Stabilni populacijski modeli

Svržnjak, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Svržnjak

STABILNI POPULACIJSKI MODELI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu cilj je upoznati vas s konceptom stabilnih populacija i pružiti intuitivno razumijevanje svojstava stabilnih populacijskih modela. Stabilni populacijski modeli su teorijski modeli koji imaju široku primjenu od strane demografa. Oni omogućuju prikaz i razumijevanje strukture, rasta i razvoja populacije. Teorijski odnosi između nataliteta, mortaliteta i dobne strukture u stabilnoj populaciji pomažu nam razumijeti rast i strukturu populacije te se mogu koristiti za izradu demografskih procjena kada su empirijski podatci nepotpuni ili loše kvalitete.

Za razumijevanje stabilnih populacijskih modela i njihove primjene potrebno je razumijevanje stabilne populacije. Populacija će postati stabilna ako doživljava konstantne dobno-specifične stope mortaliteta i fertiliteta tijekom dugog vremenskog razdoblja. Kao posljedica, populacija će steći konstantnu stopu rasta te održati konstantnu dobnu strukturu. Dakle, stabilna populacija je populacija s nepromjenjivom dobnom strukturom i konstantnom stopom rasta. Rast koji je konstantan tijekom vremena i proporcionalan veličini populacije u bilo kojem trenutku vremena naziva se eksponencijalan rast te ima dobro definirana matematička svojstva. Stabilne populacije imaju eksponencijalnu stopu rasta koja se formalno naziva intrinzična stopa prirodnog rasta ili stopa rasta stabilne populacije. Zbog kratkoće, u daljnjem tekstu jednostavno ćemo je nazivati stopa rasta. Pozitivna stopa rasta ($r > 0$) ukazuje na stalan rast broja stanovnika stabilne populacije, dok negativna stopa rasta ($r < 0$) implicira stalan pad broja stanovnika. Konstantnost dobne strukture stabilne populacije ukazuje na to da se udio stanovništva u svakoj dobnoj skupini ne mijenja tijekom vremena. Ukupna veličina populacije se može promijeniti, rasti ili se smanjiti, ali broj stanovnika u svakoj dobnoj skupini se mijenja po točno istoj stopi.

Iako se stabilni populacijski modeli primjenjuju i u današnje vrijeme, teorija stabilnih populacijskih modela prvi puta se javlja u 18. stoljeću. Leonhard Euler (1707. - 1783.) bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom koji je na tragu definiranja stabilne populacije uveo pojam nepromjenjive dobne strukture. Godine 1760. objavio je rad koji je preteča teorije stabilne populacije. U tom je radu opisao poveznicu između populacije s eksponencijalnim rastom i dobne strukture populacije. Euler je u svoju analizu uključio niz problema koji su pokazivali korisnost teorije u vidu popunjavanja nepotpunih informacija o populaciji, unatoč tome, njegov je rad bio teorijske prirode. Veza između stabilne teorije i stvarnih populacija je u velikoj mjeri otkrivena od strane američkog matematičara, kemičara i statističara Alfreda J. Lotke (1907. - 1922.). Lotka je proučavao dinamiku dobne strukture populacije bez znanja o Eulerovom radu na istom predmetu. Njegove pretpostavke i otkrića bit će prikazana u prvom poglavlju ovog rada. Iako se Lotkina otkrića danas često primjenjuju, ona su bila predmetom kritike od strane matematičara sve do pojave strogih matematičkih dokaza, 1941. godine, od strane hrvatskog matematičara Williama Fellera (1906. - 1970.). Širu je primjenu teorija stabilnih populacijskih modela doživjela kada je američki demograf Ansley Johnson Coale (1917. - 2002.) predstavio jednostavniju metodu računanja stope rasta. Danas su poznate razne aproksimativne formule te načini za izračunavanje demografskih značajki stabilnih populacija. Mnoge su metode primjenjive ne samo na stabilne populacije već i na one koje to nisu. Svjetske organizacije kao što su Ujedinjeni narodi te mnoge druge često koriste stabilni populacijski model za buduća predviđanja koja im koriste u daljnjem radu organizacije.

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada bit će objašnjeno na koji je način Lotka proučavao stabilni populacijski model te koje je zakonitosti tog modela uočio. Proučavajući Lotkin model bit će prikazane jednadžbe koje su karakteristične za stabilni populacijski model te određene promjene koje se događaju u stabilnoj populaciji pri promjeni osnovnih svojstava iz kojih proizlazi. Drugo poglavlje donosi razne aproksimativne formule i načine za izračunavanje osnovnih svojstava stabilne populacije te prikazuje na koji se način predviđaju buduće demografske značajke populacija pomoću stabilnog populacijskog modela. Treće, a ujedno i zadnje poglavlje prikazuje bliska i daleka predviđanja, objavljena od strane Ujedinjenih naroda. Pri predviđanju budućih demografskih značajki Ujedinjeni narodi koriste razne demografske modele koji uključuju i stabilni populacijski model kao i razne matematičke metode indirektne procjene demografskih značajki. Predviđanja koja će biti obrađena u ovom radu obuhvaćaju predviđanja cjelokupne svjetske populacije, nekih velikih svjetskih regija te populacije Hrvatske.

Poglavlje 1

Teorija stabilne populacije

1.1 Lotkina integralna formula

Lotka je proučavajući dinamiku dobne strukture populacije u određenim uvjetima primijetio da će se stabilna populacija pojaviti ako su na duži vremenski period ispunjena sljedeća tri uvjeta:

1. Godišnja stopa rasta je konstantna,
2. Dobno-specifične stope mortaliteta su konstantne,
3. Dobno-specifične stope neto migracija jednake su nuli.

Kako bi populacija bila stabilna u svim dijelovima dobne strukture, ovi uvjeti moraju biti ispunjeni u razdoblju dugom kao maksimalan životni vijek.

U jednom od najvažnijih razvoja u demografiji, Lotka je pokazao da će stabilna populacija biti prouzrokovana nekim drugim skupom uvjeta. Pokazao je da održavajući konstantnost dobno-specifičnih stopa fertiliteta u kombinaciji s uvjetima 2 i 3 s vremenom dolazi do konstantne godišnje stope rasta. Ustvari, pokazao je da gore spomenute uvjete možemo zamijeniti na sljedeći način:

1. Dobno-specifične stope fertiliteta su konstantne,
2. Dobno-specifične stope mortaliteta su konstantne,
3. Dobno-specifične stope neto migracija jednake su nuli.

Imajmo na umu da je Lotka promatrao populaciju s jednim spolom i nije izričito uključio drugi spol u reprodukciju. Mi ćemo u ovom radu promatrati populaciju žena.

Analogna razmatranja se mogu provesti za populaciju muškaraca. Neka je:

$$B(t)dt$$

broj žena rođenih u malom vremenskom intervalu $[t, t + dt]$, te neka je:

$$N(a, t)da$$

broj žena u dobi od a do $a + da$ u vremenu t. Označimo još s $p(a)$ vjerojatnost da jedinka preživi od nulte do a-te godine, te s $m(a)da$ prosječni broj ženskih potomaka koje rodi žena u dobi između a i da. Daljnje razmatranje radimo uz pretpostavku da su funkcije $p(a)$ i $m(a)$ poznate te glatke.

Broj rođenih žena $B(t)$ ovisi o odnosu dobi a i vremenu t. Razlikujemo dva slučaja:

1. Slučaj: $a > t$

Žene koje u početnom vremenu 0 imaju dob $a - t$ će nakon t godina biti dobi a.
Neke od ovih žena će preživjeti od dobi $a - t$ do a, s vjerojatnošću:

$$\frac{p(a)}{p(a-t)}$$

Prema tome, broj žena dobi a u trenutku t u ovom slučaju je:

$$N(a-t, 0)\frac{p(a)}{p(a-t)}$$

2. Slučaj: $t > a$

Žene koje su rođene u vremenu $t - a$ će preživjeti do dobi a s vjerojatnošću $p(a)$. Prema tome, broj žena dobi a u trenutku t u ovom slučaju je:

$$B(t-a)p(a)$$

Dakle, imamo:

$$N(a, t) = \begin{cases} B(t-a)p(a), & \text{za } a < t \\ N(a-t, 0)\frac{p(a)}{p(a-t)}, & \text{za } a > t. \end{cases}$$

Pomnožimo li krajnji izraz s $m(a)$ te integriramo po svim godinama, dobivamo sljedeći izraz za broj rođenih žena u vremenu t:

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^\infty N(a, t)m(a)da \\ &= \int_0^t N(a, t)m(a)da + \int_t^\infty N(a, t)m(a)da \\ &= \int_0^t B(t-a)p(a)m(a)da + \int_t^\infty N(a-t, 0)\frac{p(a)}{p(a-t)}m(a)da. \end{aligned}$$

Za $a \in [t, \infty\rangle$ supstituiramo $a - t$ s a te dobivamo:

$$B(t) = \int_0^t B(t-a)p(a)m(a)da + \int_t^\infty N(a,0)\frac{p(a+t)}{p(a)}m(a+t)da \tag{1.1}$$

Označimo li s:

$$G(t) = \int_t^\infty N(a,0)\frac{p(a+t)}{p(a)}m(a+t)da$$

tada 1.1 možemo zapisati kao:

$$B(t) = \int_0^t B(t-a)p(a)m(a)da + G(t) \tag{1.2}$$

što je poznato kao osnovni Lotkin jednospolni deterministički populacijski model.

Primijetimo da iz ovih razmatranja izgleda kao da ova formula vrijedi za sve populacije općenito. No imajmo na umu da smo pretpostavili glatkoću funkcija $m(a)$ i $p(a)$ te njihovu konstantnost, u smislu da funkcije $m(a)$ i $p(a)$ ne ovise o vremenu t u kojem se promatraju nego samo o dobi. Dakle, iako se može činiti drugačije, ova formula vrijedi isključivo u ovom slučaju.

Ako s α označimo minimalnu dob kada žena može roditi, a s β maksimalnu, tada je $m(a) = 0$ izvan intervala $[\alpha,\beta]$. Nadalje, primjetimo da je $G(t) = 0$ za $t > \beta$ jer niti jedna žena živa u vremenu $t = 0$ neće moći roditi nakon vremena β. Sada jednadžbu 1.2 možemo zapisati kao:

$$B(t) = \int_\alpha^\beta B(t-a)p(a)m(a)da \tag{1.3}$$

Preostaje nam pitanje pronalaska funkcije $B(t)$. Integralnu jednadžbu, kao što je 1.3, možemo riješiti metodom pokušaja i pogrešaka. Jednadžba je riješena kada nađemo funkciju $B(t)$ takavu da supstitucijom u jednadžbu uspijemo izjednačiti lijevu i desnu stranu. Lotka je pokazao da je fukncija

$$B(t) = Be^{rt} \tag{1.4}$$

rješenje jednadžbe 1.3, pri čemu je B broj jedinki u populaciju u vremenu $t = 0$. Supstitucijom 1.4 u 1.3 dobivamo:

$$Be^{rt} = \int_\alpha^\beta Be^{r(t-a)}p(a)m(a)da$$

Dijeljenjem obje strane izrazom Be^{rt} slijedi:

$$1 = \int_\alpha^\beta e^{-ra}p(a)m(a)da \tag{1.5}$$

što je poznato kao Euler-Lotkina karakteristična jednadžba.

Vidimo da je u stabilnoj populaciji formula broja rođenih opisana eksponencijalnom funkcijom. Populacije koje imaju eksponencijalni rast spadaju u tako zvani Malthusov model. Dakle, stabilni populacijski model je samo jedan slučaj Malthusovog modela. Iako je ovo jedan od najjednostavnijih matematičkih modela rasta populacije, iz njega proizlaze mnoge primjene na stvarne populacije te ne tako jednostavne formule za procjenu budućih demografskih parametara populacija.

Parametar r u Euler-Lotkinoj karakterističnoj jednadžbi naziva se stopa rasta populacije, a sljedeći teorem nam pokazuje njegovu jedinstvenost.

Teorem 1.1.1. *Euler-Lotkina karakteristična jednadžba ima točno jedno realno rješenje.*

Dokaz. Promotrimo funkciju

$$y(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a)da$$

Primijetimo da $y(r) \longrightarrow \infty$ kada $r \longrightarrow -\infty$, te $y(r) \longrightarrow 0$ kada $r \longrightarrow \infty$. Također, primijetimo da su $m(a), p(a)$ i e^{-ra} pozitivne funkcije za $a \in [\alpha, \beta]$. Dakle, $y'(r) < 0$ te $y''(r) > 0$. Iz čega slijedi da je $y(r)$ pozitivna, strogo padajuća, neprekidna, konveksna funkcija parametra r, te postiže vrijednost $y(r) = 1$ samo jedanput. $\square$

Lotka je razvio stabilni populacijski model pretpostavljajući da su dobno-specifične stope neto migracija jednake nuli u svim dobnim skupinama ili da je populacija zatvorena na migracije. Zapravo, ovo je nepotrebna pretpostavka. Populacija bi također bila stabilna kada bi dobno-specifične stope neto migracija bile konstantne tijekom vremena. Kako bismo ovo vidjeli, potrebno je samo primijetiti da $p(a)$ predstavlja proporciju po kojoj se veličina populacije mijenja između rođenja i dobi a. Ta veličina bi mogla biti proširena tako da obuhvati efekt migracija kao i mortalitet. Kada bi stope neto migracija i mortaliteta bile konstantne, proširena veličina $p(a)$ bi također bila konstantna i populacija bi se s vremenom stabilizirala.

1.2 Jednadžbe koje karakteriziraju stabilnu populaciju

Kao što smo upravo vidjeli, funkcija broja rođenih u trenutku t u stabilnoj populaciji ima oblik: $B(t) = Be^{rt}$. Pri čemu je vrijednost parametra r vrijednost koja uz dane funkcije $m(a)$ i $p(a)$ zadovoljava jednadžbu 1.5. Broj osoba dobi a u trenutku t bit će jednak broju rođenih $t - a$ godina prije puta vjerojatnost doživljenja a godina: $N(a, t) = B(t - a)p(a)$. Iz te dvije formule slijedi:

$$\begin{aligned} N(a,t) &= Be^{r(t-a)}p(a) = Be^{rt}e^{-ra}p(a) \\ &= B(t)e^{-ra}p(a) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Integriramo li obje strane 1.6 integralom od 0 do w, pri čemu je w maksimalan broj godina koji jedinka u populaciji može doživjeti, dobivamo:

$$\int_0^w N(a,t)da = B(t)\int_0^w e^{-ra}p(a)da$$

iz čega sređivanjem slijedi:

$$\frac{B(t)}{\int_0^w N(a,t)da} = \frac{B(t)}{N(t)} = b(t) = \frac{1}{\int_0^w e^{-ra}p(a)da} = b \tag{1.7}$$

pri čemu je $N(t)$ ukupan broj žena u populaciji u trenutku t. Jednadžba 1.7 je konstantna tijekom vremena te predstavlja stopu nataliteta stabilne populacije, b, u terminima stope rasta i doživljenja populacije.

Polazeći ponovno od jednadžbe 1.6, dijeleći obje strane s $N(t)$, dolazimo do izraza za dobnu strukturu stanovništva, $c(a,t)$:

$$\begin{aligned} c(a,t) &= \frac{N(a,t)}{N(t)} = \frac{B(t)}{N(t)}e^{-ra}p(a) \\ &= be^{-ra}p(a) = c(a) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Primjećujemo da je dobna struktura stanovništva također konstantna. Dakle, računanje stope nataliteta i dobne strukture stabilne populacije vrlo je jednostavno te se jednom izračunati parametri ne mijenjaju tijekom vremena. Zbog svoje jednostavnosti ali i primjenjivosti stabilni populacijski model je vrlo korišten od strane demografa.

