Bressanov problem miješanja

Tomić, Marin

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marin Tomić

BRESSANOV PROBLEM MIJEŠANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Oznake i preliminarni rezultati **2**
1.1 Oznake . . . 2
1.2 Preliminarni rezultati . . . 3

2 Bressanov problem miješanja **7**
2.1 Miješanje u Lagrangeovim koordinatama . . . 7
2.2 Miješanje u Eulerovim koordinatama . . . 9
2.3 Osnovni rezultati i napomene . . . 14

3 Bianchinijeve polunorme **18**
3.1 Definicija i svojstva Bianchinijevih polunormi . . . 18

4 Problem miješanja u 1D **21**
4.1 Problem preslagivanja . . . 21

5 Problem miješanja u više dimenzija **26**
5.1 Pristup pomoću singularnih integrala . . . 26
5.2 Diskretni 2D problem . . . 29

Bibliografija **34**

Uvod

U ovom radu izučavat ćemo problem miješanja fluida koji je formulirao Bressan [2, 3].

U prvom poglavlju dajemo pregled notacije i nekih korištenih rezultata.

U drugom poglavlju dajemo rigoroznu formulaciju problema u Lagrangeovim i Eulerovim koordinatama i pokazujemo neke osnovne činjenice vezane uz problem.

U trećem poglavlju definiramo veličine nazvane Bianchinijeve polunorme, koje je prvi uveo Stefano Bianchini u svom radu [1] vezanom uz jednodimenzionalni problem miješanja, te pokazujemo povezanost između tih veličina i Bressanovog problema.

U četvrtom poglavlju prikazujemo jednu jednodimenzionalnu varijantu problema, koju je riješio Bressan u istom radu [2] u kojem postavlja dvodimenzionalnu formulaciju te donosimo alternativni dokaz po uzoru na Bianchinijev dokaz iz [1].

U petom poglavlju prikazujemo aktualne rezultate vezane uz višedimenzionalni problem miješanja. Prikazujemo dokaz koji su dali Hadžić, Seeger, Smart i Street [6] za slabiju varijantu Bressanove slutnje, u kojoj je L^1-norma zamijenjena većom L^p-normom za neki $p > 1$. Također prikazujemo rješenje jedne dvodimenzionalne, diskretne varijante problema istih autora.

Zahvaljujem Vjekoslavu Kovaču na mnogobrojnim korisnim prijedlozima, savjetima i odgovorima pri izradi ovog diplomskog rada.

Poglavlje 1

Oznake i preliminarni rezultati

1.1 Oznake

U ovom odjeljku donosimo pregled oznaka, od kojih bi neke mogle biti nestandardne.

S $\mathbb{T}^d$ označavamo d-dimenzionalni torus $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, čije točke opisujemo koordinatama $x = (x_1, \ldots, x_d), x_i \in [0, 1\rangle$. S $|\cdot|$ označavamo mjeru na $\mathbb{T}^d$ induciranu Lebesgueovom mjerom na $\mathbb{R}^d$ putem poistovjećivanja torusa sa skupom $[0, 1\rangle \subset \mathbb{R}^d$, a s $d(\cdot, \cdot)$ metriku induciranu Euklidskom metrikom na $\mathbb{R}^d$ putem kvocijentiranja po cjelobrojnoj rešetci $\mathbb{Z}^d$. S $B_r(x)$ označavamo kuglu radijusa $r > 0$ sa središtem u $x \in \mathbb{T}^d$ u danoj metrici. S V_d označavamo volumen jedinične kugle u $\mathbb{R}^d$. S $\mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ označavamo tangencijalni svežanj torusa $\mathbb{T}^d$. Funkcije na $\mathbb{T}^d$ možemo promatrati i kao 1-periodične funkcije na $\mathbb{R}^d$ pa se standardni rezultati iz analize na $\mathbb{R}^d$ lako prenose na torus. Za dvije realne funkcije $f, g\colon \mathbb{T}^d \to R$ ćemo s $f * g$ označavati njihovu konvoluciju.

Za realnu funkciju $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ ćemo s $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označavati njenu i-tu parcijalnu derivaciju, a s ∇f vektor njenih parcijalnih derivacija, odnosno njen gradijent. Za vektorsku funkciju $\vec{v}\colon \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ s v_i označavamo njene komponentne funkcije, s $D\vec{v}$ njenu totalnu derivaciju ili diferencijal, u kanonskoj bazi dan matricom

$$D\vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial v_d}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{bmatrix},$$

a s $\operatorname{div} \vec{v}$ njenu divergenciju

$$\operatorname{div}_x \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Kod funkcija koje ovise o vremenu ćemo dodati x u donji indeks kako bismo naznačili da se neka operacija radi samo po prostornim varijablama, pa ćemo tako pisati $\nabla_x f$, $D_x \vec{v}$ ili $\operatorname{div}_x \vec{v}$.

Pod pojmom glatke funkcije na nekom otvorenom skupu Ω, osim ako je drukčije naglašeno, podrazumijevamo funkciju klase $C^\infty(\Omega)$. Ako skup Ω nije otvoren, pod glatkom funkcijom podrazumijevamo funkciju koja se može proširiti do funkcije iz $C^\infty(\Omega')$ za neki otvoreni nadskup Ω' od Ω.

Za dvije funkcije, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, definirane na istom skupu X pisat ćemo

$$f \lesssim g,$$

ako postoji konačna konstanta $C > 0$ takva da za svaki $x \in X$ vrijedi $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$. Pretpostavimo da imamo još neku kolekciju parametara P. Ako implicitna veličina C zapravo nije konstantna, već ovisi o parametrima iz P i samo o njima, tada ćemo to notacijski naglasiti:

$$f \lesssim_P g.$$

Svojstva relacije $\lesssim$ krajnje su očita, a mogu se naći popisana u [8, odjeljak 1.3].

Skupovnu operaciju simetrične razlike ćemo označavati sa $A \triangle B$,

$$|A \triangle B| = |A \setminus B| \cup |B \setminus A|.$$

Za dva izmjeriva skupa ćemo reći da su g.s. jednaki ako je $|A \triangle B| = 0$.

1.2 Preliminarni rezultati

Jacobijeva formula

Važan sastojak u dokazu da tok inkompresibilnog vektorskog polja čuva mjeru je sljedeća formula.

Teorem 1.2.1. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $A\colon I \to M_n(\mathbb{R})$ glatka matrična funkcija. Tada vrijedi:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det A(t)) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(t))\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t)\right),$$

pri čemu $\operatorname{adj}(B)$ *označava adjunktu matrice* B.

Dokaz. Neka je $F\colon \mathbb{R}^{n^2} \to R$ funkcija definirana s

$$F(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) = \det{(a_{ij})_{i,j=1}^n}.$$

Raspišemo li F pomoću Laplaceovog razvoja:

$$F(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

nije teško vidjeti da je

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) = (-1)^{i+j} A_{ij},$$

gdje sa A_{ij} označavamo determinantu matrice dobivene uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca iz matrice $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Vidimo da je zapravo $\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = \operatorname{adj}(A)_{ji}$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det A(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det F(a_{11}(t), \dots, a_{nn}(t))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(a_{11}(t), \dots, a_{nn}(t)) \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{adj}(A(t)))_{ji} \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) \right)_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{adj}(A(t)) \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) \right)_{ii} \\
&= \operatorname{tr} \left(\operatorname{adj}(A(t)) \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) \right).
\end{aligned}$$

□

Preslikavanja koja čuvaju mjeru

Neka su $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ i $(Y, \mathcal{G}, \mu)$ dva prostora mjere i neka je $\varphi\colon X \to Y$ izmjerivo preslikavanje između njih. Reći ćemo da φ *čuva mjeru* ako za svaki izmjeriv skup $F \in \mathcal{G}$ vrijedi $\lambda(\varphi^{-1}(F)) = \mu(F)$. Za takva preslikavanja imamo sljedeći rezultat koji ćemo često koristiti.

Propozicija 1.2.2. *Neka su $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ i $(Y, \mathcal{G}, \mu)$ dva prostora mjere i neka je $\varphi\colon X \to Y$ izmjerivo preslikavanje između njih koje čuva mjeru. Tada za svaku integrabilnu funkciju $f\colon Y \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_X (f \circ \varphi)(x) \, \mathrm{d}\lambda = \int_Y f(y) \, \mathrm{d}\mu.$$

Također, za svaki izmjeriv skup $F \subset Y$ vrijedi:

$$\int_{\varphi^{-1}(F)} (f \circ \varphi)(x) \, \mathrm{d}\lambda = \int_F f(y) \, \mathrm{d}\mu.$$

Dokaz. Prvu tvrdnju možemo pokazati Lebesgueovom indukcijom.

Prvo tvrdnju dokazujemo za karakterističnu funkciju izmjerivog skupa $F \subset Y$, $f = \mathbb{1}_F$. Imamo:

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \varphi)(y) \, \mathrm{d}\lambda &= \int_X \mathbb{1}_F(\varphi(y)) \, \mathrm{d}\lambda = \int_X \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(F)}(y) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \lambda(\varphi^{-1}(F)) = \mu(F) = \int_Y \mathbb{1}_F(y) \, \mathrm{d}\mu = \int_Y f(y) \, \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtoj jednakosti koristili da φ čuva mjeru.

Neka je sada f nenegativna, jednostavna, izmjeriva funkcija, tj.

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{F_i},$$

pri čemu su $a_i > 0, F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{G}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \varphi)(x) \, \mathrm{d}\lambda &= \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{F_i}(\varphi(x)) \right) \mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_X \mathbb{1}_{F_i}(\varphi(x)) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_Y \mathbb{1}_{F_i}(y) \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{F_i}(y) \right) \mathrm{d}\mu = \int_Y f(y) \, \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj i četvrtoj jednakosti koristili linearnost integrala, a u trećoj tvrnju pokazanu u prvom koraku.

Dalje uzmimo da je f nenegativna izmjeriva funkcija. Tada znamo da postoji rastući niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jednostavnih nenegativnih izmjerivih funkcija takav da je $\lim_n f_n = f$. Koristeći činjenicu da je $f_n \circ \varphi$ također rastući niz jednostavnih nenegativnih izmjerivih funkcija, i da je $\lim_n (f_n \circ \varphi) = f \circ \varphi$, možemo računati

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \varphi)(x) \, \mathrm{d}\lambda &= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} (f_n \circ \varphi) \right) (x) \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n \circ \varphi)(x) \, \mathrm{d}\lambda \\ = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n(y) \, \mathrm{d}\mu &= \int_Y \left(\lim_{n\to\infty} f_n(y) \right) \mathrm{d}\mu = \int_Y f(y) \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

U drugoj i četvrtoj tvrdnji koristimo Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji, a u trećoj tvrdnju iz prethodnog koraka.

