

# Tehnike redukcije varijance u Monte Carlo simulacijama s primjenama u financijskoj matematici

---

Žignić, Lucija

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:251271>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-28**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lucija ŽigniĆ

**TEHNIKE REDUKCIJE VARIJANCE U  
MONTE CARLO SIMULACIJAMA S  
PRIMJENAMA U FINANCIJSKOJ  
MATEMATICI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Miljenku Huzaku na strpljenju, izdvojenom vremenu te velikodušnoj pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Metode Monte Carlo</b>	<b>4</b>
1.1 Definiranje problema . . . . .	4
1.2 Valjanost procjene i moguća pogreška . . . . .	5
1.3 Inačice centralnog graničnog teorema . . . . .	7
1.3.1 Centralni granični teorem uz računsko ograničenje . . . . .	7
1.3.2 Centralni granični teorem za omjere procjenitelja . . . . .	8
1.4 Tehnike redukcije varijance . . . . .	9
<b>2 Kontrolne slučajne varijable</b>	<b>10</b>
2.1 Općenito o metodi . . . . .	10
2.2 Višestruke kontrolne varijable . . . . .	13
2.3 Nelinearni procjenitelji . . . . .	15
2.4 Analiza rezultata . . . . .	17
2.5 Dekompozicija varijance . . . . .	19
2.6 Kontrolne varijable i Monte Carlo s težinama . . . . .	20
<b>3 Slojevito uzorkovanje</b>	<b>22</b>
3.1 Općenito o metodi . . . . .	22
3.2 Analiza rezultata . . . . .	24
3.3 Optimalna alokacija . . . . .	27
3.3.1 Optimalna alokacija bez računskog troška . . . . .	27
3.3.2 Optimalna alokacija uz računski trošak . . . . .	28
3.4 Dekompozicija varijance . . . . .	29
3.5 Naknadno slojevito uzorkovanje . . . . .	32
3.5.1 Općenito o metodi . . . . .	32
3.5.2 Asimptotska varijanica . . . . .	33

<b>4 Uzorkovanje po važnosti</b>	<b>35</b>
4.1 Općenito o metodi . . . . .	35
4.2 Problemi u graničnim uvjetima . . . . .	39
4.3 Analiza rezultata . . . . .	40
<b>5 Usporedba metoda</b>	<b>41</b>
<b>6 Primjena u financijskoj matematici</b>	<b>43</b>
6.1 Financijsko modeliranje . . . . .	43
6.1.1 Osnovne definicije . . . . .	43
6.1.2 Određivanje cijena izvedenica . . . . .	46
6.2 Metode Monte Carlo . . . . .	47
6.3 Metoda kontrolnih varijabli . . . . .	49
6.4 Slojevito uzorkovanje . . . . .	51
6.5 Uzorkovanje po važnosti . . . . .	54
<b>Bibliografija</b>	<b>59</b>

# Uvod

Metode Monte Carlo su alat kojim slučajnim uzorkovanjem dobivamo realizacije na kojima se primjenjuju statističke metode kako bismo dobili informacije o onom što opažamo. Ne čudi stoga da metode Monte Carlo imaju primjenu u raznim disciplinama poput matematike, financija, fizike, kemije, biologije itd. Osnovni problem koji se rješava pomoću metode Monte Carlo jest problem integracije koji tada zovemo Monte Carlo integracija. To je moguće zbog činjenice da se integral može interpretirati kao matematičko očekivanje. Numeričke metode rješavaju problem integracije za integrale nižih dimenzija jer se povećanjem dimenzije povećava i pogreška. S druge strane, metode Monte Carlo pogodnije su za integrale viših dimenzija jer u njima pogreška ne ovisi o dimenziji. Nadalje, jedna od bitnijih primjena metode Monte Carlo jest u financijskoj matematici. To proizlazi iz činjenice da se pod određenim uvjetima cijena financijske izvedenice može interpretirati kao matematičko očekivanje neke slučajne varijable. Budući da je pogreška dobivena metodom Monte Carlo uvijek ista, zanima nas na koji način ju je moguće smanjiti. Zato će se u ovom radu obraditi tehnike redukcije varijance. Postoji mnogo raznih tehnika, međutim ovdje ćemo ih podijeliti u tri velike skupine ovisno o načinu na koji reduciraju varijancu te iz svake skupine opisati po jednu.

U prvom poglavlju definira se problem procjene integrala koji će se promatrati u radu te se definira Monte Carlo procjenitelj. Zatim se navode dva osnovna teorema na kojima počiva Monte Carlo metoda: jaki zakon velikih brojeva i centralni granični teorem, te se objašnjava njihova uloga u metodi. Potom se obrađuju dvije inačice centralnog graničnog teorema koje će se kasnije koristiti u radu. Na kraju se navodi na koje načine možemo umanjiti varijancu dobivenu metodom Monte Carlo te daje uvod u tehnike redukcije varijance.

U drugom poglavlju obrađuje se metoda kontrolnih varijabli koja je bazirana na korištenju informacije o već poznatim problemima. Prvo se definira linearni procjenitelj pomoću kontrolnih varijabli, opisuju se njegova svojstva, a potom se računa varijanca tog procjenitelja koja se uspoređuje s uobičajenom uzoračkom aritmetičkom sredinom. To se tada generalizira na slučaj linearnog procjenitelja pomoću više kontrolnih varijabli, a zatim se obrađuju i nelinearni procjenitelji. Radi se usporedba linearnih i nelinearnih procjenitelja te se objašnjava koji je procjenitelj kada prikladniji. Također, provodi se diskusija o kons-

trukciji pouzdanih intervala, objašnjava se kako možemo egzaktno parametre zamijeniti procijenjenima te kakav ta zamjena ima utjecaj na samu konstrukciju. Nadalje, egzaktno se računa koji se dio varijance uklanja tom metodom. Na kraju se analizira alternativna reprezentacija tehnike u kojoj je procjenitelj za očekivanje opažane slučajne varijable težinski prosjek simulacija te slučajne varijable.

U trećem poglavlju obrađuje se metoda slojevitog uzorkovanja koja je bazirana na generiranju slučajnih varijabli iz specifičnih, prethodno definiranih podskupova. Prvo se definira procjenitelj pomoću slojevitog uzorkovanja, krenuvši od onog koji koristi jednostavnije proporcionalno uzorkovanje iz podskupova, do generalizacija u kojima se podskupove definira u terminima druge varijable te se koristi proizvoljna raspodjela simulacija k podskupovima. Zatim se računa varijanca takvog generaliziranog procjenitelja te se konstruiraju pouzdani intervali i objašnjavaju se različiti načini procjene nepoznatih parametara. Potom se obrađuje utjecaj proporcionalne i optimalne alokacije uzorka podskupovima na redukciju varijance. Nakon toga se diskutira koji dio varijance je uklonjen korištenjem metode te utjecaj broja podskupova na veličinu varijance. Kako metoda slojevitog uzorkovanja traži poznavanje uvjetne distribucije, kao alternativa se dodatno obrađuje jedna slična metoda koja traži samo poznavanje uobičajene distribucije te se uspoređuju varijance dobivene u obje metode.

U četvrtom poglavlju obrađuje se metoda uzorkovanja po važnosti koja se bazira na promjeni distribucije slučajne varijable. Prvo se objašnjava općeniti koncept zamjene mjere, definira se procjenitelj pomoću uzorkovanja po važnosti i opisuju se njegova svojstva. Uspoređuju se varijance dobivene uobičajenim Monte Carlo procjeniteljem i procjeniteljem pomoću uzorkovanja po važnosti te se određuje pogodna distribucija koja će najviše reducirati varijancu. Zatim se promatra ponašanje omjera stare i nove distribucije, omjera vjerodostojnosti, u graničnim uvjetima te se diskutira njegova distribucija. Naposljetku se komentira konstrukcija pouzdanih intervala te navodi važnost velikog uzorka kako bi konstrukcija bila valjana.

Peto poglavlje vrlo kratko i sažeto opisuje sličnosti između metoda odnosno, u kojim slučajevima su one iste ili se mogu smatrati nekom formom druge metode, kao i razlike među metodama. Navodi se koje parametre je potrebno poznavati kako bi se metoda mogla koristiti te garantira li ona redukciju u varijanci.

U zadnjem poglavlju primjenjuju se obrađene metode na primjerima iz financijske matematike. Prvo se navode osnovne definicije i teoremi na kojima se bazira određivanje cijene financijskih izvedenica, a koji su potrebni za razumijevanje teorije. Zatim se uvodi Black-Sholes-Mertonov model. Pokazuje se kako se modelira cijena rizične i nerizične financijske imovine te se opisuju pretpostavke potrebne za izračun cijene financijskih izvedenica iz kojih slijedi i sama formula za izračun cijene. Od financijskih izvedenica definiraju se europska i azijska call i put opcija te se objašnjava na koji način se one modeliraju. Potom se za svaku tehniku navode po dva primjera, od kojih se jedan može primijeniti



pri određivanju cijene europske opcije, a drugi pri određivanju cijene azijske opcije. Primjer određivanja cijene europske (call) opcije se implementira te se promatra redukcija u varijanci postignuta svakom od metoda u odnosu na Monte Carlo procjenitelj.

# Poglavlje 1

## Metode Monte Carlo

Monte Carlo metoda je alat kojim pomoću generiranja slučajnog uzorka dobivamo realizacije kojima aproksimiramo očekivanje slučajne varijable. Kako bismo opisali problem, krenut ćemo prvo formulacijom problema integracije na jediničnom skupu u odnosu Lebesgueovu mjeru, a kasnije ćemo taj rezultat generalizirati na općenitije skupove i mjere. Potom ćemo diskutirati koji teoremi omogućavaju Monte Carlo simulaciju te koje se metode koriste kako bi se reducirala pogreška dobivena simulacijom.

### 1.1 Definiranje problema

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Promatramo problem procjene integrala funkcije  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  na jediničnom intervalu  $I = [0, 1]$ . Ako  $\mathbb{E}|h(U)| < \infty$  tada integral

$$\mu = \int_I h(x) dx \quad (1.1)$$

možemo interpretirati kao očekivanje  $\mathbb{E}[h(U)]$ , gdje je  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uniformno distribuirana slučajna varijabla na skupu  $I$ . Neka je  $U_1, U_2, \dots, U_n$  niz nezavisnih slučajnih varijabli s uniformnom distribucijom na skupu  $I$ . Monte Carlo procjenitelj za  $\mu$  dan je s

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(U_i). \quad (1.2)$$

Taj procjenitelj je nepristran:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h(U_i)] = \mathbb{E}[h(U)] = \mu. \quad (1.3)$$

Problem se može generalizirati na procjenu očekivanja na skupu  $I^d = [0, 1]^d$ , potom na procjenu očekivanja na općenitijim skupovima  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  u odnosu na Lebesgueovu mjeru,

ali i na procjenu očekivanja na općenitim skupovima  $A \in \mathcal{F}$  u donosu na neku drugu mjeru, različitu od Lebesguove.