Kako bismo povezali ove izraze sa stopom fertiliteta, množimo obje strane jednadžbe 1.8 s $m(a)$ te integriramo tijekom godina kada žena ima mogućnost roditi dijete, od α do β. Poslije ovih operacija, desna strana postaje stopa nataliteta populacije $\int_\alpha^\beta c(a)m(a)da$, koja se poništava s b na lijevoj strani te dobivamo:

$$\int_\alpha^\beta e^{-ra}p(a)m(a)da = 1$$

Ova jednadžba predstavlja jednadžbu 1.5, ali potječe iz razmatranja o dobnoj strukturi stanovništva. Dakle, Euler-Lotkina karakteristična jednadžba se pojavljuje promatranjem broja rođenih ili dobne strukture populacije s eksponencijalnim rastom uz određene uvjete.

Osim jednadžbi koje karakteriziraju stabilnu populaciju, valja napomenuti još jedno važno svojstvo populacija. Populacije „zaboravljaju" svoju prošlost, svojstvo poznato pod imenom ergodičnost; one u potpunosti preuzimaju značajke vitalnih stopa kojima su bile izložene. Svojstvo ergodičnosti je svojstvo karakteristično za sve populacije, neovisno o njihovim demografskim značajkama.

Primijetimo da dobna struktura, stopa rođenih, stopa mortaliteta i stopa rasta stabilne populacije u potpunosti ovise o funkcijama $m(a)$ i $p(a)$. Uzevši u obzir svojstvo ergodičnosti, kada bismo primjenjivali iste funkcije doživljenja ($p(a)$) i fertiliteta ($m(a)$) na dvije zemlje različitih demografskih značajki, demografske značajke tih dviju populacija bi s vremenom postale jednake (izuzevši veličinu populacija). Iz prethodno pokazanog vidimo da bi te dvije zemlje različitih demografskih značajki poprimile svojstva iste stabilne populacije. Štoviše, Alvaro Lopez je 1961. dokazao da se svojstvo ergodičnosti može primijeniti čak i kada funkcije doživljenja i fertiliteta nisu konstante tijekom vremena. Dvije zemlje različitih demografskih značajki bi s vremenom imale istu dobnu strukturu čak i da su na njih primijenjene mijenjajuće vitalne stope, dok god se na obje zemlje primjenjuju iste.

Prirodno nam se nameć e sljedeće pitanje: koliko je vremena potrebno da populacija postane stabilna ako konstantno primjenjujemo iste dobno-specifične stope mortaliteta i fertiliteta? Odgovor na to pitanje ovisi o tome koliku preciznost analitičar zahtjeva te o razlici između dobne strukture populacije na koju se primjenjuju te dobne strukture populacije koja će proizaći primjenom. Što je veća razlika, potrebno je više vremena da se postigne stabilnost. Ako je razlika jako velika, te primjena zahtjeva veliku točnost, postizanje stabilnosti bi moglo potrajati dulje od stoljeća. Za većinu praktičnih primjena, period od 70 godina služi kao prikladno pravilo.

Pogledajmo gore navedena svojstva stabilne populacije na jednom primjeru. Za jednostavniji prikaz svojstava stabilne populacije u primjeru ćemo proučavati ne ljudsku populaciju s maksimalnom životnom dobi od 5 godina.

Primjer. Neka je dana populacija s funkcijom doživljenja prikazanom sljedećom tablicom:

Godine (a)	p(a)
0	1,000
1	0,600
2	0,400
3	0,200
4	0,050
5	0,000

pretpostavimo da funkcija doživljenja ne ovisi o vremenu t to jest da gore prikazana tablica vrijedi za svaki t. Pretpostavimo još da je populacija zatvorena na migracije, da je broj rođenih u populaciji dan formulom 1.4 te da populacija započinje 1. siječnja 2000. s 1000 rođenih jedinki.

Razvoj broja jedinki u populaciji prikazan je sljedećom tablicom:

Godine	1.1.2000.	1.1.2001.	1.1.2002.	1.1.2003.	1.1.2004.	1.1.2005.	1.1.2006.
0	1000	$1000e^r$	$1000e^{2r}$	$1000e^{3r}$	$1000e^{4r}$	$1000e^{5r}$	$1000e^{6r}$
1		600	$600e^r$	$600e^{2r}$	$600e^{3r}$	$600e^{4r}$	$600e^{5r}$
2			400	$400e^r$	$400e^{2r}$	$400e^{3r}$	$400e^{4r}$
3				200	$200e^r$	$200e^{2r}$	$200e^{3r}$
4					50	$50e^r$	$50e^{2r}$
5						0	0

Vrijedi da će 1. siječnja 2001. biti 600 jedinki starih jednu godinu, 1. siječnja 2002. 400 jedinki starih dvije godine i tako dalje. Napredak kohorte rođene 1. siječnja 2000. godine prikazan je krajnje lijevom dijagonalom tablice. Budući da broj rođenih raste po godišnjoj stopi r, znamo da će 1. siječnja 2001. taj broj iznositi $1000e^r$. Prateći tada rođene, 1. siječnja 2002. bit će $1000e^r 0,600$ jednogodišnjaka, 1. siječnja 2003. godine bit će $1000e^r 0,400$ dvogodišnjaka i tako dalje, prateći drugu s lijeva dijagonalu tablice. Nastavljajući, 1. siječnja 2002. godine bit će rođeno $1000e^{2r}$ jedinki i njihov životni napredak pratimo putem treće dijagonale s lijeva. I tako dalje.

Usporedimo li broj jedinki iste dobi 1. siječnja 2005. i 1. siječnja 2006. godine. U svakoj dobi 2006. godine ima više jedinki nego 2005., za faktor e^r. Te dvije dobne distribucije su proporcionalne jedna s drugom. Ovo ukazuje na istu dobnu strukturu populacije u 2005. kao i u 2006. godini. Očito je da dok god broj rođenih nastavi rasti po konstantnoj stopi i dok je god životna tablica konstantna, dobna struktura populacije će također biti konstantna u godinama nakon 2006.

Budući da broj rođenih raste po godišnjoj stopi koja iznosi r, nakon 2005. godine cijela populacija raste po istoj toj stopi. Dakle, stopa nataliteta mora biti konstantna poslije 2005. Kako su stopa nataliteta te stopa rasta populacije konstantne, stopa mortaliteta populacije također mora biti konstantna.

Populacija opisana gornjom tablicom je, počinjući od 2005. godine, stabilna populacija. Usprkos činjenici da populacija raste, ona ima konstantnu stopu nataliteta, stopu mortaliteta, stopu rasta i dobnu strukturu. Ovaj skup svojstava će biti zadržan sve do destabilizacije populacije mijenjanjem stope rasta ili pak mijenjanjem mortaliteta ili fertiliteta populacije. Koje su točno poljedice mjenjanja ovih demografskih značajki, na stabilnu populaciju, bit će proučeno u sljedećem odjeljku ovog poglavlja.

Ovim primjerom prikazano je kako iz prvih Lotkinih pretpostavki slijedi da će populacija biti stabilna. Vidjeli smo da održavajući konstantnu stopu rasta, dobno-specifične stope mortaliteta te zatvaranjem populacije na migracije dolazimo do stabilne populacije. Potrebno vrijeme stabilizacije je upravo vrijeme maksimalanog životnog vijeka. Napomenimo samo da je konstantnost dobno-specifičnih stopa mortaliteta jednaka konstantnosti funkcije doživljenja, u smislu neovisnosti o vremenu, budući da se stopa mortaliteta u dobi a može izraziti pomoću funkcije doživljenja. Sličan primjer mogao bi se konstruirati gledajući populaciju s konstantnim dobno-specifičnim fertilitetom, a ne konstantnom stopom rasta. U tom bi primjeru bilo potrebno izračunati stopu rasta populacije poznavajući dobno-specifične stope fertiliteta i mortaliteta što nije uvijek jednostavno. Neke od metoda računanja stope rasta populacije bit će prikazane u drugom poglavlju.

1.3 Efekt promjene mortaliteta i fertiliteta na demografske značajke

Već smo spomenuli da kada bismo konstantno primjenjivali iste dobno-specifične stope mortaliteta i fertiliteta tada bi populacija nakon dužeg vremenskog perioda postala stabilna. Populacija će tada imati konstantnu dobnu strukturu, što znači da jedino promjene u mortalitetu ili fertilitetu mogu dovesti do promjena u dobnoj strukturi populacije.

Osim efekta promjene fertiliteta i mortaliteta možemo postaviti i sljedeće pitanje: koji je utjecaj promjene stope rasta populacije na dobnu strukturu? Ovo pitanje ne može biti odgovoreno zato što je stopa rasta populacije rezultat stope fertiliteta i mortaliteta. Kada bismo promatrali efekt ove promjene trebali bi znati uzrok promjene stope rasta prije nego što bi mogli odgovoriti. Preciznije je gledati stopu rasta i dobnu strukturu populacije kao zajednički produkt fertiliteta i mortaliteta.

Stabilni modeli pružaju informacije o dugoročnim efektima promjene fertiliteta i mortaliteta na dobnu strukturu. Razumijevanje kratkoročnih efekata sasvim je logično i lagano za uočiti. Konstantan porast fertiliteta koji počne u vremenu t ima sljedeći efekt: broj osoba ispod dobi od jedne godine će biti veći u vremenu $t + 1$, broj osoba ispod dobi od dvije godine će biti veći u vremenu $t+2$, i tako dalje. S vremenom, rođeni nakon vremena t počinju i sami rađati te stabilni model postaje vrlo poučan. Dok konstantan pad stope mortaliteta u dobi x u vremenu t ima sljedeći efekt: povećat će se broj osoba dobi x do $x + 1$ u vremenu $t + 1$, zatim broj osoba dobi x do $x + 2$ u vremenu $t + 2$, i tako dalje. Analogno razmatranje možemo primijeniti za uočavanje kratkoročnih efekata smanjenja fertiliteta te porasta mortaliteta.

Stabilan populacijski model je pogodno sredstvo za proučavanje dugoročnog učinka promjena fertiliteta i mortaliteta na dobnu strukturu i druge značajke populacije. Standardni pristup promatranja efekta promjene je uspoređivanje dvije stabilne populacije koje se razlikuju jedna od druge u nekoj specifičnoj značajki fertiliteta ili mortaliteta. Ovako dolazimo do odgovora na pitanje što bi se s vremenom dogodilo stabilnoj populaciji kada bi nastupile promjene u fertilitetu ili mortalitetu. Struktura populacije poslije promjene se promatra nakon što je populacija došla do nove stabilne ravnoteže. Ta se struktura tada uspoređuje sa strukturom stabilne populacije prije promjene dok se dinamika prijelaza na novu ravnotežu zanemaruje.

Efekt promjene mortaliteta

Posljedice promjene u mortalitetu ne mogu biti izražene na jednostavan način zato što one ovise o tome u kojim se dobnim skupinama mortalitet promijenio. Pad dobno-specifične stope mortaliteta u dobi a povisiti će $p(a)$ vrijednost u svim dobnim skupinama iznad a. Promatranjem Euler-Lotkine karakteristične jednadžbe primjećujemo da povećanje vrijednosti $p(a)$ u nekima ili svim dobnim skupinama ispod β mijenja vrijednost integrala. Uz činjenicu da su dobno-specifične stope fertiliteta konstantne. Kako bi povratili jednakost mora doći do povećanja stope rasta. Dakle, kako nam intuicija govori, pad mortaliteta će ubrzati dugoročni populacijski rast.

Postoji, dakako, jedna iznimka. Ako se jedini pad mortaliteta dogodi u dobi iznad β, najveće moguće dob kada žena može roditi, tada neće biti efekta na stopu rasta. Razlog je taj što promjene u mortalitetu iznad najveće dobi u kojoj žena može roditi neće utjecati na godišnji tok rođenja, čija stopa naposljetku određuje stopu rasta stabilne populacije. Dakle, neće biti efekta na Euler-Lotkinu karakterističnu jednadžbu pa tako ni na stopu rasta. Nova populacija će biti veća nego prethodna nakon što se post-reproduktivni mortalitet smanji, ali će s vremenom početi rasti istom konstantnom stopom.

Jednostavan izraz za utjecaj promjene u mortalitetu na stopu rasta možemo dobiti iz sljedeće formule (koja će biti izvedena kao poseban slučaj u drugom poglavlju):

$$r = \frac{ln(p(T)) + ln(R')}{T}$$

pri čemu je T vrijeme u kojem majka rodi svu svoju djecu, uz pretpostavku da je funkcija fertiliteta $m(a)$ svedena na jednu vrijednost jednaku bruto stopi reproduktivnosti, R', u određenoj životnoj dobi, T. Tu formulu možemo napisati i kao:

$$\begin{aligned} r &= \frac{ln(p(T)) + ln(R')}{T} \\ &= \frac{-\int_0^T \nu(a)da + ln(R')}{T} \\ &= -\overline{\nu}(0,T) + \frac{R'}{T} \end{aligned}$$

pri čemu je $\overline{\nu}(0,T)$ prosječna stopa mortaliteta u intervalu od 0 do T, a $\nu(a)$ stopa mortaliteta u dobi a. Napomenimo još da je poveznica između stope mortaliteta u dobi a i vjerojatnosti preživljavanja do a-te dobi dana poznatom demografskom formulom:

$$p(a) = e^{-\int_0^a \nu(x)dx}$$

Dakle, pri padu mortaliteta povećanje u stopi rasta će biti jednako padu u prosječnoj dobno-specifičnoj stopi mortaliteta između rođenja i gore definirane dobi T. Zanimljivo je to da sve godine ispod T imaju istu težinu u ovom izrazu, to jest mijenjanje mortaliteta u dobi od dvanaest godina ima jednaki utjecaj kao mijenjanje mortaliteta u ranom djetinjstvu. Razlog je taj što ti događaji imaju isti efekt na vjerojatnost doživljenja do dobi T pa tako i na godišnji tok rođenja. Stabilni populacijski model nam stoga daje vrlo jednostavnu formulu kao odgovor na pitanje što će se dogoditi sa stopom rasta populacije nakon pada mortaliteta.

Efekt pada mortaliteta na dobnu strukturu stabilne populacije je kompleksniji nego efekt na stopu rasta. U posebnom slučaju, zvanom neutralna promjena u mortalitetu, nema nikakvog efekata. Neutralna promjena u mortalitetu nastaje kada stope mortaliteta u svakoj dobi padnu za istu vrijednost to jest kada za sve $a \geq 0$ vrijedi:

$$\nu'(a) = \nu(a) - k$$

pri čemu $\nu'(a)$ označava stopu mortaliteta, u dobi a, nakon promjene. U ovom slučaju, mortalitet je pao za godišnji iznos k u svim dobima. Efekt ovakve promjene na funkciju $p(a)$ je sljedeći:

$$p'(a) = e^{-\int_0^a \nu(x)-kdx} = p(a)e^{ka}$$

Efekt na stopu rasta kod neutralnog pada u mortalitetu za iznos k će biti povećanje stope rasta za k. Ovaj efekt je vidljiv primjenom Euler-Lotkine karakteristične jednadžbe na podatke prije i poslije promjene, tada imamo:

$$\int_\alpha^\beta e^{-ra}p(a)m(a)da = 1 = \int_\alpha^\beta e^{-r'a}p(a)e^{ka}m(a)da$$

Integrali na lijevoj i desnoj strani mogu biti jednaki jedan drugome samo ako je $r' = r + k$. Promotrimo sada kakav je utjecaj promjena imala na dobnu strukturu, vrijedi:

$$\begin{aligned} c'(a) &= \frac{e^{-r'a}p'(a)}{\int_0^w e^{-r'x}p'(x)dx} = \frac{e^{-(r+k)a}p(a)e^{ka}}{\int_0^w e^{-(r+k)x}p(x)e^{kx}dx} \\ &= \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^w e^{-rx}p(x)dx} = c(a) \end{aligned}$$

Dakle, neutralna promjena u mortalitetu nema efekta na dobnu strukturu. Prema tome, neće imati efekt na stopu rođenih, pošto su dobno-specifične stope fertiliteta nepromijenjene.