Konačno, neka je f izmjeriva funkcija. Tada f možemo prikazati kao $f = f^+ + f^-$. Kako f^+ i f^- zadovoljavaju uvjete iz prethodnog koraka, te je $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ i $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$ imamo:

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \varphi)(x)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_X (f \circ \varphi)^+(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int_X (f \circ \varphi)^-(x)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_X (f^+ \circ \varphi)(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int_X (f^- \circ \varphi)(x)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_Y f^+(y)\,\mathrm{d}\mu - \int_Y f^-(y)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_Y f(y)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Sada možemo dokazati drugu tvrdnju:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^{-1}(F)} (f \circ \varphi)(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_X (f \circ \varphi)(x)\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(F)}(x)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_X \left((f\mathbb{1}_F) \circ \varphi\right)(x)\,\mathrm{d}\lambda \\ = \int_Y (f\mathbb{1}_F)(y)\,\mathrm{d}\mu = \int_F f(y)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

Osnovna lema varijacijskog računa

Važan alat u dokazivanju jedinstvenosti slabih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je sljedeći rezultat, u literaturi poznat pod nazivom osnovna lema varijacijskog računa.

Teorem 1.2.3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren te neka je f funkcija iz $L^1_{loc}(\Omega)$ koja zadovoljava*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tada je $f = 0$ u $L^1(\Omega)$, odnosno f je jednaka 0 g.s.

Gornji teorem, kao i njegov dokaz, može se naći u [7] kao lema 3.2.3.

Poglavlje 2

Bressanov problem miješanja

Promatramo torus ispunjen s dva fluida, crnim i bijelim, koji se miješaju pod utjecajem vremenski zavisnog vektorskog polja $\vec{v}$. U početnom trenutku je jedna polovica torusa ispunjena crnim, a druga bijelim fluidom, a u trenutku T zauzimaju neku konfiguraciju, kao na slici 2. Reći ćemo da su fluidi izmiješani do na veličinu $\varepsilon > 0$ ako u trenutku T u svakoj kugli radijusa ε možemo naći određeni udio oba fluida. Intuitivno, vektorsko polje koje dobro miješa fluide mora biti daleko od konstantnog jer čestice koje su na početku bile blizu mora usmjeriti na udaljena mjesta. Kao mjeru ,,truda" uloženog u miješanje, odnosno udaljenosti vektorskog polja od konstantnog, uvodimo veličinu

$$\int_0^T \|D_x \vec{v}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \,\mathrm{d}t.$$

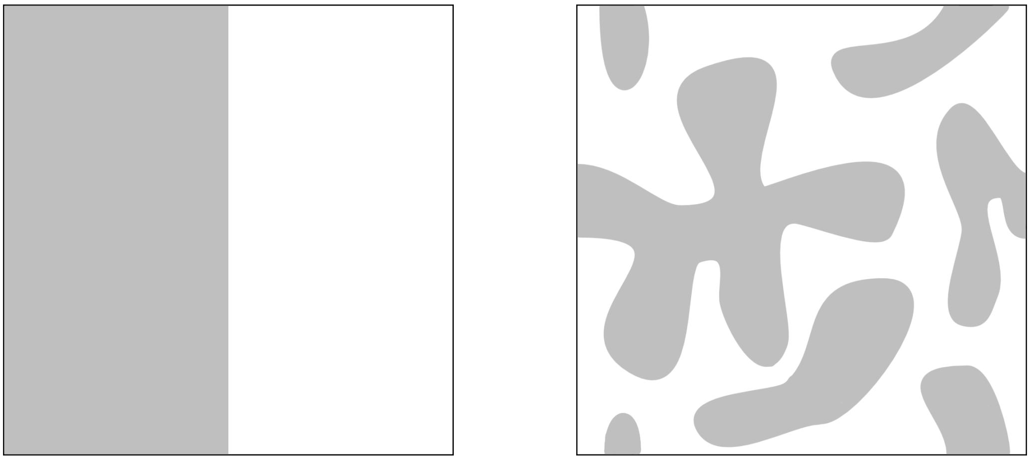
Alberto Bressan postavio je hipotezu da ,,trud" ili ,,trošak" nužan za miješanje do na veličinu ε raste kao $\log(1/\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$.

2.1 Miješanje u Lagrangeovim koordinatama

Definicija 2.1.1. *Izmjerivi skup $E \subset \mathbb{T}^d$ je izmiješan do na veličinu $r > 0$ s konstantom miješanja $\kappa \in \langle 0, 1/2\rangle$ ako vrijedi*

$$\kappa \leqslant \frac{|E \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} \leqslant 1 - \kappa, \quad \forall x \in \mathbb{T}^d.$$

Neka je $\vec{v}\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ vremenski zavisno vektorsko polje s vrijednostima u tangencijalnom svežnju torusa. Njegov *tok* je preslikavanje $\Phi\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$



$t = 0$ $t = T$

Slika 2.1: Fluidi prije i nakon miješanja pod utjecajem vektorskog polja.

koje zadovoljava Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = \vec{v}(t, \Phi(t, x)), & \forall (t, x) \in \langle 0, T\rangle \times \mathbb{T}^d, \\ \Phi(0, x) = x, & \forall x \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \tag{2.1}$$

Postojanje toka za glatka vektorska polja daje nam sljedeći teorem. Dokaz se može naći u [4].

Teorem 2.1.2. *Neka je* $\vec{v}\colon [0, T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *glatko vektorsko polje. Tada postoji glatko preslikavanje* $\Phi\colon [0, T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ *koje zadovoljava Cauchyjevu zadaću 2.1.*

Ako je $\operatorname{div}_x \vec{v}(t, x) = 0$ za sve $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}^d$, kažemo da je vektorsko polje $\vec{v}$ *solenoidalno* ili *inkompresibilno*, a za njegov tok također kažemo da je *inkompresibilan*. Za svaki $t \in [0, T]$ s Φ_t ćemo označavati preslikavanje $x \mapsto \Phi(t, x)$. Za inkompresibilne tokove vrijedi sljedeća važna činjenica.

Propozicija 2.1.3. *Neka je* $\vec{v}\colon [0, T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *glatko i ograničeno inkompresibilno vektorsko polje i neka je* Φ *njegov tok. Tada je za svaki* $t \in [0, T]$ *preslikavanje* Φ_t *glatki difeomorfizam koji čuva mjeru.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $\det D_x \Phi_t(t, x) = 1$ za sve $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}^d$. Primjenom Jacobijeve formule za derivaciju determinante dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\det D_x \Phi(t, x)\big) = \operatorname{tr}\Big(\operatorname{adj}(D_x \Phi(t, x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D_x \Phi(t, x))\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}\Big(\operatorname{adj}(D_x\Phi(t,x))D_x\big(\vec{v}(t,\Phi(t,x))\big)\Big)\\
&= \operatorname{tr}\Big(\operatorname{adj}(D_x\Phi(t,x))D_x\vec{v}(t,\Phi(t,x)D_x\Phi(t,x)\Big)\\
&= \operatorname{tr}\Big(D_x\vec{v}(t,\Phi(t,x)D_x\Phi(t,x)\operatorname{adj}(D_x\Phi(t,x))\Big)\\
&= \operatorname{tr}\Big(D_x\vec{v}(t,\Phi(t,x))\Big)\det D_x\Phi(t,x)\\
&= \operatorname{div}_x\vec{v}(t,\Phi(t,x))\det D_x\Phi(t,x) = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi $\det D_x\Phi(t,x) = \det D_x\Phi(0,x)$, a zbog početnog uvjeta $\Phi(0,x) = x$ je $\det D_x\Phi(0,x) = 1$ pa slijedi tvrdnja. $\square$

Neka $E \subset \mathbb{T}^d$ predstavlja područje ispunjeno jednim fluidom, a E^c drugim. Iz prethodne propozicije slijedi da je $|\Phi_t(E)| = |E|$ za sve $t \in [0,T]$, odnosno volumen oba fluida je očuvan kroz vrijeme. Stoga ima smisla reći da tok Φ_t miješa fluide.

Definicija 2.1.4. *Kažemo da tok $\Phi\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ miješa skup $E \subset \mathbb{T}^d$ do na veličinu $\varepsilon > 0$ s konstantom miješanja $\kappa \in \langle 0, 1/2\rangle$ ako skup $\Phi_T(E)$ zadovoljava definiciju 2.1.1 s istim konstantama.*

Bressan je u [3] formulirao sljedeću slutnju za čije razrješenje nudi \$500.

Slutnja 2.1.5. *Razdijelimo $\mathbb{T}^d$ na disjunktnu uniju $\Omega_L \cup \Omega_R$ na sljedeći način:*

$$
\Omega_L := \left\{x \in \mathbb{T}^d : 0 \leqslant x_1 < 1/2\right\}, \quad \Omega_R := \left\{x \in \mathbb{T}^d : 1/2 \leqslant x_1 < 1\right\}.
$$

Za svaki ε dovoljno mali i za svako glatko inkompresibilno vektorsko polje $\vec{v}\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ čiji tok Φ miješa skup Ω_L do na veličinu ε s konstantom miješanja κ vrijedi

$$
\int_0^T \|D_x(t,\cdot)\vec{v}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\,\mathrm{d}t \gtrsim_{\kappa,d} \log(1/\varepsilon).
$$

2.2 Miješanje u Eulerovim koordinatama

Problem miješanja možemo promatrati iz materijalnog i iz prostornog koordinatnog sustava. U ovom odjeljku ćemo formulirati problem iz prethodnog odjeljka u prostornim koordinatama. Ovakva formulacija koristi se npr. u [9].

