Kreps-Yanov teorem

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mihovil Stamičar

KREPS-YANOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, studeni 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad povećujem obitelji i prijateljima koji su bili uz mene tokom mog školovanja, a najviše mom ocu koji je igrao najvažniju ulogu prilikom mog odrastanja.

Sadržaj

Uvod

U procesu izgradnje realističnog matematičkog modela financijskog tržišta odsutstvo prilika za profit bez rizika smatra se minimalnom potrebnom pretpostavkom kako bi tržište bilo u stanju ravnoteže. Razlog za to je poprilično očit, naime ukoliko bi prilike za bezrizičan profit (često ćemo reći zarada nečega iz ničega) postojale, svaki agent na tržištu pokušao bi ih iskoristiti u što većoj mjeri. Cijene bi se tada istog trenutka pomakle kao odgovor na neravnotežu između ponude i potražnje, te bi se taj pomak nastavio dok god prilike za nerizičan profit ne bi nestale. Ovo nas sada dovodi do neformalne i intuitivne definicije arbitraže:
Prilika za arbitražu je mogućnost ostvarivanja profita na financijskom tržištu bez rizika i bez neto investicije kapitala. *No-arbitrage načelo* kaže kako matematički model financijskog tržišta ne bi trebao dopuštati prilike za arbitražu.

Jedna od najvažnijih primjena takvog načela je u određivanju cijena financijskih izvedenica (npr. opcija) u vremenskom trenutku. Pretpostavimo za trenutak da je kamatna stopa na nerizičnu financijsku imovinu jednaka nuli. U klasičnom (aktuarskom) pristupu u tom se slučaju uzima očekivana vrijednost financijske izvedenice. Ispostavlja se da takav pristup kod nas ipak nije zadovoljavajuć jer se rizična i nerizična imovina u prosjeku ne pokazuju jednako isplative.

Drugi način za odrediti cijenu opcije je upravo preko spomenutog no-arbitrage načela. Ukoliko se "precizno odaberu" količine određenih financijskih imovina, moguće je kupiti portfelj koji u trenutku $t = 1$ replicira vrijednost financijske izvedenice. Sada korištenjem no-arbitrage načela dolazimo do zaključka da početna cijena financijske izvedenice također mora biti jednaka početnoj cijeni portfelja jer u suprotnom dolazi do prilike za arbitražu. To je ukratko intuicija iza određivanja cijena pomoću no-arbitrage načela.

Još jedan koncept bit će nam od velike važnosti. Naime, ukoliko pretpostavimo da "svijet pokreće" neka druga vjerojatnosna mjera (npr. $\mathbf{Q}$) pod kojom je očekivana cijena rizične financijske imovine u trenutku $t = 1$ jednaka onoj u početnom trenutku te onoj nerizične financijske imovine, stvar je bitno drugačija. Proces S koji opisuje cijenu te rizične financijske imovine tada je martingal u odnosu na $\mathbf{Q}$, a $\mathbf{Q}$ se tada naziva martingalna mjera (često i vjerojatnost neutralna na rizik) za S. U tom slučaju, kada ponašanje financijske imovine promatramo u odnosu na $\mathbf{Q}$ nije nerazumno očekivati da će spomenuti način određivanja cijena pomoću računanja očekivanja biti u skladu s no-arbitrage načelom jer sada nestaje razlika između performansi rizične i nerizične imovine. Računanje očekivanja s obzirom na $\mathbf{Q}$ sada daje istu cijenu za financijsku izvedenicu kao i računanje pomoću no-arbitrage načela. Kada dva navedena koncepta precizno definiramo te ojačamo na potreban način ispostavlja se da je moguće pokazati ekvivalenciju između istih te ćemo se kroz ovaj rad baviti razvojem tog fundamentalnog rezultata.

Prvo iskazujemo na koji način su spomenuti pojmovi definirani i iskazani u udžbeniku S.Shreve-a [9] po kojem se navedena materija obrađuje u sklopu pripadnih predmeta tijekom fakultetskog obrazovanja.

Definicija 0.0.1. *Arbitražom nazivamo proces vrijednosti portfelja $X(t)$ koji zadovoljava $X(0) = 0$, te također za neko vrijeme $T > 0$ zadovoljava*

$$\mathbf{P}\{X(T) \geq 0\} = 1, \mathbf{P}\{X(T) > 0\} > 0.$$

Definicija 0.0.2. *Za vjerojatnosna mjeru $\tilde{\mathbf{P}}$ kažemo da je neutralna na rizik ukoliko vrijedi:*
(i) $\tilde{\mathbf{P}}$ i $\mathbf{P}$ su ekvivalentne (u smislu da za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbf{P}(A) = 0$ ako i samo ako $\tilde{\mathbf{P}}(A) = 0$)
(ii) diskontirani proces cijene dionice $D(t)S_i(t)$ je martingal u odnosu na $\tilde{\mathbf{P}}$ za svaki i.

Uz ove dvije definicije također iskazujemo sljedeći teorem.

Teorem 0.0.1. ***Fundamental theorem of asset pricing.*** *U modelu tržišta postoji vjerojatnosna mjera neutralna na rizik ako i samo ako ne dopušta arbitražu.*

Naš cilj je sada razviti model tržišta na matematički precizan način te u istom dokazati analogon maloprije iskazanog FTAP teorema. Prvo ćemo to učiniti za konačan slučaj, no vrijedi napomenuti kako teoriju razvijamo na način koji je prikladan za kasnije proširenje na tehnički zahtijevniji neprekidni slučaj. U konačnom slučaju ćemo također pokazati neke rezultate koji se tiču određivanja cijena te precizno obraditi gore iznesenu motivaciju.

Nakon tog nimalo jednostavnog zadatka isto ćemo učiniti i za općenitiji neprekidni slučaj gdje će se od velike važnosti pokazati topološki aspekt. Bez njega ne bi bilo moguće pokazati centralni rezultat ovog rada, Kreps-Yanov teorem koji je zapravo anologon FTAP teorema za neprekidan slučaj uz neka ograničenja.

Poglavlje 1

Preliminarije

1.1 Konačan slučaj

U Poglavlju 2 pretpostavljamo da je vjerojatnosni prostor Ω (prostor mogućih stanja financijskog tržišta) konačan.

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ te neka je $\mathbf{P}$ vjerojatnosna mjera na Ω takva da je $\mathbf{P}[\omega_n] = p_n$ za $n = 1, ..., N$. Ovom pretpostavkom se rješavamo svih manjih poteškoća koje se tiču funkcionalne analize na različitim topologijama na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ itd., pošto su svi ovi prostori jednaki $\mathbb{R}^N$ (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti (od sada BSOMP) da je σ-algebra $\mathcal{F}$ kolekcija svih podskupova od Ω). U konačnom se slučaju stoga sva funkcionalna analiza koja je potrebna u kasnijem neprekidnom (općenitijem) slučaju svodi na linearnu algebru. Znajući to, svejedno ćemo pisati $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ itd. kako bismo istaknuli s kojim prostorima (eng. *function spaces*) ćemo se susretati u općenitijem slučaju.

Vjerojatnosni prostor služi nam kako bi modelirali *neizvjesnost*. Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ također fiksiramo prirodni broj $T \geq 1$ i filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ na Ω, tj. kolekciju σ-algebri zadanih na način da ukoliko je $s \leq t$, da je tada svaki skup iz $\mathcal{F}(s)$ također u $\mathcal{F}(t)$. Filtracija nam opisuje informacije koje su dostupne u svakom trenutku t. Također ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, no s druge strane zbog tehničkih razloga nećemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ-algebra, tj. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, iako će to biti slučaj u većini primjena. Vjerojatnosni prostor uz pridodanu filtracuju nazivamo *filtrirani vjerojatnosni prostor* te ga označavamo s $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$.

Kolekciju financijske imovine (portfelj) kojom se trguje prikazat ćemo pomoću stohastičkog procesa $S = (S_t)_{t=0}^T$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ koji je baziran i adaptiran u odnosu na filtrirani vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$,gdje je d broj različitih financijskih imovina koje su opisane stohastičkim procesima $S^i : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, ..., d$.

Prije nego pređemo na neprekidni slučaj vrijedi spomenuti još jedan pojam kojeg ćemo koristiti:

Definicija 1.1.1. *[9] Neka je Ω neprazan skup te $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova od Ω. Za dvije vjerojatnosne mjere $\mathbf{P}$ i $\tilde{\mathbf{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ kažemo da su ekvivalente te označavamo $\mathbf{P} \sim \tilde{\mathbf{P}}$ ukoliko se slažu oko toga koji skupovi iz $\mathcal{F}$ imaju vjerojatnost jednaku 0.*

1.2 Neprekidan slučaj

U Poglavlju 3 vjerojatnosni prostor više nije konačan, kao ni skup vremenskih indeksa $\mathbb{T}$ (koji intepretiramo kao vremena u kojima je trgovanje moguće).

I u ovom slučaju neizvjesnost je modelirana pomoću filtriranog vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbf{P})$, dostupne informacije pomoću filtracije $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, a kolekcija financijskih imovina kojom se trguje pomoću stohastičkog procesa $S : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ (gdje su $S^i : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, ..., d$ različite financijske imovine od kojih se portfelj sastoji). Također pretpostavljamo da postoji i movina broj 0 te ona opisuje "cash". Ona nam je korisna jer se u njoj jednostavno pretvara novac iz jednog trenutka u drugi.
Cijena S^i_t u vremenu $t \in \mathbb{T}$ je također dio informacije dostupne u trenutku t što u matematičkom smislu znači da je proces S^i adaptiran, tj. S^i_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriv, za svaki $t \in \mathbb{T}$. Filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ nije nužno generirana procesom S, tj. postoje i drugi izvori informacija.

Definicija 1.2.1. *Funkcija $T : \Omega \to \overline{\mathbb{T}}$ (gdje sa $\overline{\mathbb{T}}$ označavamo skup $\mathbb{T} \cup +\infty$) naziva se vrijeme zaustavljanja ako za svaki $t \in \mathbb{T}$ vrijedi $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Za dva vremena zaustavljanja T_1 i T_2, takva da je $T_1 \le T_2$, s $\langle T_1, T_2 \rangle$ označavamo skup $\{(t, \omega) \mid t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega \ i \ T_1(\omega) \le t \le T_2(\omega)\}$, te ostale stohastičke intervale označavamo također na taj način. Još vrijedi napomenuti da za $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ interval $[0, \infty]$ označava $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, a ne $[0, \infty] \times \Omega$.