To što smanjenje mortaliteta može ne imati efekt na dobnu strukturu populacije šokira mnoge. Smanjenje mortaliteta će povećati očekivani životni vijek, a rezultat je veće preživljavanje u starijoj dobi. Zašto ovo ne čini populaciju starijom? Kod neutralnog pada mortaliteta za iznos k svaka jednogodišnja vjerojatnost preživljavanja će se povećati za faktor e^k. Dakle, broj ljudi, godinu dana nakon pada mortaliteta, će narasti za isti faktor, e^k u svakoj dobi. S konstantnim fertilitetom, broj rođenih će također rasti za ovaj faktor, a dobna distribucija će biti nepromijenjena. Iako neutralna promjena u mortalitetu nema efekta na dobnu strukturu populacije, ima efekta na njen broj i na stopu rasta, što potvrđuje intuitivno razmišljanje o efektu takve promjene.

Neutralan pad mortaliteta postaje standard s kojim se uspoređuje stvaran pad mortaliteta. Padovi koji su uniformni po dobi, osim za velike padove, u ranom djetinjstvu će pomladiti populaciju. Dok padovi koji su uniformni po dobi, osim za izrazito velike padove, u starijoj dobi (recimo iznad 50) će učiniti populaciju starijom. Ne-neutralan pad koncentriran u ranom djetinjstvu će imati isti efekt na dobnu strukturu kao povećanje u fertilitetu zato što dobna struktura ne zna razliku između djece koja su umrla u ranom djetinjstvu i rođenja koja se nikad nisu dogodila. Analogno analizi fertiliteta koju ćemo provesti u sljedećem odjeljku, pad mortaliteta koji se desio samo u ranom djetinjstvu će okrenuti stabilnu dobnu strukturu oko prosječne dobi to jest povećat će se broj ljudi koji imaju manje godina od prosječne dobi populacije, a smanjiti broj ljudi koji imaju više godina od prosječne dobi populacije.

Pad mortaliteta kao rezultat ima pomlađivanje populacije. No nakon što populacija dosegne očekivani životni vijek od otprilike 65 godina, sljedeći pad mortaliteta će stvoriti stariju populaciju. Zbog toga što pad mortaliteta obično uzrokuje blago smanjenje udjela plodnih žena u populaciji, pa pad mortaliteta ima pomalo negativan efekt na stopu nataliteta s protekom vremena. Ova činjenica ne znači smanjenje broja ljudi u populaciji, s obzirom da ima više ljudi, s time ima i više žena, pa smanjenje stope nataliteta ne znači nužno smanjenje populacije.

Poznavanje efekta stvarnog pada mortaliteta na dobnu strukturu dakle postaje pitanje identificiranja dobi u kojima su ti padovi izrazito veliki. Kao što je gore prikazano, ono što je zapravo bitno je apsolutni pad u dobno-specifičnim stopama mortaliteta, a ne relativan ili proporcionalan pad. Stabilni populacijski model je dobar alat te omogućuje otkrivanje tog efekta na stvarnim populacijama.

Efekt promjene fertiliteta

Razmotrimo sada što će se dogoditi sa stabilnom populacijom u kojoj fertilitet raste u svim dobnim skupinama. Povećanje vrijednosti $m(a)$ bi uzrokovalo neuravnoteženost u Euler-Lotkinoj karakterističnoj jednadžbi osim ako ne dođe do promjene vrijednosti parametra r (s obzirom da se $p(a)$ smatra fiksnim). Kako bi zadržali lijevu stranu jednadžbe jednaku 1, r se mora povećati tako da vrijednost e^{-ra} padne za sve dobi. Dakle, dugoročno gledano, povećanje razine fertiliteta će povećati stopu rasta populacije. Ovaj rezultat nije iznenađujući te potvrđuje intuitivno razmišljanje. Intuicija nam također govori da će povećanje fertiliteta dovesti do veće stope nataliteta. Zaista, u formuli 1.7, nazivnik izraza za stopu nataliteta će se smanjiti, pa će se stopa nataliteta povećati.

Promotrimo sada efekt povećanja fertiliteta pa s time i stope rasta na dobnu strukturu.

On može biti nađen diferenciranjem logaritma izraza za proporciju dobne strukture, to jest formule 1.8, s obzirom na r. Logaritmiranjem i diferenciranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{dln[c(a)]}{dr} &= \frac{d\{(-ra) + ln[p(a)] - ln[\int_0^w e^{-ra}p(a)da]\}}{dr} \\ &= -a + \frac{\int_0^w ae^{-ra}p(a)da}{\int_0^w e^{-ra}p(a)da}\end{aligned}$$

Zadnji izraz je izraz za prosječnu dob u stabilnoj populaciji, T_P, pa možemo pisati:

$$\frac{dln[c(a)]}{dr} = T_p - a \tag{1.9}$$

Iz ove formule vidimo da povećanje fertiliteta dovodi do povećanja broja ljudi koji imaju manje godina od prosječne dobi populacije (gdje je derivacija pozitivna), a smanjenja broja ljudi koji imaju više godina od prosječne dobi populacije (gdje je derivacija negativna). Također vidimo da sve većim udaljavanjem od prosječne dobi populacije dolazi do veće promjene u broju ljudi.

Kao i kod dobne strukture, na sličan način možemo promatrati efekt povećanja fertiliteta na opću stopu mortaliteta. Za opću stopu mortaliteta vrijedi sljedeće:

$$d = \int_0^w c(a)v(a)da = \int_0^w be^{-ra}p(a)v(a)da = b\int_0^w e^{-ra}p(a)v(a)da$$

Logaritmiranjem, a zatim deriviranjem tog izraza u odnosu na r, dobivamo:

$$\frac{dln(d)}{dr} = \frac{dln(b)}{dr} + \frac{\frac{d}{dr}\int_0^w e^{-ra}p(a)v(a)da}{\int_0^w e^{-ra}p(a)v(a)da}$$

Prvi izraz možemo dobiti korištenjem jednadžbe 1.9, stavimo li $a = 0$ tada vrijedi $c(a) = b$, pa dobivamo:

$$\frac{dln(b)}{dr} = T_P$$

Drugi izraz je jednak sljedećem:

$$\begin{aligned}\frac{-\int_0^w ae^{-ra}p(a)v(a)da}{\int_0^w e^{-ra}p(a)v(a)da} &= -\frac{\int_0^w bae^{-ra}p(a)v(a)da}{\int_0^w be^{-ra}p(a)v(a)da} \\ &= -\frac{\int_0^w ac(a)p(a)v(a)da}{\int_0^w c(a)v(a)da} = -T_D\end{aligned}$$

pri čemu je T_D prosječna dob smrti u stabilnoj populaciji. Derivat logaritma stope smrtnosti tada možemo zapisati kao:

$$\frac{dln(d)}{dr} = T_P - T_D$$

Ovaj izraz pokazuje da će porastom stope fertiliteta doći do pada opće stope mortaliteta ako je prosječna dob smrti veća od prosječne dobi populacije, na primjer ako je smrt povećana u starijoj dobi. Ovo će biti slučaj u većini populacija, ali ne u svima. Mlađe populacije, s većom stopom mortaliteta mogu imati prosječnu dob smrti ispod srednje dobi populacije, tako da će povećanje fertiliteta dovesti do povećanja opće stope mortaliteta, dajući veću težinu stopi mortaliteta u vrlo mladoj dobi. Niti jedna populacija trenutno u svijetu nema takav sastav, ali su mnoge u prošlosti imale. Danas će porast fertiliteta smanjiti opću stopu mortaliteta gledajući dugoročno.

Poglavlje 2

Primjena modela u demografiji

Modeli stabilne populacije su dobar primjer za rast i strukturu mnogih ljudskih populacija prije demografske tranzicije. Trenutno postoji par primjera stvarnih populacija koje prikazuju stabilno ponašanje, budući da su gotovo sve svjetske populacije bile pod utjecajem velikih promjena u mortalitetu i fertilitetu u nedavnoj prošlosti. Ipak, do sredine 20. stoljeća mnoge populacije u Africi, Aziji i Latinskoj Americi su doživjele prilično konstantne fertilitetne i mortalitetne uvijete, pa njihova dobna struktura sliči strukturi stabilnih populacija. Primjena modela na takve zemlje je prilično jasna, dok primjena na zemlje čija struktura nije stabilna ostaje nejasna.

U primjeni, zemlje koje nemaju stabilnu strukturu promatramo kao zemlje koje potencijalno mogu imati stabilnu strukturu. Promatramo kojoj stabilnoj populaciji teže kada se na njih primjenjuju konstantne funkcije fertiliteta i doživljenja koje su trenutno prisutne u populaciji. Na taj način možemo procijeniti buduće demografske značajke zemalja koje nisu stabilne te na koje ne možemo primijeniti druge demografske metode zbog nepotpunih informacija. Pokazat ćemo na koji se način procjenjuju demografske značajke takvih zemalja. Za stabilne je populacije najvažniji parametar stopa rasta koju možemo procijeniti na razne načine, neki od njih će biti predstavljeni u sljedećih par stranica. Poznavanjem stope rasta stabilne populacije lako možemo izračunati ostale demografske značajke pomoću formula navedenih u prvom poglavlju.

2.1 Grafička procjena stope rasta

Kako bismo pronašli stopu rasta prvo ćemo koristiti grafičku metodu. Prednost ove metode je ta što može biti primijenjena u svim slučajevima, bez obzira na izgled funkcija $m(a)$ i $p(a)$.

Kako bismo odredili r, moramo nacrtati krivulju koja prikazuje integral

$$y(r) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a)da$$

Zatim je potrebno iščitati vrijednost apscise točke na krivulji čija je ordinata jednaka jedan. Primjenjujući dovoljno veliku skalu možemo odrediti r s odgovarajućom točnošću. Danas postoje mnogi matematički alati koji omogućuju crtanje potrebnog integrala. Oni uvelike olakšavaju ovu metodu pronalaska stope rasta, no za neke primjene ona nije dovoljno precizna pa su potrebne druge metode za njeno određivanje.

Kako bismo lakše procijenili stopu rasta, primijetimo da je stopa rasta ljudske populacije ograničena odozgo i odozdo.

Pretpostavimo da niti jedna žena nije sterilna u dobi između 15 i 45 te da svaka žena rodi jedno dijete svake godine. Tada je stopa fertiliteta konstantna od dobi 15 do 45 i iznosi približno 0,5 ($m(a) = 0,5$ za svaki a od 15 do 45). Napomenimo da promatramo populaciju žena, pa kažemo približno 0,5 jer se rodi više dječaka nego djevojčica. Dakle, jedno dijete godišnje bi značilo nešto manje od 0,5 djevojčica po godini. Pretpostavimo li nadalje da je stopa mortaliteta jednaka nuli do dobi od 45, tada je $p(a) = 1$. Uvrstimo li te dvije činjenice u jednadžbu 1.5 dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} da = 2$$

Rješenje ove jednadžbe je vrlo blizu $r = 0,10$. Dakle, vrijednost od 0,10 je gornja granica stope rasta. U praksi postoje žene koje nemaju djece, bilo to zbog toga što su sterilne ili nekih drugih razloga. Povrh toga, čak i plodne žene ne rađaju jedno dijete po godini; razmak između rođenja dvoje djece obično iznosi 2,5 godine. Nadalje, stopa mortaliteta do dobi od 45 nikada neće biti nula. Dakle, gornja granica od 0,10 ne može biti premašena, štoviše, u praksi se često koristi gornja granica stope rasta od 0,04.

Kako bismo odredili donju granicu stope rasta promatramo populaciju koja imaju veliki pad stanovništva. Provodeći sličan račun kao gore za donju granicu dobivamo vrijednost $r = -0,10$.

Dakle, procjenjujući stopu rasta ljudske populacije promatramo vrijednosti koje upadaju u interval $[-0,10; 0,10]$.

2.2 Poseban slučaj računanja stope rasta

Postoji poseban slučaj kada izračunavanje stope rasta postaje vrlo jednostavno. U tom slučaju pretpostavljamo da je funkcija fertiliteta $m(a)$ svedena na jednu vrijednost jednaku bruto stopi reproduktivnosti u određenoj životnoj dobi, dok su vrijednosti za druge dobi jednake nuli. Srednja dob petogodišnjeg dobnog intervala od 25 do 29 jednaka je $27,5$ što je ujedno i prosječna dob majke pri rođenju djeteta. Uzmimo dob od $27,5$ kao dob na koju ćemo svesti stopu fertiliteta. Tada vrijedi:

$$m(a) = \begin{cases} R', & \text{za } a = 27,5 \\ 0 & \text{za } a \neq 27,5 \end{cases}$$

pri čemu je R' bruto stopa reproduktivnosti. Sada jednadžbu 1.5 možemo napisati kao:

$$e^{-27,5r} p(27,5) R' = 1$$

Logaritmiranjem obiju strana te sređivanjem izraza dobivamo:

$$r = \frac{Log(p(27,5)) + Log(R')}{27,5 Log(e)}$$

to jest:

$$r = \frac{Log(p(27,5)) + Log(R')}{11,9431} = \frac{ln(p(27,5)) + ln(R')}{27,5}$$

Ovakvo pojednostavljenje funkcije fertiliteta izgleda beskorisno, jer je nemoguće da žena u određenoj životnoj dobi rodi R' djevojčica. U praksi se pokazalo da su demografske značajke izračunate pomoću reducirane funkcije fertiliteta jednake demografskim značajkama izračunatim pomoću stvarne funkcije. Pod pretpostavkom da je dob na koju je funkcija fertiliteta reducirana blizu prosječnoj dobi majke pri rođenju djeteta. Usprkos tome, treba biti pažljiv kod odabira ove metode i sagledati sve aspekte populacije koju procjenjujemo. Iako primjenjiva i korisna, primjenom na krivoj populaciji čije demografske značajke nisu dobro definirane može doći do loših procjena.