Neka je $\theta\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ skalarno polje pod utjecajem polja brzine $\vec{v}\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$. Polja θ i $\vec{v}$ zadovoljavaju sljedeću Cauchyjevu zadaću:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\theta\vec{v}) = 0, & \text{na } \langle 0,T\rangle\times\mathbb{T}^d,\\
\theta(0,\cdot) = \theta_0 & \text{na } \mathbb{T}^d.
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

U slučaju inkompresibilnog vektorskog polja imamo:

$$\mathrm{div}_x(\theta\vec{v}) = \theta\,\mathrm{div}_x\,\vec{v} + \nabla_x\theta\cdot\vec{v},$$

pa diferencijalna jednadžba iz 2.2 prelazi u

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla_x\theta\cdot\vec{v} = 0.$$

Tada nam egzistenciju i jedinstvenost rješenja u klasičnom smislu daje sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1. *Neka je $v\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ glatko i ograničeno vektorsko polje, te neka je $\theta_0 \in C^1(\mathbb{T}^d)$. Tada Cauchyjeva zadaća 2.2 ima jedinstveno rješenje $\theta \in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^d)$.*

Dokaz. Iz teorema 2.1.2 znamo da postoji glatki tok Φ vektorskog polja v. Za svaki $t\in[0,T]$ je preslikavanje Φ_t glatki difeomorfizam, što znači da ima glatki inverz Φ_t^{-1}. Stoga možemo definirati preslikavanje $\theta\colon [0,T]\times\mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ s $\theta(t,x) = \theta_0(\Phi_t^{-1}(x))$ koje je glatko kao kompozicija glatkih preslikavanja. Lako je vidjeti da θ zadovoljava početni uvjet. Također imamo:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta(t,\Phi(t,x))) = \frac{\partial\theta}{\partial t}(t,\Phi(t,x)) + \nabla_x\theta(t,\Phi(t,x))\cdot\vec{v}(t,\Phi(t,x)).$$

Uvrštavanjem $\Phi_t^{-1}(x)$ dobivamo da θ zadovoljava i diferencijalnu jednadžbu, čime smo pokazali egzistenciju rješenja.

Budući da je jednadžba linearna, da bismo pokazali jedinstvenost rješenja, dovoljno je pokazati da je jedino rješenje za početni uvjet $\theta_0 = 0$ upravo nul-funkcija. Množenjem diferencijalne jednadžbe s 2θ dobijemo

$$2\theta\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2\theta\nabla_x\theta\cdot\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\theta^2) + \nabla_x(\theta^2)\cdot\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\theta^2) + \mathrm{div}_x(\theta^2\vec{v}) = 0.$$

Integriranjem po $\mathbb{T}^d$ za fiksan t i primjenom teorema o divergenciji slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^d}\theta^2(t,x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{div}_x(\theta^2\vec{v})\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dakle, L^2-norma rješenja je očuvana, pa ako je $\theta(0,\cdot) = 0$, onda je θ nul-funkcija. $\square$

U duhu definicija 2.1.1 i 2.1.4 dajemo sljedeće dvije definicije.

Definicija 2.2.2. *Reći ćemo da je funkcija $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ izmiješana do na veličinu $\varepsilon > 0$ s konstantom miješanja $\mu \in \langle 0, 1\rangle$ ako vrijedi*

$$\frac{\|f * \chi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}} \leqslant \mu,$$

pri čemu je χ_ε karakteristična funkcija kugle radijusa ε normalizirana tako da je $\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} = 1$.

Definicija 2.2.3. *Vektorsko polje $v\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ miješa funkciju θ_0 do na veličinu $\varepsilon > 0$ s konstantom miješanja $\mu \in \langle 0, 1\rangle$ ako je rješenje Cauchyjeve zadaće θ u trenutku T izmiješano s istim konstantama, odnosno ako funkcija $\theta(T, \cdot)$ zadovoljava uvjete definicije 2.2.2.*

Vezu među definicijama 2.1.4 i 2.2.3 otkriva nam sljedeća propozicija.

Propozicija 2.2.4. *Skup $E \subset \mathbb{T}^d$ izmiješan je do na veličinu ε s konstantom miješanja κ ako i samo ako je funkcija $f_E = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E^c}$ izmiješana do na veličinu ε s konstantom miješanja $\mu = 1 - 2\kappa$.*

Dokaz. Uočimo da je $f_E = 2 \cdot \mathbb{1}_E - 1$. Imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
& \kappa \leqslant \frac{|E \cap B_\varepsilon(x)|}{|B_\varepsilon(x)|} \leqslant 1 - \kappa, && \forall x \in \mathbb{T}^d \\
\iff\ & \kappa \leqslant (\mathbb{1}_E * \chi_\varepsilon)(x) \leqslant 1 - \kappa, && \forall x \in \mathbb{T}^d \\
\iff\ & 2\kappa - 1 \leqslant ((2 \cdot \mathbb{1}_E - 1) * \chi_\varepsilon)(x) \leqslant 1 - 2\kappa, && \forall x \in \mathbb{T}^d \\
\iff\ & |((2 \cdot \mathbb{1}_E - 1) * \chi_\varepsilon)(x)| \leqslant 1 - 2\kappa, && \forall x \in \mathbb{T}^d \\
\iff\ & (f_E * \chi_\varepsilon)(x) \leqslant 1 - 2\kappa, && \forall x \in \mathbb{T}^d \\
\iff\ & \|f_E * \chi_\varepsilon)(x)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \leqslant (1 - 2\kappa)\|f_E\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \\
\iff\ & \frac{\|f_E * \chi_\varepsilon)(x)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\|}{\|f_E\|_{L^\infty}} \leqslant 1 - 2\kappa = \mu.
\end{aligned}$$

□

Za naše potrebe, teorem 2.2.1 i klasični pojam rješenja Cauchjeve zadaće neće biti dovoljni jer želimo početni uvjet $\theta_0 = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E^c}$ koji nije gladak. Množenjem diferencijalne jednadžbe iz 2.2 s $\varphi \in C_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbb{T}^d)$ i primjenom parcijalne integracije dobivamo da vrijedi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta(t,x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x) \cdot \nabla_x \varphi(t,x) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = - \int_{\mathbb{T}^d} \theta_0(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Gornji integral ima smisla čim su θ_0 i θ integrabilne pa dajemo sljedeću definiciju slabog rješenje zadaće 2.2.

Definicija 2.2.5. *Neka je* $\vec{b}\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *glatko i* $\theta_0 \in L^1(\mathbb{T}^d)$. *Funkcija* $\theta \in L^1([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ *je slabo rješenje Cauchyjeve zadaće 2.2 ako za svaki* $\varphi \in C_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbb{T}^d)$ *vrijedi*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}^d}\theta_0(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da je slabo rješenje zbilja proširenje pojma klasičnog rješenja govori nam sljedeći teorem.

Teorem 2.2.6. *Ako je* θ *slabo rješenje u smislu definicije 2.2.5 koje je još i glatko, onda je* θ *rješenje Cauchyjeve zadaće 2.2 i u klasičnom smislu.*

Dokaz. Budući da je θ glatka funkcija, možemo provesti postupak parcijalne integracije unatrag i vratiti na početni oblik integralne jednadžbe:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x)\cdot\nabla_x\theta(t,x)\right)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Primjenom osnovne leme varijacijskog računa za neprekidne funkcije, slijedi da je diferencijalna jednadžba zadovoljena. $\square$

Teorem 2.2.7. *Slabo rješenje Cauchyjeve zadaće postoji i jedinstveno je.*

Dokaz. Kao i u dokazu teorema 2.2.1, definirat ćemo funkciju $\theta\colon [0,T]\times\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ s $\theta(t,x) = \theta_0(\Phi_t^{-1}(x))$. Pokažimo da je θ zbilja slabo rješenje. Koristeći činjenicu da preslikavanja Φ_t čuvaju mjeru, računamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta_0(\Phi_t^{-1}(x))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta_0(x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\Phi(t,x)) + \vec{v}(t,\Phi(t,x))\cdot\nabla_x\varphi(t,\Phi(t,x))\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta_0(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varphi(t,\Phi(t,x))\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}^d}\theta_0(x)\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varphi(t,\Phi(t,x))\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{\mathbb{T}^d}\theta_0(x)\big(\varphi(T,\Phi(T,x)) - \varphi(0,\Phi(0,x))\big)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{T}^d}\theta_0(x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Vidimo da je ovako definiran θ zbilja slabo rješenje Cauchyjeve zadaće.

Još samo moramo pokazati da je jedino rješenje za početni uvjet $\theta_0 = 0$ upravo nul-funkcija kako bismo dobili jedinstvenost. Imamo da vrijedi

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \theta(t,x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + \vec{v}(t,x) \cdot \nabla_x \varphi(t,x) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbb{T}^d).$$

Dovoljno je pokazati da za svaki $\psi \in C_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbb{T}^d)$ postoji $\varphi \in C_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbb{T}^d)$ takav da je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x \varphi = \psi.$$

Na sličan način kao u teoremu 2.2.1, možemo pokazati da Cauchyjeva zadaća

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x \varphi = \psi, & \text{na } \langle 0,T\rangle \times \mathbb{T}^d, \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi_0, & \text{na } \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

ima jedinstveno glatko rješenje dano formulom

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(\Phi_t^{-1}(x)) + \int_0^t \psi(\tau, \Phi_\tau(\Phi_t^{-1}(x))) \, \mathrm{d}\tau.$$

Potrebno je samo odabrati pogodan početni uvjet φ_0 da bi funkcija φ imala kompaktan nosač.

Neka je nosač od ψ sadržan u $[0,T\rangle \times \mathbb{T}^d$, gdje je $K \subset \mathbb{T}^d$. Definirajmo φ_0 sa

$$\varphi_0(x) := -\int_0^T \psi(\tau, x) \, \mathrm{d}\tau.$$

Onda je funkcija φ jednaka

$$\int_T^t \psi(\tau, \Phi_\tau(\Phi_t^{-1}(x))) \, \mathrm{d}\tau.$$

Ako je $t \geqslant T$, integrand isčezava pa je i φ jednaka 0. Dakle, $\operatorname{supp} \varphi$ je sadržan u $[0,T\rangle \times \mathbb{T}^d$ što je ograničen skup, pa je nosač zasigurno kompaktan. Primjenom osnovne leme varijacijskog računa slijedi da je $\theta = 0$ g.s., što onda povlači jedinstvenost slabog rješenja transportne jednadžbe. $\square$

Napomena 2.2.8. *Dokaz prethodnog teorema preuzet je iz [5, teorem 4.3.6].*

U dokazu prethodnog teorema vidjeli smo da je slabo rješenje zadaće, kao i klasično, dano formulom $\theta(t,x) = \theta_0(\Phi_t^{-1}(x))$. Direktno iz formule slijedi analogon propozicije 2.2.4 za definicije 2.1.4 i 2.2.3.

Propozicija 2.2.9. *Neka je* $\vec{v}\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *vremenski zavisno vektorsko polje i* Φ *pripadajući tok. Tok* Φ *miješa skup* $E \subset \mathbb{T}^d$ *do na veličinu* ε *s konstantom miješanja* κ *ako i samo vektorsko polje* $\vec{v}$ *miješa funkciju* $f_E = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E^c}$ *do na veličinu* ε *s konstantom miješanja* $\mu = 1 - 2\kappa$.