Kada je vrijeme neprekidno pretpostavljamo da filtracija $(\mathcal{F}_t)_t$ zadovoljava *uobičajene uvjete*:
(i) za svaki t vrijedi: $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ (neprekidnost zdesna)
(ii) $\mathcal{F}_0$ sadrži sve nul skupove familije $\mathcal{F}_\infty$. To znači da $A \subset B$ i $\mathbf{P}[B] = 0$ povlači $A \in \mathcal{F}_0$ (potpunost)

Još jedna pretpostavka je bitna kada $\mathbb{T}$ nije konačan, a to je da je proces ima sljedeće svojstvo:

Definicija 1.2.2. *Za stohastički proces* $S : \mathbb{T}\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ *kažemo da je càdlàg proces ukoliko je za gotovo svaki* $\omega \in \Omega$ *preslikavanje* $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto S_t(\omega)$ *neprekidno zdesna i ima limes s lijeva (gdje to ima smisla).*

Na domeni $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ promatramo sigma algrebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$, te ukoliko je proces S izmjeriv s obzirom na navedenu algebru ćemo jednostavnije reći da je *izmjeriv*. Također vrijedi napomenuti ukoliko je $T : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vrijeme zaustavljanja, σ-agebra svih događaja prije T dana je sa $\mathcal{F}_T = \{A \bigm| A \in \mathcal{F}_\infty \ \ i \ \ za \ \ sve \ \ t \in \mathbb{R}_+ \ \ imamo \ \ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$, što će imati važnu ekonomsku interpretaciju.
Važno je još definirati par pojmova i svojstava:

Definicija 1.2.3. *Za vrijeme zaustavljanja T proces* S^T *definiran s* $(S^T)_t = S_{t\wedge T}$ *nazivamo proces S zaustavljen u vremenu T.*

Definicija 1.2.4. *Neka je (P) neko svojstvo stohastičkog procesa, tada stohastički proces S zadovoljava (P) lokalno ako postoji rastući niz vremena zaustavljanja* $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *takvih da* $T_n \nearrow \infty$ *gotovo sigurno, i za svaki n proces* S^{T_n} *zadovoljava (P).*

Nizovi $T_n \nearrow \infty$ takvi da svaki S^{T_n} zadovoljava (P) nazivaju se lokalizirajući nizovi. Iz ove definicije slijedi sljedeća koja nam je od važnosti:

Definicija 1.2.5. *(i) Proces* $S : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *je lokalno ograničen ako postoji rastući niz vremena zaustavljanja* $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *koji teži u* ∞ *gotovo sigurno te niz* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *u* $\mathbb{R}_+$ *takav da* $|S\boldsymbol{1}_{\langle 0,T_n\rangle}| \leq K_n$
(ii) Proces $S : \mathbb{R}_+\times\Omega \to \mathbb{R}$ *je lokalan martingal ako postoji rastući niz vremena zaustavljanja* $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *koji teži u* ∞ *gotovo takav da je, za svaki n, proces* S^{T_n} *uniformno integrabilan martingal.*

1.3 Funkcionalna analiza

U ovom odjeljku iskazat ćemo neke nama bitne definicije i rezultate iz funkcionalne analize (velika većina iz [5]) koji će nam biti potrebni za ovaj rad, no ipak ih nećemo dokazivati pošto bi oni generalno trebali biti poznati.

Definicija 1.3.1. *Topološki prostor je skup S u kojem je specificirana kolekcija podskupova τ čiji elementi se nazivaju se otvoreni skupovi, sa sljedećim svojstvima:*
(i) S je otvoren
(ii) $\emptyset$ je otvoren
(iii) presjek svaka dva otvorena skupa je otvoren
(iv) unija svake kolekcije otvorenih skupova je otvorena
Kolekcija skupova τ koja zadovoljava navedena svojstva naziva se topologija na S. Ponekad se ista radi boljeg razumijevanja označava s (S, τ).

Definicija 1.3.2. *Pretpostavimo da je τ topologija na vektorskom prostoru X takva da vrijedi:*
(i) svaka točka iz X je zatvoren skup
(ii) operacije vektorskog prostora su neprekidne s obzirom na τ
Pod ovim uvjetima kažemo da je τ vektorska topologija na X, a X je topološki vektorski prostor.

Definicija 1.3.3. *Dualni prostor topološkog vektorskog prostora X je vektorski prostor X^* čiji su elementi neprekidni linearni funkcionali na X.*

Teorem 1.3.1. ***(Hahn-Banachov teorem o separaciji)***
Neka su A i B disjunktni, neprazni, konveksni skupovi u topološkom vektorskom prostoru X.
(i) Ako je A otvoren tada postoje $\Lambda \in X^*$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\Lambda x < \gamma \leq \Lambda y, \tag{1.1}$$

za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$.
(ii) Ako je A kompaktan, B zatvoren, i X lokalno konveksan, tada postoje $\Lambda \in X^*$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda y, \tag{1.2}$$

za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$.

Treba napomenuti da ovakav iskaz vrijedi u slučaju kad je skalarno polje jednako $\mathbb{R}$.

Korolar 1.3.2. *Ako je X lokalno konveksan prostor, onda X^* razdvaja točke na X.*

Sljedeća stvar koju želimo objasniti je slaba topologija.

Neka su τ_1 i τ_2 dvije topologija na skupu X te neka je $\tau_1 \subset \tau_2$; u sljedećem smislu, svaki τ_1-otvoren skup je također τ_2-otvoren. Tada kažemo da je τ_1 slabija od τ_2, ili da je τ_2 jača od τ_1. Valja napomenuti da u skladu s značenjem inkluzije $\subset$ termini "slabija" i "jača" ne uključuju jednakost.

Definicija 1.3.4. *Neka je X topološki vektorski prostor (s topologijom τ) čiji dual X^* razdvaja točke na X (znamo da se to događa na svakom lokalno konveksnom prostoru X). X^*-topologija na X naziva se slaba topologija na X.*

Upoznavši se sa slabom topologijom, dolazimo do sljedeće topologije koja će bit od neposredne važnosti u glavnim razultatima ovog rada. Prije nego ju definiramo potreban nam je još jedan teorem.

Teorem 1.3.3. *Neka je X vektorski prostor te neka je X' razdvajajući vektorski prostor linearnih funkcionala na X. Tada je X uz X'-topologiju τ' lokalno konveksan prostor čiji je dualni prostor X'.*

Neka je X ponovno topološki vektorski prostor čiji je dual X^*. Za sljedeće definicije nije bitno razdvaja li X^* točke na X. Bitno je primjetiti da svaki $x \in X$ inducira lineralni funkcional f_x na X^*, definiran sa

$$f_x\Lambda = \Lambda x, \tag{1.3}$$

i da $\{f_x : x \in X\}$ razdvaja točke na X^*.

Sada smo u situaciji opisanoj u Teoremu 1.3.3., gdje je X^* na mjestu od X i X na mjestu od X'. Uzevši u obzir dosad opisanu notaciju definiramo:

Definicija 1.3.5. *X-topologija na X^* je zove *-slaba topologija na X^*.*
(čita se: zvijezda slaba topologija)

Za neke od rezultata koje ćemo pokazati također će nam biti potreban dio konveksne analize koji ćemo sada iskazati (preuzeto iz [8]).

Neka su $\langle E, E^* \rangle$ dva vektorska prostora u separirajućoj dualnosti. To znači da postoji bilinearna forma $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E^* \to \mathbb{R}$, takva da ako vrijedi $\langle x, x^* \rangle = 0$ za sve $x \in E$, mora vrijediti $x^* = 0$. Također ako vrijedi $\langle x, x^* \rangle = 0$ za sve $x^* \in E^*$, mora vrijediti $x = 0$. Za par (E, E^*) vektorskih prostora u separirajućoj dualnosti kroz skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, polar C^0 skupa C u E je definiran sa

$$C^0 \; = \; \{g \in E^* \mid \langle f, g \rangle \leq 1 \text{ za sve } f \in C\}.$$

U slučaju kada je C zatvoren na množenje pozitvnim skalarima (kao npr. kada je C konveksni konus što će kod nas biti slučaj) polar C^0 ekvivalentno možemo definirati sa

$$C^0 \;=\; \{g \in E^* \mid \langle f, g\rangle \leq 0 \text{ za sve } f \in C\}.$$

Bipolarni teorem nam kaže da je bipolar $C^{00} := (C^0)^0$ skupa C u E $\sigma(E, E^*)$-zatvorena konveksna ljuska od C.

U slučaju naše primjene (opisanom u prvoj sekciji ovog poglavlja), $E = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) = \mathbb{R}^N$ te također $E^* = L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) = \mathbb{R}^N$ pa je bipolarni teorem dosta lakši. U tom slučaju postoji samo jedna topologija na $\mathbb{R}^N$ kompatibilna sa strukturom vektorskog prostora pa se ne moramo osvrtati na razne topologije poput $\sigma(E, E^*)$.

Prije nego završimo ovo poglavlje potrebno je naglasiti da u topološkim razmatranjima, nizovi generalno nisu dovoljni da se opišu temeljni pojmovi poput zatvarača skupa i neprekidnosti funkcije. Nizovi su dostatni samo ako topološki prostori koje promatramo zadovoljavaju tzv. prvi aksiom prebrojivosti (npr. normirani prostori spadaju u tu klasu). Stoga je potrebno definirat sljedeći pojam.

Definicija 1.3.6. *[4] Neka je $(A, \leq)$ usmjeren skup. Svako preslikavanje $x : A \to X$ se naziva hiperniz u X. Običaj je, kao i kod nizova, da umjesto $x(\alpha)$ pišemo x_α i da hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Ako je X normiran prostor kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X konvergira ako postoji $x \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha_0 \in A \text{ tako da } \alpha_0 \leq \alpha \Rightarrow \|x - x_\alpha\| < \epsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x = lim_{\alpha\in A} x_{alpha}$.

Poglavlje 2

Konačan slučaj

2.1 Model tržišta

U uvodu smo natuknuli zašto je važan pojam arbitraže i još važnije da neko tržište ne dopušta istu, no u ovom poglavlju ćemo taj problem formalizirati. Prvo ćemo definirati model tržišta u kojem cijene nisu nužno diskontirane te isti svesti na diskontirane cijene. To sve radimo pod pretpostavkom da je vjerojatnosni prostor konačan na način koji je opisan u Poglavlju 1.

Definicija 2.1.1. *Model financijskog tržišta je stohastički proces s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$ $\hat{S} = (\hat{S}_t)_{t=0}^T = (\hat{S}_t^0, \hat{S}_t^1, ..., \hat{S}_t^d)_{t=0}^T$*, baziran na i adaptiran s obzirom na filtrirani vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$*. Pretpostavljamo da je nulta koordinata* $\hat{S}^0$ *strogo veća od 0 za svaki* $t = 0, ..., T$ *i* $\hat{S}_0^0 = 1$.

Cijene financijskih imovina (u Poglavlju 1 detaljnije je opisano što predstavlja slučajni proces S) $0, .., d$ su mjerene u fiksnoj valuti te izuzev nulte nisu nužno nenegativne (sjetimo se forward ugovora). Nulta imovina je ”posebnija” od ostalih, mora biti strogo pozitivna te će biti korištena kao numéraire.

Numéraire je ona financijska imovina u terminima koje su izražene cijene ostalih financijskih imovina u modelu tržišta te nam služi da uspoređujemo novac u trenutku $t = 0$ i trenutku $t > 1$ čime zornije možemo prikazat vrijednost financijske imovine te izbjeći poteškoće kod pada ili rasta vrijednosti novca. Ta nulta imovina je u većini jednostavnih slučaja jednaka računu u banci pa donosi konstantan prinos koji je jednak kamatnoj stopi, no može biti i nešto kompliciranije. Primjetimo još da je $\hat{S}^0$ adaptiran, ali ne nužno predvidiv.

Agent, kao što možemo pretpostaviti, može prodavati i kupovati financijsku imovinu. Odluka o kupnji i prodaji koju agent donosi u trenutku t može biti temeljena jedino na informacijama dostupnim u trenutku t, koje su u našem slučaju modelirane σ-algebrom $\mathcal{F}_t$.

Definicija 2.1.2. *Strategija trgovanja* $(\hat{H}_t)_{t=1}^T = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, ..., \hat{H}_t^d)_{t=1}^T$ *je proces s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$ *koji je predvidiv, tj.* $\hat{H}_t$ *je* $\mathcal{F}_{t-1}$*-izmjeriv.*

Ekonomsko objašnjenje je jednostavno i logično, između vremena $t-1$ i t agent drži "količinu" $\hat{H}_t^j$ financijske imovine j. Ta odluka o količini koju želi držati je donesena u trenutku $t-1$, tako da zahtijevamo da je $\hat{H}_t$ $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriv.