2.3 Aproksimativne numeričke formule za izračunavanje stope rasta

Postoji više načina za utvrđivanje aproksimativnih formula za stopu rasta. Metoda koju je predložio Lotka uključuje korištenje momenata i kumulanata funkcije $p(a)m(a)$.
Podjelimo li obje strane jednadžbe 1.5 s R_0 dobivamo:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-ra} p(a) m(a)}{R_0} da = \frac{1}{R_0} \tag{2.1}$$

pri čemu R_0 označava neto stopu reproduktivnosti definiranu s:

$$R_0 = \int_{\alpha}^{\beta} p(a) m(a) da$$

Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe 2.1 funkcija izvodnica (funkcija generirajućih momenata), $M(-r)$. Funkcija $M(r)$ je funkcija izvodnica (funkcija generirajućih momenata) funkcije gustoće $f(x)$ ako postoji $h > 0$ takvo da $M(r) = \mathbb{E}(e^{rX})$ za svaki $|r| < h$.
Prema tome, vrijedi:

$$M(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} f(x) dx$$

Razvojem eksponencijalne funkcije u Taylorov red dobivamo:

$$e^{rx} = 1 + rx + \frac{1}{2!}r^2x^2 + \frac{1}{3!}r^3x^3 + ...$$

što povlači da funkciju izvodnica (funkciju generirajućih momenata) možemo zapisati kao:

$$M(r) = 1 + rR_1 + r^2R_2 + r^3R_3 + ...$$

pri čemu je R_n n-ti moment funkcije $f(x)$ definiran s:

$$R_n(x) = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx$$

Općenito je lakše računati s kumulantima, a ne momentima, pa uzimamo prirodni logaritam jednadžbe 2.1 kako bismo dobili funckiju generirajućih kumulanata, $\mu(-r)$:

$$\mu(-r) = -Ln(R_0)$$

$$r\mu_1 - \frac{1}{2!}r^2\mu_2 + \frac{1}{3!}r^3\mu_3 - ... = Ln(R_0) \tag{2.2}$$

Iz formule 2.2, ovisno o načinu promatranja, slijede dvije aproksimativne formule za računanje stope rasta.
Valja napomenuti da je veza momenata i kumulanata dana je sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \mu_1 R_0 \\
R_2 &= \mu_1 R_1 + \mu_2 R_0 \\
R_3 &= \mu_1 R_2 + 2\mu_2 R_1 + \mu_3 R_0 \\
R_4 &= \mu_1 R_3 + 3\mu_2 R_1 + 3\mu_3 R_0 + \mu_4 R_0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Prva formula

Primjenjujući gore navedene pretpostavke uz zanemarivanje momenata i kumulanata većih od prvog reda dobivamo prvu formulu za procjenu stope rasta:

$$r = \frac{Log(R_0)}{\mu_1 Log(e)} = Log(R_0)\frac{2,302584}{\mu_1} \tag{2.3}$$

pri čemu je R_0 nulti moment, a μ_1 prvi po redu kumulant. Napomenimo da izraz:

$$R_0 = \int_{\alpha}^{\beta} p(a)m(a)da$$

pokazuje da je nulti moment jednak formuli za neto stopu reproduktivnosti. Dakle, nulti moment označava neto stopu reproduktivnosti. Primijetimo da iz formule 2.3 slijedi aproksimativna formula za neto stopu reproduktivnosti:

$$R_0 = e^{r\mu_1}$$

Nadalje, prvi po redu kumulant označava prosječnu dob u kojoj žena rodi dijete u stabilnoj populaciji, to jest imamo:

$$\mu_1 = \frac{R_1}{R_0} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} ap(a)m(a)da}{\int_{\alpha}^{\beta} p(a)m(a)da} \tag{2.4}$$

Ovom metodom osim do aproksimativne formule za stopu rasta, na sličan način možemo doći i do aproksimativne formule za stopu nataliteta stabilne populacije. Promatrajući momente i kumulante funkcija $p(a)m(a)$ i $p(a)$ dolazimo do sljedeće formule:

$$b = \frac{R_0}{E_0}$$

pri čemu je E_0 nulti moment funkcije $p(a)$ to jest očekivani životni vijek pri rođenju.

Iz ne tako jednostavnih razmatranja o momentima i kumulantima funkcija dolazimo do vrlo jednostavnih aproksimativnih formula. Primijetimo da u ovom slučaju ne moramo niti računati integrale koji daju vrijednost nultog momenta i prvog kumulanta. Ako su nam poznati parametri neto stope reproduktivnosti te prosječne dobi u kojoj žena rodi dijete tada se procjena stope rasta populacije svodi na logaritmiranje i osnovne matematičke operacije. Računanje stope nataliteta također postaje jednostavno ako uz poznavanje pretpostavljenog poznajemo i očekivani životi vijek pri rođenju. Dakako, ako neki od ovih parametara nije poznat uvijek ga možemo izračunati pomoću malo složenijih matematičkih operacija.

U praksi se često događa da umjesto kontinuiranog vremena moramo promatrati diskretno vrijeme zbog oblika podataka koji su nam dani. Iako je ovaj rad rađen na temelju kontinuiranog vremena vrlo je lako sve dane formule prebaciti u diskretni model. Sljedeći primjer nam pokazuje na koji način možemo primijeniti formulu 2.3 u diskretnom vremenu na populaciju.

Primjer. Promotrimo populaciju danu sljedećom tablicom:

Dobne skupine	Srednja dob skupine (a)	L_a	M_a
15-19	17,5	439 970	0,100
20-24	22,5	434 040	0,273
25-29	27,5	427 035	0,263
30-34	32,5	419 610	0,188
35-39	37,5	411 672	0,121
40-44	42,5	402 742	0,055

pri čemu stupac L_a označava dobru strukturu populacije, a stupac M_a predstavlja dobnu distribuciju stope fertiliteta. Napomenimo još da veličina L_a označava prosječan broj živih u intervalu a do $a + 4$ pri čemu je početni broj rođenih iznosio 100 000, tu veličinu ćemo označiti s l_0. Primijetimo da promatramo dobne intervale od 5 godina pa je bruto stopa reproduktivnosti dana sljedećom formulom:

$$R' = 5 \sum_{15}^{40} m(a)$$

pri čemu $m(a)$ u ovom slučaju označava prosječni broj ženskih potomaka koje rodi žena u dobi između a i $a+4$ pri čemu je $m(a) = 0$ za a koji nisu djeljivi s 5 (pretpostavljamo da su dane stope fertiliteta svake dobne skupine). Tada za dobnu distribuciju fertiliteta vrijedi:

$$M_a = \frac{m(a)}{\sum_{15}^{40} m(a)} = \frac{5m(a)}{R'}$$

iz čega slijedi:

$$m(a) = \frac{M_a R'}{5}$$

Kada su podatci dani na ovaj način, stopu neto reproduktivnosti možemo računati sljedećom formulom:

$$R_0 = \sum_{15}^{40} m(a) \frac{L_a}{l_0} = \frac{1}{l_0} \sum_{15}^{40} \frac{M_a R'}{5} L_a$$

pri čemu $L_a \setminus l_0$ označava prosječan broj godina koliko žena živi u intervalu a do $a + 4$. Primjenom ovih formula sada možemo izračunati prvi i drugi moment. Za početak pretpostavimo da je $R' = 5$ tada vrijedi sljedeća tablica:

Dobne skupine	Srednja dob skupine (a)	Nulti moment (R_0)	Prvi moment (R_1)
15-19	17,5	43 997	769 948
20-24	22,5	118 493	2 666 093
25-29	27,5	112 310	3 088 575
30-34	32,5	78 887	2 563 828
35-39	37,5	49 812	1 867 950
40-44	42,5	22 151	941 418
Suma		425650	11897812
Momenti		$4,2565$	$118,9781$

pri čemu je stupac prvog momenta izračunat množenjem srednje dobi skupine i nultog momenta. Pretpostavimo sada tri različite vrijednosti za bruto stopu reproduktivnosti, $R'_1 = 1,50$, $R'_2 = 0,75$ i $R'_3 = 4,00$, te izračunajmo stopu rasta pomoću prve aproksimativne formule. Napomenimo da je za različite stope bruto reproduktivnosti potrebno samo pomnožiti već izračunati nulti i prvi moment s izrazom $R'_n \setminus 5$ kako bismo dobili nulti i prvi moment koji odgovara bruto stopi reproduktivnosti R'_n. Dobiveni rezultati prikazani su u sljedećoj tablici:

R’	1,50	0,75	4,00
R_0	1,27695	0,638475	3,4052
$Log(R_0)$	0,1061739	-0,1948561	0,5321426
μ_1	27,9251	27,9251	27,9251
$\mu_1 * Log(e)$	12,13944	12,13944	12,13944
r	0,00874	-0,01605	0,04384

pri čemu je μ_1 računat formulom 2.4, a r pomoću prve aproksimativne formule 2.3.

Ovim primjerom pokazana je primjenjivost prve aproksimativne formule kao i njezina jednostavnost. Primijetmo da za računanje stope rasta nije dovoljno samo promatranje dobne distribucije stope fertiliteta već je potrebno i poznavanje same funkcije fertiliteta. Jedini slučaj u kojem možemo promatrati samo dobnu distribuciju stope fertiliteta je kada je poznata stopa bruto reproduktivnosti koja proizlazi iz same funkcije fertiliteta.

Druga formula

Primjenjujući gore navedene pretpostavke uz zanemarivanje momenata i kumulanata većih od drugog reda dobivamo drugu formulu za procjenu stope rasta:

$$r = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - 2\mu_2 Log(R_0) 2,302584}}{\mu_2}$$

pri čemu je R_0 nulti moment, μ_1 prvi po redu, a μ_2 drugi po redu kumulant. Predznak u danoj procjeni biramo tako da vrijednost r-a bude bliža vrijednosti dobivene prvom formulom.
Kao i kod prve, i kod druge formule imamo aproksimativnu formulu za stopu nataliteta stabilne populacije. Vrijedi:

$$b = \frac{R_0}{E_0}\frac{1 - r\mu_1}{1 - r\lambda_1}$$

pri čemu je μ_1 prvi po redu kumulant funkcije $p(a)m(a)$, E_0 nulti moment, a λ_1 prvi po redu kumulant funkcije $p(a)$. Također znamo da vrijedi:

$$\lambda_1 = \frac{E_0}{E_1}$$

pri čemu su E_0 i E_1 nulti i prvi moment funkcije $p(a)$, to jest imamo:

$$\lambda_1 = \frac{E_0}{E_1} = \frac{\int_0^\infty p(a)da}{\int_0^\infty ap(a)da}$$

iz čega vidimo da je λ_1 prosječna dob u stacionarnoj populaciji. Pri čemu je stacionarna populacija poseban slučaj stabilne populacije u kojoj je stopa rasta jednaka nuli.

Druga formula za izračunavanje stope rasta možda nije toliko jednostavna kao prva, jer moramo izračunati vrijednost drugog kumulanta, ali njegovo računanje nije toliko komplicirano. Do komplikacija kod računanja ovih aproksimativnih formula može doći pri računanju momenata i kumulanata funkcije $m(a)p(a)$ pa je ponekad jednostavnije primijeniti neku drugu tehniku, no zahvaljujući sve razvijenijim matematičkim alatima ovu metodu procjene demografskih značajki ne treba zanemariti.

2.4 Računanje stope rasta metodom sukcesivne aproksimacije

Postoji više načina za izračunavanje stope rasta metodom sukcesivne aproksimacije. Mi ćemo izdvojiti dva od njih.

Prva metoda (prosječni razmak između dvije generacije)

Prava metoda uključuje često korišten izraz u demografiji, prosječni razmak između dvije generacije.

Riječ generacija u demografiji može označavati dvije stvari. Može označavati grupu osoba rođenih u isto vrijeme, na primjer, sve osobe koje su rođene tijekom jedne kalendarske godine. Također se koristi za označavanje grupe djece u odnosu na njihove roditelje i obratno. Grupa roditelja se zove prva generacija, a grupa djece druga. Iz ovoga se lako vidi što označava treću generaciju, četvrtu generaciju i tako dalje.

Kako bi smo objasnili što označava razmak između dvije generacije uzmimo u obzir grupu djevojčica rođenih u isto vrijeme. Neka A predstavlja prosječnu dob njihovih majki u vrijeme rađanja. Kada bi mortalitet bio nula, prosječna dob djevojčica tijekom njihova života bi bila A godina manja od prosječne dobi njihovih majki. Uzimajući u obzir da mortalitet ne može biti nula, razlika između prosječne dobi majki i prosječne dobi djevojčica pada kako generacija djevojčica stari. Pad u razlici prosječnih dobi je spor, ali se događa u dva slučaja. U prvom se slučaju pad događa zbog smrti majki. Kako generacija djevojčica stari, starije majke umiru te razlika između prosječnih vrijednosti postaje manja. Ovaj efekt bi se mogao ispraviti kada bi promatrali godine rođenja majki, a ne njihovu dob. U drugom se slučaju pad događa zbog razlike u fertilitetu i mortalitetu nižih i viših socijalnih klasa. Razlika prosječnih dobi je veća u nižim društvenim klasama nego u višim. Žene nižih socijalnih klasa nastavljaju imati djecu u starijoj dobi, dok u višim klasama rađanje staje prilično rano. Mortalitet je također veći u nižim klasama, a rezultat toga je taj da su kćeri nižih klasa manje zastupljene u ispitivanjima, što dovodi do smanjivanja prosječne dobi majki za vrijeme rođenja kćeri. Ovaj efekt utječe na smanjivanje razlike prosječnih dobi tek u starijoj dobi, kada je mortalitet visok.

Ovako definiran A nazivamo razmak između dvije generacije. U stabilnoj populaciji vrijedi:

$$A(r) = \frac{\int_\alpha^\beta ae^{-ra}p(a)m(a)da}{\int_\alpha^\beta e^{-ra}p(a)m(a)da} \tag{2.5}$$

Razmak između dvije generacije možemo promatrati i na drugi način. Promotrimo grupu djevojčica koje su rođene iste kalendarske godine. Tokom svog života, u razdoblju plodnosti, rode kćer u različitim životnim dobima. Po završetka njihovog plodnog razdoblja možemo promatrati prosječnu dob D u kojoj su rodile svoje kćeri. Ovako definiran D također nazivamo razmak između dvije generacije te vrijedi:

$$D = \frac{\int_\alpha^\beta ap(a)m(a)da}{\int_\alpha^\beta p(a)m(a)da}$$

Primijetimo da je $A_0 = D = \mu_1$. Postoji i treća, Lotkina, formula za računanje razmaka između dvije generacije. Lotka je promatrao formulu 2.5 te sljedeći integral:

$$y(r) = \int_\alpha^\beta e^{-ra}p(a)m(a)da$$

derivirajući obje strane po r dobivamo:

$$\frac{dy(r)}{dr} = -\int_\alpha^\beta ae^{-ra}p(a)m(a)da$$

Koristeći jednadžbu 2.5 dobivamo:

$$\frac{dy(r)}{dr} = -A(r)y(r)$$

iz čega slijedi:

$$y(r) = Ke^{-\int_0^r A(r)dr}$$

pri čemu je K konstanta. Kada je $r = 0$ imamo: $y(0) = K = R_0$ dakle vrijedi:

$$y(r) = R_0 e^{-\int_0^r A(r)dr}$$

Lotka zatim uvodi notaciju:

$$\int_0^r A(r)dr = rT_r \tag{2.6}$$

pri čemu T_r naziva prosječni razmak između dvije generacije. Iz ovoga slijedi:

$$y(r) = R_0 e^{-rT_r} \tag{2.7}$$

Primijetimo da iz jednadžbe 2.6 vrijedi:

$$T_r = \frac{1}{r}\int_0^r A(r)dr \tag{2.8}$$

Kao što smo već spomenuli za $r = 0$ vrijedi $A_0 = D$ pa kao dobru procjenu za T_r imamo:

$$T_r = \frac{1}{r}\int_0^r A(r)dr \approx \frac{A_r + D}{2}$$

Vratimo se sada na jednadžbu 2.7. Znamo da je u stabilnoj populaciji $y(r) = 1$. Dakle, iz formule 2.7 tada slijedi:

$$r = \frac{Log(R_0)}{T_r Log(e)}$$

Ovu ćemo jednadžbu koristiti za računanje stope rasta metodom sukcesivne aproksimacije. Promotrimo sada na koji način će ona biti korištena. Neka je r_0 približna vrijednost r-a, promatramo niz:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{Log(R_0)}{T_{r_0} Log(e)}, \\ r_2 &= \frac{Log(R_0)}{T_{r_1} Log(e)}, \\ r_3 &= \frac{Log(R_0)}{T_{r_2} Log(e)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

pri čemu su $T_{r_0}, T_{r_1}, T_{r_2}, \ldots$ izračunati prema formuli 2.8. Na ovaj način dobivamo niz koji teži prema pravoj vrijednosti stope rasta. Možda najbolji način za uočavanje kamo taj niz teži je grafička interpretacija ovog postupka koja je vrlo jednostavna. Vrijednost stope rasta je apscisa točke presjeka dvaju krivulja:

1.
$$T(r) = \frac{Log(R_0)}{Log(e)} \frac{1}{r}$$

2.
$$T(r) = \frac{1}{r} \int_0^r A(r)dr$$

nacrtanih na grafu na kojem os apscisa predstavlja r, a os ordinata $T(r)$. Kada razmislimo, prva krivulja predstavlja prosječni razmak između generacija generiran stopom neto reproduktivnosti, koja ovisi o funkciji doživljenja i mortaliteta, s mijenjajućom stopom rasta. Druga krivulja također prikazuje prosječan razmak između generacija ali ovoga puta generiran funkcijom doživljenja i funkcijom mortaliteta zadane populacije pri čemu su uzete različite stope rasta. Logično je za zaključiti da će u stvarnoj stopi rasta obadvije krivulje imati jednaku vrijednost pošto su parametri populacije koju promatramo isti u oba slučaja, a razmak između generacija može imati samo jednu pravu vrijednost (napomenimo da promatramo treću, Lotkinu, definiciju razmaka između generacijama). Dakle, promatramo dvije različite krivulje za istu demografsku značajku i vrijednost osi apscise njihovog sjecište predstavlja stvarnu stopu rasta.