Dokaz. Iz formule za slabo rješenje dobivamo:

$$\begin{aligned}
\theta(T, x) &= f_E(\Phi_T^{-1}(x)) \\
&= \mathbb{1}_E(\Phi_T^{-1}(x)) - \mathbb{1}_{E^c}(\Phi_T^{-1}(x)) \\
&= \mathbb{1}_{\Phi_T(E)}(x) - \mathbb{1}_{\Phi_T(E)^c}(x) \\
&= f_{\Phi_T(E)}(x).
\end{aligned}$$

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 2.2.4 primijenjene na $\Phi_T(E)$. $\square$

Konačno, dajemo iskaz Bressanove slutnje u Eulerovoj formulaciji.

Slutnja 2.2.10. *Neka su* Ω_L *i* Ω_R *kao u 2.1.5. Za svaki* ε *dovoljno mali i glatko inkompresibilno vektorsko polje* $\vec{v}\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *koje miješa funkciju* $f_{\Omega_L} = \mathbb{1}_{\Omega_L} - \mathbb{1}_{\Omega_R}$ *do na veličinu* ε *s konstantom miješanja* μ *vrijedi*

$$\int_0^T \|D_x \vec{v}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \, \mathrm{d}t \gtrsim_{\mu,d} \log(1/\varepsilon).$$

Jasno je da su dvije formulacije ekvivalentne i lako je prenijeti rezultate iz jednih koordinata u druge.

2.3 Osnovni rezultati i napomene

Za dani skup $E \subset \mathbb{T}^d$ ima smisla pitati se koja je najveća konstanta miješanja s kojom on može biti izmiješan. Dajemo jednu jednostavnu gornju ogradu.

Propozicija 2.3.1. *Neka je skup* $E \subset \mathbb{T}^d$ *izmiješan do na veličinu* $r > 0$ *s konstantom miješanja* κ. *Tada mora vrijediti* $\kappa \leqslant |E| \leqslant 1 - \kappa$.

Dokaz. Integriranjem $|E \cap B_r(x)|$ po $x \in \mathbb{T}^d$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} |E \cap B_r(x)| \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_{(E \cap B_r(x))}(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_E(y) \mathbb{1}_{B_r(x)}(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_E(y) \mathbb{1}_{B_r(y)}(x) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_E(y) \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_{B_r(y)}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= r^d\, V_d\, |E|.
\end{aligned}
$$

Integriranjem nejednakosti iz definicije izmiješanosti slijedi tvrdnja. □

Da bi definicija 2.1.1 imala smisla, želimo da izmiješanost do na veličinu r povlači izmiješanost i za veće veličine. Sljedeća propozicija je jednostavna posljedica činjenice da veću kuglu (radijusa r') možemo popuniti manjim kuglama (radijusa r) s efikasnošću barem $c_d > 0$ za neku konstantu c_d koja ovisi samo o dimenziji d, čim je r dovoljno mali u odnosu na r'. Štoviše, c_d se može po volji približiti tzv. konstanti pakiranja prostora kuglama, koja je uglavnom nepoznata (osim u dimenzijama $d = 1, 2, 3, 8, 24$), ali je strogo pozitivna.

Propozicija 2.3.2. *Ako je skup $E \subset \mathbb{T}^d$ izmiješan do na veličinu $r > 0$ s konstantom miješanja κ, onda je izmiješan i do na veličinu r' s konstantom miješanja κ' za svaki $r' > a(\kappa)r$, gdje su κ' i $a(\kappa)$ neke konstante koje ovise samo o konstanti miješanja κ i dimenziji prostora d.*

Sljedeći rezultat je dao Bressan u [3], a bit će koristan u primjeru koji slijedi.

Propozicija 2.3.3. *Neka je $\Phi\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ tok vektorskog polja i $E \subset \mathbb{T}^d$. Pretpostavimo da postoji preslikavanje $\varphi\colon \Phi_T(E^c) \to \Phi_T(E)$ koje čuva mjeru takvo da vrijedi*

$$
d(x, \varphi(x)) \leqslant \rho, \quad \forall x \in \Phi_T(E^c). \tag{2.3}
$$

Tada tok Φ miješa skup E do na veličinu ε s konstantom miješanja κ za sve $\varepsilon > 0$ i $\kappa \in \langle 0, 1/2\rangle$ takve da vrijedi

$$
\varepsilon \geqslant \frac{1}{1 - \sqrt[d]{2\kappa}}\,\rho. \tag{2.4}
$$

Dokaz. Nejednakost 2.4 ekvivalentna je

$$
\frac{|B_{\varepsilon-\rho}(x)|}{2} \geqslant \kappa |B_\varepsilon(x)|.
$$

Uzmimo $x \in \mathbb{T}^d$ i promatrajmo kuglu radijusa $\varepsilon - \rho$ oko x. Razmatramo dva slučaja:

1. Barem pola točaka iz kugle dolazi iz skupa E. Tada imamo:

$$
|B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E)| \geqslant |B_{\varepsilon-\rho}(x) \cap \Phi_T(E)| \geqslant \frac{|B_{\varepsilon-\rho}(x)|}{2} \geqslant \kappa |B_\varepsilon(x)|.
$$

2. Barem pola točaka iz kugle dolazi iz skupa E^c.

   Zbog 2.3 imamo $\varphi(B_{\varepsilon-\rho}(x) \cap \Phi_T(E^c)) \subseteq B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E)$ pa slijedi:

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E)| &\geqslant |\varphi(B_{\varepsilon-\rho}(x) \cap \Phi_T(E^c))| = |B_{\varepsilon-\rho}(x) \cap \Phi_T(E^c)| \\ &\geqslant \frac{|B_{\varepsilon-\rho}(x)|}{2} \geqslant \kappa |B_\varepsilon(x)|. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je $|B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E)| \geqslant \kappa |B_\varepsilon(x)|$, a zamjenom uloga od E i E^c i korištenjem preslikavanja φ^{-1} dobivamo $|B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E^c)| \geqslant \kappa |B_\varepsilon(x)|$, što je ekvivalentno $|B_\varepsilon(x) \cap \Phi_T(E)| \leqslant (1-\kappa)|B_\varepsilon(x)|$. □

Primjer 2.3.4. *Bressan u [3] daje sljedeću konstrukciju kao motivaciju za donju ogradu na trud potreban za miješanje do na veličinu ε. Definirajmo vektorsko polje $\vec{v}\colon [0,+\infty\rangle \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ tako da je*

$$\vec{v}(t,x) = \begin{cases} 2^{-(n+1)}\vec{e}_1, & \lfloor 2^n x_1 + 1/2 \rfloor \text{ paran}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad t \in [2n, 2n+1\rangle,$$

$$v(t,x) = \begin{cases} 2^{-(n+1)}\vec{e}_2, & \lfloor 2^{n+1} x_1 + 1/2 \rfloor \text{ paran}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad t \in [2n+1, 2n+2\rangle.$$

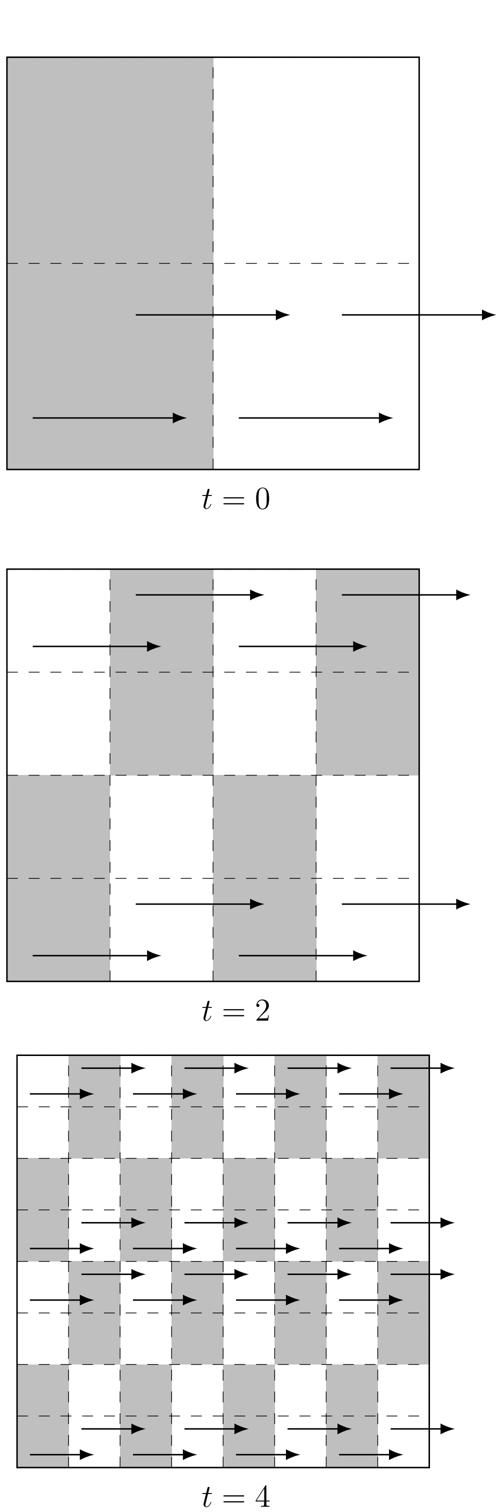
Distribucijska divergencija vektorskog polja $\vec{v}$ je 0. Totalna varijacija od $\vec{v}$ je 2 za $t \in [2n, 2n+1\rangle$, odnosno 4 za $t \in [2n+1, 2n+2\rangle$. Na slici 2.3.4 prikazano je djelovanje toka Φ i smjer vektorskog polja $\vec{v}$. Koristeći propoziciju 2.3.3 možemo pokazati da $\Phi\big|_{[0,2n+1]}$ miješa Ω_L do na veličinu

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \sqrt[d]{2\kappa}}\, 2^{-(n+1)}.$$

Izglađivanjem vektorskog polja $\vec{v}$ možemo dobiti inkompresibilno vektorsko polje $\tilde{v}$ i pripadajući tok $\tilde{\Phi}$ koji miješa Ω_L do na veličinu $\tilde{\varepsilon}$ proizvoljno blizu ε takvo da je ukupan trud uložen u miješanje

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |D_x \tilde{v}(t,x)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leqslant (4+\delta)T = (4+\delta)(2n-1) < 8n.$$

Ako tvrdnja Bressanove slutnje vrijedi, onda mora biti $8n > C_{\kappa,d} \log\left((1-\sqrt[d]{2\kappa})\, 2^{n+1}\right)$, što povlači $C_{\kappa,d} \leqslant \dfrac{8}{\log 2}$.



Slika 2.2: Vektorsko polje $\vec{v}$ iz primjera 2.3.4 i njegov tok.