Definicija 2.1.3. *Strategija* $(\hat{H}_t)_{t=1}^T$ *naziva se samofinacirajuća ukoliko za svaki* $t = 1, ..., T-1$ *vrijedi*

$$(\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t) \tag{2.1}$$

što je eksplicitnije,

$$\sum_{j=0}^{d} \hat{H}_t^j \hat{S}_t^j = \sum_{j=0}^{d} \hat{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j \tag{2.2}$$

Početno ulaganje potrebno za strategiju dano je sa $\hat{V}_0 = (\hat{H}_1, \hat{S}_0) = c$

Ono što ovo zapravo znači je da promjenom portfelja nema priljeva/odljeva novca. Također pretpostavljamo da nema transakcijskih troškova kao i u ostatku ovog rada. Prije no što nastavimo vrijedi napomenuti da strategija može poprimati i negativne vrijednosti što bi odgovaralo tzv. "short selling-u".

Ono što je za nas posebno važno je interpretacija $\mathcal{F}_t$-izmjerive slučajne varijable definirane sa (2.1) koju shvaćamo kao vrijednost $\hat{V}_t$ portfelja u trenutku t koji je definiran strategijom trgovanja $\hat{H}$, tj. $\hat{V}_t = (\hat{H}_t, \hat{S}_t) = (\hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t)$.

Već smo natuknuli ulogu nulte imovine i njenog korištenja, a sad ćemo to i primjeniti, tj. podijeliti ćemo cijene imovina cijenom nulte imovine i dobiti diskontirane cijene, koje ćemo označiti na sljedeći način:

$$S_t^j := \frac{\hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0}, \ \ za \ \ j = 1, ..., d \ \ i \ \ t = 0, ..., T. \tag{2.3}$$

Nulta imovina nije uključena pošto je očito da je $S_t^0 = 1$. Neka su sada $(\hat{H}_t)_{t=1}^T$ i $\hat{V}_0$ definirani kao u Definiciji 2.1.3., tada zbog $\hat{S}_0^0 = 1$ imamo:

$$\hat{V}_0 = \sum_{j=0}^{d} \hat{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j = \hat{H}_1^0 + \sum_{j=1}^{d} \hat{H}_1^j S_0^j \tag{2.4}$$

Maknemo li nultu koordinatu u strategiji, tj. u procesu $(\hat{H}_t)_{t=1}^T$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ dolazimo do procesa $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$, tj. $H_t^j = \hat{H}_t^j$ za

$j = 1, ..., d$. To možemo učiniti zato što prelaskom na diskontirane cijene, tj. korištenjem nulte imovine kao numéraire, količina te nulte imovine koju držimo više nije bitna. To se lako vidi, no nama je ovdje bitno da se shvati koncept te da što prije dođemo do diskontiranog modela kako bismo se mogli posvetiti pojmu arbitraže. Bitno je da ukoliko stavimo $\hat{H}_1^0 = 0$ tada je razvoj trgovanja u nultoj imovini jedinstveno određen razvojem trgovanja u imovinama $1, ..., d$ te od sada fiksiramo procese $(\hat{H}_t)_{t=1}^T = (\hat{H}_t^0, \hat{H}_t^1, ..., \hat{H}_t^d)_{t=1}^T$ i $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ da odgovaraju na malo prije opisan način.

Sada nam je jasno da ulaganja $(\hat{H}_t^0)_{t=1}^T$ u numéraire imovinu ne utječu na diskontiranu vrijednost $(V_t)_{t=0}^T$ portfelja, tj.

$$V_t = \frac{\hat{V}_t}{\hat{S}_t^0}, t = 0, ..., T \tag{2.5}$$

ovisi samo o izvedenoj strategiji $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$.

Uzevši u obzir sve navedeno dolazimo do sljedećih rezultata za inicijalno ulaganje te zaradu/gubitak od portfelja:

$$\hat{V}_0 = V_0 = \sum_{j=1}^{d} H_1^j S_0^j, \tag{2.6}$$

što predstavlja inicijalno ulaganje, te za inkrement $\Delta V_{t+1} = V_{t+1} - V_t$ koji je zapravo zarada/gubitak korištenjem (2.2):

$$\begin{aligned} \Delta V_{t+1} &= V_{t+1} - V_t \\ &= ... = \\ &= (H_{t+1}^j, \Delta S_{t+1}^j), \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdje $(\cdot, \cdot)$ označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$.

Kada spojimo sve dobivene rezultate s notacijom iz stohastičke integracije $(H \cdot S)_T = \sum_{t=1}^T (H_t, \Delta S_t)$ dobijemo završnu vrijednost portfelja V_T:

$$V_T = V_0 + \sum_{t=1}^{T} (H_t, \Delta S_t) = V_0 + (H \cdot S)_T \tag{2.8}$$

Prije završne definicije modela u diskontiranim uvjetima vrijedi napomenuti nekoliko stvari kako ne bi došlo do zabune. Iako smo u ovom radu za numéraire imovinu uzimali nultu koordinatu, izbor numéraire imovine nije jedinstven te ona može biti bilo koja strogo pozitivna imovina. Također ukoliko želimo znati vrijednost portfelja u stvarnom novcu proces V_T potrebno je pomnožiti s $\hat{S}_T^0$. Sada kad smo spremni za to, definiramo model tržišta u diskontiranim uvjetima te se u ostatku rada njega i držimo kako bi bili lišeni pomalo zamornog procesa diskontiranja i lakše uočili neke rezultate.

Definicija 2.1.4. *Neka je $S = (S^1, ..., S^d)$ model financijskog tržišta u diskontiranim uvjetima. Strategija trgovanja definirana je kao proces $(H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, H_t^2, ..., H_t^d)_{t=1}^T$ s vrijednostima u R^d koji je predvidiv, tj. svaki H_t je $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriv. Sa $\mathcal{H}$ označavamo skup svih takvih strategija trgovanja.*

Tada definiramo stohastički integral $H \cdot S$ kao proces $((H \cdot S)_t)_{t=0}^T$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ zadan s

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} (H_u, \Delta S_u), \quad t = 0, ..., T, \tag{2.9}$$

gdje $(\cdot, \cdot)$ označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$. Slučajna varijabla

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^{t} (H_u, \Delta S_u)$$

modelira dobitak/gubitak u diskontiranim uvjetima koji se javlja do trenutka t slijedeći strategiju trgovanja H.

2.2 FTAP

Sada kada imamo model tržišta, želimo da on ne dopušta arbitažu, tj. želimo matematički definirati *no-arbitrage* uvjet (kraće (*NA*)), tj. uvjet koji financijsko tržište treba zadovoljavati kako prilika za arbitražu ne bi postojala. Također je bitno naglasiti kako se u stvarnosti većina trgovanja (eng. trading) odvija s vrijednosnicama izvedenenim iz primarne financijske imovine (npr. call i put opcije) te u tom duhu definiramo sljedeće pojmove.

Definicija 2.2.1. *Potprostor K od $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiran sa*

$$K = \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\}$$

nazivamo skup financijskih izvedenica dostižnih po cijeni 0.

Slučajne varijable $f = (H \cdot S)_T$ su one financijske izvedenice, tj. funkcije isplate u trenutku T koje ovise o $\omega \in \Omega$, koje agent može replicirati bez inicijalnih ulaganja slijedeći neku predvidivu strategiju trgovanja H.

Uzmemo li neki $a \in \mathbb{R}$, *skupom financijskih izvedenica dostižnih po cijeni a* nazivmo afin prostor $K_a = a + K$, koji je dobiven translacijom potprostora K za konstantu a, tj. prostor slučajnih varijabli $a + (H \cdot S)_T$ za neku strategiju trgovanja H. Slično kao što smo već objasnili, to su one financijske izvedenice koje agent može replicirati s inicijalnim ulaganjem a slijedeći neku predvidivu strategiju trgovanja H.

Definicija 2.2.2. *Koveksni konus C iz $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiran sa*

$$C = \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \mid postoji\ \ f \in K\ \ t.d.\ \ f \geq g\}$$

nazivamo skup financijskih izvedenica super-replicirajućih po cijeni 0.

Odmah zapažamo da je C konveksni konus koji sadrži negativni "kvadrant" (orthant) od $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Razlika s obzirom na Definiciju 2.2.1., je ta da je financijska izvedenica $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ super-replicirajuća ukoliko ju možemo postići s neto ulaganjem jednakim 0 slijedeći neku predvidivu strategiju trgovanja. Mi zapravo dolazimo do neke financijske izvedenice f te onda ukoliko je to potrebno "bacamo novac" kako bi stigli do g. To "bacanje novca" svakako se čini neobično, no vidjet ćemo da je skup C od velike važnosti u našoj priči.

Također slično kao i za skup K_a, definiramo skup $C_a = a + C$ kao skup financijskih izvedenica koje su super-replicirajuće po cijeni a, tj. dobijemo konveksni konus C translatiran za konstantnu funkciju a.

S time smo definirali i objasnili dva moguće i najvažnija skupa koji će se provlačiti kroz cijeli rad, tj. kasnije njihovi ekvivalenti u neprekidnom slučaju.

Definicija 2.2.3. *Financijsko tržište S zadovoljava no-arbitrage uvjet (NA) ako vrijedi*

$$K \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$$

ili ekvivaletno

$$C \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$$

gdje 0 označava funkciju identički jednaku nuli.

Iz ove definicije sad elementarnim manipulacijama možemo dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.2.1. *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA), tada vrijedi*

$$C \cap (-C) = K$$

Dokaz. Uzmimo $g \in C \cap (-C)$ te je tada $g = f_1 - h_1$, gdje su $f_1 \in K, h_1 \in L^\infty_+$ i $g = f_2 + h_2$ te $f_2 \in K, h_2 \in L^\infty_+$. Tada imamo $f_1 - f_2 = h_1 + h_2 \in L^\infty_+$, a pošto je $f_1 - f_2 \in K$ vrijedi $f_1 - f_2 \in K \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$, gdje zadnja jednakost vrijedi zbog toga što S zadovoljava (NA). Sada iz toga slijede jednakosti $f_1 = f_2$ i $h_1 + h_2 = 0$, tj. $h_1 = h_2 = 0$ (jer su $h_1, h_2 \in L^\infty_+$) što onda znači da je $g = f_1 = f_2 \in K$, te je tvrdnja pokazana. □

Sada smo napokon dali formalni iskaz prilike za arbitražu: postojanje strategije trgovanja H takve da počevši od inicijalnog ulaganja jednakog nuli financijska izvedenica $f = (H \cdot S)_T$ do koje dolazimo slijedeći tu strategiju je nenegativna te nije identički jednaka 0.

Osim arbitraže vrlo je važno pozabaviti se nečime što je intuitivno logično, a to je da financijska imovina, koju god strategiju trgovanja primjenili na kraju ipak mora biti *poštena igra*, tj. očekivani dobitak/gubitak mora biti jednak 0. Poznavanje slučajnih procesa nam govori da je matematički pojam koji takvo što opisuje martingal. Naš cilj je sada naći vjerojatnosnu mjeru koja "preraspodjeljuje vjerojatnosti" (često preko Radon-Nikodým-ove derivacije) kako bi mogli preći na martingale te onda to povezati s činjenicom zadovoljava li tržište (NA) uvjet.

Definicija 2.2.4. *Vjerojatnosna mjera Q na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se ekvivalentna martingalna mjera za S, ukoliko vrijedi $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ te je S martingal u odnosu na $\mathbf{Q}$, tj.* $\mathbf{E_Q}[S_{t+1} \,\big|\, \mathcal{F}_t] = S_t$, *za $t = 0, ..., T-1$.*

Dva skupa martingalnih mjera za nas će biti od posebne važnosti. Skup ekvivalentnih martigalnih mjera označavamo s $\mathcal{M}^e(S)$, dok s $\mathcal{M}^a(S)$ označavamo skup svih (ne nužno ekvivalentnih) martigalnih mjera gdje slovo a označava "apsolutno neprekidne s obzirom na $\mathbf{P}$" što u našem konačnom slučaju odmah vrijedi, no u malo općenitijim slučajevima se tome treba malo pomnije posvetiti.