Nacrtamo li na grafu dvaju krivulja put $M_0N_1M_1N_2M_2\ldots$, pri čemu su $N_1, N_2, N_3, \ldots$ vrijednosti prve krivulje u točkama $r_1, r_2, r_3, \ldots$, a $M_0, M_1, M_2, \ldots$ vrijednosti druge krivulje u točkama $r_0, r_1, r_2, \ldots$, oblik ovako nacrtanog puta težiti će prema r. Uzmemo li za početnu vrijednost, r_0, vrijednost koja je manja od r vrijednost našeg niza će težiti prema r, ali će uvijek biti manja od prave vrijednosti. Uzmemo li pak vrijednost, r_0, koja je veća od r vrijednost našeg niza će težiti prema r, ali će uvijek biti veća od prave vrijednosti. Na ovaj se način možemo približiti pravoj vrijednosti stope rasta dovoljno blizu.

Druga metoda

Promotrimo sada drugi način procjene stope rasta metodom sukcesivne aproksimacije. Neka je r_0 aproksimativna vrijednost od r. Tada postoji ε takav da $r_0 + \varepsilon = r$. Uvrstimo li ovo u 1.5 dobivamo:

$$\int_\alpha^\beta e^{-(r_0+\varepsilon)a} p(a)m(a)da = 1$$

to jest:

$$\int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)e^{-\varepsilon a}da = 1$$

Za male ε možemo pisati:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_0 a} p(a)m(a)(1-\varepsilon a)da = 1$$

iz čega slijedi:

$$\varepsilon = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_0 a} p(a)m(a)da - 1}{\int_{\alpha}^{\beta} a e^{-r_0 a} p(a)m(a)} \tag{2.9}$$

Primijetimo da je $1-\varepsilon a$ manje od $e^{1-\varepsilon a}$. Dakle, zamjenom $e^{1-\varepsilon a}$ s $1-\varepsilon a$ dobivamo vrijednost za ε koji je premali da bi vrijedilo $r_0 + \varepsilon = r$. Za tako dobiveni ε, formulom 2.9, stavimo $r_1 = r_0 + \varepsilon$ i dobivamo bolju aproksimaciju nego r_0. Ponovimo li opet isti postupak za r_1, dobivamo još bolju aproksimaciju, r_2, i tako dalje. Na ovaj se način možemo približiti pravoj vrijednosti stope rasta. Grafička interpretacija ove metode kao i prethodne je vrlo jednostavna. Vrijednost stope rasta je apscisa točke presjeka dvaju krivulja:

1.
$$y(r) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_0 a} p(a)m(a)da - 1}{\int_{\alpha}^{\beta} a e^{-r_0 a} p(a)m(a)} + r$$

2.
$$y(r) = r$$

nacrtanih na grafu na kojem os apscisa predstavlja r, a os ordinata $y(r)$. Primijetimo da obje krivulje predstavljaju stopu rasta populacije. Ako je r_M stopa rasta o kojoj ovisi prva funkcija, a r_P prava stopa rasta, samo će za $r_M = r_P$ u prvoj jednadžbi vrijediti $y(r_M) = r_P$ (što i želimo) te će vrijednost osi apscise i osi ordinate biti jednaka. Zbog toga kao drugu krivulju uzimamo pravac $y(r) = r$ te će presjek tih dviju krivulja predstavljati pravu stopu rasta populacije.

Nacrtamo li na grafu dvaju krivulja put $M_0N_1M_1N_2M_2\dots$ pri čemu su $M_0, M_1, M_2, \dots$ vrijednosti prve krivulje u točkama $r_0, r_1, r_2, \dots$, a $N_1, N_2, N_3, \dots$ vrijednosti druge krivulje u točkama $r_1, r_2, r_3, \dots$, oblik ovako nacrtanog puta težiti će prema r. Uzmemo li za početnu vrijednost, r_0, vrijednost koja je manja od r vrijednost našeg niza će težiti prema r, ali će uvijek biti manja od prave vrijednosti. Uzmemo li pak vrijednost, r_0, koja je veća od r prva vrijednost našeg niza bit će manja od stvarne vrijednosti stope rasta te će sve ostale vrijednosti niza ostati manje od prave. Dakle, ovom metodom dobivamo niz koji konvergira prema r, ali sve vrijednosti našeg niza su manje od stvarne vrijednosti.

Kako bismo osigurali bržu konvergenciju niza prema stvarnoj stopi rasta formulu 2.9 možemo aproksimirati na sljedeći način. Primijetimo da vrijedi:

$$\varepsilon = \frac{1 - \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da}}{\frac{\int_\alpha^\beta a e^{-r_0 a} p(a)m(a)da}{\int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da}} = \frac{1 - \frac{1}{\int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da}}{A(r_0)}$$

U slučaju ljudske populacije, vrijednost $A(r_0)$ je vrlo blizu vrijednosti A_0. Stoga, gornju formulu možemo aproksimativno napisati kao:

$$\varepsilon = \frac{\int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da - 1}{A_0 \int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da}$$

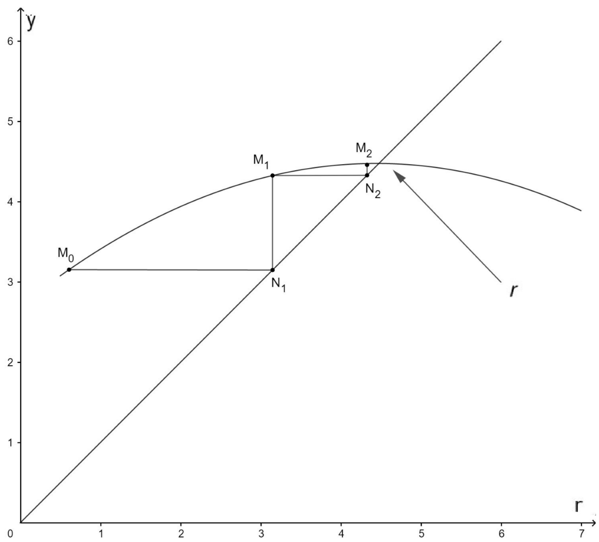
Označimo li s:

$$\delta = \int_\alpha^\beta e^{-r_0 a} p(a)m(a)da - 1$$

tada imamo:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{A_0(1 + \delta)}$$

Ovim smo postupkom dobili aproksimativnu formulu za ε, daljnji postupak procjene stope rasta je analogan gore napisanom. Na sljedećoj slici možemo vidjeti grafičku ilustraciju druge metode određivanja stope rasta metodom sukcesivne aproksimacije:



Slika 2.1: Put opisan drugom metodom

Metode sukcesivne aproksimacije su posebno zanimljive jer je osim računskog dijela zanimljivo promotriti grafičku interpretaciju i uvidjeti kako niz koji smo definirali zaista teži pravoj stopi rasta.

2.5 Nestabilne populacije

Spomenuli smo da kod zemalja koje nisu stabilne promatramo kojoj stabilnoj populaciji teže kada se na njih primjenjuju konstantne dobno-specifične stope mortaliteta i fertiliteta koje su trenutno prisutne u populaciji. Promotrimo takve slučajeve. Kao i do sad, promatramo populaciju žena.

Neka je dana populacija koja nije nužno stabilna. Fiksirajmo funkciju doživljenja i funkciju fertiliteta. Radi jednostavnosti promatrajmo procjenu stope rasta te stope nataliteta u periodu dugom 5 godina, analogno možemo napraviti procjenu za druge vremenske periode, ponavljajući ovaj postupak na novo dobivenim podatcima. Za procjenu stopa moramo podijeliti danu populaciju na dobne skupine po pet godina. Prva grupa od 0 do 4, druga grupa od 5 do 9 i tako dalje. Iz funkcije doživljenja za svaku dobnu skupinu možemo odrediti vjerojatnost da će osoba preći iz jedne dobne skupine u drugu u periodu dugom pet godina. Na ovaj način za svaku dobnu skupinu možemo odrediti broj žena nakon perioda od pet godina. Neka je B prosječni broj rođenih djevojčica godišnje tokom pet godina, $p(4)$ vjerojatnost preživljavanja od rođenja do četvrte godine, $N1_{\geq 0}$ broj osoba svih dobi u početnoj populaciji, a $N2_{\geq 5}$ broj osoba dobi veće ili jednake pet u populaciji nakon pet godina. Tada je broj osoba svih dobi u populaciji nakon pet godina jednak:

$$N2_{\geq 0} = N2_{\geq 5} + p(4)B$$

Prosječan broj osoba u populaciji tijekom razdoblja od pet godina je:

$$\frac{N1_{\geq 0} + N2_{\geq 0}}{2},$$

a prosječno godišnje povećanje populacije je:

$$\frac{N2_{\geq 0} - N1_{\geq 0}}{5}$$

Dakle, imamo sljedeće formule za stopu rasta, r, i stopu nataliteta, b:

$$b = \frac{2B}{N1_{\geq 0} + N2_{\geq 0}}$$
$$r = \frac{2(N2_{\geq 0} - N1_{\geq 0})}{5(N1_{\geq 0} + N2_{\geq 0})}$$

Primijetimo da poznavanjem funkcije fertiliteta možemo odrediti prosječni broj rođenih djevojčica tokom pet godina. Kako bismo odredili B dovoljno je primijeniti stope fertiliteta na žene u dobnim skupinama od 15 do 49 godina u početnoj populaciji i u populaciji nakon pet godina te izračunati broj rođenih djevojčica. Prosjek tih dvaju rezultata nam daje traženi B.

U prvom poglavlju smo vidjeli na koji se način mogu odrediti neke demografske značajke populacije, uz poznavanje stope rasta te funkcija $m(a)$ i $p(a)$. Kod populacija koje nisu stabilne imamo druge načine za izračunavanje tih značajki.

Pokazali smo ja Euler-Lotkina karakteristična jednadžba ima jedno realno rješenje, no broj kompleksnih rješenja je beskonačan. Sljedeći teorem pokazuje dva svojstva kompleksnih rješenja.

Teorem 2.5.1. *Neka je $r_n = x_n + iy_n$ kompleksno rješenje Euler-Lotkine karakteristične jednadžbe. Tada je $\overline{r_n} = x_n - iy_n$ također rješenje jednadžbe te vrijedi: $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < r$, pri čemu je r realno rješenje jednadžbe.*

Dokaz. Neka je $r_n = x_n + iy_n$ jedno od kompleksnih tješenja Euler-Lotkine karakteristične jednadžbe. Tada imamo:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x_n+iy_n)a} p(a)m(a)da = 1$$

to jest:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a}[cos(y_n a) - isin(y_n a)]p(a)m(a)da = 1$$

Odvajanjem realnog od imaginarnog dijela dobivamo sljedeće dvije jednadžbe:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} cos(y_n a)p(a)m(a)da = 1$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} sin(y_n a)p(a)m(a)da = 0$$

Znamo da za cos i sin vrijedi: $cos(-y_n a) = cos(y_n a)$ te $sin(-y_n a) = -sin(y_n a)$, dakle ako r_n zadovoljava Euler-Lotkinu jednadžbu, zadovoljavat će i $\overline{r_n}$. Nadalje, znamo da vrijedi: $cos(z) < 1 \forall\ z \in \mathbb{R}$, iz čega slijedi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} \cos(y_n a)p(a)m(a)da < \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} p(a)m(a)da$$

Iz činjenice da je:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} \cos(y_n a)p(a)m(a)da = 1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a)da$$

slijedi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a)da < \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x_n a} p(a)m(a)da$$

što povlači tvrdnju da je $x_n < r \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Promotrimo li ponovno jednadžbu:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-a)p(a)m(a)da$$

vidimo da je ona homogena integralna jednadžba. Kod homogenih jednadžbi znamo da je svaka linearna kombinacija njezinih rješenja također njezino rješenje. Dakle, $B(t)$ možemo zapisati kao:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \cdots \tag{2.10}$$

pri čemu su $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ proizvoljne konstante, a $r_1, r_2, r_3, \cdots$ rješenja Euler-Lotkine karakteristične jednadžbe. Dakle imamo:

$$Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + Q_3 e^{r_3 t} + \cdots = Q_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_1 a} p(a)m(a)da$$

$$+ Q_2 \int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_2 a} p(a)m(a)da + Q_3 \int_{\alpha}^{\beta} e^{-r_3 a} p(a)m(a)da + \cdots$$

Primjenimo li činjenicu da rješenja dolaze u kompleksno konjugiranim parovima dobivamo:

$$B(t) = Q_1 e^{rt} + Q_2 e^{x_2 t} cos(y_2 t) + Q_3 e^{x_3 t} cos(y_3 t) + \cdots$$

pri čemu je r veći od x_2, x_3 i tako dalje. Vidimo da kompleksna rješenja dovode do oscilacija među brojem rođenih. Budući da je r veći od bilo kojeg x_n, pustimo li t da ide u beskonačno izraz $Q_1 e^{rt}$ će prevladati nad svim drugima, što dovodi do smanjivanja oscilacija. Drugim riječima, broj rođenih se asimptotski približava $Q_1 e^{rt}$ to jest:

$$B(t) \xrightarrow{t \to \infty} Q_1 e^{rt}$$

Dakle, imamo sljedeću formulu za broj rođenih u trenutku t:

$$B(t) = Q_1 e^{rt}$$

preostaje nam samo izračunati Q_1. Zbog toga što populacija nije stabilna ne možemo direktno primijeniti formulu 1.4 iz prvog poglavlja te izjednačiti Q_1 s početnim brojem žena u populaciji.