Poglavlje 3

Bianchinijeve polunorme

3.1 Definicija i svojstva Bianchinijevih polunormi

Za $\varepsilon < 1/8$ definiramo odrezanu Bianchinijevu polunormu

$$\|f\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} := \int_{\varepsilon}^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \Big| f(x) - \fint_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y \Big| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

a preko nje i Bianchinijevu polunormu s

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{\varepsilon < 1/4} \|f\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \int_{0}^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \Big| f(x) - \fint_{B_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}y \Big| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Neka se Bianchinijev prostor sastoji od funkcija iz $L^1(\mathbb{T}^d)$ za koje je $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$.

Ove veličine je Bianchini definirao u [1], gdje se bavi jednodimenzionalnim problemom miješanja, a pokazuju se korisne i u višedimenzionalnoj varijanti. Vezu Bianchinijeve polunorme s problemom miješanja otkriva sljedeća lema.

Lema 3.1.1. *Neka je $\kappa > 0$ fiksan. Za svaki ε dovoljno mali i $E \subset \mathbb{T}^d$ izmiješan do na veličinu ε s konstantom miješanja κ vrijedi $\|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}} \gtrsim_{\kappa,d} \log(1/\varepsilon)$.*

Dokaz. Nejednakost iz definicije 2.1.1 je ekvivalentna

$$\kappa \leqslant \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \leqslant 1 - \kappa, \quad \forall x \in \mathbb{T}^d.$$

Za $x \in E$ oduzimanjem gornje nejednakosti od $\mathbb{1}_E$ dobivamo

$$\mathbb{1}_E(x) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y = 1 - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \geqslant 1 - (1-\kappa) = \kappa,$$

a za $x \in E^c$ na isti način dobivamo

$$\mathbb{1}_E(x) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y = 0 - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \leqslant 0 - \kappa = -\kappa,$$

što zajedno povlači

$$\Big|\mathbb{1}_E(x) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y\Big| \geqslant \kappa, \quad \forall x \in \mathbb{T}^d.$$

Kako je E izmiješan do na veličinu ε, po propoziciji 2.3.2 je izmiješan i do veličine veće od $a(\kappa)$ pa gornja nejednakost vrijedi za sve $r \geqslant a(\kappa)\varepsilon$.

Integriranjem po $r \in [\varepsilon, 1/4]$ i $x \in \mathbb{T}^d$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{a(\kappa)\varepsilon}^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \Big|\mathbb{1}_E(x) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y\Big|\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}r}{r} &\geqslant \int_{a(\kappa)\varepsilon}^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \kappa\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\ =&\kappa\,(\log\frac{1}{4} - \log(a(\kappa)) + \log\frac{1}{\varepsilon}),\end{aligned}$$

što za dovoljno male ε možemo ocijeniti s $\kappa\log(1/\varepsilon)$. □

U daljnjim poglavljima koristit će nam i sljedeća lema.

Lema 3.1.2. *Neka je $\varphi\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ izmjeriva bijekcija takva da φ i φ^{-1} čuvaju mjeru i neka je $E \subseteq \mathbb{T}^d$, takav da je $\|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}} < +\infty$. Tada vrijedi*

$$\|\mathbb{1}_{\phi(E)}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{1}{V_d}\int_0^{1/4} \frac{1}{r^{d+1}} \int_{\mathbb{T}^d} |\varphi(B_r(x)) \triangle B_r(\varphi(x))|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r.$$

Dokaz. Koristeći činjenicu da su φ i φ^{-1} bijekcije koje čuvaju mjeru možemo računati:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{\varphi(E)}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}} = &\int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \left|\mathbb{1}_{\varphi(E)}(x) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_{\varphi(E)}(y)\,\mathrm{d}y\right|\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &- \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \left|\mathbb{1}_E(x) \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y\right|\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \left| \mathbb{1}_E(x) - \fint_{\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \right| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&\quad - \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \left| \mathbb{1}_E(x) \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \right| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&\leqslant \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \left| \fint_{\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x)))} \mathbb{1}_E(y) - \fint_{B_r(x)} \mathbb{1}_E(y)\,\mathrm{d}y \right| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&= \frac{1}{V_d} \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \big| |\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x))) \cap E| - |B_r(x) \cap E| \big| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{V_d} \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} \big| \varphi^{-1}(B_r(\varphi(x))) \triangle B_r(x) \big| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{V_d} \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} |\varphi(B_r(x)) \triangle B_r(\varphi(x))| \,\mathrm{d}x \,\frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}}
\end{aligned}
$$

Pritom smo koristili nejednakost trokuta, nejednakost $||A \cap B| - |A \cap C|| \leqslant |B \triangle C|$ te jednakost $\varphi(A \triangle B) = \varphi(A) \triangle \varphi(B)$. $\square$

Poglavlje 4

Problem miješanja u 1D

U [2] Bressan je formulirao diskretnu varijantu problema miješanja u 1D, koju ćemo prikladno zvati problem preslagivanja.

Na jednoj polici nalaze se izmiješane crne i bijele knjige. Želimo ih presložiti tako da se lijevo nalaze sve bijele, a desno sve crne knjige. Knjige preslagujemo koristeći *elementarne transpozicije*. Jedna elementarna transpozicija sastoji se od toga da odaberemo dva susjedna intervala, duljina a i b, te im zamijenimo mjesta. Cijena jedne takve elementarne transpozicije je $a + b$. Slično kao u problemu miješanja, reći ćemo da su knjige izmiješane do na veličinu ε s konstantom miješanja κ ako u svakom segmentu duljine 2ε možemo naći barem $\kappa\varepsilon$ knjiga crne i $\kappa\varepsilon$ knjiga bijele boje. Pokazat ćemo da ukupna cijena preslagivanja knjiga raste kao $\log(1/\varepsilon)$ kada $\varepsilon \to 0$.

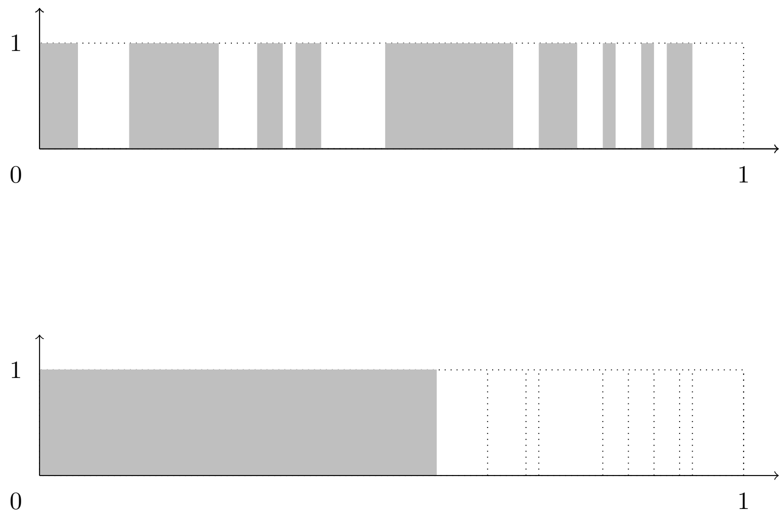
4.1 Problem preslagivanja

Za dani $y \in \mathbb{T}^1$ i $a, b > 0$ takve da je $a + b < 1$ definiramo elementarnu transpoziciju $\mathbf{T}_{y,a,b} \colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ sa

$$T(x) = \begin{cases} x + b, & x \in [y, y + a\rangle \\ x - a, & x \in [y + a, y + a + b\rangle \\ x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uzmimo da je cijena gornje operacije $a + b$. Reći ćemo da niz elementarnih transpozicija $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ preslaguje skup E ako je $(\mathbf{T}_n \circ \cdots \circ \mathbf{T}_1)(E)$ g.s. jednak skupu $S = \{x \in \mathbb{T}_1 : 0 \leqslant x < 1/2\}$.

Napomena 4.1.1. *Uočimo da je presloženi skup,* $(\mathbf{T}_n \circ \cdots \circ \mathbf{T}_1)(E)$ *g.s. jednak skupu* $\langle 0, |E|\rangle$.



Slika 4.1: Skup E prije i poslije preslagivanja.

Bressan je u [2] pokazao sljedeću ocjenu za ,,trud" ili ,,trošak" koji je potrebno uložiti za preslagivanje dobro izmiješanog skupa knjiga.

Teorem 4.1.2. *Neka je skup $E \subset \mathbb{T}^1$ izmiješan do na skalu ε s konstantom miješanja κ za ε dovoljno mali. Neka je $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ niz elementarnih transpozicija koji preslaguje skup E. Tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \gtrsim_\kappa \log(1/\varepsilon).$$

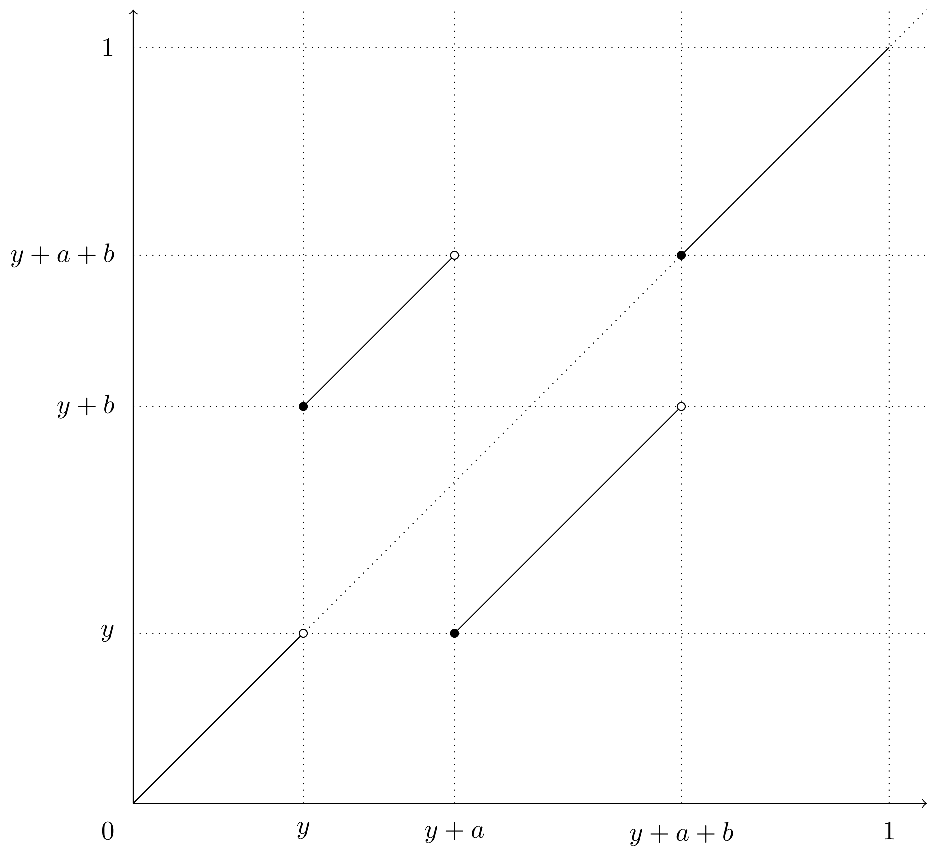
Dokaz. Pokazat ćemo da za elementarnu transpoziciju $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{y,a,b}$ vrijedi