Već smo dali naputak u vezi Radon-Nikodým-ove derivacije, primjetimo da u slučaju konačnog Ω te vjerojatnosti $\mathbf{P}$ takve da $\mathbf{P}[\omega] > 0$, za svaki $\omega \in \Omega$, vrijedi $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ *akko* $\mathbf{Q}[\omega] > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$. Vjerojatnosnu mjeru $\mathbf{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ često identificiramo njenom Radon-Nikodým-ovom derivacijom $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, što u našem slučaju konačnog vjerojatnosnog prostora znači

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega) = \frac{\mathbf{Q}[\omega]}{\mathbf{P}[\omega]}.$$

Lema 2.2.2. *Neka je $\mathbf{Q}$ vjerojatnosna mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(i) $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$,
(ii) $\mathbf{E_Q}[f] = 0$, *za svaki* $f \in K$,
(iii) $\mathbf{E_Q}[g] \leq 0$, *za svaki* $g \in C$.

Dokaz. Ekvivalencija (i)⇔(ii) svodi se na provjeru tvrdnje da je S martingal u odnosu na $\mathbf{Q}$ tj.

$$\mathbf{E_Q}[S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}, \text{ za sve } t = 1, ..., T.$$

Ova tvrdnja vrijedi *akko* za svaki $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriv skup A vrijedi $\mathbf{E_Q}[\chi_A(S_t - S_{t-1})] = 0$, gdje je $0 \in \mathbb{R}^d$. Drugim riječima to znači da je $\mathbf{E_Q}[(x\chi_A, \Delta S_t)] = 0$, za svaki x. Linearnošću se ova tvrdnja proširuje na cijeli skup K te smo time pokazali (ii).

Ekvivalencija (ii)⇔(iii) slijedi direktno iz definicija 2.2.1. i 2.2.2., tj. definicija skupova K i C. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Sada smo spremni za centralni rezultat ovog poglavlja, koji povezuje priču oko toga da tržište ne nudi priliku za arbitražu te toga da se financijska imovina treba ”ponašati kao” martingal kako bi igra bila poštena. Ovaj teorem se često naziva *Fundamental theorem of asset pricing* (skraćeno FTAP) kao što smo uostalom i natuknuli u uvodu, no sada je rezultat potrebno pokazati u našem modelu tržišta. Teorem zaista ima fundamentalnu ulogu u određivanju cijena te hedging-u financijskih izvedenica (u našem slučaju elemenatata $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$) pomoću no-arbitrage argumenata što ćemo vidjeti u ovom radu, a i općenito se vidi u raznim primjenama i modelima u području financija.

Teorem 2.2.3. ***(Fundamental theorem of asset pricing).***
Neka je S financijsko tržište modelirano na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, \mathbf{P})$.
Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:
(i) S zadovoljava (NA),
(ii) $\mathcal{M}^e(s) \neq \emptyset$.

Dokaz. (ii)⇒(i) Neka je $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ (znamo da postoji pošto je skup $\mathcal{M}^e(S)$ neprazan). Tada iz prethodne Leme 2.2.2. slijedi

$$\mathbf{E_Q}[g] \leq 0, \text{ za svaki } g \in C.$$

Sada pretpostavimo suprotno tvrdnji (i) da S ne zadovoljava (NA), tj. da postoji $g \neq 0$ takav da $g \in C \cap L_+^\infty$. No kada bi to vrijedilo, zbog pretpostavke $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ (tj. da se vjerojatnosne mjere ”slažu” oko toga koji skupovi imaju vjerojatnost strogo veću od nule) bi imali

$$\mathbf{E_Q}[g] > 0,$$

no to je kontradikcija, tj. pokazali smo da implikacija (ii)⇒(i) vrijedi.

(i)⇒(ii) Ova implikacija je bitna kako bismo povezali argumente no-arbitrage teorije s martingalnom teorijom te ćemo dati dokaz u duhu funkcionalne analize koji će se poslije moći, u istom duhu, nadograditi za općenitiji slučaj.

Pretpostavljamo da S zadovoljava (NA), to po Definiciji 2.2.3. znači da prostor K presjeca L_+^∞ samo u 0. Ono što mi želimo je separirati disjunktne konveksne skupove $L_+^\infty \setminus \{0\}$ i K hiperravninom induciranom linearnim funkcionalom $\mathbf{Q} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Pošto standardni teoremi separacije u ovom slučaju nisu primjenjivi (jer kompaktnost nije zadovoljena), morat ćemo biti oprezni kako bismo dobili strogu separaciju.

Promatramo konveksnu ljusku jediničnih vektora $(\mathbf{1}_{\{\omega_n\}})_{n=1}^N$ u $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tj.

$$P := \left\{ \sum_{n=1}^{N} \mu_n \mathbf{1}_{\{\omega_n\}} \,\middle|\, \mu_n \geq 0, \sum_{n=1}^{N} \mu_n = 1 \right\}.$$

Skup P je konveksan, kompaktan podskup od $L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ te je po pretpostavci da S zadovoljava (NA) disjunktan skupu K. Stoga možemo strogo separirati konveksni kompaktni skup P od konveksnog zatvorenog skupa K linearnim funkcionalom $\mathbf{Q} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tj. možemo naći $\alpha < \beta$ takve da vrijedi

$$(\mathbf{Q}, f) \leq \alpha < \beta \leq (\mathbf{Q}, h) \text{ za svaki } f \in K, h \in P.$$

Pošto je K linearni prostor (sinonim za vektorski prostor koji se češće koristi u funkcionalnoj analizi), imamo $\alpha \geq 0$ te možemo α zamijeniti nulom, što istovremeno povlači da je $\beta > 0$. Neka je sada sa I definiran jedinični vektor $I = (1, ..., 1)$ te tada imamo $(\mathbf{Q}, I) > 0$ (gdje I poimamo u smislu konstantne jedinične funkcije). Sada normaliziramo $\mathbf{Q}$ tako da $(\mathbf{Q}, I) = 1$, a uz to znamo da je $\mathbf{Q}$ strogo pozitivan za svaki $\mathbf{1}_{\{\omega_n\}}$ (tj. slaže se sa $\mathbf{P}$ oko skupova sa strogo pozitivnim vrijednostima), no sada uočavamo da smo pronašli vjerojatnosnu mjeru $\mathbf{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentnu $\mathbf{P}$ takvu da vrijedi tvrdnja (ii) iz Leme 2.2.2., tj. našli smo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$ za proces S. Time smo dokazali i implikaciju (i)⇒(ii) te je dokaz teorema gotov.

□

Prije no nastavimo s rezultatima direktno povezanim s teoremom koji smo upravo dokazali vrijedi se osvrnuti na jedan aspekt ove "priče".

Već prije smo spomenuli kako je martingal (npr. S) matematički model za *savršeno poštenu igru*, tj. ukoliko primjenimo bilo koju strategiju $H \in \mathcal{H}$ očekivano je da investitor ne može ni dobiti ni izgubiti, tj. $\mathbf{E}[(H \cdot S)_T] = 0$. S druge strane proces S koji dopušta arbitražu je upravo suprotno, model za *potpuno nepoštenu igru*, tj. ukoliko izaberemo pravu $H \in \mathcal{H}$ investitor može zaraditi "nešto iz ničega". Naravno, mnogo je procesa koji nisu ni u jednoj od dvije navedene skupine.

Ono što mi ovdje želimo reći, tj. ono što sada kada imamo upravo dokazani rezultat i kada možemo *preraspodijeliti vjerojatnosti* je da nastaje jasna podjela između procesa : ili proces dopušta arbitražu te ga ne možemo napraviti poštenim preraspodjelom vjerojatnosti (tj. nikada ne postaje martingal) , ili možemo prijeći s vjerojatnosti $\mathbf{P}$ na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{Q}$ te proces postaje pošten, tj. martingal.

Da još jednom sumiramo, prelaskom na drugu mjeru možemo utjecati na sve procese koji ne dopuštaju arbitražu, no ukoliko proces dopušta arbitražu tome je tako bez obzira u odnosu na koju mjeru promatramo proces.

Iz teorema 2.2.3. sada slijedi :

Korolar 2.2.4. *Neka S zadovoljava (NA) i neka je* $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *dostižna financijska izvedenica. Drugim riječima f je oblika*

$$f = a + (H \cdot S)_T, \tag{2.10}$$

za neki $a \in \mathbb{R}$ *i neku strategiju trgovanja H. Tada su konstanta a i proces* $(H \cdot S)_t$ *jedinstveno određeni s (2.10) i za svaki* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ *zadovoljavaju*

$$a = \mathbf{E_Q}[f], \quad a + (H \cdot S)_t = \mathbf{E_Q}[f \mid \mathcal{F}_t], \; za\; 0 \leq t \leq T. \tag{2.11}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati jedinstvenost konstante $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dvije reprezentacije financijske izvedenice, $f = a^1 + (H^1 \cdot S)_T$ i $f = a^2 + (H^2 \cdot S)_T$, takve da $a^1 \neq a^2$. Sada BSOMP da je $a^1 > a^2$ te tada slijedeći strategiju $H^2 - H^1$ dolazimo do prilike za arbitražu. Dolazimo do $a^1 - a^2 = ((H^2 - H^1) \cdot S)_T$, što je zbog pretpostavke strogo pozitivno, tj. slijedeći strategiju $H^2 - H^1$ došli smo do strogo pozitivnog rezultata u trenutku T, što je u kontradikciji s pretpostavkom da S zadovoljava (NA), tj. pokazali smo da je konstanta a jedinstvena.

Drugo što moramo pokazati je jedinstvenost procesa $H \cdot S$, te opet slično pretpostavimo da je $f = a + (H^1 \cdot S)_T$ i $f = a + (H^2 \cdot S)_T$ i da uz to vrijedi da $H^1 \cdot S$ i $H^2 \cdot S$ nisu identični. Tada postoji $0 \leq t \leq T$ takav da $(H^1 \cdot S)_t \neq (H^2 \cdot S)_t$, te BSOMP da je $A := \{(H^1 \cdot S)_t > (H^2 \cdot S)_t\}$ neprazan skup (u našem slučaju je to događaj), koji je očito u $\mathcal{F}_t$. Stoga koristeći $(H^1 \cdot S)_T = (H^2 \cdot S)_T$ dobivamo da je strategija trgovanja $H := (H^2 - H^1)\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\langle t,T]}$ predvidiv proces koji producira arbitražu pošto je $(H \cdot S)_T = 0$ izvan A, dok na A imamo $(H \cdot S)_T = (H^1 \cdot S)_t - (H^2 \cdot S)_t > 0$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da S zadovoljava (NA), tj. pokazali smo da je proces $H \cdot S$ jedinstven.

Jednadžbe iz (2.11) slijede iz činjenice da je proces $H \cdot S$ $\mathbf{Q}$-martingal, za svaki predvidiv proces H i mjeru $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ te je tvrdnja korolara ovim pokazana. □

Za dio koji slijedi treba nam dio konveksne analize koji smo iskazali u Poglavlju 1. Označimo s $C(\mathcal{M}^e(S))$ i $C(\mathcal{M}^a(S))$ konuse generirane konveksnim skupovima $\mathcal{M}^e(S)$ i $\mathcal{M}^a(S)$ respektivno. Također primjetimo da je konveksan konus $C \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ (skup financijskih izvedenica super-replicirajućih po cijeni 0) u našem konačnom slučaju zatvoren kao suma zatvorenog linearnog prostora K te zatvorenog (polyhedral) konusa $L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Ova tvrdnja nije potpuno trivijalna, no nećemo je dokazivati. Iz bipolarnog teorema zaključujemo da je C jednak svom bipolaru C^{00}.