Neka je  $\mathbb{P}$  vjerojatnosna mjera,  $\mathbb{X}$  slučajni vektor na  $(\Omega, \mathcal{F})$  te  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da  $\int_{\Omega} |h(\mathbb{X})| d\mathbb{P} < \infty$ . Najopćenitija formulacija Monte Carlo integracije je sljedeća

$$\mu = \int_{\Omega} h(\mathbb{X}) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[h(\mathbb{X})]. \quad (1.4)$$

Nadalje, ako je  $\mathbb{X}$  neprekidan  $d$ -dimenzionalan slučajni vektor s funkcijom gustoće  $f$ , tada je

$$\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[h(\mathbb{X})]. \quad (1.5)$$

Specijalno, ako je  $\mathbb{X}$  uniformno distribuirani  $d$ -dimenzionalni slučajni vektor na jediničnoj  $d$ -dimenzionalnoj kocki  $I^d$ , tada je

$$\mu = \int_{I^d} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[h(\mathbb{X})]. \quad (1.6)$$

Ako je  $d = 1$  slijedi

$$\mu = \int_I h(x) dx = \mathbb{E}[h(X)]. \quad (1.7)$$

Napomenimo da je dovoljno generirati varijable iz uniformne distribucije na jediničnom intervalu. Pretpostavimo da je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla s funkcijom distribucije  $F$  koja ima inverz  $F^{-1}$ . Tada se distribucija slučajne varijable  $X$  može dobiti kao distribucija kompozicije  $F^{-1}(U)$ , gdje  $U \sim U(0, 1)$ . Pokažimo tu tvrdnju:

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x). \quad (1.8)$$

Dakle, vrijedi

$$X = F^{-1}(U) \sim F. \quad (1.9)$$

Interpretacija integrala kao očekivanja otvara nove mogućnosti, posebice u financijama. Jedna od osnovnih postavki u teoriji financijskog modeliranja je da se pod određenim uvjetima cijena izvedenica može prikazati kao očekivana vrijednost neke slučajne varijable. Korištenje Monte Carlo simulacija pri procjeni cijene izvedenica reducira računске troškove te rješava probleme integrala velikih dimenzija. To ćemo vidjeti u narednim poglavljima.

## 1.2 Valjanost procjene i moguća pogreška

Teoremi na kojima se bazira Monte Carlo metoda su jaki zakon velikih brojeva i centralni granični teorem. Jaki zakon velikih brojeva osigurava konvergenciju Monte Carlo procjene

k stvarnoj vrijednosti očekivanja, dok centralni granični teorem daje informaciju o mogućoj veličini pogreške procjene. Ovdje ćemo navesti oba teorema, a dokaz se može pronaći u [9].

**Teorem 1.1** (Jaki zakon velikih brojeva). *Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz  $(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, n \in \mathbb{N})$  konvergira (g.s) ako i samo ako  $\mu = \mathbb{E}X_1$  postoji i u tom slučaju je*

$$(g.s.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \mu. \quad (1.10)$$

**Teorem 1.2** (Centralni granični teorem). *Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\sigma^2$ ,  $0 < \sigma^2 < \infty$ , i neka je  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Tada vrijedi*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X}_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

U nastavku ćemo koristiti formulaciju problema definiranu u (1.1). Ako je  $h$  integrabilna funkcija na  $I$ , tada po jakom zakonu velikih brojeva slijedi konvergencija procjenitelja k očekivanju:

$$\hat{\mu}_n \xrightarrow{g.s} \mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Ako je  $h$  kvadratno integrabilna funkcija na  $I$ , iz centralnog graničnog teorema slijedi približna distribucija pogreške Monte Carlo procjenitelja:

$$\hat{\mu}_n - \mu \sim AN\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

gdje je varijanca

$$\sigma^2 = \int_0^1 (h(x) - \mu)^2 dx. \quad (1.14)$$

U praksi je parametar  $\sigma$  najčešće nepoznat, ali se može procijeniti uzoračkom standardnom devijacijom

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h(U_i) - \hat{\mu}_n)^2}. \quad (1.15)$$

Ukoliko vrijedi da je  $\hat{\sigma}_n$  konzistentan procjenitelj za  $\sigma$ , tada možemo zamijeniti pravu standardnu devijaciju procijenjenom. To nam govori sljedeći teorem, čiji se dokaz može pronaći [2].

**Teorem 1.3.** *Neka je  $X_1, X_2, \dots, X_n$  slučajni uzorak iz populacije s konačnom varijancom  $\sigma^2 > 0$  i neka je  $\mu$  parametar očekivanja. Ako je  $\hat{\sigma}_n$  konzistentan procjenitelj za standardnu devijaciju  $\sigma$ , tada*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Jedna od najvećih prednosti Monte Carlo procjene u odnosu na numeričke metode jest da promjenom dimenzije integrala, pogreška dobivena procjenom integrala ostaje ista. Dakle, dobivena pogreška ne ovisi o dimenziji i ona je uvijek jednaka  $O(n^{-1/2})$ .

## 1.3 Inačice centralnog graničnog teorema

### 1.3.1 Centralni granični teorem uz računsko ograničenje

Uz varijancu procjenitelja, bitnu ulogu ima i veličina računskog troška generiranja slučajne varijable. Stoga ćemo u ovom poglavlju izvesti centralni granični teorem koji će uzimati u obzir računski trošak. Pri korištenju uobičajenog centralnog graničnog teorema generiramo proizvoljan broj  $n$  nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, dok u ovom slučaju ne možemo generirati proizvoljan broj slučajnih varijabli već smo ograničeni troškovnim budžetom.

Neka su  $Y$  i  $\tau$  slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Neka slučajne varijable  $Y_i, i = 1, 2, \dots$  imaju istu distribuciju kao slučajna varijabla  $Y$ , a  $\tau_i, i = 1, 2, \dots$  kao slučajna varijabla  $\tau$ . Neka je  $\mathbb{E}[Y_i] = \mu_Y, \mathbb{E}[\tau_i] = \mu_\tau, \text{Var}[Y_i] = \sigma_Y^2, i = 1, 2, \dots$  i neka  $t$  označava raspoloživi računski budžet.

Pretpostavimo da je  $(Y_i, \tau_i), i = 1, 2, \dots$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih vektora, gdje  $Y_i$  označava  $i$ -tu slučajnu varijablu, odnosno simulaciju, a  $\tau_i$  vrijeme izračuna potrebno za generiranje te  $i$ -te slučajne varijable. Slijedi da je  $(Y_i : i \geq 1)$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem  $\mu_Y$  i varijancom  $\sigma_Y^2$ .

Definiramo brojeći proces  $(N_t : t \geq 1)$  s

$$N_t = \sup \left\{ n \geq 0 : \sum_{i=1}^n \tau_i \leq t \right\}. \quad (1.17)$$

Slučajna varijabla  $N_t$  predstavlja broj mogućih realizacija varijabli  $Y_i$  s obzirom na računski budžet  $t$  i proces  $(N_t : t \geq 1)$  je niz strogo pozitivnih cjelobrojnih vrijednosti. Iz jakog zakona velikih brojeva za brojeći proces slijedi

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{g.s.} \frac{1}{\mu_\tau}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Procjenitelj za  $\mu_Y$  koji uzima u obzir računski trošak generiranja varijable je

$$\bar{Y}_{N_t} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \quad (1.19)$$

Sljedeći teorem govori nam o graničnom ponašanju takvog procjenitelja.

**Teorem 1.4.** *Neka je  $(Y_j, j \geq 1)$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem  $\mu_Y$  i varijancom  $\sigma_Y^2 > 0$ . Neka je  $(N_t, t \geq 1)$  niz slučajnih varijabli koje poprimaju strogo pozitivne vrijednosti takve da vrijedi*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} c, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.20)$$

gdje je  $c$  konstanta takva da  $0 < c < \infty$ . Tada

$$\sqrt{N_t} \frac{\bar{Y}_{N_t} - \mu_Y}{\sigma_Y} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.21)$$

Dokaz navedenog teorema može se pronaći u [1].

Budući da je u našem primjeru  $c = \frac{1}{\mu_\tau}$ , slijedi

$$\sqrt{t} (\bar{Y}_{N_t} - \mu_Y) \sim AN(0, \sigma_Y^2 \mu_\tau), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

### 1.3.2 Centralni granični teorem za omjere procjenitelja

U ovom poglavlju izvest ćemo granično ponašanje omjera procjenitelja koji će nam biti potrebni kasnije u radu. Neka su  $S$  i  $N$  slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Neka slučajne varijable  $S_i, i = 1, 2, \dots$  imaju istu distribuciju kao i slučajna varijabla  $S$ , a slučajne varijable  $N_i, i = 1, 2, \dots$  istu distribuciju kao i slučajna varijabla  $N$ . Neka su  $(S_i, N_i), i = 1, 2, \dots$  nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori gdje je  $\mathbb{E}[S_i] = \mu_S, \mathbb{E}[N_i] = \mu_N$  i  $\text{Var}[S_i] = \sigma_S^2, \text{Var}[N_i] = \sigma_N^2$  te  $\text{Cov}[S_i, N_i] = \sigma_{SN}, i = 1, 2, \dots$ . Pretpostavljamo da je  $\mu_N \neq 0$ . Neka su  $\bar{S}_n, \bar{N}_n$  uzoračke aritmetičke sredine.

Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\frac{\bar{S}_n}{\bar{N}_n} \xrightarrow{g.s.} \frac{\mu_S}{\mu_N}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

Korištenjem Cramerovog teorema, gdje je funkcija  $h(x, y) = \frac{x}{y}$ , slijedi

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{S}_n}{\bar{N}_n} - \frac{\mu_S}{\mu_N} \right) \sim AN(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

Naposljetku izračunajmo varijancu takvog procjenitelja

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \nabla h(\mu_S, \mu_N) \Sigma \nabla h(\mu_S, \mu_N)^\top \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_N \end{pmatrix}, -\frac{\mu_S}{\mu_N^2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \sigma_{SN} \\ \sigma_{SN} & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_N \end{pmatrix}, -\frac{\mu_S}{\mu_N^2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 \\ \sigma_{SN} \\ \sigma_N^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\mu_S^2}{\mu_N^4} \sigma_N^2 - 2 \frac{\mu_S}{\mu_N^3} \sigma_{SN} + \frac{\sigma_S^2}{\mu_N^2} \\
 &= \frac{\text{Var} \left[ S - \frac{\mu_S}{\mu_N} N \right]}{\mu_N^2}.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

## 1.4 Tehnike redukcije varijance

Budući da kod simulacija uvijek težimo što točnijim rezultatima i pogreška predstavlja svojevrstan rizik, zanimaju nas načini na koje bismo mogli reducirati pogrešku dobivenu simulacijama. Iz prethodnog odjeljka znamo da je greška dobivena Monte Carlo simulacijama oblika  $\frac{\sigma^2}{n}$ . Ta greška se može reducirati ili povećanjem broja simulacija ili smanjenjem varijance. Povećanje broja simulacija smanjuje grešku, ali i povećava vrijeme računanja. S druge strane tehnike redukcije varijance povećavaju efikasnost Monte Carlo simulacija tako da reduciraju varijancu procjenitelja, a bez povećanja broja simulacija.

U sljedećem poglavlju opisat će se neke od najvažnijih tehnika redukcija varijance u Monte Carlo simulacijama. Kod ocjene pojedinih tehnika diskutirat će se nepristranost procjenitelja, varijanca procjenitelja i vrijeme izračuna.

U različitoj literaturi tehnike se grupiraju po drugačijim pravilima te stoga ne postoji neka savršena taksonomija. U ovom radu bit će klasificirane u tri glavne grupe te će iz svake grupe biti opisana jedna tehnika. U prvoj se grupi nalazi *metoda kontrolne slučajne varijable* (Control variates). Metode u toj grupi reduciraju varijancu korištenjem već poznatog rješenja problema koji je sličan danom problemu. U drugoj grupi opisat će se *slojevito uzorkovanje* (Stratified sampling). U toj grupi nalaze se metode koje reduciraju varijancu strateškim generiranjem varijabli. U zadnjoj grupi nalazi se *uzorkovanje po važnosti* (Importance sampling). Te metode prepoznaju rijetke događaje te tim događajima daju odgovarajuću težinu.

## Poglavlje 2

# Kontrolne slučajne varijable

### 2.1 Općenito o metodi

Ova metoda temelji se na iskorištavanju informacije o pogrešci kod simulacija poznatih veličina kako bismo smanjili pogrešku dobivenu simulacijom nepoznatih veličina.

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka su  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne varijable na tom prostoru. Pretpostavimo da očekivanja  $\mathbb{E}[X]$  i  $\mathbb{E}[Y]$  postoje i da imaju konačnu varijancu. Pretpostavimo još i da su varijable  $X$  i  $Y$  međusobno korelirane, pri čemu ne mora vrijediti da je  $Y$  funkcija od  $X$ .