Izračunajmo konstantu Q_1. Kao i u prvom poglavlju, broj žena dobi a u trenutku y možemo zapisati kao:

$$\frac{N(a,0)p(a+y)}{p(a)}da$$

tijekom perioda dy te žene rode dB kćeri, to jest imamo:

$$dB = \frac{N(a,0)}{p(a)}p(a+y)m(a+y)dady$$

Prema svojstvu ergodičnosti, kada je proteklo dovoljno vremena populacija koja proizađe iz rođenih kćeri, dB, postat će stabilna. Tada će ukupan broj stanovništva koje proizlazi iz rođenih kćeri, dB, biti eksponencijalna funkcija vremena proteklog od rođenja $(t-y)$. Drugim riječima, za dovoljno veliki t, ukupan broj stanovništva koje proizlazi iz rođenih kćeri, dB, bit će:

$$K\frac{N(a,0)}{p(a)}p(a+y)m(a+y)e^{r(t-y)}dady$$

pri čemu je K konstanta ovisna o funkcijama $m(a)$ i $p(a)$, a r stopa rasta stabilne populacije kojoj početna populacija teži. Ukupan broj žena u populaciji, od žena dobi a u trenutku nula, tada iznosi:

$$dN = K\frac{N(a,0)}{p(a)}da\int_0^{\beta-a} p(a+y)m(a+y)e^{r(t-y)}dy$$

pri čemu je β maksimalna dob kada žena može roditi. Supstitucijom $a+y=x$ dobivamo:

$$dN = K\frac{N(a,0)}{p(a)}dae^{r(t+a)}\int_a^{\beta} p(x)m(x)e^{-rx}dx \tag{2.11}$$

Označimo li s:

$$h(a) = \int_a^{\beta} p(x)m(x)e^{-rx}dx$$

tada jednadžbu 2.11 možemo zapisati kao:

$$dN = Ke^{rt}\frac{N(a,0)}{p(a)}e^{ra}h(a)da$$

Integriramo li ovu jednadžu po svim dobima dobivamo formulu za ukupan broj žena u populaciji:

$$N(t) = Ke^{rt}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{N(a,0)}{p(a)}e^{ra}h(a)da \tag{2.12}$$

Za izračunavanje konstante K pretpostavimo stabilnu populaciju koja odgovara funkcijama $m(a)$ i $p(a)$ početne populacije te kojoj je ukupan početni broj žena u populaciji jednak jedan. Znamo da u stvarnosti ovakve pretpostavke nisu moguće, ali ih koristimo radi lakšeg izračuna konstante, budući da formula 2.12 mora vrijediti za bilo koji izbor stabilne populacije koja odgovara funkcijama $m(a)$ i $p(a)$. Broj žena dobi a u ovoj populaciji dan je formulom:

$$N(a,0) = \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da} * 1$$

Broj žena u vremenu t u ovoj populaciji jedak je $e^{rt}1$. Pa primjenom na formulu 2.12 dobivamo:

$$e^{rt} = Ke^{rt}\int_\alpha^\beta \frac{e^{-ra}p(a)}{\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da}\frac{1}{p(a)}e^{ra}h(a)da$$

iz čega slijedi:

$$\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da = K\int_\alpha^\beta h(a)da$$

Dakle, tražena konstanta K iznosi:

$$K = \frac{\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da}{\int_\alpha^\beta h(a)da}$$

Označimo li s:

$$H(a) = \frac{h(a)}{\int_\alpha^\beta h(a)da} \tag{2.13}$$

tada formulu 2.12 možemo zapisati kao:

$$N(t) = e^{rt}\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da\int_\alpha^\beta \frac{N(a,0)}{p(a)}H(a)e^{ra}da \tag{2.14}$$

Prisjetimo se formule za stopu nataliteta stabilne populacije:

$$b = \frac{1}{\int_0^w e^{-ra}p(a)da}$$

množenje formule 2.14 stopom nataliteta dobivamo formulu za broj rođenih djevojčica u trenutku t:

$$B(t) = e^{rt}\int_\alpha^\beta \frac{N(a,0)}{p(a)}H(a)e^{ra}da$$

iz čega vidimo da je naša tražena konstanta Q_1 jednaka:

$$Q_1 = \int_\alpha^\beta \frac{N(a,0)}{p(a)}H(a)e^{ra}da$$

Promotrimo na primjeru način računanja faktora Q_1 potrebnog za određivanje funkcije broja rođenih.

Primjer. Neka je dana populacija s procijenjenom stopom rasta $r = 0,02$ te sljedećom tablicom:

Dobne skupine	Srednja dob skupine (a)	$N(a, 0)$	$p(a)$	$m(a)$
0-4	2,5	18 900	0,899858	
5-9	7,5	13 970	0,899733	
10-14	12,5	11 960	0,883612	
15-19	17,5	11 100	0,879940	0,100
20-24	22,5	9 870	0,868080	0,273
25-29	27,5	8 240	0,854070	0,263
30-34	32,5	6 580	0,839220	0,188
35-39	37,5	5 490	0,823344	0,121
40-44	42,5	3 740	0,805484	0,055
45-49	47,5	3 740	0,795219	

Da bismo izračunali traženi faktor izračunajmo prvo vrijednost funkcije $H(a)$. Sljedeće dvije tablice prikazuju njezin izračun:

Srednja dob skupine (a)	$p(a)m(a)$	e^{-ra}	$p(a)m(a)e^{-ra}$
17,5	0,08799400	0,70469	0,062008492
22,5	0,23698584	0,63763	0,151109281
27,5	0,22462041	0,57695	0,129594746
32,5	0,15777336	0,52205	0,082365583
37,5	0,09962462	0,47237	0,047059682
42,5	0,04430162	0,42742	0,018935398

a	$p(a)m(a)e^{-ra}$	Aritmetička sredina dvaju uzastopnih brojki prethodnog stupca	Kumulativne vrijednosti prethodnog stupca	$H(a)$
2,5			0,491073180	0,1847
7,5			0,491073180	0,1847
12,5	0,000000000	0,031004246	0,491073180	0,1847
17,5	0,062008492	0,106558886	0,460068934	0,1729
22,5	0,151109281	0,140352013	0,353510048	0,1329
27,5	0,129594746	0,105980164	0,213158035	0,0802
32,5	0,082365583	0,064712632	0,107177871	0,0403
37,5	0,047059682	0,032997540	0,042465239	0,0160
42,5	0,018935398	0,009467699	0,009467699	0,0036
47,5	0,000000000			
Suma			2,659067366	

Zadnji stupac druge tablice smo dobili primjenom formule 2.13, a u trećem stupcu uzimamo aritmetičke sredine zbog vjerodostojnije procjene. Sada nam preostaje izračunati faktor Q_1.

a	$N(a,0)$	$p(a)$	e^{ra}	H(a)	$\frac{N(a,0)}{p(a)}H(a)e^{ra}$
2,5	18 900	0,899858	1,051271096	0,1847	4078,208651
7,5	13 970	0,899733	1,161834243	0,1847	3331,914315
12,5	11 960	0,883612	1,284025417	0,1847	3210,037386
17,5	11 100	0,879940	1,419067549	0,1729	3095,052219
22,5	9 870	0,868080	1,568312185	0,1329	2369,817487
27,5	8 240	0,854070	1,733253018	0,0802	1341,127531
32,5	6 580	0,839220	1,915540829	0,0403	605,2663471
37,5	5 490	0,823344	2,117000017	0,0160	225,8561203
42,5	3 740	0,805484	2,339646852	0,0036	39,10817001
47,5	3 740	0,795219	2,585709659	0,0000	0,00000000
Q_1					18296,38823

Dakle, procijenjena funkcija broja rođenih bi u ovom slučaju imala sljedeći oblik:

$$B(t) = 18296,38823e^{0,02t}$$

Vidimo da je puno teže napraviti procjenu pomoću stabilnog populacijskog modela na nestabilnim nego na stabilnim populacijama, što se moglo pretpostaviti. Čak ni promatranje posebnog slučaja kod nestabilnih populacija ne daje jednostavnu formulu za računanje demografskih značajki.

Promatranje posebnog slučaja

U drugom odjeljku ovog poglavlja spomenuli smo poseban slučaj kada je funkcija fertiliteta $m(a)$ svedena na jednu vrijednost jednak bruto stopi reproduktivnosti u određenoj životnoj dobi, dok su vrijednosti za druge dobi jednake nuli. Funkcija fertiliteta je tada dana s:

$$m(a) = \begin{cases} R', & \text{za } a = 27,5 \\ 0 & \text{za } a \neq 27,5 \end{cases}$$

Promotrimo sada taj slučaj kod procjene demografskih značajki nestabilnih populacija. Znamo da nam je u posebnom slučaju $p(27,5)R' = R_0$ pa je tada Euler-Lotkina karakteristična jednadžba jednaka:

$$e^{-27,5r}R_0 = 1$$

Neka je $r_n = x_n + iy_n$ jedno od kompleksnih rješenja jednadžbe tada imamo:

$$[cos(27,5y_n) + isin(27,5y_n)]e^{-27,5x_n} = \frac{1}{R_0}$$

Odvajanjem realnog od imaginarnog dijela dobivamo sljedeće dvije jednadžbe:

$$e^{-27,5x_n}cos(27,5y_n) = \frac{1}{R_0}$$
$$e^{-27,5x_n}sin(27,5y_n) = 0$$

iz čega slijedi:

$$27,5y_n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$x_n = r$$

Dakle, u ovom je slučaju broj rođenih djevojčica u trenutku t dan formulom:

$$B(t) = Q_1e^{rt} + Q_2e^{rt}cos\frac{2\pi t}{27,5} + Q_3e^{rt}cos\frac{6\pi t}{27,5} + \cdots$$

to jest:

$$B(t) = Q_1e^{rt} + e^{rt}\sum Q_n \cos\frac{2\pi nt}{27,5}$$

Vidimo da se broj rođenih djevojčica u trenutku t asimptotski ne približava niti jednom izrazu. Dakle, oscilacije se ne smanjuju s protekom vremena. U ovom se slučaju stabilno stanje ne pojavljuje kao stanje kojem populacija teži kako se vrijeme povećava već kao prosječna vrijednost. Treba napomenuti da je specijalan slučaj jedini slučaj pri kojem se oscilacije ne smanjuju s protekom vremena. Promatranje specijalnog slučaja dakle postaje vrlo komplicirano pa se za nestabilne populacije u večini slučajeva koristi model koji ne pretpostavlja funkciju fertiliteta svedenu na jednu vrijednost.

Poglavlje 3

Bliska i daleka predviđanja

Već smo spomenuli da jako malo stvarnih populacija ima stabilno ponašanje. Predviđajući buduća ponašanja svjetske populacije i populacije većih regija svijeta stoga isključuje promatranje već stabilne populacije. Predviđanje budućeg ponašanja se stoga svodi na promatranje kojoj stabilnoj populaciji teži promatrana populacija. Osim stabilnog populacijskog modela u ovim se procjenama koriste razni drugi matematički modeli koji su temeljeni na njemu, kao i razne matematičke metode indirektne procjene demografskih značajki. Svake dvije godine Ujedinjeni narodi objavljuju službene procjene i predviđanja demografskih značajki svjetske, regionalne i nacionalne populacije. Zadnji rezultati procjena i predviđanja bliske budućnosti objavljeni su 2017. godine dok su 2004. godine objavljena dugoročna predviđanja koja predviđaju stanje svjetske populacije u razdoblju dugom čak tri stoljeća. Napomenimo da su daleka predviđanja vrlo robusna te prikazuju što bi se s populacijom dogodilo kada bi se prethodno predviđeni demografski trendovi nastavili u budućnosti.

3.1 Bliska budućnost

Predviđanja ponašanja svjetskih populacija u bliskoj budućnosti uključuju predviđanja do 2100. godine. Da bismo promatrali što će se u budućnosti događati sa svjetskom populacijom prvo moramo promotriti stanje populacije u 2017. godini.

Broj stanovnika svijeta 2017. godine bio je gotovo 7,6 milijardi, što znači da se svjetska populacija povećala za otprilike milijardu stanovnika u posljednjih dvanaest godina. Šezdeset posto svjetske populacije živi u Aziji (4,5 milijardi), sedamnaest posto u Africi (1,3 milijardi), deset posto u Europi (742 milijuna), devet posto u Latinskoj Americi i na Karibima (646 milijuna), a preostalih šest posto u Sjevernoj Americi (361 milijuna) i Oceanija (41 milijuna). Kina (1,4 milijardi) i Indija (1,3 milijardi) dvije su najnaseljenije zemlje svijeta, što obuhvaća redom devetnaest i osamnaest posto svjetske populacije.

Na svjetskoj razini, broj muškaraca i žena je otprilike jednak, pri čemu je broj muškaraca neznatno veći od broja žena. Na svakih 100 žena ima 102 muškarca. Dakle, u skupini od 1000 slučajno odabranih ljudi iz svjetske populacije u prosjeku bi bilo 504 muškaraca i 496 žena. Djeca mlađa od 15 godina predstavljaju otprilike četvrtinu stanovnika svijeta, točnije dvadeset i šest posto, dok stariji od 60 ili više godina čine više od osmine stanovnika svijeta, točnije trinaest posto. Više od polovice (šezdeset i jedan posto) svjetskog stanovništva čine odrasle osobe u dobi od 15 do 59 godina. Ako bi ukupnu svjetsku populaciju morali podijeliti na dvije skupine, s istim brojem ljudi, s obzirom na dobnu strukturu stanovništva prva skupina bi činila sve ljude mlađe od 30 godina, a druga sve ljude starije od 30 godina, uključujući ljude od 30 godina.

Možemo zaključiti da u dobnom sastavu svjetskog stanovništva 2017. godine prevladava zrelo stanovništvo. Poznato je da je u razvijenim državama očekivano trajanje života dugo (75 i više godina), a u nerazvijenim kratko (< 59 godina). Što kao posljedicu ima to da najmlađe stanovništvo u svijetu ima Afrika, a najstarije Europa. Nadalje, dobna-spolna struktura svjetske populacije ima oblik piramide što ukazuje na rast broja stanovnika u budućnosti. Spolni sastav stanovništva na svjetskoj razini je jednak, dok je u nerazvijenim državama najčešće više muškaraca nego žena, a u razvijenim zemljama više žena nego muškaraca.

Promatramo li pak stanovništvo Hrvatske 2017. godine vidimo da je ukupan broj stanovnika nešto veći od 4 milijuna ljudi. Udio ženskog stanovništva je nešto veći od udjela muškog stanovništva. Muški dio populacije čini četrdeset i osam posto stanovništva, dok ženski dio populacije čini pedeset i dva posto. Ovo je prirodna pojava jer žene u prosjeku žive duže jer su biološki otporniji organizmi od muškaraca. Djeca mlađa od 15 godina predstavljaju otprilike sedminu stanovnika, točnije petnaest posto, dok stariji od 60 ili više godina čine više od četvrtine stanovnika, točnije dvadeset i sedam posto. Više od polovice (pedeset i osam posto) stanovništva čine odrasle osobe u dobi od 15 do 59 godina. Smatra se da stanovništvo počinje starjeti kada udio stanovništva starijeg od 60 godina prijeđe dvanaest posto. Dakle, stanovništvo Hrvatske stari te spada među najstarije populacije na svijetu. Dobno-spolna struktura populacije Hrvatske ima oblik urne što ukazuje na pad broja stanovnika u budućnosti.

Predviđanja u svijetu

Iako smo vidjeli da je udio stanovništva starijeg od 60 godina veći od dvanaest posto te populacija počinje starjeti, ukupna svjetska populacija zbog većeg udjela mladog stanovništva i zbog dobno-spolne strukture oblika piramide nastavlja rasti.

Danas, svjetsko stanovništvo i dalje raste, iako sporije nego u nedavnoj prošlosti. Do prije deset godina globalno stanovništvo se povećavalo za 1,24 posto godišnje. Danas raste za 1,10 posto godišnje, što rezultira povećanjem svjetske populacije za dodatnih 83 milijuna ljudi svake godine. Prema predviđanjima svjetsko će se stanovništvo povećati za nešto više od milijardu ljudi tijekom idućih 12 godina, dosegnuvši 8,6 milijardi u 2030. godini. Nastavkom rasta stanovništva predviđeni broj ljudi u svijetu će iznositi 9,8 milijardi u 2050. godini te 11,2 milijardi do 2100. godine.

Trenutno stanje svjetske populacije, u kolovozu 2018. godine, iznosi nešto više od 7,63 milijardi ljudi što potvrđuje UN-ova predviđanja u vezi rasta populacije na razini od otprilike 83 milijuna ljudi godišnje. Zabilježen broj ljudi u svijetu 2017. godine bio je 7 550 262 101, dok je u kolovozu 2018. godine zabilježeno otprilike 7 632 819 325 ljudi što čini razliku od 82 557 224, koja bi do kraja godine mogla dosegnut predviđenih 83 milijuna.

Spomenuli smo da su Indija i Kina dvije najmnogoljudnije zemlje svijeta, no zbog svoje politike jednog djeteta populacija Kine je počela starjeti. Iako je Kina ukinula politiku jednog djeteta 2015. godine rast populacije Kine je počeo padati. Predviđa se da će u 2024. godini populacija Indije i Kine biti jednako brojna, čiji će broj ljudi iznositi otprilike 1.44 milijardi stanovnika. Za populaciju Kine se predviđa da će do 2030. godine ostati stabilna, u smislu istog broja ljudi tokom godina, dok se nakon 2030. predviđa padanje broja stanovnika. No ako populaciji Kine počinje padati broj stanovnika kako to da svjetska populacije i dalje raste velikom brzinom? Indija kao i do sad nastavlja svoj rast, ali ne dovoljnom brzinom da bi mogla nadoknadit broj ljudi koji se do sada rađao u Kini. Predviđeni broj stanovnika u Indiji je 1,5 milijardi do 2030., a čak 1,66 milijardi do 2050. godine.