Sljedeća propozicija daje nam polarnu relaciju između konusa $C(\mathcal{M}^e(S))$ i $C(\mathcal{M}^a(S))$ te konusa C.

Propozicija 2.2.5. *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA). Tada je polar skupa C jednak $C(\mathcal{M}^e(S))$ te je $\mathcal{M}^e(S)$ gust u $\mathcal{M}^a(S)$. Stoga su za $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne :*
(i) $g \in C$,
(ii) $\mathbf{E_Q}[g] \leq 0$, za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$,
(iii) $\mathbf{E_Q}[g] \leq 0$, za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$.

Dokaz. Poklapanje polara C^0 i skupa $C(\mathcal{M}^a(S))$ slijedi iz Leme 2.2.2. te činjenice da je $C \supseteq L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i $C^0 \subseteq L^1_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Stoga (i)$\Leftrightarrow$(ii) slijedi iz bipolarnog teorema.

Sada želimo pokazati gustoću $\mathcal{M}^e(S)$ u $\mathcal{M}^a(S)$. Pošto smo pretpostavili da S zadovoljava (NA) tada iz Teorema 2.2.3. slijeda da postoji barem jedna $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$. Za svaki $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ i $0 \leq \mu \leq 1$ imamo $\mu\mathbf{Q}^* + (1-\mu)\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, što povlači da je $\mathcal{M}^e(S)$ gust u $\mathcal{M}^a(S)$. Sada ekvivalencija (ii)$\Leftrightarrow$(iii) postaje očita. □

Slično dolazimo i do sljedećeg rezultata:

Propozicija 2.2.6. *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA). Tada su za $f \in L^\infty$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne :*
(i) $f \in K$, tj. $f = (H \cdot S)_T$, za neku strategiju $H \in \mathcal{H}$,
(ii) za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ vrijedi $\mathbf{E_Q}[f] = 0$,
(iii) za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^a(S)$ vrijedi $\mathbf{E_Q}[f] = 0$.

Dokaz. I Propozicije 2.2.1. imamo da je $f \in K$ *akko* $f \in C \cap (-C)$ te tvrdnja propozicije slijedi iz prethodne Propozicije 2.2.5. □

Korolar 2.2.7. *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA) i da $f \in L^\infty$ zadovoljava $\mathbf{E_Q}[f] = a$, za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$. Tada vrijedi $f = a + (H \cdot S)_T$ za neku strategiju H.*

2.3 Određivanje cijena i super-replikacija

Postavlja se pitanje kako dosadašnju teoriju i intuiciju iskoristiti kako bismo pomoću nje mogli nešto reći o cijenama financijskih izvedenica kao što smo natuknuli u uvodu. Naravno, i dalje nam je glavna misao vodilja da prilika za arbitražu ne smije postojati. Ukoliko uvođenje neke financijske izvedenice $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ po cijeni $a \in \mathbb{R}$ na već postojećem financijskom tržištu S ne stvara priliku za arbitražu, tada kažemo da je a *arbitrage-free* cijena. Ovu ideju sad želimo izreći tako da bude u duhu modela koji smo do sad uspostavili te pokušati smjestiti a u neki interval.

Zamislimo situaciju gdje postojećem tržištu S dodajemo financijski instrument kojim se može trgovati po cijeni a u trenutku $t = 0$ te generira slučajni tok novca $f(\omega)$ u trenutku $t = T$. Proširimo li sada linearan prostor generiran s K vektorom $(f - a)$ dolazimo do proširenog prostora dostižnih izvedenica $K^{f,a}$. Uz to sve bi i dalje trebalo vrijediti da tržište ne dopušta arbitražu, tj. $K^{f,a} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ (u duhu Definicije 2.2.3.). U tom slučaju kažemo da je a arbitrage-free cijena financijske izvedenice f.

Teorem 2.3.1. ***Određivanje cijena pomoću no-arbitrage uvjeta.*** *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA) te neka je $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Tada definiramo*

$$\underline{\pi}(f) = inf\{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\},$$
$$\overline{\pi}(f) = sup\{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}.$$

Ili vrijedi $\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ te je u tom slučaju f dostižna po cijeni $\pi(f) := \underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$, tj. $f = \pi(f) + (H \cdot S)_T$, za neku $H \in \mathcal{H}$ pa je stoga $\pi(f)$ jedinstvena arbitrage-free cijena za f.

Ili vrijedi $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$ pa je u tom slučaju

$$\left\langle \underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f) \right\rangle = \{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$$

i a je arbitrage-free cijena za f akko leži u otvorenom intervalu $\left\langle \underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f) \right\rangle$.

Dokaz. Slučaj kada je $\underline{\pi}(f) = \overline{\pi}(f)$ slijedi direktno iz Korolara 2.2.7.

U ostatku dokaza posvećujemo se slučaju kada je $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$. Primjetimo da je skup $\{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\}$ zapravo ograničen neprazan interval u $\mathbb{R}$ te ćemo ga označiti s I. Sada tvrdimo da je $a \in I$ akko je a arbitrage-free cijena za f.

Ukoliko pretpostavimo da je $a \in I$ tada postoji $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ takav da vrijedi $\mathbf{E_Q}[f - a] = 0$, stoga vrijedi $K^{f,a} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$, tj. tržište ne dopušta arbitražu.

Pretpostavimo sada obratno da je $K^{f,a} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}$, tada kao u dokazu Teorema 2.2.3. nalazimo vjerojatnosnu mjeru $\mathbf{Q}$ ekvivalentnu $\mathbf{P}$ takvu da vrijedi $\mathbf{E_Q}[g] = 0$ za sve $g \in K^{f,a}$. To povlači da je $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$, te $a = \mathbf{E_Q}[f]$ (što slijedi iz Korolara 2.2.4.). Time smo pokazali željenu ekvivalenciju.

Da bismo pokazali kako je interval iz iskaza otvoren pretpostavimo suprotno, tj. da je $a = \overline{\pi}(f) \in I$, tj. jednak desnoj granici intervala I, te sada promatramo financijsku izvedenicu $f - \overline{\pi}(f)$. Iz definicije $\overline{\pi}(f)$ nam slijedi da je $\mathbf{E_Q}[f - \overline{\pi}(f)] \leq 0$, za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ pa po Propoziciji 2.2.5. slijedi $f - \overline{\pi}(f) \in C$. Iz definicije skupa K i C sada vidimo da možemo uzeti $g \in K$ takav da je $g \geq f - \overline{\pi}(f)$. Ukoliko je supremum iz definicije od $\overline{\pi}$ postignut, tj. ukoliko postoji $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$ takav da vrijedi $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[f] = \overline{\pi}(f)$, tada (uz korištenje znanja iz Leme 2.2.2.) imamo $0 = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[g] \geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}[f - \overline{\pi}(f)] = 0$, a iz toga sada (pošto je $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{M}^e(S)$ tj. $\mathbf{Q}^* \sim \mathbf{P}$) slijedi da je $f - \overline{\pi}(f) \equiv g$, tj. f je dostižan po cijeni $\overline{\pi}(f)$.

Ovo nam sada zapravo povlači da je $\mathbf{E_Q}[f] = \overline{\pi}(f)$ za sve $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ te se onda interval I zapravo sastoji samo od točke $\{\overline{\pi}(f)\}$. To je pak u kontradikciji s tvrdnjom da je I interval pa smo pokazali da u slučaju $\underline{\pi}(f) < \overline{\pi}(f)$, $\overline{\pi}(f)$ ne može pripadati intervalu I, tj. I je otvoren s desne strane. Prelaskom s f na $-f$ dobivamo analognu tvrdnju za lijevu stranu intervala I pa smo time pokazali da je $I = \left\langle \underline{\pi}(f), \overline{\pi}(f) \right\rangle$ i dokazali tvrdnju teorema.

□

Teorem 2.3.2. *Pretpostavimo da S zadovoljava (NA). Tada za $f \in L^\infty$ imamo*

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}(f) &= sup\{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} \\
&= max\{\mathbf{E_Q}[f] \mid \mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)\} \\
&= min\{a \mid postoji\ k \in K, a + k \geq f\}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Kao što je pokazano u dokazu prošlog teorema imamo $f - \overline{\pi}(f) \in C$ i stoga

$$\begin{aligned}
f &= \overline{\pi}(f) + g, \text{ za neki } g \in C \\
&= \overline{\pi}(f) + k - h, \text{ za neki } k \in K \text{ i } h \in L^\infty_+ \\
&\leq \overline{\pi}(f) + k, \text{ za neki } k \in K.
\end{aligned}$$

Čim $\overline{\pi}(f)$ zadovoljava navedenu nejednakost odmah znamo (po definiciji infimuma) da je $\overline{\pi}(f) \geq inf\{a \mid \text{postoji } k \in K, a + k \geq f\}$.

Neka je $a < \overline{\pi}(f)$, ukoliko pokažemo da ne postoji $k \in K$ takav da vrijedi $a + k \geq f$ tada smo zapravo pokazali da je $\overline{\pi}(f) = inf\{a \mid \text{postoji } k \in K, a + k \geq f\}$, štoviše pokazali smo da se infimum postiže pa je ujedno i minimum. Pošto imamo $a < \overline{\pi}(f)$ znamo da postoji $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ takav da vrijedi $\mathbf{E_Q}[f] > a$, no to sada povlači da za svaki $k \in K$ slijedi $\mathbf{E_Q}[a + k] = a < \mathbf{E_Q}[f]$ što je u kontradikciji s time da je $a + k \geq f$, tj. tvrdnja je dokazana.

□

Ovaj teorem nam zapravo govori da ukoliko želimo super-replicirati f, tj. pronaći $a \in \mathbb{R}$ i $H \in \mathcal{H}$ takve da vrijedi $a + (H \cdot (S))_T \geq f$, potrebna nam je početna investicija a koja je barem jednaka $\overline{\pi}(f)$.

S ova dva rezultata smo završili naš konačan slučaj i pokazali kako se formalno definira financijsko tržište, zašto je bitno da ono ne dopušta arbitražu i kakve to veze ima s poštenom igrom i određivanjem cijena financijskih izvedenica. Također, ono što je isto jako bitno, to smo sve učinili na način koji će se relativno lagano, tj. po sličnoj ideji moći proširiti na neprekidni slučaj, no tu ćemo ipak morati biti malo vještiji i precizniji.

Poglavlje 3

Neprekidan slučaj i Kreps-Yanov teorem

Dosad (u konačnom slučaju) smo uspješno povezali no-arbitrage uvjet s pojmovima poštene igre, te isti doveli u vezu s određivanjem cijena financijske imovine i hedging-u iste.U stvarnosti informacije koje su dostupne mijenjaju se "svakog trenutka" te je trgovina financijskom imovinom također moguća u svakom trenutku. Naša želja je dosadašnju priču nadograditi za takav neprekidan slučaj. Fokus će ponovno biti na tome da tržište ne dopušta arbitražu ili bolje rečeno priliku za zaradom "nečega iz ničega" te kako taj rezultat dovesti u vezu s tim da igra bude poštena.

Sada već znamo za Fundamental theorem of asset pricing i naš izazov je je doći do njegove inačice za neprekidan slučaj. Kako bi to učinili, morat ćemo biti dosta oprezniji zbog toga što se sada javljaju razni topološki prostori i pripadne topologije, tj. funkcionalna analiza i pripadni rezultati iz Poglavlja 1 će odigrati važnu ulogu. Kao što ćemo vidjeti, rješenje tog problema neće doći samo tako te ćemo morati unaprijediti naš uvjet koji ne dopušta zaradu bez rizika i to je zapravo ono zbog čega je naš finalni rezultat koji je ujedno i naslov ovog rada tehnički zahtjevniji od Teorema 2.2.3 (FTAP).