Pretpostavimo da je  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje predstavljaju rezultat od  $n$  simulacija slučajne varijable  $Y$ . Želimo procijeniti očekivanje  $\mu = \mathbb{E}[Y_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Očekivanje  $\mu$  jednako je za sve simulirane varijable zbog pretpostavke o jednakoj distribuiranosti. Uobičajeni procjenitelj za  $\mu$  jest uzoračka aritmetička sredina

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n), \quad (2.1)$$

te za njega znamo da je nepristran i jako konzistentan procjenitelj za  $\mu$ . Dodatno, možemo uvesti kontrolnu varijablu  $X$  tako da uz svaku simulaciju izračunamo i rezultat  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , koji predstavlja realizacije slučajne varijable  $X$ . Sada promatramo niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih vektora  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gdje je očekivanje  $\theta_X = \mathbb{E}[X_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , poznato.

Najčešći procjenitelj za  $\mu$  koji se koristi kod procjenjivanja očekivanja  $\mu$  pomoću kontrolnih varijabli jest linearni regresijski procjenitelj. Uz fiksni  $\beta \in \mathbb{R}$ , za svaku  $i$ -tu simulaciju možemo izračunati

$$Y_i(\beta) = Y_i - \beta(X_i - \theta_X). \quad (2.2)$$



Uzoračka aritmetička sredina tako definiranog izraza je tada

$$\bar{Y}_n(\beta) = \bar{Y}(\beta) = \bar{Y}_n - \beta(\bar{X}_n - \theta_X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta(X_i - \theta_X)). \quad (2.3)$$

Procjenitelj definiran izrazom (2.3) zovemo procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable. Možemo provjeriti da je procjenitelj (2.3) nepristran i jako konzistentan za  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{Y}(\beta)] &= \mathbb{E}[\bar{Y}_n - \beta(\bar{X}_n - \theta_X)] \\ &= \mathbb{E}[\bar{Y}_n] - \beta(\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \theta_X) \\ &= \mathbb{E}[\bar{Y}_n] = \mu \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta(X_i - \theta_X)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta(X_i - \theta_X) \\ &= \mu - \beta(\theta_X - \theta_X) = \mu. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Iz činjenice da je uzoračka aritmetička sredina nepristran i jako konzistentan procjenitelj za očekivanje slijedi nepristranost i jaka konzistentnost procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable.

Želimo izračunati i varijancu takvog procjenitelja. Koristit ćemo oznake  $\sigma_X^2$  i  $\sigma_Y^2$  za varijancu slučajnih varijabli  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a korelaciju između njih označit ćemo sa  $\rho_{XY}$ . Varijancu procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable označit ćemo sa  $\sigma^2(\beta)$ .

$$\begin{aligned} \sigma^2(\beta) &:= \text{Var}[Y_i(\beta)] = \text{Var}[Y_i - \beta(X_i - \theta_X)] \\ &= \text{Var}[Y_i] - 2\beta \text{Cov}(Y_i, X_i - \theta_X) + \beta^2 \text{Var}[X_i - \theta_X] \\ &= \sigma_Y^2 - 2\beta \text{Cov}(X_i, Y_i) + \beta^2 \sigma_X^2 \\ &= \sigma_Y^2 - 2\beta \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY} + \beta^2 \sigma_X^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable ima varijancu  $\frac{\sigma^2(\beta)}{n}$ , dok obična uzoračka aritmetička sredina odgovara slučaju  $\beta = 0$  i ima varijancu  $\frac{\sigma_Y^2}{n}$ .

Zanima nas pod kojim uvjetima procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable ima manju varijancu nego uzoračka aritmetička sredina. Optimalni koeficijent  $\beta^*$  koji minimizira varijancu pronalazimo među stacionarnim točkama izraza (2.6) kao funkcije po  $\beta$ . Provjera

globalnog minimuma nije potrebna jer je funkcija (2.6) konveksna kvadratna funkcija po  $\beta$ . Koeficijent  $\beta^*$  je oblika

$$\beta^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}. \quad (2.7)$$

Pogledajmo sada omjer varijanci procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable i uzoračke aritmetičke sredine:

$$\frac{\text{Var}[\bar{Y}_n - \beta^*(\bar{X}_n - \theta_X)]}{\text{Var}[\bar{Y}_n]} = \frac{\frac{\sigma^2(\beta^*)}{n}}{\frac{\sigma_Y^2}{n}} = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \rho_{XY}^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \rho_{XY}^2. \quad (2.8)$$

Iz omjera u (2.8) vidimo da, ako efikasnost uvođenja kontrolne varijable mjerimo omjerom redukcije varijance, tada je efikasnost određena jačinom korelacije između varijabli  $X_i$  i  $Y_i$ , gdje  $i = 1, \dots, n$ , i ne ovisi o tome je li ta korelacija pozitivna ili negativna. Međutim, kako bismo stvarno vidjeli isplati li se koristiti procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable, trebamo diskutirati koliki su troškovi izračuna kontrolne varijable. Ukoliko je računski trošak po replikaciji bez i sa kontrolnom varijablom približno jednak, tada (2.8) mjeri računsko ubrzanje dobiveno korištenjem kontrolne varijable. Preciznije, uz pretpostavku jednakog računskog troška, kako bismo postigli varijancu jednaku onoj koju dobijemo iz  $n$  simulacija od  $Y_i(\beta^*)$ , potrebno je  $\frac{n}{1-\rho_{XY}}$  simulacija od  $Y_i$ . Uvjerimo se u to:

$$\frac{\frac{\sigma^2(\beta^*)}{n}}{\frac{\sigma_Y^2}{\frac{n}{1-\rho_{XY}}}} = \frac{\frac{\sigma^2(\beta^*)}{n}}{\frac{\sigma_Y^2(1-\rho_{XY})}{n}} = \frac{\sigma^2(\beta^*)}{\sigma_Y^2} \frac{1}{1-\rho_{XY}} = \frac{1-\rho_{XY}}{1-\rho_{XY}} = 1. \quad (2.9)$$

U praksi  $\beta^*$  nije poznat jer, ukoliko nije poznato očekivanje  $\mu$ , neće biti ni  $\sigma_Y^2$ , ni  $\rho_{XY}$ . Međutim, možemo ga procijeniti metodom najmanjih kvadrata na sljedeći način:

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}. \quad (2.10)$$

Procjenitelj  $\hat{\beta}_n$  dobiven metodom najmanjih kvadrata je jako konzistentan procjenitelj za  $\beta^*$ . To slijedi iz jake konzistentnosti uzoračke kovarijance i varijance.

Metodu kontrolnih varijabli možemo interpretirati i geometrijski. Procijenjeni parametar  $\hat{\beta}_n$  jest nagib pravca regresije čiji su koeficijenti dobiveni metodom najmanjih kvadrata.  $\bar{Y}(\hat{\beta}_n)$  je vrijednost prilagođene regresijske linearne funkcije u točki  $\theta_X$ .

## 2.2 Višestruke kontrolne varijable

Procjenitelj za  $\mu$  pomoću jedne kontrolne varijable možemo generalizirati na više dimenzije te uvesti procjenitelj za  $\mu$  pomoću više kontrolnih varijabli, odnosno pomoću kontrolnog vektora. Procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora i dalje će odražavati linearnu vezu. Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor te je  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  slučajni vektor i  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla. Pretpostavimo da postoji  $\mathbb{E}[\mathbb{X}]$  i  $\mathbb{E}[Y]$  te da  $Y$  ima konačnu varijancu i  $\mathbb{X}$  konačnu kovarijacijsku matricu. Opet pretpostavljamo da su  $\mathbb{X}$  i  $Y$  korelirani s time da ne mora vrijediti da je  $Y$  funkcija od  $\mathbb{X}$ .

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, odnosno u slučaju jedne kontrolne varijable, neka je  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje predstavljaju rezultat od  $n$  simulacija. Sada možemo definirati matricu čiji jedan redak predstavlja  $i$ -tu simulaciju gdje  $i = 1, \dots, n$ , a jedan stupac realizaciju  $j$ -te kontrolne varijable gdje  $j = 1, \dots, d$ . Broj simulacija je  $n$ , a  $d$  je broj kontrolnih varijabli, tj. dimenzija kontrolnog vektora. Matrica je sljedećeg oblika:

$$\begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & \dots & X_1^{(d)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & \dots & X_2^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^{(1)} & X_n^{(2)} & \dots & X_n^{(d)} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Označimo sa  $\mathbb{X}_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \dots, X_i^{(d)})^\top$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pripadajući kontrolni vektor svake od  $n$  simulacija. Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, očekivanje  $\theta_{\mathbb{X}} = \mathbb{E}[\mathbb{X}_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , je poznato i jednako za svaku simulaciju. Međutim, sada  $\theta_{\mathbb{X}} = (\theta_X^{(1)}, \theta_X^{(2)}, \dots, \theta_X^{(d)})$  nije skalar, već predstavlja  $d$ -dimenzionalni vektor očekivanja, pri čemu  $j$ -ta koordinata predstavlja očekivanje  $j$ -te kontrolne varijable. Pretpostavimo da su parovi  $(\mathbb{X}_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , nezavisni jednako distribuirani s kovarijacijskom matricom

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY}^\top & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Također pretpostavljamo da  $\Sigma_{XX}$  nije singularna matrica. Naime, ukoliko je matrica singularna, neki od vektora  $\mathbb{X}^{(k)} = (X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$ ,  $k = 1, \dots, d$ , može se prikazati kao linearna kombinacija drugih vektora  $\mathbb{X}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $j \neq k$ , te se stoga ta kontrolna varijabla mora ukloniti.

Neka je  $\bar{\mathbb{X}}_n$  vektor uzoračkih aritmetičkih sredina kontrolnih varijabli. Za fiksni vektor koeficijena  $\beta \in \mathbb{R}^d$ , procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora je

$$\bar{Y}_n(\beta) = \bar{Y}(\beta) = \bar{Y}_n - \beta^\top (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}). \quad (2.13)$$

Kao i ranije, možemo izračunati varijancu koju dobijemo po simulaciji. Prije izračuna moramo napomenuti da kako je sada  $\mathbb{X}$  slučajni vektor, varijanca je zapravo kovarijacijska

matrica. Uz to,  $\beta$  i  $\mathbb{X}$  su dimenzija  $d \times 1$ ,  $\Sigma_{XX}$  je dimenzije  $d \times d$ , a  $\Sigma_{XY}$  dimenzije  $d \times 1$ .

$$\begin{aligned}\sigma^2(\beta) &:= \text{Var}[Y_i(\beta)] = \text{Var}[Y_i - \beta^\top(\mathbb{X}_i - \theta_{\mathbb{X}})] \\ &= \text{Cov}(Y_i, Y_i) - \text{Cov}(Y_i, \mathbb{X}_i)\beta - \beta^\top \text{Cov}(\mathbb{X}_i, Y_i) + \beta^\top \text{Cov}[\mathbb{X}_i]\beta \\ &= \sigma_Y^2 - 2\beta^\top \Sigma_{XY} + \beta^\top \Sigma_{XX}\beta.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Optimalni vektor koeficijenata  $\beta^*$  koji minimizira varijancu pronalazimo među stacionarnim točkama izraza (2.14) kao funkcije više varijabli po  $\beta$ . Pritom provjera globalnog minimuma nije potrebna jer je funkcija (2.14) konveksna kvadratna funkcija po  $\beta$ . Vektor koeficijenata  $\beta^*$  dan je s

$$\beta^* = \Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}.\quad (2.15)$$

Opet možemo promatrati omjer varijanci procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora kako bismo vidjeli kolika je efikasnost uvođenja kontrolnog vektora, pri čemu je  $R^2$  koeficijent determinacije dan s

$$R^2 = \frac{\Sigma_{XY}^\top \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}.\quad (2.16)$$

Računamo:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Var}[\bar{Y}(\beta^*)]}{\text{Var}[\bar{Y}_n]} &= \frac{\sigma_Y^2 - 2\beta^{*\top}\Sigma_{XY} + \beta^{*\top}\Sigma_{XX}\beta^*}{\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - 2(\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY})^\top \Sigma_{XY} + (\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY})^\top \Sigma_{XX}(\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY})}{\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - 2\Sigma_{XY}^\top \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY} + \Sigma_{XY}^\top \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XX} \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - \Sigma_{XY}^\top \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 R^2}{\sigma_Y^2} = 1 - R^2.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Dakle,  $R^2$  mjeri dio varijance od  $Y$  koji je uklonjen koristeći  $\mathbb{X}$  kao kontrolni vektor. Ponovno, kako bismo vidjeli isplati li se stvarno uvođenje kontrolne varijable u obzir se dodatno trebaju uzeti i troškovi generiranja simulacija.