Odgovor na pitanje o daljnjem rastu svjetske populacije krije se u zemljama Afrike. Iako je u afričkim zemljama velika stopa mortaliteta zbog zdravstvenih usluga koje su jako loše i zbog loših uvjeta života, one uvelike doprinose rastu svjetske populacije. U zadnjih nekoliko godina vlade afričkih država poboljšavaju stanje zdravstvenih usluga te se mortalitet smanjuje, posebice mortalitet dojenčadi. Stope fertiliteta u tim zemljama uvijek su bile visoke, žene u prosjeku rađaju više od 5 djeteta tijekom svog života. U bliskoj budućnosti se predviđa da stope fertiliteta u tim zemljama neće padati. Pad mortaliteta, zbog poboljšanja životnih uvjeta i visoka stopa fertiliteta stoga doprinosi sve većem rastu populacija Afrike. Najveći takav rast zabilježen je u populacijama Nigerije, Demokratske Republike Kongo, Tanzanije, Etiopije te Ugande. Do 2050. sedam od 20 najbrojnijih nacija svijeta bit će afričke zemlje. Dakle, više od polovice rasta svjetske populacije do 2050. godine doći će iz afričkih zemalja.

Osim sve većeg broja stanovnika Afrike, zanimljivo je to da UN-ova predviđanja najavljuju smanjenje broja stanovnika Europe. Iako Europske zemlje imaju dobre životne uvjete, stopa totalnog fertiliteta je već sada u većini zemalja Europe manja od 2,1 djeteta po ženi, što ukazuje na smanjenje broja stanovnika. UN-ovi demografi predviđaju da će nekoliko zemalja Europe doživjeti smanjenje broja stanovnika od čak petnaest posto do

2050. godine, uključujući Bugarsku, Hrvatsku, Latviju, Litvu, Poljsku, Republiku Moldaviju, Rumunjsku, Srbiju te Ukrajinu. Iako se predviđa porast stope totalnog fertiliteta Europe s 1,6 djeteta po ženi, na 1,8 djeteta do 2050. godine, ta brojka i dalje nije dostatna niti za održavanje trenutnog broja stanovnika Europe, a kamo li za njegovo povećanje. Dakle, u bliskoj budućnosti broj stanovnika Europe će nastaviti padati, osim ako ne dođe do migracija većih razmjera, koje uključuju migracije ljudi neeuropskih zemalja u Europu.

Promotrimo sada dobnu strukturu stanovništva. U Europi je već 2017. bilo dvadeset i pet posto, od ukupne populacije Europe, osoba starijih od 60 godina. Predviđa se da će se taj udio do 2050. povećati na trideset i pet posto, a do 2100. na trideset i šest posto. Ovaj činjenica nije začuđujuća, zbog niskog fertiliteta i smanjenja populacije Europe logično je zaključiti da će populacija Europe u bliskoj budućnosti biti sve starija. UN-ovi demografi predviđaju da će i stanovništvo drugih regija svijeta također značajno ostarjeti u bliskoj budućnosti.

Spomenuli smo da stanovništvo Kine više ne raste tolikom brzinom, da se fertilitet smanjuje te da se očekuje početak pada broja ljudi u Kini nakon 2030. godine. Posljedica toga je da stanovništvo stari. Kao jedna od najmnogoljudnijih zemalja Azije, uz Indiju, Kina ima veliki utjecaj na dobnu strukturu Azije. Smatra se da će se udio ljudi starijih od 60 u populaciji Azije povećati s dvanaest posto u 2017. godini na čak dvadeset i četiri posto u 2050. godini.

Čak se u Africi, koja ima najmlađe stanovništvo svijeta predviđa da će tijekom narednih desetljeća populacija Afrike doživjeti brzo starenje. S povećanjem udjela broja osoba starijih od 60 godina s pet posto u 2017. godini na devet posto u 2050. godini. Ovu činjenicu možemo pripisati sve dužem životnom vijeku stanovnika Afrike zbog boljih životnih uvjeta.

Dakle, u usporedbi s 2017. godinom, predviđa se da će se broj osoba starijih od 60 godina udvostručiti do 2050., a utrostručiti do 2100. godine. Broj tih osoba će porasti s 962 milijuna u 2017. godini na 2,1 milijardi u 2050. i 3,1 milijardi u 2100.

Promatramo li osobe starije od 80 godina također vidimo da se njihov udio u svjetskoj populaciji naglo povećava. To je jedna od posljedica sve dužeg životnog vijeka ljudi, ali ujedno i starenja svjetske populacije. Predviđa se da će se, u usporedbi s 2017. godinom, broj osoba starijih od 80 godina utrostručiti do 2050., a biti čak sedam puta veći do 2100. godine. Dakle, predviđeni broj tih osoba povećat će se 137 milijuna u 2017. na 425 milijuna u 2050., te čak na 909 milijuna u 2100. godini. Iako je najveći broj osoba starijih od 80 godina u 2017. godini bio u Europi i iznosio čak dvadeset i sedam posto od ukupnog broja osoba starijih od 80, očekuje se da će se taj postotak za Europu smanjiti. Smanjenju tog postotka ne doprinosi smanjenje starenja stanovnika Europe već sve zastupljeniji broj osoba starijih od 80 godina u drugim regijama svijeta.

Iako se u svim regijama svijeta očekuje povećanje broja osoba starijih od 60 te 80 godina, populacija će ostati relativno mlada, barem kratkoročno. Tome doprinose regije u kojima je plodnost visoka, poput Afrike. U Africi je zabilježeno šezdeset posto stanovništva mlađeg od 25 godina u 2017. godini. Ovaj će postotak blago pasti, ali ne značajno, na pedeset i sedam posto do 2030. te će se smanjiti na pedeset posto do 2050. godine. To ostaje jako velik udio mladog stanovništva, a zbog mnogobrojnosti afričke populacije to uvelike doprinosi ukupnoj dobnoj strukturi svijeta.

Zaključujemo da UN-ovi demografi u bliskoj budućnosti predviđanju sporiji rast svjetskog stanovništva te sve veći udio stanovništva starijeg od 60 godina. Afričke će zemlje doživjeti veliki porast, dok će zemlje Europe doživjeti veliki pad broja stanovnika. Zbog velikog porasta stanovnika Afrike dobna-spolna struktura svijeta i dalje će imati oblik piramide. Dakle, u bliskoj budućnosti možemo očekivati sve veći broj svjetske populacije, s nepromijenjenom dobno-spolnom strukturom.

Predviđanja u Hrvatskoj

Hrvatska je među zemljama Europe, a i svijeta koje već neko vrijeme doživljavaju jednu on najnižih stopa fertiliteta. Što kao posljedicu ima starenje stanovništva te pad broja stanovnika. Prognoze za blisku budućnost nisu nimalo drugačije. Ako Hrvatska ne doživi neku veću migraciju iz drugih zemalja čeka je veliko smanjenje broja stanovnika.

Predviđa se da će do 2050. Hrvatska imati 728 000 stanovnika manje nego 2017. godine. Dok bi se broj stanovnika Hrvatske do kraja stoljeća mogao smanjiti na samo 1,67 milijuna. Iako je životni standard u Hrvatskoj, kao i očekivani životni vijek dosta visok, te sve više raste, zbog sve manje stope fertiliteta i iseljavanja mladih u druge dijelove svijeta stanovništvo sve više stari te je sve malobrojnije. Prema UN-ovim podatcima Hrvatska je 2017. imala 4,1 milijuna stanovnika. Demografske projekcije stručnjaka UN-a pokazuju da će se broj stanovnika naše zemlje već 2030. smanjiti na 3,9 milijuna, a sredinu stoljeća dočekat ćemo s 3,4 milijuna stanovnika. To znači da će se broj stanovnika Hrvatske u odnosu na 2017. godinu smanjiti za 17,4 posto.

Očekivani životni vijek u Hrvatskoj je manji od prosjeka očekivanog životnog vijeka Europe ali je u porastu. Godine 2017. očekivani životni vijek iznosio je 78 godina, predviđa se da će se do 2050. životni vijek Hrvata povećati na 82,8 godina, a do kraja stoljeća na čak 88,8 godina. Hrvatska bi zbog sve dužeg životnog vijeka, a sve manje ljudi mogla zapasti u velike gospodarske probleme. Starije stanovništvo zahtjeva održavanje od strane mlađeg stanovništva, dok udio mlađeg stanovništva sve više pada. Smanjenje broja mladog stanovništva znači nedostatak radne snage, što dovodi do pada gospodarstva.

Zabilježena stopa totalnog fertiliteta u Hrvatskoj 2017. bila je 1,45 djeteta po ženi, to je broj djece koje u prosjeku rodi žena tijekom svog života. Da bi populacija ostala jednako brojna, stopa fertiliteta mora biti najmanje 2,1. Hrvatska doživljava malu stopu fertiliteta već nekoliko godina, a posljedice su sve vidljivije. Iako se predviđa povećanje stope fertiliteta do kraja stoljeća, ona i dalje neće doseći stopu od 2,1. Predviđa se povećanje stope na 1,63 do kraja 2050. godine, a do kraja stoljeća na čak 1,78. Pri takvom rastu fertiliteta Hrvatska je i dalje u negativnim demografskim uvjetima. Sve veći negativni demografski trendovi onemogućuju oporavak gospodarstva. Potrebne su demografske mjere koje će potaknuti ljude da ostanu u Hrvatskoj, veća fleksibilnost tržišta rada, jednostavnije zapošljavanje mladih, ali i uvoz radne snage.

Sve gore gospodarsko stanje, sve manji broj ljudi te veći udio starog stanovništva predviđanja su u bliskoj budućnosti. Dakle, ne dođe li do većih migracija ili velike promjene u demografskoj politici, Hrvatska demografska slika u bliskoj budućnosti bit će jako loša.

3.2 Daleka budućnost

Iako predviđanja za blisku budućnost gledamo s velikom pozornošću, a predviđanja za daleku budućnost zanemarujemo, zbog teškoće procjene, Ujedinjeni narodi su 2004. otišli toliko daleko da su pokušali predvidjeti stanje svjetske populacije do čak 2300. godine. Često niti bliska predviđanja nisu ispunjena, zbog raznih faktora, a samim time predvidjeti daleku budućnost izgleda gotovo nemoguće. Iako je znanost sve razvijenija te alati procjene sve bolji, oni ne mogu predvidjet veće katastrofe koje mogu utjecati na populaciju. Svjetski ratovi, globalne promjene, udari asteroida te teške zarazne bolesti uvelike utječu na mnogobrojnost i izgled populacija svijeta pa tako i svjetske populacije općenito. Procjene daleke budućnosti gledamo s velikom opreznošću te imamo na umu da će biti ispunjene ako ne dođe do većih promjena u demografskim trendovima. Napomenimo da su dugoročna predviđanja rađena na osnovi kratkoročnih predviđanja do 2050. koje je UN objavio 2002. godine.

Kako bi proširili predviđanja od 2050. do 2300. potrebne su dodatne pretpostavke. Postoje tri scenarija koja se uzimaju u obzir u ovom dugoročnom predviđanju. Onaj koji je najzanimljiviji i koji ćemo mi promatrati je srednji scenarij. Visoki i niski scenarij bit će objašnjeni te spomenuti kod procjene sveukupne svjetske populacije, za usporedbu, dok će ostala predviđanja biti rađena po modelu srednjeg scenarija. Kada bi stopa fertiliteta ostala nepromijenjena te iznosila 1,85 djeteta po ženi, kao što je predviđeno u svjetskoj populaciji 2050., tada bi pad svjetskog stanovništva bio neizbježan. Umjesno toga promatramo srednji scenarij.

Znamo da neke svjetske populacije imaju visoku stopu fertiliteta, dok neke imaju jako nisku. Srednji scenarij gleda svaku zemlju posebno. U tom se scenariju predviđa da će u svakoj zemlji fertilitet pasti ispod razine potrebne za održavanje broja stanovnika te će tako ostati sljedećih 100 godina, nakon čega će se stopa fertiliteta ponovno povećati na razinu potrebnu za održavanje broja stanovnika. S obzirom na različite demografske značajke pojedinih zemalja period koji će biti potreban da razina fertiliteta padne je različit u svim zemljama. Samim time će i 100 godina niskog fertiliteta biti različit period u svakoj zemlji, što povlači da će godina u kojoj fertilitet ponovno naraste biti drugačija. U predviđanjima se koristi granica od 2175. godine koja je dana da se stopa fertiliteta vrati na razinu potrebnu za održavanje broja stanovnika. Ako fertilitet u određenoj zemlji ne naraste prije 2175. godine, a nije još prošlo 100 godina niskog fertiliteta, pretpostavlja se da će bez obzira na situaciju u zemlji u 2175. godini razina fertiliteta narasti.

Proučavanje visokog i niskog scenarija nije toliko zanimljivo jer ne pretpostavlja promjene razine fertiliteta tijekom godina, već ih fiksira za sve zemlje. U visokom scenariju se predviđa da će stopa fertiliteta biti 0,25 veća, a u niskom 0,25 manja od stope fertiliteta srednjeg scenarija. Ono što ova dva scenarija čini nezanimljivim je činjenica da se kod pada fertiliteta ispod razine potrebne za održavanje stanovništva, u srednjem scenariju, pretpostavlja da će u visokom i niskom scenariju takav fertilitet (za 0,25 veći i manji) ostat nepromijenjen sljedećih 100 godina, bez mogućnosti promjene stope fertiliteta čak niti u uskom intervalu oko predviđene. Jedina promjena kod visokog i niskog scenarija je ta da kada se u srednjem scenariju postigne stopa fertiliteta potrebna za održavanje broja stanovnika tada će se stopa fertiliteta u visokom scenariju povećati za 0,3 te će iznositi 2,35 djeteta po ženi, a u niskom scenariju će se smanjiti za 0,2 te će iznositi 1,85 djeteta po ženi. Takve razine fertiliteta ostati će nepromijenjene te za sve zemlje jednake. Jedina razlika između zemalja je ta što će u nekim zemljama prije doći do smanjenja i povećanja, a u nekima kasnije.

Primijetimo da stabiliziranjem fertiliteta na duži period može doći do ispunjenja uvjeta koji su potrebni kako bi se pojavila stabilna populacija. Mnoge su zemlje svijeta zatvorene na migracije te je jedini uvjet koji još treba biti zadovoljen konstantne dobno-specifične stope mortaliteta. U nekim od zemalja svijeta je i taj uvjet ispunjen te su populacije tih zemalja imale strukturu dviju različitih stabilnih populacija u ovim procjenama. Dakle, za procjenjivanje budućeg ponašanja nekih zemalja u visokom ili niskom scenariju je zasigurno mogao biti primijenjen stabilni populacijski model. Ako pak gledamo svijet kao jednu veliku zemlju i njezina bi populacija uz konstantne dobno-specifične stope mortaliteta također prošla kroz dvije različite stabilne populacije te bi na nju bio primjenjiv stabilni populacijski model. UN-ova predviđanja ne govore puno o stopama mortaliteta, pa ne možemo sa sigurnošću reći da li je na populaciju svijeta ili na neke određene zemlje bio primijenjen model, ali možemo pretpostaviti da je.

Predviđanja u svijetu

Predviđanja svjetske populacije izdana 2002. godine se razlikuju od predviđanja svjetske populacije izdanih 2017. godine. Predviđanja iz 2002. godine govore o porastu stanovništva na 8,92 milijardi do 2050. godine dok predviđanja iz 2017. predviđaju porast stanovništva na 9,8 milijardi. Iz ovoga vidimo koliko je teško predvidjeti buduće stanje svjetske populacije, no razvojem demografije te metoda procjene uspijevamo dobiti sve preciznije odgovore na pitanje što će se dogoditi s populacijom u budućnosti. Predviđanja daleke budućnosti razlikovala bi se da smo promatrali UN-ovo izvješće iz 2017. godine. Stoga, imajmo na umu da su daljnja razmatranja temeljna na izvješću iz 2002. godine.