3.1 Prelazak na neprekidni slučaj

Prvo moramo dati konture modelu te se pritom oslanjamo na model u konačnom slučaju. Također vrijedi napomenuti da su pojmovi koje ćemo spomenuti definirani u Poglavlju 1 te isto treba konzultirati.

Neka je sada portfelj opisan pomoću stohastičkog procesa $S = (S_t)_{t\geq 0}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ koji je baziran i adaptiran u odnosu na filtrirani vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$. Kao i dosada Ω je prostor događaja (tj. stanja tržišta), a $\mathcal{F}_{t\geq 0}$ je filtracija pomoću koje su modelirane informacije. I u ovom slučaju pretpostavljamo da je nulta koordinata S^0 normalizirana, tj. $S^0_t \equiv 1$. Ona se još naziva obveznica, tj. ona je nerizična financijska imovina. Još ćemo pretpostaviti da je proces S lokalno ograničen, u smislu da postoji niz vremena zaustavljanja $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$, koji gotovo sigurno raste u $+\infty$, takav da su zaustavljeni procesi $S_t^{\tau_n} = S_{t\wedge\tau_n}$ uniformno ograničeni za svaki n. Primjetimo da su neprekidni procesi, ili općenitije càdlàg procesi s uniformno ograničenim skokovima lokalno ograničeni. Navedene pretpostavke bit će od važnosti zbog tehničkih razloga. Za skup vremenskih indeksa (koji interpretiramo kao vremena u kojima je trgovina moguća) sada odabiremo $\mathbf{T} = [0, \infty\rangle$ kako bi imali potpuno općenit slučaj. To naravno pokriva i slučaj $\mathbf{T} = [0, T]$ (što je slučaj u većini primjena), uz pretpostavku da je S_t konstantan za $t \geq T$. Diskretni slučaj je također pokriven ukoliko stavimo da je S konstantan na $[n-1, n\rangle$, za svaki prirodan broj $n \in \mathbf{T}$. Što se tiče filtracije $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$, pretpostavljamo da ona uvijek zadovoljava *uobičajene uvjete*, tj. desnu neprekidnost i da $\mathcal{F}_0$ sadrži sve nul-skupove od $\mathcal{F}_\infty$ (definirano u Poglavlju 1). Nadalje, proces S je gotovo sigurno càdlàg proces.

Pozabavimo se sada sad već poznatom pojmu strategije trgovanja H, nju ćemo sada definirati na pojednostavljeni način i njena je uloga sada slična onoj step funkcija u teoriji integracije.

Definicija 3.1.1. *Neka je S lokalno ograničen stohastički proces, tada proces $H = (H_t)_{t=0}^{\infty}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ nazivamo jednostavna strategija trgovanja (ili više matematički, jednostavni integrand), ukoliko je H oblika*

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \chi_{\langle\tau_{i-1},\tau_i]},$$

gdje su $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n < \infty$ konačna vremena zaustavljanja i gdje su h_i $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$-izmjerive funkcije s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$.

Tada, slično kao u Definiciji 2.1.4., možemo definirati stohastički integral $H \cdot S$ kao stohastički proces

$$\begin{aligned}(H{\cdot}S)_t &= \textstyle\sum_{t=1}^{n}(h_i, S_{\tau_i\wedge t} - S_{\tau_{i-1}\wedge t}) \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} h_i\,(S^j_{\tau_i\wedge t} - S^j_{\tau_{i-1}\wedge t}),\ \ 0 \leq t < \infty,\end{aligned}$$

i njegovu krajnu vrijednost kao slučajnu varijablu

$$(H \cdot S)_\infty = \sum_{i=1}^{n}(h_i, S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})\ .$$

Ukoliko su zaustaljeni proces S^{τ_n} i funkcije $h_1, \ldots, h_n$ još i uniformno ograničeni, tada strategiju H nazivamo dopustivom.

Ekonomska interpretacija je vrlo jasna: u trenutku τ_{i-1} investitor donosi odluku koliko želi investirati u koju od financijskih imovina $S^1, ..., S^j, ..., S^d$, tj. kako želi namjestiti svoj portfelj. To čini na način da u financijsku imovinu S^j investira $h_i^j(\omega)$ jedinica (sjetimo se pojma numéraire). $h_i^j(\omega)$ je "arbitrary" predznaka (što znači da može biti i negativan suprotno intuiciji). Držanje negativne količine neke imovine zapravo je jednako posuđivanju ili "going short". $h_i^j(\omega)$ također ovisi o slučajnom elementu ω u smislu da je $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$-izmjeriv, tj. pri odluci koristimo samo informacije dostupne u trenutku τ_{i-1}. Sredstva koja investitor ulaže/uzima (ili stavlja u) iz "cash box"-a što je interpretacija nulte financijske imovine, tj. numéraire-a $S^0 \equiv 1$.

Takav portfelj investitor drži fiksiranim do trenutka τ_i. U tom periodu rizična imovina (npr. dionice) S^j, gdje je $j = 1, ..., d$, promjenila je vrijednost iz $S^i_{\tau_{i-1}}(\omega)$ u $S^i_{\tau_i}(\omega)$ što rezultira dobitkom/gubitkom koji je dan slučajnom varijablom $(h_i, S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})$.

U trenutku τ_1 kad je $i < n$, investitor preraspodjeljuje svoj portfelj na opisan način, a u trenutku τ_n likvidira portfelj, tj. pretvara sve pozicije u numéraire imovinu. Stoga je slučajnom varijablom $(H \cdot S)_{\tau_n} = (H \cdot S)_\infty$ modeliran totalni dobitak/gubitak (u terminima numéraire-a S_0) koji je investitor postigao u trenutku τ_n slijedeći strategiju trgovanja H. Drugim riječima $(H \cdot S)_t$ nam daje dobitak/gubitak akumuliran u trenutku t.

Ovako definiran oblik trgovanja nam uvelike ulakšava život , no treba naglasiti da je to samo korak ka potpuno općenitom slučaju koji je izvan dosega ove radnje.

Kao što smo vidjeli u konačnom slučaju ekvivalentne martingalne mjere su nam od velike važnosti, te ćemo sada i taj aspekt odvesti na sljedeću razinu.

Definicija 3.1.2. *Vjerojatnosna mjera* $\mathbf{Q}$ *na* $\mathcal{F}$ *koja je ekvivalentna (apsolutno neprekidna s obzirom na)* $\mathbf{P}$ *naziva se ekvivalentna (apsolutno neprekidna) lokalna martingalna mjera ukoliko je* S *lokalni martingal u odnosu na* $\mathbf{Q}$.

S $\mathcal{M}^e(S)$ $(\mathcal{M}^a(S))$ *označavamo familiju svih takvih mjera i kažemo da* S *zadovoljava uvjet postojanja ekvivalentne lokalne martingalne mjere (EMM) ukoliko vrijedi* $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Vrijedi zapaziti da uz našu pretpostavku da je proces S lokalno ograničen vrijedi da je S lokalni $\mathbf{Q}$-martingal akko je S^τ $\mathbf{Q}$-martingal za svako vrijeme zaustavljanja τ takvo da je S^τ uniformno ograničen.

Prelazak s martingala na lokalne martingale samo je još jedan korak unaprijed što se tiče općenitosti, a sljedeća lema nam pokazuje da to svojstvo jednako dobro za naš slučaj kao i martingal.

Lema 3.1.1. *Neka je* $\mathbf{Q}$ *vjerojatnosna mjera na* $\mathcal{F}$ *koja je apsolutno neprekidna s obzirom na* $\mathbf{P}$*. Tada je lokalno ograničen stohastički proces S lokalni martingal u odnosu na vjerojatnosnu mjeru* $\mathbf{Q}$ *akko*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(H \cdot S)_{\infty}] = 0, \tag{3.1}$$

za svaki dopustivu jednostavnu strategiju trgovanja H.

Dokaz. Neka je $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ niz konačnih vremena zaustavljanja koji $\mathbf{P}$-g.s. raste u beskonačnost takav da je svaki S^{τ_n} ograničen.

Pretpostavimo da (3.1) vrijedi za svaki jednostavni dopustivi integrand, te želimo pokazati da je svaki S^{τ_n} $\mathbf{Q}$-martingal. Drugim riječima, za svaki $n \geq 1$ i za svaki par vremena zaustavljanja $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \tau_n$ želimo pokazati da vrijedi

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{\sigma_2} \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}.$$

To je pak ekvivalento zahtjevu da za svaku $\mathcal{F}_{\sigma_1}$-izmjerivu, ograničenu funkciju h s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ imamo

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(h, S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})] = 0,$$

što vrijedi po pretpostavci da vrijedi (3.1). Stoga je S lokalni $\mathbf{Q}$-martingal te je pokazana implikacija da za svaku dopustivu jednostavnu strategiju trgovanja H, (3.1) povlači da je S lokalni martingal u odnosu na $\mathbf{Q}$.

Dokaz suprotne implikacije, tj. da za S to što je lokalni $\mathbf{Q}$-martingal povlači (3.1), za svaki dopustivi integrand slijedi direktno kao u dokazu Leme 2.2.2.

□

Znak " = " ekvivalentno može biti zamijenjen s " $\leq$ " (ili " $\geq$ ") pošto je H dopustiva jednostavna strategija trgovanja akko je i $-H$ takva. Tvrdnja s nejednakosti bit će nam od važnosti pri pokazivanju kasnijih rezultata.

Sljedeći dio teorije koji moramo izgraditi je neki oblik uvjeta koji će reći da tržište ne dopušta da "zaradimo nešto iz ničega", no za to nam trebaju sljedeće verzije sad već dobro poznatih skupova.

Definicija 3.1.3. *Potprostor* K^{simple} *od* $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *definiran sa*

$$K^{simple} = \{(H \cdot S)_{\infty} \,\big|\, H \text{ jednostavna,dopustiva}\}$$

nazivamo skup financijskih izvedenica dostižnih po cijeni nula slijedeći dopustivu jednostavnu strategiju trgovanja.

Sada kad smo definirali skup K^{simple} slično kao u konačnom slučaju definiramo drugi skup od važnosti.

Definicija 3.1.4. *Konveksni konus C^{simple} u $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiran sa*

$$C^{simple} = K^{simple} - L^\infty_+ = \{f - k \,\big|\, f \in K^{simple}, f \in L^\infty, k \geq 0\}$$

nazivamo skup financijskih izvedenica dominiranih nekim $f \in K^{simple}$.

Nakon uspješnog definiranja skupova K^{simple} i C^{simple}, spremni smo za definiciju inačice no-arbitrage uvjeta.

Definicija 3.1.5. *Kažemo da model tržišta S zadovoljava no-arbitrage uvjet (NA^{simple}) s obzirom na jednostavne integrande ukoliko vrijedi*

$$K^{simple} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\},$$

ili ekvivalentno

$$C^{simple} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}.$$

Sada smo došli u situaciju gdje smo u našem općenitijem modelu tržišta definirali pojam ekvivalentne martingalne mjere i neki oblik no-arbitrage uvjeta. Prirodno je sada zapitati jesu li (EMM) i (NA^{simple}) ekvivalentni, tj. imamo li prikladnu verziju FTAP teorema.

Prije nego se pozabavimo tim pitanjem želimo pokazati da ne postoji razlika između prilika za arbitražu za jednostavne dopustive strategije te prilika za arbitražu za dopustive "*buy and hold*" strategije. Taj rezultat će nam biti od koristi kako bi odgovorili na naše pitanje.