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{T}(A)}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_A\|_{\mathcal{B}} \lesssim a + b, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^1). \tag{4.1}$$

Elementarne transpozicije čuvaju mjeru, pa je zbog leme 3.1.2, dovoljno je pokazati da je

$$\int_0^{1/4} \frac{1}{2r^2} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathbf{T}\langle x - r, x + r\rangle \triangle \langle \mathbf{T}(x) - r, \mathbf{T}(x) + r\rangle| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}r \lesssim a + b.$$

Promotrimo li graf funkcije $\mathbf{T}$, uočavamo da je $\mathbf{T}\langle x-r, x+r\rangle$ jednako $\langle \mathbf{T}x-r, \mathbf{T}x+r\rangle$ ako interval $\langle x - r, x + r\rangle$ ne sadrži niti jedan prekid funkcije $\mathbf{T}$. Stoga odmah



Slika 4.2: Graf elementarne transpozicije $\mathbf{T}$.

možemo zaključiti da je gornja simetrična razlika prazna ako se x ne nalazi u intervalu radijusa r oko nekog prekida. Budući da funkcija $\mathbf{T}$ ima 3 prekida, zaključujemo da je simetrična razlika 0 osim na skupu mjere $6r$ za neki fiksan r. Koristeći trivijalnu ocjenu $|A \triangle B| \leqslant |A| + |B|$, imamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{a+b} \frac{1}{2r^2} \int_{\mathbb{T}^1} &|\mathbf{T}\langle x-r, x+r\rangle \triangle \langle \mathbf{T}(x)-r, \mathbf{T}(x)+r\rangle| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r \\ &\leqslant \int_0^{a+b} \frac{6r\cdot 4r}{2r^2} = 24(a+b) \lesssim a+b.\end{aligned}$$

Promotrimo sada slučaj kada je $r \geqslant a+b$. Ako interval $\langle x-h, x+h\rangle$ sadrži cijeli interval $\langle y, y+a+b\rangle$ ili je pak disjunktan s njim, simetrična razlika $\mathbf{T}\langle x-r, x+r\rangle \triangle \langle \mathbf{T}(x)-r, \mathbf{T}(x)+r\rangle$ je prazna.

Kako $\langle x-h, x+h\rangle$ ne bi sadržavao cijeli $\langle y, y+a+b\rangle$, x mora biti izvan tog intervala. Tada je $\mathbf{T}(x) = x$, pa je gornja simetrična razlika jednaka $\mathbf{T}\langle x-r, x+r\rangle \triangle \langle x-r, x+r\rangle$. Taj skup je podskup od $\langle y, y+a+b\rangle$ pa mu je mjera manja od $a+b$.

Da bi simetrična razlika bila neprazna, presjek između $\langle x-h, x+h\rangle$ i $\langle y, y+a+b\rangle$ mora biti neprazan, a ne smije sadržavati cijeli drugi interval, što je moguće samo ako je $x+r$ u $\langle y, y+a+b\rangle$, a $x-r$ nije, ili obratno. Budući da je $r > a+b$, skup x-eva koji to zadovoljavaju ima mjeru manju ili jednaku $2(a+b)$.

Sada za $r \geqslant a+b$ imamo:

$$\int_{a+b}^{1/4} \frac{1}{2r^2} \int_{\mathbb{T}^1} |\mathbf{T}\langle x-r, x+r\rangle \triangle \langle \mathbf{T}(x)-r, \mathbf{T}(x)+r\rangle| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r \tag{4.2}$$

$$\leqslant \int_{a+b}^{1/4} \frac{2(a+b)^2}{2r^2} = (a+b)^2 \left(\frac{1}{a+b} - 4\right) \lesssim a+b. \tag{4.3}$$

Kombiniranjem prethodne dvije ocjene, pokazali smo nejednakost 4.1. Iteriranjem nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &\gtrsim \|\mathbb{1}_{(\mathbf{T}_1^{-1}\circ\cdots\circ\mathbf{T}_n^{-1})(S))}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_S\|_{\mathcal{B}} \\ &= \|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}_\varepsilon} - \|\mathbb{1}_S\|_{\mathcal{B}_\varepsilon} \\ &\gtrsim_\kappa \log(1/\varepsilon) - \|\mathbb{1}_S\|_{\mathcal{B}_\varepsilon} \\ &\gtrsim_\kappa \log(1/\varepsilon).\end{aligned}$$

Zadnja ocjena vrijedi za sve dovoljno male ε, jer je $\|\mathbb{1}_S\|_{\mathcal{B}_\varepsilon}$ konačno. $\square$

Napomena 4.1.3. *Gornji dokaz je prilagođena verzija Bianchinijevog dokaza iz [1]. Bianchini je pokazao i više, da za* kvazi-inkompresibilna *preslikavanja* $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ *koja miješaju skup* S *do na veličinu* ε *s konstantom miješanja* κ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Tot.Var.}(\mathbf{T}_i - \mathbf{I}) + \text{Tot.Var.}(\mathbf{T}_i^{-1} - \mathbf{I}) \gtrsim_\kappa \log(1/\varepsilon).$$

Pritom Tot.Var.($\mathbf{S}$) *označava totalnu varijaciju preslikavanja* $\mathbf{S}$. *To je poopćenje gornje tvrdnje jer za elementarne transpozicije imamo*

$$\text{Tot.Var.}(\mathbf{T}_{y,a,b} - \mathbf{I}) = \text{Tot.Var.}(\mathbf{T}_{y,a,b}^{-1} - \mathbf{I}) = 2(a+b).$$

Također, za glatka vektorska polja $\vec{v}\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *vrijedi*

$$\text{Tot.Var.}(\vec{v}(t,\cdot)) = \int_{\mathbb{T}^d} \|D_x \vec{v}(t,x)\| \,\mathrm{d}x,$$

pa izraz za „trud" u originalnoj Bressanovoj formulaciji možemo zapisati i kao

$$\int_0^T \text{Tot.Var.}(\vec{v}(t,\cdot)) \,\mathrm{d}t.$$

Sumu u Bianchinijevom poopćenju možemo interpretirati kao diskretnu varijantu gornje formule.

Poglavlje 5

Problem miješanja u više dimenzija

Budući da do danas ne postoji odgovor na Bressanovu slutnju u slučaju $d \geqslant 2$, smisleno je pitati se vrijedi li tvrdnja ako L^1-normu na torusu zamijenimo nekom većom normom, tj. postoji li funkcijski prostor $\mathcal{Y} \subset L^1(\mathbb{T}^d)$ takav da za vektorsko polje v koje miješa Ω_L do na veličinu ε vrijedi

$$\int\limits_0^T \|\nabla_x v(t,\cdot)\|_{\mathcal{Y}}\, \mathrm{d}t \gtrsim_{\kappa,\mathcal{Y}} \log\left(1/\varepsilon\right).$$

U ovom poglavlju prikazujemo pristup problemu pomoću singularnih integrala koji koriste Hadžić, Seeger, Smart i Street u [6] za dokaz slutnje u slučaju $\mathcal{Y} = L^p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$. Također izlažemo jednu diskretnu varijantu problema koju isti autori rješavaju u već spomenutom članku.

5.1 Pristup pomoću singularnih integrala

Osnovna ideja je slična kao u rješenju jednodimenzionalnog problema. Želimo naći odgovarajuću ocjenu na razliku $\|\mathbb{1}_{\Phi_T(A)}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_A\|_{\mathcal{B}}$. U ovom slučaju, to je ocjena oblika

$$\|\mathbb{1}_{\Phi_T(A)}\|_{\mathcal{B}} - \|\mathbb{1}_A\|_{\mathcal{B}} \lesssim_{\kappa,\mathcal{Y}} \int\limits_0^T \|D_x\vec{v}(t,\cdot)\|_{\mathcal{Y}}\, \mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Prvi korak u dokazu takve ocjene daje nam sljedeća propozicija, nakon koje se problem svodi na ocjenu bilinearne integralne forme.

Propozicija 5.1.1. *Neka je $E \subset \mathbb{T}^d$ i $\Phi\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ tok glatkog vektorskog polja $\vec{v}\colon [0,T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$. Za $\varepsilon \in \langle 0, 1/8 \rangle$ vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\mathbb{1}_{\Phi_t(E)}\|_{\mathcal{B}_\varepsilon} = \frac{1}{2V_d} \iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d \\ \varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1/4}} \frac{(x-y)\cdot(\vec{v}(t,x)-\vec{v}(t,y))}{|x-y|^{d+2}} \mathbb{1}_{\Phi_t(E)}(x)\mathbb{1}_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Definiramo $f_E(x) = \mathbb{1}_E(x) - \mathbb{1}_{E^c}(x)$. Funkcija $f_{\Phi_t(E)}$ ima vrijednosti -1 i 1 pa joj je srednja vrijednost na svakoj kugli između -1 i 1. Zato imamo

$$\Big|f_{\Phi_t(E)}(x) - ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\Big| = \begin{cases} 1 - ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y, & x \in \Phi_t(E), \\ 1 + ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y, & x \in \Phi_t(E^c). \end{cases}$$

Uvrštavanjem u izraz za Bianchinijevu polunormu dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\|f_{\Phi_t}\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\varepsilon^{1/4} \Bigg(\int_{\Phi_t(E)} \big(1 - ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \int_{\Phi_t(E^c)} \big(1 + ⨍_{\mathbb{T}^d} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\big) \Bigg)\,\mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\varepsilon^{1/4} \Bigg(\int_{\Phi_t(E^c)} ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \int_{\Phi_t(E)} ⨍_{\mathbb{T}^d} f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \Bigg) \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_\varepsilon^{1/4} \int_{\mathbb{T}^d} ⨍_{B_r(x)} f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= -\frac{1}{V_d}\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y) \int_\varepsilon^{1/4} \mathbb{1}_{B_r(x)}(y)\frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integral po r možemo raspisati u ovisnosti o $|x-y|$:

$$\int_\varepsilon^{1/4} \mathbb{1}_{B_r(x)}(y)\frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}} = \begin{cases} d^{-1}(\varepsilon^{-d} - (1/4)^{-d}), & |x-y| < \varepsilon \\ d^{-1}(\varepsilon^{-d} - |x-y|^{-d}), & \varepsilon \leqslant |x-y| \leqslant 1/4 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

pa definiramo funkciju $H_\varepsilon(u)$ sa

$$H(u) = \begin{cases} d^{-1}(\varepsilon^{-d} - (1/4)^{-d}), & |u| < \varepsilon \\ d^{-1}(\varepsilon^{-d} - |u|^{-d}), & \varepsilon \leqslant |u| \leqslant 1/4 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Njen gradijent je dan s

$$\nabla H_\varepsilon = -\frac{u}{|u|^{d+2}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}(\varepsilon,1/4)}(u),$$

gdje je $\mathcal{A}(\varepsilon, 1/4)$ kružni vijenac s radijusima ε i $1/4$.