Dakako u primjenama je potrebno procijeniti optimalan vektor koeficijenata  $\beta^*$ . Procjenitelj metodom najmanjih kvadrata za  $\beta^*$  je

$$\hat{\beta}_n = S_{XX}^{-1}S_{XY}.\quad (2.18)$$

$S_{XY}$  je uzorački kovarijacijski vektor i ima dimenziju  $d \times 1$ , a  $S_{XX}$  je uzoračka kovarijacijska matrica ima dimenziju  $d \times d$ .  $S_{XY}$  i  $S_{XX}$  dani su formulama:

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \quad (2.19)$$

$$S_{XX} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^\top. \quad (2.20)$$

### 2.3 Nelinearni procjenitelji

Do sada smo opisivali procjenitelje za  $\mu$  koji su povezani s kontrolnim varijablama linearnom vezom, a sada ćemo razmotriti procjenitelje za  $\mu$  povezane s kontrolnim varijablama nelinearnom vezom. Jedna od metoda je korištenje veličine odstupanja između vektora  $\bar{\mathbb{X}}_n$  i njegovog očekivanja  $\theta_{\mathbb{X}}$  kako bi se poboljšao procjenitelj  $\bar{Y}_n$  kod procjene  $\mu$ . Općenito, takvi procjenitelji su oblika  $h(\bar{\mathbb{X}}_n, \bar{Y}_n)$ , gdje funkcija  $h$  zadovoljava uvjet

$$h(\theta_{\mathbb{X}}, y) = y, \quad \forall y. \quad (2.21)$$

Procjenitelj za  $\mu$  definiran na način u (2.21) općenito nije nepristran. Budući da vrijedi da je  $(x, y) \mapsto h(x, y)$  neprekidna funkcija i uzoračka aritmetička sredina jako konzistentan procjenitelj, slijedi jaka konzistentnost procjenitelja (2.21):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\bar{\mathbb{X}}_n, \bar{Y}_n) = h(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{X}}_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n) = h(\theta_{\mathbb{X}}, \mu) = \mu. \quad (2.22)$$

Navest ćemo dva primjera takvih procjenitelja, ali samo za slučaj kada je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla budući da bi u suprotnom imali operaciju dijeljenja vektora koja nije definirana. Jedan primjer jest

$$h_1(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \bar{Y}_n \frac{\theta_X}{\bar{X}_n} \quad h_2(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \bar{Y}_n \frac{\bar{X}_n}{\theta_X}, \quad (2.23)$$

gdje je procjenitelj  $h_1$  pogodan za pozitivno korelirane varijable  $X_i$  i  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a  $h_2$  za negativno korelirane varijable  $X_i$  i  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Promatrajmo, primjerice, procjenitelj  $h_1$  za  $\mu$  pozitivno koreliranih varijabli. Taj procjenitelj korigira vrijednost od  $\bar{Y}_n$  prema gore ako je  $0 < \bar{X}_n < \theta_X$  ili korigira vrijednost od  $\bar{Y}_n$  prema dolje ako je  $0 < \theta_X < \bar{X}_n$ . Drugi primjer tog tipa procjenitelja jest

$$h_3(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \bar{Y}_n e^{(\bar{X}_n - \theta_X)} \quad h_4(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \bar{Y}_n \left( \frac{\bar{X}_n}{\theta_X} \right). \quad (2.24)$$

Sada ćemo pokazati u kojem se slučaju isplati koristiti nelinearne kontrolne varijable i zašto su u ostalim slučajevima ipak bolje linearne kontrolne varijable. Kao i ranije, neka su  $(\bar{X}_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , slučajni vektori s očekivanjem  $(\theta_{\mathbb{X}}, \mu)$  te kovarijacijskom matricom

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Iz Cramerovog teorema slijedi

$$\sqrt{n}(h(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) - \mu) \sim AN(0, \sigma_h^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 &= \nabla h(\theta_{\mathbb{X}}, \mu) \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY}^\top & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \nabla h(\theta_{\mathbb{X}}, \mu)^\top \\ &= \left( \nabla_x h, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{XY}^\top & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \left( \nabla_x h, \frac{\partial h}{\partial y} \right)^\top \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \nabla_x h \Sigma_{XY} + \nabla_x h \Sigma_{XX} \nabla_x h^\top \\ &= \sigma_Y^2 + 2 \nabla_x h \Sigma_{XY} + \nabla_x h \Sigma_{XX} \nabla_x h^\top, \end{aligned} \quad (2.27)$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je funkcija  $h(\theta_{\mathbb{X}}, \cdot)$  identiteta. Možemo vidjeti da je to upravo varijanca od ranije pokazanog procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnih varijabli povezanih linearnom vezom

$$Y_i(\beta) = Y_i - \beta^\top (\bar{X}_i - \theta_{\mathbb{X}}), \quad (2.28)$$

čiji je  $\beta = -\nabla_x h(\theta_{\mathbb{X}}, \mu)$ . Razvojem Taylorovog reda funkcije  $h$  u okolini  $(\theta_{\mathbb{X}}, \mu)$  možemo vidjeti da je bitan samo linearan dio funkcije  $h$ . Distribucija nelinearnog procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnih varijabli je stoga asimptotski jednaka distribuciji linearnog procjenitelja čiji je specifičan koeficijent  $\beta = -\nabla_x h(\theta_{\mathbb{X}}, \mu)$ . Dakle, varijanca  $\sigma_h^2$  koja se dobije korištenjem nelinearnog procjenitelja ne mora biti manja od one koju bismo dobili korištenjem optimalnog parametra  $\beta^* = \Sigma_{XX}^{-1} \Sigma_{XY}$ .

Možemo zaključiti da nelinearni procjenitelji imaju prednost samo ako se radi o malom uzorku. Cramerov teorem nam kaže da je asimptotski značajan samo linearan dio funkcije  $h$  i da, ako je  $h$  jako nelinearna funkcija, potreban je velik uzorak kako bi asimptotski zaključci vrijedili. Jedna prednost kod nelinearnih procjenitelja jest da je koeficijent  $\beta$  implicitno određen funkcijom  $h$  te nije potrebna procjena tog parametara.

## 2.4 Analiza rezultata

Budući da smo zaključili kako s nelinearnim procjeniteljima za  $\mu$  pomoću kontrolnih varijabli ne dobivamo poboljšanje u redukciji varijance u odnosu na linearne procjenitelje za velike uzorke, vraćamo se na analizu linearnog procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora.

Kod izračuna pouzdanih intervala, bitno je razmotriti jesu li uzorci dobiveni simulacijom nezavisni i nepristrani. U našem slučaju, kod malih uzoraka postoji pristranost linearnog procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora koja nastaje pri zamjeni  $\beta^*$  s procijenjenim  $\hat{\beta}_n$ . Kako bismo se u to uvjerili pogledajmo sljedeće:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{Y}(\hat{\beta}_n)] - \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[\hat{\beta}_n^\top (\bar{X}_n - \theta_x)] - \mathbb{E}[Y] \\ &= -\mathbb{E}[\hat{\beta}_n^\top (\bar{X}_n - \theta_x)].\end{aligned}\quad (2.29)$$

Izraz (2.29) ne mora biti jednak nuli jer  $\hat{\beta}_n^\top$  i  $\bar{X}_n$  nisu nezavisni. S druge strane, procjenitelj  $\bar{Y}(\hat{\beta}_n)$  za  $\mu$  je jako konzistentan. Konzistentnost procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable pri uvođenju  $\hat{\beta}_n^\top$  slijedi iz jakog zakona velikih brojeva:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(\hat{\beta}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta_x) \\ &= \mu - \beta^*(\theta_x - \theta_x) = \mu.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Nakon diskusije o nepristranosti i jake konzistentnosti procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable, možemo konstruirati pouzdane intervale za  $\mu$ . Po centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}(\beta^*) - \mu}{\sigma(\beta^*)} \sim AN(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Budući da je za optimalni parametar  $\beta^*$  procjenitelj  $\bar{Y}(\beta^*)$  za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable uzoračka aritmetička sredina nezavisnih simulacija  $Y_i(\beta^*)$ ,  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  pouzdani interval za  $\mu$  koji dobijemo kod korištenja  $\bar{Y}(\beta^*)$  jest

$$\left[ \bar{Y}(\beta^*) - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma(\beta^*)}{\sqrt{n}}, \bar{Y}(\beta^*) + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma(\beta^*)}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2.32)$$

U praksi je  $\sigma(\beta^*)$  najčešće nepoznat, ali se može procijeniti uzoračkom standardnom devijacijom

$$\hat{\sigma}(\beta^*) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i(\beta^*) - \bar{Y}(\beta^*))^2}, \quad (2.33)$$

koja je jako konzistentan procjenitelj za  $\sigma(\beta^*)$ . Nadalje, iz teorema 1.3 znamo da ako je  $\hat{\sigma}(\beta^*)$  jako konzistentan procjenitelj za  $\sigma(\beta^*)$ , da tada slijedi

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}(\beta^*) - \mu}{\hat{\sigma}(\beta^*)} \sim AN(0, 1), n \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

pa možemo konstruirati  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  pouzdani interval za  $\mu$  koji dobijemo kod korištenja procjenitelja  $\bar{Y}(\beta^*)$  i procijenjene standardne devijacije  $\hat{\sigma}(\beta^*)$

$$\left[ \bar{Y}(\beta^*) - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}(\beta^*)}{\sqrt{n}}, \bar{Y}(\beta^*) + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}(\beta^*)}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2.35)$$

Napomenuli smo da je u praksi najčešće i koeficijent  $\beta^*$  nepoznat te da ga je potrebno procijeniti. Otprije znamo da je  $\hat{\beta}_n$  jako konzistentan procjenitelj za  $\beta^*$ . Kako bismo upoznali asimptotsko ponašanje pogreške dobivene kod korištenja procjenitelja  $\bar{Y}(\hat{\beta}_n)$  za  $\mu$  koristimo sljedeći teorem:

**Teorem 2.1** (Asimptotska ekvivalentnost procjenitelja). *Ako vrijedi  $X_n \xrightarrow{D} X$  i  $(X_n - Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  tada slijedi  $Y_n \xrightarrow{D} X$ . Kažemo da su  $X_n$  i  $Y_n$  asimptotski ekvivalentni ako vrijedi  $(X_n - Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ .*

Za dokaz vidi [2]. U (2.34) pokazali smo da procjenitelj  $\bar{Y}(\beta^*)$  za  $\mu$  s optimalnim koeficijentom  $\beta^*$  zadovoljava prvu pretpostavku teorema. Sada pokažimo da vrijedi i druga pretpostavka teorema:

$$\sqrt{n}(\bar{Y}(\hat{\beta}_n) - \bar{Y}(\beta^*)) = (\hat{\beta}_n - \beta^*) \sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_{\bar{X}}) \sim 0 \cdot AN(0, \Sigma_X) = 0, n \rightarrow \infty, \quad (2.36)$$

što slijedi iz činjenice da je  $\hat{\beta}_n$  jako konzistentan procjenitelj za  $\beta^*$ . Stoga možemo zaključiti da je procjenitelj  $\bar{Y}(\hat{\beta}_n)$  za  $\mu$  asimptotski ekvivalentan procjenitelju  $\bar{Y}(\beta^*)$  za  $\mu$ , tj. iz teorema slijedi