Lema 3.1.2. *Neka je proces H jednostavna dopustiva strategija definirana s $H = \sum_{i=1}^n h_i \chi_{\langle \tau_{i-1}, \tau_i]}$ takva da prouzročuje (slijedeći strategiju) priliku za arbitražu, tj. imamo $(H \cdot S)_\infty \geq 0$ gotovo sigurno i $\mathbf{P}[(H \cdot S)_\infty > 0] > 0$. Tada postoji buy and hold (doslovni prijevod je kupi i drži) strategija $K = \mathbf{1}_{\langle \sigma_1, \sigma_2]}$, takva da je K dopustiva te prouzročuje priiliku za arbitražu.*

Dokaz. Dokaz slijedi principom matematičke indukcije po n te nam uz to kaže da vremena zaustavljanja σ_1 i σ_2 mogu biti odabrana na način da je $\sigma_1 = \tau_{i-1}$ i $\sigma_2 = \tau_i$, za neki $i \leq n$. Za $n = 1$(baza indukcije) tvdnja je očita jer $H \equiv K$ zadovoljava istu.

Sada nam preostaje provjeriti korak matematičke indukcije. Ukoliko imamo da vrijedi $\mathbf{P}[(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} < 0] > 0$ tada možemo staviti $\sigma_1 = \tau_{n-1}$ i $\sigma_2 = \tau_n$ i $h = h_{n-1}\chi_{\{(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} < 0\}}$. Pošto po pretpostavci gotovo sigurno vrijedi $(H \cdot S)_{\tau_n} \geq 0$ tada strategija $K = h\chi_{\langle \sigma_1, \sigma_2]}$ prouzročuje arbitražu te onda na skupu $\{(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} < 0\}$ vrijedi $(K \cdot S)_{\tau_n} > 0$. Ukoliko pak imamo da je $(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} = 0$ gotovo sigurno, tada opet strategija $K = h_{n-1}\chi_{\langle \tau_{n-1}, \tau_n]}$ mora prouzročiti priliku za arbitražu. Ostao nam je još slučaj kada je $(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} \geq 0$ gotovo sigurno i $\mathbf{P}[(H \cdot S)_{\tau_{n-1}} > 0] > 0$. U ovom slučaju primjenjujemo induktivnu hipotezu te je time tvrdnja leme dokazana principom matematičke indukcije. □

Vratimo se sada na pitanje možemo li u sadašnjem općenitijem okruženju pokazati verziju teorema analognu Teoremu 2.2.3 (FTAP). Odgovor je ne, tj. barem za ovako definiran no-arbitrage uvjet. Stvari su u ovom slučaju zahtjevnije te uvjet (NA^{simple}) iz Definicije 3.1.5. nije dovoljno jak kako bi implicirao postojanje ekvivalentne lokalne martingalne mjere, te stoga imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.1.3. *Uvjet (EMM) postojanja ekvivalentne lokalne martignalne mjere implicira no-arbitrage uvjet (NA^{simple}) s obzirom na jednostavne integrande, no obratna implikacija ne vrijedi*

Dokaz. $(EMM) \Rightarrow (NA^{simple})$: Ova implikacija je direktna posljedica Leme 3.1.1. uz opasku da kada bi imali da uvjet (NA^{simple}) nije zadovoljen, tj. tada bi vrijedilo da je skup $K^{simple} \cap L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \neq \{0\}$, tj. onda bi imali da postoji nenegativna funkcija $f \in K^{simple} \cap L^{\infty}_{+}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tj. $f \geq 0$ koja gotovo sigurno ne iščezava, no to bi onda uz činjenicu da je $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ impliciralo da je $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f] > 0$.

$(NA^{simple}) \not\Rightarrow (EMM)$: Da bi pokazali kako obratna implikacija ne vrijedi dat ćemo protuprimjer za koji ćemo onda prvo pokazati da ne postoji ekvivalentna (lokalna) martingalna mjera, a onda da zaista zadovoljava no-arbitrage uvjet (NA^{simple}).

Zadajemo beskonačnu slučajnu šetnju na sljedeći način. Neka je $t_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ te definiramo proces S s vrijednostima u $\mathbb{R}$ na način da je početna vrijednost $S_0 = 1$ i proces je konstantan osim u trenutcima t_n kad dolazi do skokova koji su definirani sa

$$\Delta S_{t_n} = 3^{-n}\epsilon_n, \ n \geq 1,$$

gdje su $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti $+1$ i -1 s vjerojatnostima

$$\mathbf{P}[\epsilon_n = 1] = \frac{1+\alpha_n}{2}, \ \mathbf{P}[\epsilon_n = -1] = \frac{1-\alpha_n}{2},$$

gdje je $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ niz koji će biti specificiran uskoro, a poprima vrijednosti u $\langle -1, +1 \rangle$.

Time smo definirali ograničen proces S za koji postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbf{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}))$, u odnosu na koju je proces S martingal s obzirom na svoju (procesom generiranu) filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Ta mjera je dana sa

$$\mathbf{Q}[\epsilon_n = 1] = \mathbf{Q}[\epsilon_n = -1] = \frac{1}{2},$$

te su slučajne varijable $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ nezavisne u odnosu na $\mathbf{Q}$. Prisjetimo se da smo često spominjali da je martingal zapravo model za poštenu igru te upravu u tome leži intuitivno objašnjenje za $\mathbf{Q}$, tj. kada pređemo na $\mathbf{Q}$ proces ”skače gore” i ”skače dolje” s jednakim vjerojatnostima.

Iz jednog od Kakutanijevih rezultata (vidi [10]) sada znamo da je $\mathbf{Q}$ ili ekvivalentna $\mathbf{P}$ (tj. slažu se oko skupova mjere 0), ili su $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{P}$ međusobno singularne (tj. poprimaju vrijednost 0 na različitim disjunktnim skupovima), što ovisi o tome vrijedi li $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ ili ne.

Uzmemo li npr. da je $\alpha_n = \frac{1}{2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada smo konstruirali proces S na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ za koji ne postoji ekvivalentna (lokalna) martingalna mjera $\mathbf{Q}$. Preostaje nam pokazati da slijedeći jednostavne strategije trgovanja prilike za arbitražu ne postoje za proces S, tj. da proces S zadovoljava uvjet (NA^{simple}).

Iz Leme 5.1.5. znamo da je navedeni uvjet dovoljno provjeriti za strategija oblika $H = h\mathbf{1}_{\langle\sigma_1,\sigma_2]}$. Slijedeći takvu strategiju dobitak/gubitak je jednak $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})$ te je h $\mathcal{F}_{\sigma_1}$-izmjeriva. Pretpostavimo sada da je $(H \cdot S)_\infty \geq 0$. Pošto nas zanima samo predznak dobitka/gubitka, točnije hoćemo li dobiti pozitivan dobitak pa možemo zamijeniti h sa $sign(h)$. Iz izbora faktora 3^{-n} također nam slijedi da su izraz $S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}$ i ϵ_n jednakog predznaka na skupu $\{\sigma_1 = 1 - \frac{1}{n}\} \cap \{\sigma_2 \geq 1 - \frac{1}{n+1}\}$, što je i intuitivno jasno formuliramo li to riječima, tj. da ukoliko je skok pozitivan tada je i razlika vrijednosti procesa pozitivna. Sada dobivamo da je predznak od $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})$ na tom istom skupu jednak predznaku od $h\epsilon_n$. Nezavisnost ϵ_n-a od $\mathcal{F}_{1-\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_{t_n - 1}$ (iz ovog drugog zapisa se vidi zašto su nezavisni) nam tada daje da je $h = 0$ na skupu $\{\sigma_1 = 1 - \frac{1}{n}\} \cap \{\sigma_2 \geq 1 - \frac{1}{n+1}\}$. Sve ove činjenice nam sada daju da je $h(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1}) = 0$ gotovo sigurno, tj. da je (NA^{simple}) zadovoljen.

Time smo našli proces S koji zadovoljava (NA^{simple}), ali ne i (EMM) te je tvrdnja propozicije pokazana. □

Ovim kontraprimjerom smo pokazali da je uvjet (NA^{simple}) iz Definicije 3.1.5 preslab, tj. da je nizom precizno odmjerenih ulaganja (t.d. je $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \infty$) možemo "proizvesti nešto poput arbitraže", dok s konačnim brojem ulaganja (kakva su formalizirana u Definiciji 3.1.1.) to ne možemo učiniti.

Naš cilj je sada matematički precizno opisati ovaj koncept, dati uvjet jači od (NA^{simple}), uz koji se nadamo da ćemo dobiti ekvivalenciju analognu onu iz FTAP teorema. Za to će nam trebati pojmovi i rezultati iz funkcionalna analize koji su dani u Poglavlju 1. Općenito je važno naglasiti da se korištenjem funkcionalne analize u svrhe financijske matematike otvaraju novi horizonti kao što ćemo uostalom uskoro i vidjeti.

3.2 No Free Lunch i Kreps-Yanov teorem

Najvažniji korak u tom smjeru učinio je David Kreps koji je shvatio da no-arbitrage uvjet u odnosu na jednostavne integrande treba nadograditi topološkim aspektom te se u ovoj sekciji služimo rezultatima pokazanim u njegovom izvornom radu [2], kao i onima iz osvrta na taj rad [7].

Kao što smo vidjeli na kraju prošlog odjeljka ukoliko "dovoljno dobro i uporno" ulažemo možemo "proizvesti nešto poput arbitraže". Ovaj dosta neformalni koncept Kreps je formalizirao u vidu sljedećeg generaliziranog asimptotskog oblika arbitraže.

Definicija 3.2.1. *[2] Kažemo da proces S dopušta free lunch, ukoliko postoji slučajna varijabla $g_0 \in L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ takva da je $g_0 \neq 0$ i hipernizovi $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ i $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ takvi da je $f_\alpha = (H^\alpha \cdot S)_\infty$ za neku dopustivu jednostavnu strategiju trgovanja H^α, $(f_\alpha) \leq (g_\alpha)$ te vrijedi $\lim_{\alpha \in I} g_\alpha = g_0$, s tim da konvergencija vrijedi u *-slaboj topologiji na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.*

Ekonomska interpretacija je sljedeća:

Prvo se prisjetimo da bi prilika za arbitražu bila postojanje strategije trgovanja H takve da gotovo sigurno vrijedi $(H^\alpha \cdot S)_\infty \geq 0$ i da vrijedi $\mathbf{P}[(H^\alpha \cdot S)_\infty > 0] > 0$.

S druge strane, free lunch je postojanje financijske izvedenice $g_0 \geq 0$, takve da je $g_0 \neq 0$ koja generalno ne može bit napisana u obliku (ili dominirana od strane) stohastičkog integrala $(H^\alpha \cdot S)_\infty$ u odnosu na jednostavne dopustive strategije. Ono što vrijedi, je da postoje financijske izvedenice g_α koje su "blizu g_0" te koje mogu biti postignute slijedeći strategiju trgovanja H^α te potom "bacanjem novca" u iznosu $f_\alpha - g_\alpha$.

Ova razlika je od važnosti pri dostizanju našeg cilja, tj. anologona FTAP teorema. Sada, uzevši u obzir koncept free lunch-a te prije definiranih no-arbitrage uvjeta definiramo novi uvjet koji ne dopušta zaradu "nečega iz ničega".

Definicija 3.2.2. *Kažemo da S zadovoljava uvjet no free lunch (NFL) ako zatvarač $\overline{C}$ skupa C^{simple}, uzet s obzirom na *-slabu topologiju na $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ zadovoljava*

$$\overline{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{0\}.$$

Pojačavši no-arbitrage uvjet spremni smo pokazati sljedeću verziju FTAP teorema.

Teorem 3.2.1. ***(Kreps-Yanov teorem).[2]*** *Lokalno ograničen stohastički proces S zadovoljava no free lunch uvjet (NFL) ako i samo ako je zadovoljen uvjet (EMM) postojanja ekvivalentne lokalne martingalne mjere:*

$$(NFL) \iff (EMM)$$

Dokaz. $(EMM) \Rightarrow (NFL)$: Iz jedne verzije Leme 3.1.1. za svaki $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ i $f \in C^{simple}$ slijedi $\mathbf{E_Q}[f] \leq 0$. Ta nejednakost vrijedi i na *-slabom zatvaraču $\overline{C}$ pošto je $f \mapsto \mathbf{E_Q}[f]$ *-slabi neprekidni funkcional. Kada bi pak imali da vrijedi (EMM) i da ne vrijedi (NFL) postojali bi $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ i $f \in \overline{C}$ takav da vrijedi da je $f \geq 0$ i da gotovo sigurno ne iščezava.