Uz zamjenu varijabli $(x, y) \mapsto (\Phi_t(x), \Phi_t(y))$ (koja je opravdana zbog propozicije 2.1.3) imamo

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{V_d}\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y) \int_\varepsilon^{1/4} \mathbb{1}_{B_r(x)}(y) \frac{\mathrm{d}r}{r^{d+1}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{V_d}\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} H_\varepsilon(x-y)\, f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{V_d}\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} H_\varepsilon(\Phi_t(x)-\Phi_t(y))\, f_E(x)\, f_E(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{V_d} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} \nabla H_\varepsilon(\Phi_t(x)-\Phi_t(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_t(x)-\Phi_t(y)) f_E(x)\, f_E(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{V_d} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} \nabla H_\varepsilon(\Phi_t(x)-\Phi_t(y)) \cdot (\vec{v}(t,\Phi_t(x)) - \vec{v}(t,\Phi_t(y))) f_E(x)\, f_E(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{V_d} \iint_{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} \nabla H_\varepsilon(x-y) \cdot (\vec{v}(t,x) - \vec{v}(t,y)) f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{V_d} \iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d \\ \varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1/4}} \frac{(x-y)\cdot(\vec{v}(t,x)-\vec{v}(t,y))}{|x-y|^{d+2}} f_{\Phi_t(E)}(x)\, f_{\Phi_t(E)}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Direktnim računom dobije se $\|f_E\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = 2\|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}_\varepsilon}$, odakle slijedi tvrdnja. □

Za vektorsko polje $\vec{b}\colon \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ i funkcije f i g na $\mathbb{T}^d$ definiramo bilinearni integralni operator

$$\mathfrak{S}_\varepsilon^{per}[f, g, \vec{b}] := \iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d \\ \varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1/4}} \frac{(x-y)\cdot(\vec{b}(x)-\vec{b}(y))}{|x-y|^{d+2}} f(x)g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

Iz prethodne propozicije integriranjem od 0 do T dobivamo

$$\|\mathbb{1}_{\Phi_t(E)}\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} = \|\mathbb{1}_E\|_{\mathcal{B}(\varepsilon)} + \frac{1}{2V_d}\int_0^T \mathfrak{S}_\varepsilon^{per}[\mathbb{1}_{\Phi_t(E)}, \mathbb{1}_{\Phi_t(E)}, \vec{v}(t,\cdot)]\, \mathrm{d}t.$$

Sada je jasno da bi odgovarajuća ocjena oblika $|\mathfrak{S}_\varepsilon^{per}[\mathbb{1}_E, \mathbb{1}_E, \vec{b}]| \lesssim \|D_x\vec{b}\|_{\mathcal{Y}}$ direktno povlačila ocjenu oblika 5.1. Seeger, Smart i Street u [10] donose sljedeći rezultat.

Teorem 5.1.2. *Neka je* $\vec{b}\colon \mathbb{T}^1 \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^1)$ *glatko, solenoidalno, vektorsko polje, te neka su* $p_1, p_2, p_3 \in \langle 1, +\infty]$ *takvi da je* $\sum_{i=1}^{3} p_i^{-1} = 1$. *Tada je*

$$|\mathfrak{S}_\varepsilon^{per}[f, g, \vec{b}]| \lesssim_{p_1,p_2,p_3} \|D_x\vec{v}\|_{p_1}\|f\|_{p_2}\|g\|_{p_3}.$$

U našem slučaju su f i g karakteristične funkcije izmjerivih skupova, pa možemo uzeti p_1 proizvoljno blizu 1 te p_2 i p_3 namjestiti po potrebi. Time smo pokazali sljedeći teorem:

Teorem 5.1.3. *Za svaki* ε *dovoljno mali i za svako glatko inkompresibilno vektorsko polje* $\vec{v}\colon [0, T] \times \mathbb{T}^d \to \mathcal{T}(\mathbb{T}^d)$ *čiji tok* Φ *miješa skup* Ω_L *do na veličinu* $\varepsilon \in \langle 0, 1/4\rangle$ *s konstantom miješanja* κ *vrijedi*

$$\int_0^T \|D_x(t,\cdot)\vec{v}\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}\,\mathrm{d}t \gtrsim_{\kappa,d} \log(1/\varepsilon).$$

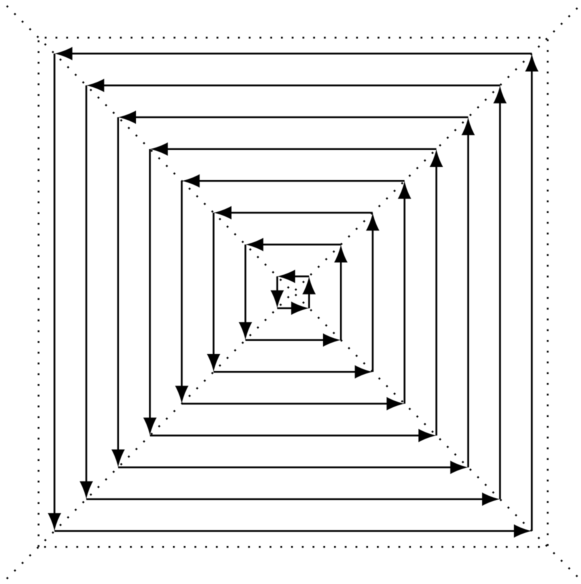
5.2 Diskretni 2D problem

Isti autori u istom članku [6] razmatraju zanimljivu 2D varijantu problema miješanja. Na torusu $\mathbb{T}^2$ radimo niz operacija koje se sastoje od toga da odaberemo proizvoljan kvadrat u njemu te ga okrenemo za 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Preciznije, za zadani $x \in \mathbb{T}^2$ i $r \in \langle 0, 1/4\rangle$ definiramo preslikavanje $R_{x,r}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ koje rotira kvadrat $\langle x_1 - r, x_1 + r\rangle \times \langle x_2 - r, x_2 + r\rangle$:

$$R_{x,r}(y) := \begin{cases} (x_1 + x_2 - y_2, x_2 - x_1 + y_1), & y - x \in \langle -r, r\rangle^2, \\ y, & \text{inače.} \end{cases}$$

Cijena rotacije $R_{x,r}$ je r^2. Da bismo motivirali ovaj odabir cijene, uočimo da $R_{0,r}$ možemo prikazati kao djelovanje toka vektorskog polja $\vec{v}$ koje je u koordinatama $\langle -1/2, 1/2\rangle^2$ zadano s

$$\vec{v}(t, x) = \begin{cases} (0, 2x_1), & |x_2| < |x_1| < r, \\ (-2x_2, 0), & |x_1| < |x_2| < r, \\ (0, 0), & \text{inače.} \end{cases}$$



Slika 5.1: Vektorsko polje $\vec{v}$ koje čiji tok je rotacija za 90°.

Nakon kraćeg računa pokaže se da je slaba divergencija vektorskog polja $\vec{v}$ jednaka 0, te da mu je slabi diferencijal u kanonskoj bazi dan s

$$D_x\vec{v}(t,x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, & |x_2| < |x_1| < r, \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & |x_1| < |x_2| < r, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{inače}, \end{cases}$$

pa je ukupan ,,trud" uložen u miješanje jednak

$$\int_0^1 \|D_x\vec{v}(t,x)\|_{L^1}\,\mathrm{d}t = 8r^2.$$

Za ovu varijantu problema miješanja imamo sljedeći rezultat.

Teorem 5.2.1. *Neka je ε dovoljno mali i neka su $R_{x_1,r_1},\dots,R_{x_n,r_n}$ rotacije kvadrata kao gore takve da je skup $(R_{x_n,r_n}\circ\cdots\circ R_{x_1,r_1})(\langle 0,1/2\rangle^2)$ izmiješan do na veličinu ε konstantom miješanja κ. Tada vrijedi*

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 \gtrsim_\kappa \log(1/\varepsilon).$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1/4}\int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(R_{x,s}(y))| \,\mathrm{d}y \,\frac{\mathrm{d}r}{r^3} \lesssim s^2,$$

te primijeniti leme 3.1.1 i 3.1.2.

Integral rastavljamo na dva dijela, jedan je na segmentu $[0, s]$, a drugi na segmentu $[s, 1/4]$.

Za ocjenu integrala na prvom segmentu koristit ćemo geometrijski argument. Definirajmo preslikavanje $\varphi_{x,\alpha}(y)$ zadano s $\varphi_{x,\alpha}(y) = x + \alpha(y - x)$. Ono skalira sve udaljenosti za faktor α, sa središtem u x. Lako je pokazati da sve površine skalira za α^2 pa imamo:

$$|\varphi_{x,\alpha}(R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(R_{x,s}(y)))| = \alpha^2 |R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(R_{x,s}(y))|.$$

Direktnim računom se pokazuje da je $\varphi_{x,\alpha} \circ R_{x,s} = R_{x,\alpha s} \circ \varphi_{x,\alpha}$ i $\varphi_{x,\alpha}(B_r(y)) = B_{\alpha r}(\varphi_{x,\alpha}(y))$, pa slijedi

$$|R_{x,\alpha s}(B_{\alpha r}(\varphi_{x,\alpha}(y))) \bigtriangleup B_r(R_{x,\alpha s}(y)))| = \alpha^2 |R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(R_{x,s}(y))|.$$

Sada možemo računati:

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(R_{x,s}(y))| \,\mathrm{d}y \,\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \begin{bmatrix} r' = r/4s & s \to 1/4 \\ \mathrm{d}r' = \mathrm{d}r/4s & 0 \to 0 \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,s}(B_{4sr'}(y)) \bigtriangleup B_{4sr'}(R_{x,s}(y))| \,\mathrm{d}y \,\frac{\mathrm{d}r'}{16s^2 r'^3} \\
&= \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,1/4}(B_{r'}(\varphi_{x,4s}(y)) \bigtriangleup B_{r'}(R_{x,1/4}(\varphi_{x,4s}(y))| \,\mathrm{d}y \,\frac{\mathrm{d}r'}{r'^3} \\
&= 16s^2 \int_0^{1/4} \int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,1/4}(B_{r'}(y')) \bigtriangleup B_{r'}(R_{x,1/4}(y')| \,\mathrm{d}y' \,\frac{\mathrm{d}r'}{r'^3} \lesssim s^2
\end{aligned}$$

Razmotrimo sada slučaj kada je $r \geqslant s$.