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}(\hat{\beta}_n) - \mu}{\sigma(\beta^*)} \sim AN(0, 1), n \rightarrow \infty, \quad (2.37)$$

gdje je  $\sigma(\beta^*)$  dana izrazom (2.14) Pokažimo sada da je  $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)$  jako konzistentan procjenitelj



za  $\sigma(\beta^*)$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2(\hat{\beta}_n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i(\hat{\beta}_n) - \bar{Y}(\hat{\beta}_n))^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_n(\mathbb{X}_i - \theta_{\mathbb{X}}) - \bar{Y}_n + \hat{\beta}_n(\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}))^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((Y_i - \bar{Y}_n) - \hat{\beta}_n(\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n))^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 - 2\hat{\beta}_n^\top \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) + \\
 &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_n^\top (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)^\top \hat{\beta}_n \\
 &\xrightarrow{g.s.} \sigma_Y^2 - 2\beta^{*\top} \Sigma_{XY} + \beta^{*\top} \Sigma_{XX} \beta^* = \sigma^2(\beta^*), \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Iz teorema 1.3 i jake konzistentnosti procjenitelja  $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)$  za  $\sigma(\beta^*)$  slijedi

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}(\hat{\beta}_n) - \mu}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)} \sim AN(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \tag{2.39}$$

pa možemo konstruirati  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  pouzdani interval za  $\mu$  koji dobijemo kod korištenja procjenitelja  $\bar{Y}(\hat{\beta}_n)$  i procijenjene standardne devijacije  $\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)$ :

$$\left[ \bar{Y}(\hat{\beta}_n) - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)}{\sqrt{n}}, \bar{Y}(\hat{\beta}_n) + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_n)}{\sqrt{n}} \right]. \tag{2.40}$$

Dakle, zamjenom optimalnog parametra  $\beta$  s procijenjenim parametrom  $\hat{\beta}_n$  pouzdani intervali za  $\mu$  ostaju vrijediti asimptotski i nisu bitno širi od onih dobivenih koristeći egzaktne optimalni parametar  $\beta^*$ .

## 2.5 Dekompozicija varijance

Promatramo višedimenzionalni slučaj linearnog procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora. Pretpostavljamo da se nalazimo na prostoru  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}|Z|^2 < \infty\}$ . Neka je  $\mathcal{K} = [\mathbb{X}, 1]$  linearna ljuska komponenti kontrolnog vektora  $\mathbb{X}$ .  $\mathcal{K}$  je potpun potprostor prostora  $\mathcal{L}^2$ . Neka je  $Y \in \mathcal{L}^2$  te je po definiciji od  $\mathcal{K}$ ,  $\mathbb{X} \in \mathcal{K}$ .

Za proizvoljan  $\beta$  možemo pisati sljedeće:

$$Y = \mu + \beta^\top (\mathbb{X} - \theta_{\mathbb{X}}) + \varepsilon, \quad (2.41)$$

gdje  $\varepsilon$  definiramo tako da jednakost vrijedi. Stoga, ako je  $\beta = \beta^* = \Sigma_{\mathbb{X}\mathbb{X}}^{-1} \Sigma_{\mathbb{X}Y}$  tada je  $P[Y|\mathbb{X}] = \mu + \beta^{*\top} (\mathbb{X} - \theta_{\mathbb{X}})$  ortogonalna projekcija slučajne varijable  $Y$  na potprostor  $\mathcal{K}$  te po teoremu o projekciji slijedi da je  $\varepsilon$  nekoreliran s  $\mathbb{X}$ . Pogledajmo sada dekompoziciju varijance slučajne varijable  $Y$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}[\mu + \beta^{*\top} (\mathbb{X} - \theta_{\mathbb{X}}) + \varepsilon] \\ &= \text{Var}[\beta^{*\top} \mathbb{X} + \varepsilon] = \text{Var}[\beta^{*\top} \mathbb{X}] + \text{Var}[\varepsilon] \\ &= \text{Var}[\beta^{*\top} \mathbb{X}] + \text{Var}[Y - \beta^{*\top} \mathbb{X}] \\ &= \text{Var}[\beta^{*\top} \mathbb{X}] + \text{Var}[Y(\beta^*)]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Možemo vidjeti da je dio  $\text{Var}[Y]$  koji je eliminiran koristeći  $\mathbb{X}$  kao kontrolnu varijablu  $\text{Var}[\beta^{*\top} \mathbb{X}]$ .

Zaključujemo da, ako je  $\beta^*$  optimalni vektor, tada  $\mu + \beta^{*\top} (\mathbb{X} - \theta_{\mathbb{X}})$  možemo interpretirati kao projekciju od  $Y$  na  $\mathcal{K}$ . Rezidual  $\varepsilon$  interpretiramo kao ortogonalni dio od  $Y$  na  $\mathcal{K}$ , gdje se kvadrat duljine od  $\varepsilon$  mjeri varijancom. Što je manja ortogonalna komponenta to će biti postignuta veća redukcija varijance.

## 2.6 Kontrolne varijable i Monte Carlo s težinama

Metodu kontrolnih varijabli alternativno možemo interpretirati kao pridruživanje težine svakoj simulaciji. Prvo ćemo objasniti tu interpretaciju na primjeru jedne kontrolne varijable, što ćemo generalizirati na slučaj višestrukih kontrolnih varijabli.

Pretpostavimo da su  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  i  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne varijable. Neka su  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori. Kao i ranije, procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolnih varijabli s procijenjenim optimalnim koeficijentom  $\hat{\beta}_n$  dan je s

$$\bar{Y}(\hat{\beta}_n) = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_n (\bar{X}_n - \theta_X), \quad (2.43)$$

gdje je kao i ranije procijenjeni koeficijent jednak

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}. \quad (2.44)$$

Uvrštavanjem koeficijenta  $\hat{\beta}_n$  u (2.43) dobivamo

$$\begin{aligned}\bar{Y}(\hat{\beta}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} (\bar{X}_n - \theta_X) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_n - X_i)(\bar{X}_n - \theta_X)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \right) Y_i.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Ukoliko uvedemo oznaku

$$w_i = \frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_n - X_i)(\bar{X}_n - \theta_X)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

dobivamo da je procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable težinski prosjek simulacija  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ :

$$\bar{Y}(\hat{\beta}_n) = \sum_{i=1}^n w_i Y_i. \quad (2.47)$$

Generalizirajmo sada dobivene rezultate na slučaj više kontrolnih varijabli. Neka je  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  slučajni vektor te neka je  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla. Neka su parovi  $(\mathbb{X}_i, Y_i)$  nezavisni jednako distribuirani. Procjenitelj za  $\mu$  pomoću kontrolnog vektora  $s$  procijenjenim koeficijentom  $\hat{\beta}_n$  je kao i ranije

$$\bar{Y}(\hat{\beta}_n) = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_n^\top (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}), \quad (2.48)$$

gdje je koeficijent  $\hat{\beta}_n$  jednak

$$\hat{\beta}_n = S_{XX}^{-1} S_{XY}, \quad (2.49)$$

a procijenjena kovarijanca  $S_{XY}$

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(Y_i - \bar{Y}_n). \quad (2.50)$$

Procjenitelj za  $\mu$  se tada može prikazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\bar{Y}(\hat{\beta}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - (S_{XX}^{-1} S_{XY})^\top (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \bar{\mathbb{X}}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \right)^\top S_{XX}^{-1} (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} (\bar{\mathbb{X}}_n - \mathbb{X}_i)^\top S_{XX}^{-1} (\bar{\mathbb{X}}_n - \theta_{\mathbb{X}}) \right) Y_i.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Posljedica ove interpretacije jest da ukoliko želimo izračunati više simuliranih veličina iz istog skupa generiranih simulacija koristeći iste kontrolne varijable, težine možemo izračunati samo jednom te ih primijeniti na sve željene veličine.

# Poglavlje 3

## Slojevito uzorkovanje

### 3.1 Općenito o metodi

Slojevito uzorkovanje odnosi se na bilo koji mehanizam generiranja varijabli čije su realizacije uzorkovane iz specifičnih podskupova. Kako podskupove možemo interpretirati i kao slojeve, metoda je dobila naziv slojevito uzorkovanje.

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka je  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla na tom vjerojatnosnom prostoru koja ima očekivanje i konačnu varijancu. Neka je  $F_Y$  njena funkcija distribucije te neka su  $A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{F}$  međusobno disjunktni podskupovi takvi da vrijedi  $\mathbb{P}(Y \in \cup_{i=1}^K A_i) = 1$ . Naš cilj je procijeniti  $\mathbb{E}[Y] = \mu$ . Iz definicije uvjetnog očekivanja slijedi da očekivanje  $\mu$  možemo prikazati na sljedeći način

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^K \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{\{Y \in A_i\}}] = \sum_{i=1}^K \mathbb{P}(Y \in A_i) \mathbb{E}[Y | Y \in A_i] = \sum_{i=1}^K p_i \mathbb{E}[Y | Y \in A_i], \quad (3.1)$$

gdje je  $p_i = \mathbb{P}(Y \in A_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ . U slučajnom uzorkovanju generiramo nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  s istom distribucijom kao i slučajna varijabla  $Y$ , gdje  $n$  predstavlja veličinu željenog uzorka. Kako bismo osigurali da generirane slučajne varijable imaju teoretsku distribuciju uvjetno na događaje s vjerojatnosti  $p_i = \mathbb{P}(Y \in A_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , u slojevito uzorkovanju unaprijed odlučujemo koji dio uzorka generiramo iz kojeg podskupa. Stoga, svaka slučajna varijabla generirana iz podskupa  $A_i$  ima baš distribuciju  $F_{Y|Y \in A_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ .

Prvo ćemo opisati najjednostavniji slučaj slojevitog uzorkovanja, a to je slučaj proporcionalnog uzorkovanja. Da bismo pobliže opisali taj slučaj, koncentriramo se na specifičan podskup  $A_i$ , za neki  $i = 1, \dots, K$ . Kako je  $n$  veličina uzorka, iz podskupa  $A_i$  potrebno je generirati  $n_i = p_i \cdot n$  realizacija slučajnih varijabli. Budući da  $n \cdot p_i$  ne mora biti cijeli broj, uzimamo najveće cijelo  $\lfloor n \cdot p_i \rfloor$ . Neka su  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$  nezavisne slučajne varijable s uvjetnom funkcijom distribucije  $F_{Y|Y \in A_i}$ . Nepistrani procjenitelj za uvjetno očekivanje

$\mathbb{E}[Y|Y \in A_i]$  dan je uzoračkom aritmetičkom sredinom slučajnih varijabli generiranih iz  $i$ -tog podskupa

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_{i1} + Y_{i2} + \dots + Y_{in_i}}{n_i}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.2)$$

Sada iz (3.1) i (3.2) slijedi da je procjenitelj za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja s proporcionalnom alokacijom dan sa

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}. \quad (3.3)$$

Nadalje, taj procjenitelj usporedit ćemo s uobičajenim procjeniteljem uzoračke aritmetičke sredine slučajnog uzorka čija je duljina  $n$ :

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}. \quad (3.4)$$

Kasnije ćemo vidjeti da korištenjem procjenitelja  $\hat{Y}$  za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja eliminiramo varijabilnost između podskupova dok varijabilnost unutar podskupa ostaje nepromijenjena. Korištenjem uzoračke aritmetičke sredine  $\bar{Y}_n$  eliminira se sveukupna varijabilnost, te se ne daje važnost pojedinim podskupovima.