U predviđanjima daleke budućnosti se za svjetsku populaciju predviđa da će do 2075. dosegnuti svoj maksimalan broj od otprilike 9,22 milijardi stanovnika. Dakle, predviđa se povećanje broja stanovnika od 2050. do 2075. godine. Nakon dostizanja maksimalnog broja očekuje se lagani pad broja stanovnika, te se predviđa da će padanje broja svjetskog stanovništva trajati do 2175. godine nakon koje se predviđa ponovni blagi rast koji bi trebao dosegnuti 8,97 milijardi do 2300. godine. U nadolazećim godinama nakon 2300. predviđa se da će broj svjetskog stanovništva blago varirati oko 9 milijardi, bez značajnog većeg rasta ili pada.

Rast, pad pa opet rast stanovništva uzrokuje pretpostavljeni srednji scenarij. Pad broja svjetskog stanovništva posljedica je sve dužeg životnog vijeka te pada fertiliteta ispod razine potrebne za održavanje jednakog broja stanovnika. Taj pad broja stanovnika nije brz jer je nekim zemljama potrebno i nekoliko desetljeća da fertilitet padne. Analogno tome, rast stanovništva je uzrokovan ponovnim povećanjem stope fertiliteta iznad razine potrebne za održavanje jednakog broja stanovnika. Uzmemo li u obzir visoki ili niski scenarij posljedice su puno drugačije. U slučaju visokog scenarija, pri čemu je stopa fertiliteta za 0,3 veća od stope potrebne za održavanje jednakog broja stanovnika, predviđeni broj stanovnika svijeta je čak četiri puta veći od srednjeg scenarija. Dok je u slučaju niskog scenarija, pri čemu je stopa fertiliteta za 0,2 manja od stope potrebne za održavanje jednakog broja stanovnika, predviđeni broj stanovnika jednak četvrtini broja stanovnika predviđenih srednjim scenarijem.

Iako bi se moglo pretpostaviti da će različite velike regije svijeta i različite zemlje pratiti isti trend kao i svjetska populacija to nije sasvim tako. S obzirom da različite regije i različite zemlje imaju različite početne demografske značajke svaka od njih će imati svoj vremenski period koji će biti potreban za smanjenje fertiliteta te ponovno povećanje; s obzirom da se razvijene i nerazvijene zemlje i regije razlikuju s obzirom na očekivani životni vijek i zastupljenost starijih ljudi u populaciji. Dakle, svaka zemlja i regija će u različitom vremenskom periodu proći kroz pad i rast fertiliteta, te će razlike u vremenu koje je potrebno za pad te ponovni rast uvelike utjecati na izgled svjetskog stanovništva. Kao primjer vremena potrebnog za smanjenje fertiliteta usporedimo stanovništvo Europe i Afrike. Europa će dosegnuti nisku stopu fertiliteta već do 2050. godine, dok će Africi trebati čak 80 godina više.

Znamo da udio stanovništva Europe u ukupnom stanovništvu svijeta pada, dok udio stanovništva Afrike raste. Do 2100. godine se očekuje da će udio stanovnika Europe u svjetskom stanovništvu iznositi nešto manje od šest posto dok će udio stanovnika Afrike u svjetskom stanovništvu iznositi nešto manje od dvadeset i pet posto, a većinski dio stanovništva svijeta će činiti Azija. Kroz razdoblje od 2100. do 2300. godine udio velikih regija u svjetskom stanovništvu će padati i rasti, a do 2300. situacija će biti gotovo ista situaciji u 2100. godini.

Promotrimo sada neke veće regije svijeta, posebno su nam zanimljive one koje smo već promatrali u kratkoročnim predviđanjima: Afrika, Europa i Azija. Afrika i Azija zbog svojeg rastućeg trenda i velikog broja stanovnika, a Europa zbog suprotnog, sve manjeg broja stanovnika i padajućeg trenda.

Spomenuli smo da će Afrika do 2300. činiti približno jednu četvrtinu svjetskog stanovništva. Procjenjuje se da će do 2100. doživjeti rast s procijenjenih 1,8 milijardi 2050. na 2,2 milijarde. Nakon toga se očekuje blagi pad broja stanovnika čiji će broj do 2200. iznositi 2 milijarde, a do 2300. se predviđa ponovni blagi rast stanovnika te broj od 2,1 milijarde. Najveći rast stanovnika Afrika može zahvaliti svojim regijama Zapadne, Istočne i Srednje Afrike, procjenjuje se da će broj stanovnika u tim regijama rasti iako se očekuje da će do 2050. stopa fertiliteta biti jako blizu stope koja je potrebna za održavanje broja stanovnika. Ovu činjenicu kao u prethodno razmatranim kratkoročnim predviđanjima možemo zahvaliti sve boljim zdravstvenim i životnim uvjetima tih dijelova Afrike. U Južnoj Africi je situacija nešto drugačija. Kod nje je vidljivo smanjenje očekivanog životnog vijeka te se takav trend očekuje u bliskoj budućnosti, ali se kroz neko vrijeme predviđa nagli preokret te će Južna Afrika imati najduži životni vijek od svih afričkih regija.

Promatramo li Europu kao regiju situacija je uvelike drugačija nego u Africi. Predviđanja govore o padu broja stanovnika sa 631 milijuna 2050. na 538 milijuna 2100. godine. Vidimo već spomenuto da je Europa u padajućem trendu puno brže nego što će biti Afrika. U Europi se stoga puno prije predviđa i preokret i početak blagog rasta stanovništva te se do 2200. očekuje porast na 573 milijuna stanovnika, te konačni porast na 611 milijuna stanovnika do 2300. godine. Europa svoj rast stanovništva u velikoj mjeri može zahvaliti zapadnom dijelu, dok je rast na istočnom dijelu kontinenta znatno manji. Istočna Europa ima jako nizak očekivani životni vijek, a čak se i dugoročno predviđa da neće sustići druge regije u tom aspektu.

Stanovništvo Azije, baš kao i stanovništvo Europe svoj rast može uvelike zahvaliti zapadnom dijelu, dok je rast na istočnom dijelu kontinenta znatno manji. Zanimljivo je da je brzina rasta Azije puno sporija od brzine rasta Afrike. 2002. godine stanovništvo Azije je bilo 4,5 puta veće od stanovništva Afrike, dok se do 2100. očekuje da će se ta razlika smanjiti te će stanovništvo Azije biti samo 2,2 puta veće. Stanovništvo Azije ima potpuno drugačiji period pada i rasta u odnosu na Europu i Afriku. Do početka pada stanovništva potreban period je sličan kao Europi, ali se taj pad puno duže nastavlja. Predviđa se da će do 2100. godine broj stanovnika Azije pasti s 5,22 milijarde u 2050. godini na 5 milijardi. Do 2200. godini se predviđa još veći pad na 4,7 milijarde, nakon čega slijedi postupan blagi rast stanovništva te konačni porast na 4,9 milijardi do 2300. godine.

Veliko je pitanje kako će izgledati dobna struktura stanovništva u dalekoj budućnosti. Znamo da je zbog sve boljih životnih i zdravstvenih uvjeta očekivani životni vijek sve duži. U dalekoj se budućnosti također predviđa da će očekivani životni vijek sve više rasti, bez neke gornje granice. Predviđa se da će do 2100. očekivani životni vijek iznositi između 66 i 97 godina, ovisno o regiji i zemlji koju promatramo, a do 2300. će se taj broj povećati na interval između 87 i 106 godina. Povećanje očekivanog životnog vijeka očito utječe i na povećanje populacije općenito kao i na povećanje prosječne dobi. Povećanje prosječne dobi svjetske populacije zaista je veliko, dok je 2000. godine prosječna dob iznosila 26 godina, predviđa se da će do 2100. godine prosječna dob iznositi 44 godine, a do 2300. čak 48 godina. Povećanje očekivanog životnog vijeka osim na prosječnu dob utječe i na izgled strukture stanovništva. U periodu između 2100. do 2300. povećat će se udio stanovništva starijeg od 65 godina s dvadeset i četiri posto na trideset i dva posto, dok će se udio stanovništva starijeg od 80 godina udvostručiti s predviđenih 8,5 posto 2100. na sedamnaest posto 2300. Najzanimljivija činjenica i možda najveći postotak rasta će doživjeti stanovništvo starije od 100 godina čiji će se udio u svjetskom stanovništvu povećati s predviđenih 0,2 posto 2100. godine na 1,8 posto 2300. Iako stanovništvo sve više stari, predviđa se da će najveći udio, čak pedeset i dva posto, stanovništva svijeta u 2300. godini čini stanovništvo između 15 i 65 godina.

Iako često čujemo da će u dalekoj budućnosti zemlja biti prenaseljena, ova predviđanja govore drugačije. Stanovništvo je sve starije, a svjetske se politike sve više okreću održavanja broja stanovnika, prije nego njegovom povećanju. Iako postoje područja svijeta koja nisu toliko razvijena i koja utječu na naglo povećanje broja ljudi, u dalekoj budućnosti se predviđa da će se i ta slika promijeniti. Iako su ova predviđanja često predmet kritika, ona nam uvelike mogu pomoći u razumijevanju daljnjeg razvoja svjetske, regionalne i nacionalne populacije. Njihova svrha nije nužno točno procijeniti kako će izgledati populacija u budućnosti, već predvidjeti što bi se s populacijom dogodilo kada bi sadašnji uvjeti ostati nepromijenjeni. Takva previđanja zatim će utjecati na način na koji će svjetske politike usmjeriti svoj demografski razvoj.

Predviđanja u Hrvatskoj

Hrvatska je među zemljama istočne Europe, čiji trend rasta je dosta sporiji od ostatka Europe te čiji je očekivani životni vijek dosta nizak. Kao i trenutno, tako je i u 2002. godini fertilitet bio jako nizak. Zanimljivo je da se unatoč niskom fertilitetu tada i 2017. godine predviđanja za populaciju Hrvatske jako razlikuju.

U kratkoročnim predviđanjima UN-a predviđa se drastičan pad populacije Hrvatske na svega 1,67 milijuna stanovnika do kraja stoljeća. Promatrajući dugoročna predviđanja te zahvaljujući srednjem scenariju slika Hrvatske populacije do kraja ovog stoljeća izgleda puno bolje nego u kratkoročnim predviđanjima. Kratkoročna predviđanja do 2050. iz 2017. godine su vrlo slična predviđanjima iz 2002. godine. 2002. je predviđeno da će do 2050. broj stanovnika Hrvatske iznositi oko 3,5 milijuna, dok su procjene iz 2017.

zabilježile pad na 3,4 milijuna. Predviđanja dalja od 2050. uvelike se razlikuju. Predviđa se da će do 2100. u Hrvatskoj živjeti 3,2 milijuna ljudi, što je i dalje pad s obzirom na trenutan broj stanovnika, ali ne toliko velik kao u kratkoročnim predviđanjima. Daljnje daleke procjene predviđaju blagi rast broja stanovnika te predviđaju da će do 2200. Hrvatska imati oko 3,5 milijuna stanovnika, a do 2300. godine 3,7 milijuna.

Hrvatska je među zemljama istočne Europe čiji je životni vijek manji od životnog vijeka ostatka Europe, ali je u porastu. Povećanje životnog vijeka nešto je sporije u dugoročnim predviđanjima nego kratkoročnim, predviđa se da će do 2050. očekivani životni vijek iznositi 80,3 godina. Do kraja stoljeća se previđa povećanje na 85,6 godina, dok se u 2300. godini očekuje životni vijek od 98,2 godina. Unatoč tome, iako starije stanovništvo zahtjeva održavanje od strane mlađeg stanovništva, ostvare li se dugoročna predviđanja o blagom porastu stanovnika, Hrvatska ima manje izglede upasti u gospodarske probleme nego u situaciji koja je predviđena kratkoročnim predviđanjima.

Promatramo li predviđeni fertilitet Hrvatske, u dalekim predviđanjima, možemo reći da je on vrlo daleko od stvarnog fertiliteta zabilježenog 2017. godine koji iznosi 1,45. Predviđanja govore o porastu fertiliteta od 2002. godine do 2150., pri čemu je fertilitet u Hrvatskoj u 2002. iznosio 1,65 djece po ženi, a predviđena stopa u 2150. godini iznosi 2,066. Već iz ovoga vidimo da gledanje srednjeg scenarija za Hrvatsku i takav način predviđanja ponašanja fertiliteta nije najbolje rješenje. Za razdoblje od 2002. do 2300. se očekuje povećanje fertiliteta na stopu od 2,061 djeteta po ženi, koja se smanjila u odnosu na predviđenu stopu od 2,066 u 2150. godini.

Dugoročna predviđanja za populaciju Hrvatske daju puno ljepšu sliku nego kratkoročna. Usprkos tome, vidjeli smo da ona nisu ispunjena niti za ovaj kratak period koji je do sad protekao pa nije pogrešno sumnjati u njihovo ostvarivanje na duže vrijeme. Premda možda nisu sasvim točna, ta predviđanjima nam govore u kojem smjeru bi populacija Hrvatske mogla ići promjeni li se dosadašnje stanje. Dakle, želimo li vidjeti bolju demografsku sliku Hrvatske, mnoge promjene moraju biti ostvarene.

Bibliografija

[1] Samuel Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot: *Demography: Measuring and Modeling Population Processes*, Blackwell Publishers, Oxford, 2001.

[2] United Nations: *The concept of a stable population - application to the study of populations of countries with incomplete demographic statistics*, United Nations Publications, Sales No. E.65.XIII.3, New York, 1968.

[3] James Holland Jones, *Population Growth in Continuous Time*: `https://web.stanford.edu/ jhj1/teachingdocs/Jones-Renewal050508.pdf`

[4] Nicolas Bacaër: *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer, London, 2011.

[5] United Nations: *World Population Prospects: The 2017 Revision*, United Nations Publications, New York, 2017.

[6] United Nations: *World Population To 2300*, United Nations Publications, New York, 2004.

[7] Doriano-Boris Pougaza: *The Lotka Integral Equation as a Stable Population Model*, African Institute for Mathematical Sciences, 2007.

Sažetak

U ovom diplomskom radu prikazana su svojstva stabilnog populacijskog modela te primjena istih u praksi.

Nakon što je prikazana osnovna definicija stabilnog populacijskog modela izvedene su bitne jednadžbe koje ga karakteriziraju. Pomoću tih jednadžbi objašnjen je utjecaj promjena ključnih elemenata stabilne populacije na samu stabilnu populaciju. Nakon toga je prikazan niz metoda za procjenu demografskih značajki stvarnih populacija te njihove primjene na stabilnim i nestabilnim populacijama.

Na kraju su prikazana bliska i daleka predviđanja, objavljena od strane Ujedinjenih naroda, koja koriste razne demografske modele koji uključuju i stabilni populacijski model kao i razne matematičke metode indirektne procjene demografskih značajki. Prikazana su predviđanja za svjetsku populaciju, populaciju nekih velikih regija svijeta i populaciju Hrvatske.

Summary

In this thesis, the characteristics of a stable population model are presented along with their application in practice.

After the basic definition of a stable population model is presented, some important equations that characterize it are derived. Using these equations, the impact of changing the key elements of a stable population to the stable population itself is explained. After that, a number of methods for estimating the demographic characteristics of the real populations are presented and have been introduced to their application in stable and non-stable populations.

Finally, close and far-reaching projections are presented, that are published by the United Nations, using various demographic models that include a stable population model as well as various mathematical methods of indirect estimation of demographic measures. Projections are presented for the world population, the population of some of the major regions of the world and the population of Croatia.

Životopis

Jelena Svržnjak rođena je 18. rujna 1994. godine u Zagrebu, gdje je pohađala Osnovnu školu Remete te III. gimnaziju, opći smjer. Nakon završetka srednje škole, 2013. godine upisuje preddiplomski studij Matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka istog 2016. godine upisuje diplomski studij Matematičke statistike na istom fakultetu.