Stoga bi vrijedilo $\mathbf{E_Q}[f] > 0$, što je pak kontradikcija.

$(NFL) \Rightarrow (EMM)$ Dokaz ove inkluzije slijedi istu logiku kao i u konačnom slučaju, no moramo ga unaprijediti. Podijeliti ćemo ga na dva koraka:

Korak 1 (*Hahn-Banach*): Želimo pokazati tvrdnju da za fiksirani $f \in L^\infty_+$ takav da je $f \not\equiv 0$ postoji $g \in L^1_+$ koji je gledan kao linearni funkcional na L^∞ manji ili jednak nuli na $\overline{C}$ te vrijedi $(f, g) > 0$.

Kako bi pokazali navedenu tvrdnju primijenjujemo teorem o separaciji (npr. Teorem 1.3.1.) na σ^*-zatvoren konveksni skup $\overline{C}$ i kompaktan skup $\{f\}$ kako bi našli $g \in L^1$ i $\alpha < \beta$ takve da vrijedi $g\big|_{\overline{C}} \leq \alpha$ i $(f, g) > \beta$. Pošto znamo da je $0 \in C$ te da g slika nulu u nulu, iz toga nam slijedi da je $\alpha \geq 0$. Pošto je $\overline{C}$ konus, imamo da je g jednak nuli ili negativan na $\overline{C}$. Također, g je nenegativan na L^∞_+, tj. zbog dualnosti prostora $g \in L^1_+$. Sada iz pretpostavke imamo $\alpha < \beta$ i $(f, g) > \beta$ te smo pokazali $\alpha \geq 0$ te nam iz toga sada slijedi da je $(f, g) > 0$ te smo pokazali željenu tvrdnju.

Korak 2 (*Exhaustion*): Označimo prvo sa $\mathcal{G}$ skup svih $g \in L^1_+$ takvih da je $g \leq 0$ na C. Iz Koraka 1 vidimo da je $\mathcal{G}$ neprazan.

Neka je sada $\mathcal{S}$ familija podskupova od Ω koja se sastoji od nosača $\{g > 0\}$, gdje je $g \in \mathcal{G}$. Važno je primjetiti da je $\mathcal{S}$ zatvoren na prebrojive unije pošto za niz $(g_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{G}$ možemo naći strogo pozitivne skalare $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ takve da je $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n g_n \in \mathcal{G}$. Stoga postoji $g_0 \in \mathcal{G}$ takav da za skup $\{g_0 > 0\}$ imamo

$$\mathbf{P}[\{g_0 > 0\}] = \sup\Big\{\mathbf{P}[\{g_0 > 0\}] \;\Big|\; g \in \mathcal{G}\Big\}.$$

Sada tvrdimo da je $\mathbf{P}[\{g_0 > 0\}] = 1$, što zapravo pokazuje da je g_0 gotovo sigurno strogo pozitivan. Ukoliko bi vrijedilo $\mathbf{P}[\{g_0 > 0\}] < 1$, tada bi mogli primjeniti Korak 1 na $f = \chi_{\{g_0=0\}}$ kako bi našli $g_1 \in \mathcal{G}$ tako da vrijedi

$$\mathbf{E}[fg_1] = \langle f, g_1\rangle = \int_{\{g_0=0\}} g_1(\omega) d\mathbf{P}(\omega) > 0.$$

Onda bi imali da je $g_0 + g_1$ element od $\mathcal{G}$ čiji je nosač $\mathbf{P}$-mjere strogo veće nego $\mathbf{P}[\{g_0 > 0\}]$, što je onda u kontradikciji s odabirom g_0.

Sada normaliziramo g_0 tako da imamo $||g_0||_1 = 1$ i neka je $\mathbf{Q}$ mjera na $\mathcal{F}$ s Radon-Nikodým-ovom derivacijom $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = g_0$. Iz Leme 3.1.1. sada zaključujemo da je $\mathbf{Q}$ lokalna martingalna mjera za S, tj. $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$. Time smo pokazali tvrdnju teorema. $\square$

Ovime smo pokazali ekvivalenciju nekog oblika no-arbitrage uvjeta i postojanja ekvivalentne martingalne mjere u neprekidnom slučaju. Treba naglasiti da je ovo samo korak (iako ne malen) u razvijanju daljnje teorije pošto smo radili s jednostavnim integrandima. Već smo dali ekonomsku interpretaciju free lunch-a koju bismo rado još bolje razradili te se pitamo postoji li bolja i opširnija interpretacija tog pojma i pokazanog rezultata. Bolja interpretacija bi postojala kada bi umjesto hiperniza $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ mogli preći na niz $(g_n)_{n=0}^\infty$.

Što se tiče toga je li zaista potrebno dopustiti "bacanje novca", tj. preći s K^{simple} na C^{simple}, odgovor je pozitivan te se svodi na neprekidnost procesa S, no dokaz ove tvrdnje je malo izvan dosega ovog rada.

Pokušajmo sada odgovoriti na sljedeća dva povezana pitanja:

a) Je li moguće zamijeniti hiperniz $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ nizom $(g_n)_{n=0}^\infty$?

b) Možemo li izabrati hiperniz$(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ (ili možda čak niz $(g_n)_{n=0}^\infty$) takav da $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ ostane ograničen u $L^\infty(\mathbf{P})$ (ili barem da negativni djelovi $((g_\alpha)_-)_{\alpha\in I}$ ostanu ograničeni)?

Drugo pitanje je bitno zato što nas zanima možemo li aproksimirati željenu financijsku izvedenicu s obzirom na konačno ulaganje, tj. ne možemo zauvijek ulagati novce.

Odgovor na oba pitanja je negativan i uzrokovan je boljkama operacije uzimanja *-slabog zatvarača. Ovom prilikom poslužit ćemo se primjerom iz Banachove originalne knjige [1].

Neka je X separabilan Banachov prostor takav da za svaki fiksirani broj $n \geq 1$ postoji konveksan konus C u dualnom prostoru X^* takav da vrijedi $C \subsetneq C^{(1)} \subsetneq C^{(2)} \subsetneq \ldots \subsetneq C^{(n)} = C^{(n+1)} = \overline{C}$, gdje je sa $C^{(k)}$ označen sekvencijalni *-slaba zatvarač od $C^{(k-1)}$, tj. limese *-slabih konvergentnih nizova $(x_n)_{n=0}^\infty$, gdje su $x_i \in C^{(k-1)}$ i $\overline{C}$ označava *-slabi zatvarač od C. Ono što zapravo uočavamo je da uzimajući limese *-slaba konvergentnih nizova u C ne dobivamo *-slabih zatvarač od C odmah, nego proceduru moramo ponoviti n puta dok se taj proces konačno ne stabilizira i dođemo do *-slabog zatvarača $\overline{C}$.

U našem slučaju je $X = L^1(\mathbf{P})$ i $X^* = L^\infty(\mathbf{P})$. Sada je moguće konstruirati semimartingal S takav da pripadajući konveksni konus C^{simple} ima sljedeće svojstvo. Uzimajući *-slabi sekvencijalni zatvarač $(C^{simple})^{(1)}$, rezultirajući skup presijeca $L_+^\infty(\mathbf{P})$ samo u $\{0\}$, no ponavljajući proceduru dva puta dolazimo do *-slabog zatvarača $C^{(2)} = \overline{C}$ takvog da je $\overline{C} \cap L_+^\infty(\mathbf{P}) \neq \{0\}$. Stoga ne možemo prijeći na nizove $(g_n)_{n=0}^\infty$ u definiciji od (NFL).

Sve poteškoće vezane uz *-slaba topologiju uzrokovane su ograničavanjem na jednostavne, dopustive strategije koje su kao takve odabrane jer su definirane bez "prelaženja u limes". Usprkos tome zaključujemo da je Kreps-Yanov teorem nimalo jednostavno proširenje Teorema 2.2.3. (Fundamental theorem of asset pricing) te vrlo važan dio u izgradnji puta do verzije FTAP teorema za skroz općeniti slučaj.

Navedena ograničenja i uz njih vezana *-slaba topologija uskraćuju nam do samih detalja razrađenu ekonomsku interpretaciju koja ipak ne izostaje jednom kada se prijeđe na općenit slučaj, drugu topologiju te se uključi "prelazak u limes".

Bibliografija

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Mongr. Mat., Warszawa 1, 1932.

[2] Kreps. D., *Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinetely many Commodities*, **8** (1981), 15–35.

[3] F. Dalbaen i W. Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Finance, 2006.

[4] J.L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.

[5] W. Rudin, *Functional Analysis*, sv. 2, McGraw-Hill, Inc., 1991.

[6] W. Schachermayer, *Martingale Measures for Discrete time Processes with Infinite Horizon*, **4** (1994), 35–56.

[7] ______, *No-Arbitrage: On the Work of David Kreps*, **6** (2002), 359–368.

[8] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, sv. 2, Springer, 1999.

[9] S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

[10] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.

Sažetak

U ovom radu razvili smo model financijskog tržišta te pokazali Kreps-Yanov teorem. Taj teorem zapravo je analogon teorema poznatog kao Fundamental theorem of asset pricing. U prvom poglavlju smo objasnili ekonomske interpretacije matematičkih pojmova koje ćemo koristiti te iskazali neke pretpostavke koje moraju biti zadovoljene. Također smo iskazali neke rezultate iz funkcionalne analize koja je igrala važnu ulogu u ovom radu. U drugom poglavlju smo definirali model tržišta u konačnom slučaju te na istom proveli proces diskontiranja kako bismo dobili diskontirani model tržišta. Nakon toga fokus smo preselili na matematički preciznu definiciju no-arbitrage uvjeta i ekvivalentne martingalne mjere. Kada smo precizno definirali potrebne pojmove dokazali smo Fundamental theorem of asset pricing te pokazali što možemo reći o cijenama financijske imovine koristeći no-arbitrage teoriju. U trećem poglavlju smo na prikladan način model proširili na neprekidan slučaj te uz dodatak topološkog aspekta definirali free lunch i pokazali Kreps-Yanov teorem.

Summary

In this study we developed model of financial market and proved Kreps-Yan theorem. This theorem is in fact analogue of Fundamental theorem of asset pricing. In first chapter we explained economic interpretations of mathematical terms which we are using later and stated assumptions that must be satisfied. We also stated several results from functional analysis which played big role in this study. In second chapter we defined market model in discrete case and then obtained model of financial market in discounted terms. After that we focused on mathematically precise definition of no-arbitrage condition and equivalent martingale measure. Once we did so, we proved Fundamental theorem of asset pricing and saw what can we tell about prices of financial instruments using no-arbitrage theory. In third chapter we extended our model in appropriate way in order to capture continuous case and then with the addition of topological notion we defined free lunch and proved Kreps-Yan theorem.

Životopis

Rođen sam 18. studenog 1993. godine u Zagrebu, gdje sam pohađao OŠ Jordanovac. Nakon osnovne škole, 2008. upisujem XV. gimnaziju, koju završavam 2012. godine. Iste godine sam upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na matematičkom odjseku PMF-a u Zagrebu. Preddiplomski studij završio sam 2016. godine, te sam iste godine također na matematičkom odsjeku PMF-a upisao diplomski studij Financijska i poslovna matematika. Ljetni semestar 2018. godine položio sam u sklopu studentske razmjene na sveučilištu University of Vienna u Beču.