Proporcionalno uzorkovanje može se generalizirati. Prvo, podskupove možemo definirati u terminima neke druge varijable, odnosno vektora različitog od  $Y$ . Neka je  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Pretpostavimo da vektor  $\mathbb{X}$  ima konačnu kovarijacijsku matricu. Disjunktni podskupovi  $A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{F}$  sada su podskupovi od  $\mathbb{R}^d$  pri čemu vrijedi  $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in \cup_{i=1}^K A_i) = 1$ . Rerezentacija (3.1) poprima oblik

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^K \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A_i) \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i] = \sum_{i=1}^K p_i \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i], \quad (3.5)$$

gdje je  $p_i = \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Kao i u metodi pomoću kontrolnih varijabli, vektor  $\mathbb{X}$  i varijabla  $Y$  moraju biti međusobno korelirani, međutim ne mora vrijediti da je  $Y$  funkcija od  $\mathbb{X}$ . Za procjenu očekivanja  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja sada je za  $i = 1, \dots, K$  potrebno generirati vektore  $(\mathbb{X}_{ij}, Y_{ij})$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , čija je uvjetna distribucija  $F_{(\mathbb{X}, Y)|\mathbb{X} \in A_i}$ .

U svrhu daljnje generalizacije, umjesto uzorkovanja proporcionalnog s  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , možemo dopustiti proizvoljnu raspodjelu podskupova. Dakle, generaliziramo proporcionalno uzorkovanje tako da svakom podskupu  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , proizvoljno dodijelimo broj simulacija  $n_i$ , uz uvjet da je  $\sum_{i=1}^K n_i = n$ . Kako bismo tu ideju konkretizirali pretpostavimo da je za neki podskup  $A_i$  broj  $q_i = \frac{n_i}{n}$  udio realizacija slučajnih varijabli uzorkovanih iz podskupa  $A_i$  u sveukupnom broju simulacija  $n$ . Neka su  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$  nezavisne jednako

distribuirane slučajne varijable s uvjetnom distribucijom  $F_{Y|\mathbb{X} \in A_i}$ . Procjenitelj za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja sada poprima sljedeći oblik:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}. \quad (3.6)$$

U narednim poglavljima pokazat ćemo da minimizirajući varijancu procjenitelja  $\hat{Y}$  po  $q = (q_1, q_2, \dots, q_K)$  možemo naći pravilo dodjeljivanja broja realizacija podskupovima koje je efikasno barem toliko koliko je i proporcionalno dodjeljivanje.

## 3.2 Analiza rezultata

U analizi rezultata bavimo se konstrukcijom pouzdanih intervala za  $\mu$  koje možemo dobiti kod korištenja metode slojevitog uzorkovanja. Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor te neka su  $A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{F}$  disjunktne podskupovi u  $\mathbb{R}^d$ . Neka su  $\mathbb{X}$  slučajni vektor i  $Y$  slučajna varijabla na tom vjerojatnosnom prostoru. Za  $i = 1, \dots, K$  neka su  $Y_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s uvjetnom funkcijom distribucije  $F_{Y|\mathbb{X} \in A_i}$ . Za  $i = 1, \dots, K$  označimo

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mathbb{E}[Y_{ij}] = \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i] \\ \sigma_i^2 &= \text{Var}[Y_{ij}] = \text{Var}[Y|\mathbb{X} \in A_i]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Neka je  $p_i = \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A_i)$  vjerojatnost da slučajni vektor  $\mathbb{X}$  poprimi vrijednost u podskupu  $A_i$  i neka vrijedi  $\sum_{i=1}^K p_i = 1$ ,  $p_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Za  $i = 1, \dots, K$  neka je  $n_i$  broj realizacija slučajne varijable  $Y_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , iz podskupa  $A_i$  i neka vrijedi  $\sum_{i=1}^K n_i = n$ ,  $n_i \geq 1$ . Neka broj  $q_i = \frac{n_i}{n}$  predstavlja udio realizacija slučajnih varijabli uzorkovanih iz podskupa  $A_i$  u sveukupnom broju simulacija  $n$ , gdje  $i = 1, \dots, K$ .

Zanima nas očekivanje i varijanca procjenitelja za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja. Računanjem očekivanja odmah možemo vidjeti da je procjenitelj za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja nepristran

$$\mathbb{E}[\hat{Y}] = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}[Y_{ij}] = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = \sum_{i=1}^K p_i \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i] = \mathbb{E}[Y] = \mu. \quad (3.8)$$

Varijanca procjenitelja za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja je sljedeća

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{Y}] &= \sum_{i=1}^K p_i^2 \text{Var} \left[ \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \right] \\ &= \sum_{i=1}^K p_i^2 \frac{n_i \sigma_i^2}{n_i^2} = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{n_i} \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{1}{n} \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i} = \frac{\sigma^2(q)}{n},\end{aligned}\tag{3.9}$$

gdje je

$$\sigma^2(q) := \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i}.\tag{3.10}$$

Kako smo pokazali da je procjenitelj nepristran, želimo još znati je li procjenitelj  $\hat{Y}$  jako konzistentan. Za fiksni  $i = 1, \dots, K$  vrijedi

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \mu_i.\tag{3.11}$$

Stoga slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^K \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = \mu,\tag{3.12}$$

gdje  $n \rightarrow \infty$  na način da za svaki  $i$ ,  $n_i \rightarrow \infty$ . Dalje u tekstu će se podrazumijevati sljedeće

$$n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall i, n_i \rightarrow \infty.\tag{3.13}$$

Za svaki podskup  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , slučajne varijable  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$  su nezavisne jednako distribuirane s očekivanjem  $\mu_i$  i varijancom  $\sigma_i^2$  čija je uzoračka aritmetička sredina  $\bar{Y}_i$  dana izrazom (3.2). Uz fiksni  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , po centralnom graničnom teoremu vrijedi:

$$\begin{aligned}\sqrt{n_i}(\bar{Y}_i - \mu_i) &= \sqrt{[n q_i]} \left( \frac{1}{[n q_i]} \sum_{j=1}^{[n q_i]} Y_{ij} - \mu_i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{[n q_i]}} \sum_{j=1}^{[n q_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \sim AN(0, \sigma_i^2), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Iz reprezentacije (3.6) i centralnog graničnog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu) &= \sqrt{n} \sum_{i=1}^K p_i \left( \frac{1}{\lfloor n q_i \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor n q_i \rfloor} (Y_{ij} - \mu_i) \right) \\
&\approx \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{\sqrt{q_i}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lfloor n q_i \rfloor}} \sum_{i=1}^{\lfloor n q_i \rfloor} (Y_{ij} - \mu_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{\sqrt{q_i}} (\sqrt{n_i}(\bar{Y}_i - \mu_i)) \\
&\sim AN\left(0, \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i}\right) = AN(0, \sigma^2(q)), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Prema tome,  $\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu)$  je asimptotski linearna kombinacija nezavisnih asimptotski normalnih slučajnih varijabli s koeficijentima  $\frac{p_i}{\sqrt{q_i}}$ , očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma_i^2$ , gdje  $i = 1, \dots, K$ . Možemo konstruirati  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  pouzdani interval za  $\mu$  te on glasi

$$\left[ \hat{Y} - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma(q)}{\sqrt{n}}, \hat{Y} + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{\sigma(q)}{\sqrt{n}} \right]. \tag{3.16}$$

U praksi je varijanca  $\sigma^2(q)$  nepoznata, ali ju možemo nepristrano i jako konzistentno procijeniti na uobičajen način pomoću uzoračkih varijanci  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , koje procjenjujemo iz slučajnog uzorka  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$  pripadajućeg podskupa  $A_i$ . Procjenitelj  $\hat{\sigma}^2(q)$  za  $\sigma^2(q)$  je linearna kombinacija varijanci  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ , pojedinog podskupa

$$\hat{\sigma}^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \hat{\sigma}_i^2. \tag{3.17}$$

Dodatno,  $\hat{\sigma}^2(q)$  možemo procijeniti i kroz nezavisne simulacije od  $\hat{Y}$ . Da bismo tu ideju precizirali pretpostavimo da veličinu uzorka  $n$  možemo izraziti kao umnožak cijelih brojeva  $n = m \cdot k$ ,  $m, k \in \mathbb{Z}$  i  $m \geq 2$ . To znači da ćemo izračunati  $m$  procjenitelja  $\hat{Y}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja i da će se svaki računati na temelju uzorka duljine  $k$ . Za  $i = 1, \dots, K$  znamo da je  $q_i = \frac{n_i}{n}$  udio realizacija slučajnih varijabli uzorkovanih iz podskupa  $A_i$ . Za svaki pojedini procjenitelj  $\hat{Y}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , taj udio koristit ćemo kako bismo odredili koji broj  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , realizacija slučajnih varijabli je potrebno generirati iz svakog pojedinog podskupa u odnosu na veličinu uzorka  $k$ . Dakle,  $k_i = q_i \cdot k$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Procjenitelj  $\hat{Y}_j$  možemo zapisati

$$\hat{Y}_j = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{k_i} \sum_{l=1}^{k_i} Y_{il} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{q_i} \sum_{l=1}^{k_i} Y_{il}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.18}$$



Na kraju  $\hat{Y}$  računamo kao uzoračku aritmetičku sredinu  $m$  nezavisnih procjenitelja  $\hat{Y}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja

$$\hat{Y} = \frac{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \dots + \hat{Y}_m}{m}. \quad (3.19)$$

Svaki  $\hat{Y}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ima varijancu  $\frac{\sigma^2(q)}{k}$ . Ta se varijanca može nepristrano i jako konzistentno procijeniti uzoračkom varijancom  $S_m^2(\hat{Y})$ .  $(1 - \delta) \cdot 100\%$  pouzdani interval za  $\mu$  je

$$\left[ \hat{Y} - z_{\frac{\delta}{2}} \frac{S_m^2(\hat{Y})}{\sqrt{m}}, \hat{Y} + z_{\frac{\delta}{2}} \frac{S_m^2(\hat{Y})}{\sqrt{m}} \right]. \quad (3.20)$$

### 3.3 Optimalna alokacija

U ovom poglavlju promatrat ćemo utjecaj alokacije uzorka podskupovima na redukciju varijance. U prvom odjeljku diskutirat ćemo optimalnu alokaciju bez uzimanja u obzir računskog troška, dok ćemo u drugom poglavlju uvesti i varijablu računskog troška.

#### 3.3.1 Optimalna alokacija bez računskog troška

Uzimamo slučaj proporcionalne alokacije,  $q_i = p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Varijanca procjenitelja za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja tada glasi

$$\sigma^2(p) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{p_i} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2. \quad (3.21)$$

Usporedimo sada varijancu dobivenu proporcionalnom alokacijom (3.21) pomoću metode slojevitog uzorkovanja s varijancom koja bi se dobila bez korištenja metode slojevitog uzorkovanja. Prvo pogledajmo drugi moment očekivanja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \sum_{i=1}^K p_i \mathbb{E}[Y^2 | \mathbb{X} \in A_i] \\ &= \sum_{i=1}^K p_i (\text{Var}[Y | \mathbb{X} \in A_i] + \mathbb{E}[Y | \mathbb{X} \in A_i]^2) \\ &= \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\text{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Budući da je kvadratna funkcija konveksna funkcija, po Jensenovoj nejednakosti vrijedi

$$\sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2, \quad (3.24)$$

pri čemu jednakost vrijedi ako su svi  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , jednaki. Iz toga slijedi da je

$$\text{Var}[Y] \geq \sigma^2(p). \quad (3.25)$$

Zaključujemo da korištenjem metode slojevitog uzorkovanja s proporcionalnom alokacijom možemo samo smanjiti varijancu.

Optimizacijom alokacije možemo postići još veću redukciju varijance. Minimizacija varijance  $\sigma^2(q)$  uz uvjet da je  $(q_1, q_2, \dots, q_K)$  vjerojatnosni vektor vodi optimalnoj alokaciji:

$$q_i^* = \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{l=1}^K p_l \sigma_l}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.26)$$

Varijanca dobivena koristeći optimalnu alokaciju iznosi

$$\sigma^2(q^*) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i^*} = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{\frac{p_i \sigma_i}{\sum_{l=1}^K p_l \sigma_l}} = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i \sum_{l=1}^K p_l \sigma_l = \left( \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i \right)^2. \quad (3.27)$$

U praksi je potrebno procijeniti varijancu  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, K$ .