Kada je točka y izvan kvadrata $K := \langle x_1 - s, x_1 + s \rangle$, simetrična razlika poprima oblik

$$R_{x,s}(B_r(y)) \bigtriangleup B_r(y).$$

Razlikujemo 3 slučaja:

1. Presjek kugle $B_r(y)$ s kvadratom je prazan. U tom slučaju je i simetrična razlika prazna jer je $R_{x,s}(B_r(y)) = B_r(y)$, budući da je $R_{x,s}$ identiteta na kvadratu. Uočimo da je presjek prazan čim je $|y - x| > r + s\sqrt{2}$.

2. Kugla $B_r(y)$ sadrži cijeli kvadrat. Tada imamo:

$$R_{x,s}(B_r(y)) = R_{x,s}(B_r(y) \setminus K) \cup R_{x,s}(K) = (B_r(y) \setminus K) \cup K = B_r(y),$$

   jer je $R_{x,s}(K) = K$. Uočimo još da kugla sadrži cijeli kvadrat čim vrijedi $|y - x| \leqslant r - s\sqrt{2}$ jer je

$$d(y, \text{vrh od } K) \leqslant d(y, x) + d(x, \text{vrh od } K) = |y - x| + s\sqrt{2}.$$

3. Kugla $B_r(y)$ ima neki netrivijalan presjek s kvadratom. Tada je

$$R_{x,s}(B_r(y)) \triangle B_r(y) = (B_r(y) \cap K) \triangle R_{x,s}(B_r(y) \cap K),$$

   što je svakako podskup od K pa mu je mjera manja od njegove površine.

Kada je točka y unutar kvadrata, mjeru simetrične razlike možemo ocijeniti s

$$|R_{x,s}(B_r(y)) \triangle B_r(R_{x,s}(y))| \lesssim sr.$$

Ako je točka y unutar kvadrata, onda sigurno vrijedi $|y - x| < s\sqrt{2}$.

Kombiniranjem prethodnih ocjena dobivamo

$$\frac{1}{\pi} \int_s^{1/4} \int_{\mathbb{T}^2} |R_{x,s}(B_r(y)) \triangle B_r(R_{x,s}(y))| \, \mathrm{d}y \, \frac{\mathrm{d}r}{r^3} \lesssim \int_s^{1/4} \frac{s^3 r}{r^3} \, \mathrm{d}r \leqslant s^2.$$

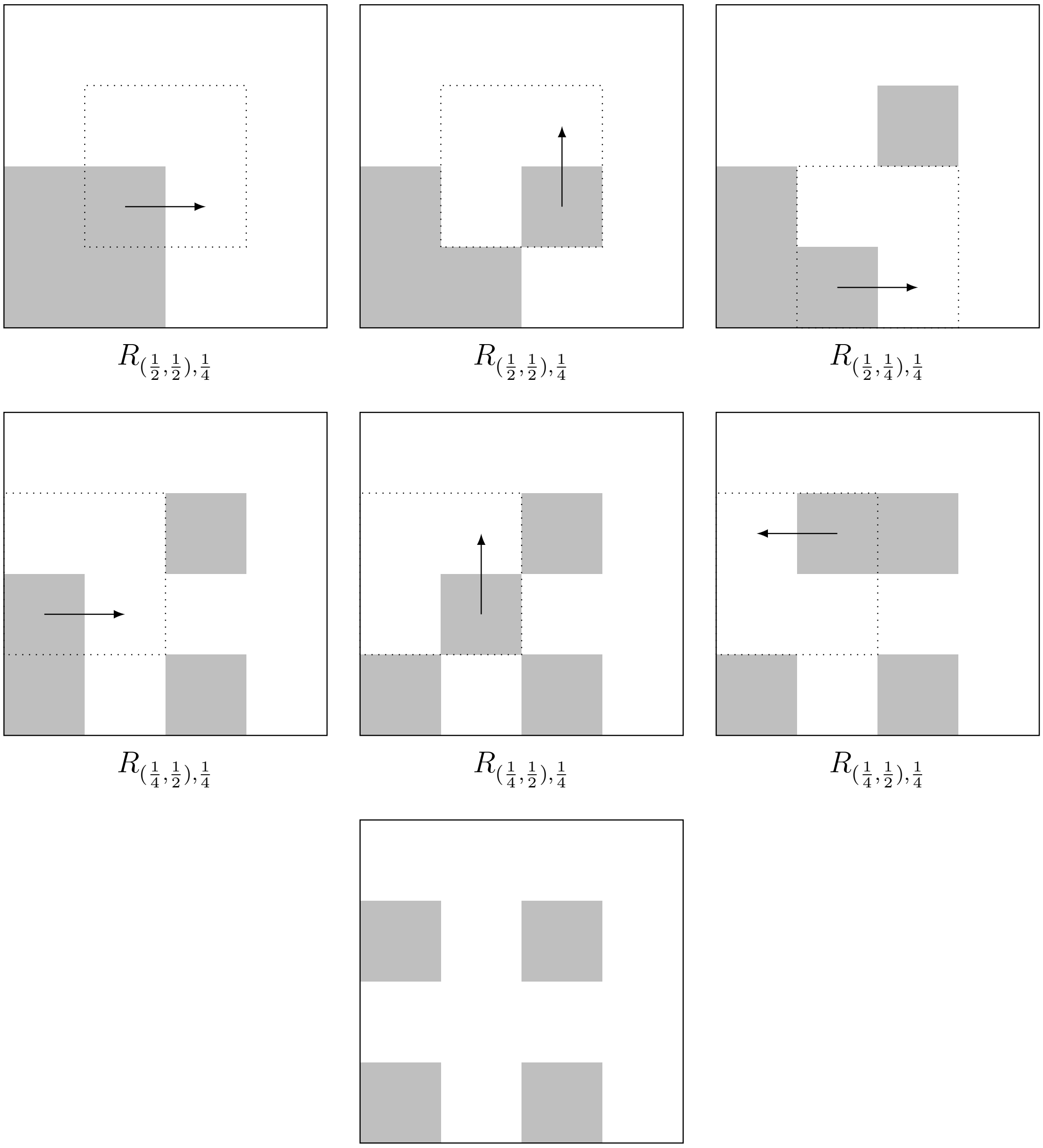
Zbrajanjem ocjena za integrala na dva dijela segmenta smo pokazali željenu tvrdnju. □

Pokažimo da se donja ograda iz prethodnog teorema zbilja može dostići. Uz pomoć niza od 6 rotacija,

$$R^3_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\frac{1}{4}} \circ R_{(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),\frac{1}{4}} \circ R^2_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\frac{1}{4}},$$

možemo podijeliti kvadrat $\langle 0, 1/2 \rangle^2$ na četiri manja kvadrata, kao na slici 5.2. Ukupna cijena rotacija je $6 \cdot (1/4)^2$.

Nastavimo li rekurzivno, vidimo da možemo izmiješati početni skup do na veličinu $2^{-n}c$ s ukupnom cijenom $n(1/4)^2$, gdje je c neka konstanta.



Slika 5.2: Djelovanje niza od 6 rotacija, ukupne cijene $6 \cdot (1/4)^2$.

Bibliografija

[1] S. Bianchini, *On Bressan's conjecture on mixing properties of vector fields*, Banach Center Publications **74** (2006), br. 1, 13–31.

[2] A. Bressan, *A lemma and a conjecture on the cost of rearrangements*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **110** (2003), 97–102.

[3] ______, *Prize offered for the solution of a problem on mixing flows*, `https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/prize1.pdf`, posjećeno 9. studenog 2018.

[4] G. Crippa, *The flow associated to weakly differentiable vector fields*, Disertacija, Universitat Zurich, Institut fur Mathematik, 2007.

[5] T. Feng, *Analysis of partial differential equations (Lectures by Clement Mouhot)*, `https://web.stanford.edu/~tonyfeng/pde.pdf`, posjećeno 9. studenog 2018.

[6] M. Hadžić, A. Seeger, C. K. Smart i B. Street, *Singular integrals and a problem on mixing flows*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire **35** (2018), 921–943.

[7] J. Jost i X. Li-Jost, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[8] V. Kovač, *Singularni integrali (skripta kolegija)*, `https://www.dropbox.com/s/k5iwg3b7mrycesg/singintskripta.pdf?dl=0`, posjećeno 9. studenog 2018.

[9] F. Léger, *A new approach to bounds on mixing*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **28** (2018), 829–849.

[10] A. Seeger, C. K. Smart i B. Street, *Multilinear singular integral forms of Christ-Journé type*, arXiv:1510.06990.

Sažetak

U ovom radu proučavamo Bressanov problem miješanja. Dajemo rigoroznu definiciju problema iz Eulerovog i Lagrangeovog gledišta. Prikazujemo rješenje jedne jednodimenzionalne, diskretne varijante problema koju je također formulirao Bressan. Nadalje, prikazujemo pristup dokazu L^p varijante Bressanove slutnje preko ocjena za bilinearnu singularnu integralnu formu. Na kraju donosimo rješenje još jedne diskretne, dvodimenzionalne varijante problema miješanja.

Summary

In this thesis we study Bressan's mixing problem. We give a rigorous formulation of the problem from Eulerian and Lagrangian viewpoints. We present a solution of a one-dimensional, discrete version of the problem formulated by Bressan. We also show an approach to the proof of an L^p variant of Bressan's conjecture via boundedness a bilinear singular integral form. Finally, we demonstrate a solution of another, discrete, two-dimensional variant of the mixing problem.

Životopis

Marin Tomić rođen je 6. srpnja 1994. godine u Zagrebu. U Zagrebu polazi niže razrede osnovne škole u Osnovnoj školi Tituša Brezovačkog, a više u Osnovnoj školi Marina Držića, a nakon toga pohađa zagrebačku V. gimnaziju.

Na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu 2013. godine upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike, koji završava u srpnju 2016. godine. Po završetku preddiplomskog studija, na istom fakultetu upisuje Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika.