i odgovarajućeg skupa $C \in \mathcal{P}(S)$ tako da $E^x[V(X_1)] - V(x) \geq 0$, za svaki $x \in C^c$. U zadnjem dijelu ovoga rada analiziramo povratnost i prolaznost slučajne šetnje, slučajne šetnje na polupravcu te AR(1) procesa koristeći Lyapunovljevu funkciju te Foster-Lyapunovljeve kriterije za povratnost i prolaznost.

Summary

In the first part of thesis work we give an introduction to the theory of Markov chains with discrete state space. Further, we discuss their transience, recurrence, positive recurrence and null-recurrence property. The main result is that an irreducible Markov chain with finite state space or positive recurrent Markov chain with countable state space admits a unique stationary distribution and, in addition, by assuming aperiodicity of the chain, transition probabilities converge to the stationary distribution. In the second part of this thesis we recall the notion of martingales and discuss their basic properties. We state optional sampling theorem and discuss the relation between Markov chains and martingales. Further, we introduce a drift operator and discuss Foster-Lyapunov conditions for transience and recurrence. Drift condition for recurrence is based on the existence of nonnegative, unbounded function V and appropriate set $C \in \mathcal{P}(S)$ so that $E^x[V(X_1)] - V(x) \leq 0$, for every $x \in C^c$, while drift condition for transience is based on the existence of nonnegative, bounded function V and the appropriate set $C \in \mathcal{P}(S)$ so that $E^x[V(X_1)] - V(x) \geq 0$, for every $x \in C^c$. In the last part of the thesis, we analyze recurrence and transience of a random walk, random walk on the halfline and AR (1) process using Lyapunov function and Foster-Lyapunov conditions for recurrence and transience criteria.

Životopis

Zovem se Kristina Negovec. Rođena sam 13.03.1993. u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Trnsko, nakon čijeg sam završetka upisala zagrebačku I. gimnaziju koju sam završila 2012. godine. Iste godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2016. godine na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Za vrijeme studija, od svih grana matematike, najzanimljiviji su mi bili Markovljevi lanci i slučajni procesi. U skladu s time nastao je ovaj rad.