Dosadašnji zaključci vrijede ako pretpostavimo da su troškovi računa potrebni za generaciju uzorka isti za sve podskupove, međutim to ne mora biti tako. Na primjer, ukoliko se iz nekog podskupa generira više varijabli, sigurno će trošak računa biti veći.

### 3.3.2 Optimalna alokacija uz računski trošak

Pretpostavimo sada da  $\tau_i$  označava vrijeme potrebno za generiranje vektora  $(\mathbb{X}, Y)$  iz uvjetne distribucije  $F_{(\mathbb{X}, Y)|X \in A_i}$ , a  $\mu_{\tau_i}$  njegovo očekivanje, za svaki  $i = 1, \dots, K$ . Neka je sveukupni budžet kojim raspolažemo  $t$ . Neka je  $\hat{Y}(t)$  procjenitelj za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja koji je dobiven uz budžetno ograničenje  $t$ . Pretpostavljamo da je dio računskog budžeta

dodijeljenog podskupu  $A_i$  proporcionalan s  $q_i$ , odnosno da je dio računskog budžeta dodijeljenog podskupu  $A_i$  jednak  $q_i\mu_{\tau_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ .

Očekivana vrijednost potrošenog budžeta jednaka je

$$\mathbb{E}[\tau] = \mu_{\tau} = \sum_{i=1}^K q_i \mu_{\tau_i}. \quad (3.28)$$

Prisjetimo se da je varijanca procjenitelja  $\hat{Y}$  za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja dana s

$$\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i}. \quad (3.29)$$

Po izvedenom centralnom graničnom teoremu (1.22) koji uzima u obzir računski trošak slijedi

$$\sqrt{t}(\hat{Y}(t) - \mu) \sim AN(0, \sigma^2(q, \tau)), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

gdje je

$$\sigma^2(q, \tau) := \sigma^2(q) \mu_{\tau} = \left( \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{q_i} \right) \left( \sum_{i=1}^K q_i \mu_{\tau_i} \right). \quad (3.31)$$

Minimizacijom varijance  $\sigma^2(q, \tau)$  uz uvjet da je  $q = (q_1, q_2, \dots, q_K)$  vjerojatnosni vektor dobivamo optimalnu alokaciju:

$$q_i^* = \frac{\frac{p_i \sigma_i}{\sqrt{\mu_{\tau_i}}}}{\frac{\sum_{l=1}^K p_l \sigma_l}{\sqrt{\mu_{\tau}}}}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.32)$$

### 3.4 Dekompozicija varijance

U ovom poglavlju pokazat ćemo koji je dio varijance od  $Y$  uklonjen generiranjem vektora  $\mathbb{X}$  iz različitih podskupova. Pretpostavljamo da se nalazimo na prostoru  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}|Z|^2 < \infty\}$ . Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{F}$  disjunktni podskupovi iz kojih generiramo vektor  $\mathbb{X}$ . Neka  $\eta \equiv \eta(\mathbb{X}) \in \{1, 2, \dots, K\}$  označava slučajan indeks podskupa koji sadrži  $\mathbb{X}$ . To možemo zapisati na sljedeći način

$$\eta = \sum_{i=1}^K i \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}}. \quad (3.33)$$

Uočimo da je  $\eta$  slučajna varijabla. Možemo pisati sljedeće

$$Y = \mathbb{E}[Y|\eta] + \varepsilon, \quad (3.34)$$

gdje definiramo  $\mathbb{E}[Y|\eta] = \mathbb{E}[Y|\sigma(\eta)]$ . Sada ćemo pokazati da vrijedi  $\mathbb{E}[\varepsilon|\eta] = 0$  i da je  $\varepsilon$  nekoreliran s  $\mathbb{E}[Y|\eta]$ . Tvrdnja  $\mathbb{E}[\varepsilon|\eta] = 0$  slijedi iz definicije (3.34). Po definiciji skalarnog produkta na prostoru  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  nekoreliranost varijabli  $\mathbb{E}[Y|\eta]$  i  $\varepsilon$  ekvivalentna je sljedećoj jednadžbi

$$\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{E}[Y|\eta]] = 0. \quad (3.35)$$

Provjerimo vrijedi li tvrdnja (3.35):

$$\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{E}[Y|\eta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{E}[Y|\eta]|\eta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\eta] \mathbb{E}[\varepsilon|\eta]] = 0 \quad (3.36)$$

Prva jednakost slijedi iz svojstva uvjetnog očekivanja, druga jednakost slijedi iz činjenice da je slučajna varijabla  $\mathbb{E}[Y|\eta]$   $\sigma(\eta)$ -izmjeriva, a treća iz činjenice da za rezidual  $\varepsilon$  vrijedi  $\mathbb{E}[\varepsilon|\eta] = 0$ .

Budući da (3.34) dekomponira varijablu  $Y$  na nekorelirane članove slijedi

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta] + \varepsilon] \\ &= \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] + \text{Var}[\varepsilon] \\ &= \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] + \text{Var}[Y - \mathbb{E}[Y|\eta]]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vidimo da slojevito uzorkovanje eliminira član  $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]]$ . Pogledajmo sada varijancu reziduala:

$$\text{Var}[\varepsilon] = \mathbb{E}[\varepsilon^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon^2|\eta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|\eta])^2|\eta]] = \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]], \quad (3.38)$$

gdje prva jednakost slijedi iz činjenice da za rezidual vrijedi  $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ , druga iz svojstva uvjetnog očekivanja i treća iz dekompozicije (3.34). Iz (3.37) i (3.38) slijedi

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] + \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]]. \quad (3.39)$$

Koristeći oznake uvedene u (3.7) i činjenicu da je događaj  $\{\mathbb{X} \in A_i\}$  ekvivalentan događaju  $\{\eta = i\}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y|\eta = i] &= \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i] = \mu_i \\ \text{Var}[Y|\eta = i] &= \text{Var}[Y|\mathbb{X} \in A_i] = \sigma_i^2 \\ \mathbb{P}(\eta = i) &= \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A_i) = p_i. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sada možemo pisati

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] + \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]] \\ &= \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Vidimo da je dobivena varijanca upravo jednaka varijanci (3.23) koja se dobije kod korištenja proporcionalnog uzorkovanja. Varijanca procjenitelja za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja upravo je varijanca reziduala od  $Y$  nakon uvjetovanja na  $\eta$ .

Promatrajmo sada efekt alternativnih izbora podskupova. Sveukupna varijanca (3.39) je konstanta. Prvi član  $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]]$  predstavlja varijabilnost među podskupovima, dok drugi član  $\mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]]$  predstavlja varijabilnost unutar pojedinog podskupa. Kako je  $\text{Var}[Y]$  konstanta i kako znamo da pomoću slojevitog uzorkovanja eliminiramo član  $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]]$  isti učinak ima povećanje vrijednosti od  $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]]$  ili smanjenje vrijednosti od  $\mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]]$ . Stoga, ako bismo htjeli smanjiti sveukupnu varijancu trebali bismo izabrati podskupove s visokim stupnjem varijabilnosti među njihovim sredinama  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$  te niskim stupnjem varijabilnosti unutar svakog pojedinog podskupa. Iz dekompozicije (3.34) vidimo kako se slojevitim uzorkovanjem eliminira varijabilnost među podskupovima  $\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]]$  te ostaje samo varijabilnost unutar podskupova  $\mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]]$ . Da bismo dodatno reducirali varijancu pokušat ćemo postići što manju varijabilnost unutar podskupova.

Kako želimo da varijabilnost unutar podskupova bude što manja, logično je očekivati da će povećanje broja podskupova rezultirati većom redukcijom varijance. Preciznije, slučajna varijabla  $\eta \equiv \eta(\mathbb{X}) \in \{1, 2, \dots, K\}$  je indeks podskupa koji sadrži slučajni vektor  $\mathbb{X}$  baziran na particiji  $\{A_i, i = 1, \dots, K\}$ . Neka je  $\{\tilde{A}_i, i = 1, \dots, \tilde{K}\}$  profinjenje od  $\{A_i, i = 1, \dots, K\}$ . Slučajna varijabla  $\tilde{\eta} \equiv \tilde{\eta}(\mathbb{X}) \in \{1, 2, \dots, \tilde{K}\}$  je slučajni indeks baziran na novoj particiji. Slijedi da je  $\{1, 2, \dots, K\} \subset \{1, 2, \dots, \tilde{K}\}$ , odnosno  $\sigma(\eta) \subset \sigma(\tilde{\eta})$ . Dakle,

$$\text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] \leq \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]]. \quad (3.42)$$

Pokažimo tu tvrdnju. Iz Jensenove nejednakosti slijedi

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]^2|\eta] \geq (\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]|\eta])^2 = \mathbb{E}[Y|\eta]^2. \quad (3.43)$$

Iz svojstava uvjetnog očekivanja i monotonosti matematičkog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]^2] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\eta]^2]. \quad (3.44)$$

Ponovno iz svojstava uvjetnog matematičkog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\eta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]|\eta]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]]. \quad (3.45)$$

Oduzimanjem kvadrirane jednadžbe (3.45) od (3.44) slijedi tvrdnja.

Kako je  $\text{Var}[Y] = \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\eta]] + \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]] = \text{Var}[\mathbb{E}[Y|\tilde{\eta}]] + \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\tilde{\eta}]]$  konstanta, iz (3.42) slijedi  $\mathbb{E}[\text{Var}[Y|\tilde{\eta}]] \leq \mathbb{E}[\text{Var}[Y|\eta]]$ . Budući da smo zaključili da je kod korištenja metode pomoću slojevitog uzorkovanja varijanca jednaka  $\mathbb{E}[\text{Var}[Y|\tilde{\eta}]]$ , povećanjem broja podskupova sigurno ćemo dobiti manju varijancu.

Na kraju nas zanima odnos broja podskupova i broja realizacija po svakom podskupu te njihov utjecaj na točnost u mjerenju varijance i redukciju varijance. Veći broj realizacija

po podskupu povećava točnost pri procjeni varijance  $\sigma^2(q)$  te indirektno točnost normalne aproksimacije u pouzdanim intervalima. S druge strane, profinjavanje podskupova reducira varijancu.

## 3.5 Naknadno slojevito uzorkovanje

### 3.5.1 Općenito o metodi

Kod procjene očekivanja  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja, moramo znati s kojom vjerojatnošću vektor  $\mathbb{X}$  poprima vrijednosti u podskupu  $A_i$  te moramo znati generirati uzorak iz uvjetne distribucije  $F_{(\mathbb{X}, Y) | \mathbb{X} \in A_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Alternativa slojevitom uzorkovanju je tzv. naknadno slojevito uzorkovanje (Poststratification) koje se koristi kada je uzorkovanje iz uvjetne distribucije teško, jer je pri korištenju metode naknadnog slojevitog uzorkovanja umjesto iz uvjetne distribucije potrebno generirati uobičajene nezavisne slučajne varijable.

Naš cilj je i dalje procijeniti  $\mu$ . Neka je  $\mathbb{X}$  slučajni vektor te  $Y$  slučajna varijabla. Pretpostavimo da znamo vjerojatnosti  $p_i = \mathbb{P}(\mathbb{X} \in A_i)$ ,  $i = 1, \dots, K$  te znamo generirati nezavisne slučajne vektore  $(\mathbb{X}_1, Y_1), (\mathbb{X}_2, Y_2), \dots, (\mathbb{X}_n, Y_n)$  čija je distribucija  $F_{(\mathbb{X}, Y)}$ . Neka je

$$N_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\mathbb{X}_j \in A_i\}}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.46)$$

slučajna varijabla koja predstavlja dio uzorka koji poprima vrijednosti u podskupu  $A_i$ . Neka je

$$S_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\mathbb{X}_j \in A_i\}} Y_j, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.47)$$

slučajna varijabla koja predstavlja sumu svih  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , za koje  $\mathbb{X}_j$  poprima vrijednosti u podskupu  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Uobičajena uzoračka aritmetička sredina može se zapisati

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_K}{n} = \sum_{i=1}^K \frac{N_i}{n} \cdot \frac{S_i}{N_i}, \quad (3.48)$$

ako pretpostavimo da je  $N_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ . U slučaju da je  $N_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ , definiramo  $\frac{S_i}{N_i} = 0$  iz čega slijedi  $\bar{Y}_n = 0$ . Prema Borelovom jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\frac{N_i}{n} \xrightarrow{g.s.} p_i, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.49)$$

Procjenitelj za  $\mu$  pomoću naknadnog slojevitog uzorkovanja mijenja slučajni dio  $\frac{N_i}{n}$  s njegovim očekivanjem  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , i dan je s

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{S_i}{N_i}. \quad (3.50)$$

Dok aritmetička sredina dodjeljuje svakoj simulaciji jednaku težinu  $\frac{1}{n}$ , procjenitelj za  $\mu$  pomoću naknadnog slojevitog uzorkovanja dodjeljuje težinu  $\frac{p_i}{N_i}$  onim slučajnim varijablama koje poprimaju vrijednosti u podskupu  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . To nam pomaže pri korekciji premalo ili previše generiranih simulacija iz pojedinog skupa. Dakle, slučajnim varijablama koje poprimaju vrijednosti u podskupovima iz kojih ih je generirano premalo ( $N_i < n \cdot p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ ) pridružuje se veća težina nego slučajnim varijablama koje poprimaju vrijednosti u podskupovima iz kojih ih je generirano previše ( $N_i > n \cdot p_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ ).

Na kraju ćemo još provjeriti je li procjenitelj (3.50) za  $\mu$  pomoću naknadnog slojevitog uzorkovanja nepristran i jako konzistentan. Općenito, taj procjenitelj nije nepristran jer

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_i}{N_i}\right] \neq \frac{\mathbb{E}[S_i]}{\mathbb{E}[N_i]}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.51)$$

Nadalje, po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\frac{S_i}{N_i} \xrightarrow{g.s.} \mu_i, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.52)$$

gdje je  $\mu_i = \mathbb{E}[Y|\mathbb{X} \in A_i]$  kao i ranije. Iz toga slijedi i jaka konzistentnost procjenitelja  $\hat{Y}$  za  $\mu$  dobivenog naknadnim slojevitim uzorkovanjem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^K p_i \frac{S_i}{N_i} = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = \mu. \quad (3.53)$$

### 3.5.2 Asimptotska varijanca

Prilagodimo sada izvedeni centralni granični teorem za omjere procjenitelja na naš slučaj. Procjenitelj za  $\mu$  pomoću naknadnog slojevitog uzorkovanja je linearna kombinacija omjera procjenitelja  $\frac{S_i}{N_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Iz centralnog graničnog teorema za omjere procjenitelja (1.24) slijedi

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_1}{N_1} - \mu_1, \frac{S_2}{N_2} - \mu_2, \dots, \frac{S_K}{N_K} - \mu_K \right) \sim AN(0, \Sigma), \quad n \rightarrow \infty \quad (3.54)$$

gdje je  $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$  kovarijacijska matrica određena delta-metodom. Pogledajmo sada komponente te kovarijacijske matrice. Za to ćemo koristiti rezultat (1.25) izveden u poglavlju

1. Prvo promatramo dijagonalni dio kovarijacijske matrice  $\Sigma$ :

$$\Sigma_{ii} = \frac{\text{Var}[S_i - \mu_i N_i]}{p_i^2} = \frac{\text{Var}[Y \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}} - \mu_i \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}}]}{p_i^2} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbb{E}[(Y - \mu_i)^2 \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}}] - (\mathbb{E}[(Y - \mu_i) \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}}])^2}{p_i^2} \\ &= \frac{p_i \mathbb{E}[(Y - \mu_i)^2 | \mathbb{X} \in A_i] - 0}{p_i^2} = \frac{\sigma_i^2}{p_i}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Potom promatramo i ostatak matrice, za  $i \neq j$ :

$$\Sigma_{ij} = \frac{\text{Cov}[(Y - \mu_i) \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_i\}}, (Y - \mu_j) \mathbb{1}_{\{\mathbb{X} \in A_j\}}]}{p_i p_j} = 0 \quad (3.57)$$

jer su  $A_i$  i  $A_j$  disjunktni skupovi.

Procjenitelj za  $\mu$  pomoću naknadnog slojevitog uzorkovanja zadovoljava

$$\hat{Y} - \mu = \sum_{i=1}^K p_i \left( \frac{S_i}{N_i} - \mu_i \right). \quad (3.58)$$

Dakle,  $\hat{Y} - \mu$  je linearna kombinacija komponenti vektora  $\left( \frac{S_1}{N_1} - \mu_1, \frac{S_2}{N_2} - \mu_2, \dots, \frac{S_K}{N_K} - \mu_K \right)$  pa slijedi

$$\sqrt{n}(\hat{Y} - \mu) \sim AN(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.59)$$

gdje je

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^K p_i \Sigma_{ij} p_j = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2. \quad (3.60)$$

Varijanca dobivena korištenjem metode naknadnog slojevitog uzorkovanja asimptotski je jednaka varijanci iz (3.21) koju dobijemo metodom slojevitog uzorkovanja koristeći proporcionalnu alokaciju.

Možemo zaključiti da u uvjetima centralnog graničnog teorema, naknadnim slojevitim uzorkovanjem dobivamo jednaku redukciju varijance kao i originalnim slojevitim uzorkovanjem. Razlika je u tome što kod metode naknadnog slojevitog uzorkovanja ne moramo znati uvjetnu distribuciju  $F_{(\mathbb{X}, Y) | \mathbb{X} \in A_i}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , već samo uobičajenu distribuciju  $F_{(\mathbb{X}, Y)}$ . Efekt uvjetnog uzorkovanja postiže se dodjeljivanjem težina dobivenim realizacijama u ovisnosti o podskupu iz kojeg dolaze. Veličina uzorka potrebna da bi te dvije metode bile jednake ovisi o broju podskupova i broju realizacija po podskupu. Međutim kako bi se otkrila točna veličina uzorka pri kojoj su te dvije metode jednake, potrebno je napraviti eksperiment. Naknadno slojevito uzorkovanje najčešće se koristi kao alternativa kada je u slojevitom uzorkovanju uvjetno uzorkovanje iz podskupova jako teško, dok se generalno preferira metoda slojevitog uzorkovanja.



# Poglavlje 4

## Uzorkovanje po važnosti

### 4.1 Općenito o metodi

Uzorkovanje po važnosti je metoda koja nastoji reducirati varijancu promjenom vjerojatnosne mjere iz koje su generirane simulacije. Mijenjanjem mjere pokušava se staviti težina na bitne ishode kako bi na taj način povećali efikasnost uzorkovanja.

Prvo ćemo krenuti s općenitim postupkom zamjene mjere. Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka je  $Z$  nenegativna slučajna varijabla takva da je  $\mathbb{E}[Z] = 1$ . Definiramo  $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  sljedećom formulom

$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z], \quad A \in \mathcal{F}. \quad (4.1)$$

Slijedi da je  $\mathbb{P}^*$  vjerojatnost na prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Neka je  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  slučajni vektor na  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Tada njegovo očekivanje možemo računati u odnosu na vjerojatnosti  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}^*$ . Vrijedi formula

$$\mathbb{E}^*[\mathbb{X}] = \mathbb{E}[\mathbb{X}Z]. \quad (4.2)$$

Iz (4.1) slijedi da ako je  $\mathbb{P}(A) = 0$ , da je tada i  $\mathbb{P}^*(A) = 0$ . Stoga je  $\mathbb{P}^*$  apsolutno neprekidna u odnosu na  $\mathbb{P}$  i pišemo  $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$ . Pretpostavimo sada da je  $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ . Ako je  $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z] = 0$ , tada iz  $Z > 0$ ,  $\mathbb{P}$  - g.s. slijedi  $\mathbb{P}(A) = 0$ . Dakle,  $\mathbb{P}$  je apsolutno neprekidna u odnosu na  $\mathbb{P}^*$  i pišemo  $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$ . Slijedi da su vjerojatnosti  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}^*$  ekvivalentne. Iz toga proizlaze sljedeće relacije

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \int_A \frac{1}{Z} d\mathbb{P}^* \\ \mathbb{E}[\mathbb{X}] &= \mathbb{E}^*\left[\frac{\mathbb{X}}{Z}\right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$Z$  je Radon-Nikodymova derivacija od  $\mathbb{P}^*$  s obzirom na  $\mathbb{P}$  i pišemo

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}. \quad (4.4)$$

Kao i u prethodnim metodama cilj nam je izračunati očekivanje

$$\mu = \mathbb{E}[h(\mathbb{X})] = \int h(\mathbb{X})d\mathbb{P} = \int h(\mathbf{x})d\mathbb{P}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

gdje je  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija i očekivanje  $\mu$  postoji. Prije nego što nastavimo dalje uvest ćemo neka pojednostavljenja. Pretpostavljamo prvo da je  $\mathbb{X} = X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna slučajna varijabla. Tada slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in B) &= \int_B f(x)dx \\ \mathbb{P}^*(X \in B) &= \int_B g(x)dx, \end{aligned} \quad (4.6)$$

pri čemu pretpostavljamo da je  $f(x)$  funkcija gustoće slučajne varijable  $X$  u odnosu na  $\mathbb{P}$ , dok je  $g(x)$  funkcija gustoće od  $X$  u odnosu na  $\mathbb{P}^*$  i vrijedi

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Uz uvedena pojednostavljenja izraz (4.5) postaje

$$\mu = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)f(x)dx. \quad (4.8)$$

Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne slučajne varijable s funkcijom gustoće  $f(x)$ . Uobičajeni Monte Carlo procjenitelj za  $\mu$  je

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_f(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i). \quad (4.9)$$

Kao što smo objasnili u općenitom slučaju, možemo uvesti alternativnu reprezentaciju od  $\mu$  na sljedeći način

$$\mu = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx. \quad (4.10)$$

Taj integral može se interpretirati u odnosu na gustoću  $g(x)$  te stoga pišemo

$$\mu = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \mathbb{E}^* \left[ h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right], \quad (4.11)$$

za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  s gustoćom  $g(x)$ . gdje je  $\mathbb{E}^*$  očekivanje u odnosu na mjeru  $\mathbb{P}^*$ , tj. u odnosu na gustoću  $g(x)$ . Neka su sada  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne slučajne varijable s funkcijom gustoće  $g(x)$ . Tada je procjenitelj za  $\mu$  pomoću uzorkovanja po važnosti s pripadnom funkcijom gustoće  $g(x)$  dan s

$$\hat{\mu}_g = \hat{\mu}_g(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)}. \quad (4.12)$$

Radon-Nikodymovu derivaciju

$$\frac{f(X_i)}{g(X_i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

zovemo omjer vjerodostojnosti.

Provjerimo je li tako definiran procjenitelj (4.12) nepristran:

$$\mathbb{E}^*[\hat{\mu}_g] = \mathbb{E}^* \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \right] = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}^* \left[ h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \right] \right) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu. \quad (4.14)$$

Dakle, po definiciji je  $\hat{\mu}_g$  nepristran procjenitelj za  $\mu$ . Zanima nas također je li taj procjenitelj jako konzistentan. Iz konstrukcije znamo da su  $Y_i := \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem  $\mathbb{E}^*[Y_i] = \mu$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Jaka konzistentnost je sada direktna posljedica jakog zakona velikog brojeva.

Usporedimo varijance dobivene uobičajenim Monte Carlo procjeniteljem za  $\mu$  i procjeniteljem za  $\mu$  pomoću uzorkovanja po važnosti. Varijanca Monte Carlo procjenitelja za  $\mu$  dana je s

$$\mathbb{E}[h(X)^2] - \mathbb{E}[h(X)]^2, \quad (4.15)$$

dok je varijanca procjenitelja za  $\mu$  pomoću uzorkovanja po važnosti dana s

$$\mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{h(X)f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] - \mathbb{E}^* \left( \left[ \frac{h(X)f(X)}{g(X)} \right] \right)^2. \quad (4.16)$$

Budući da je

$$\mathbb{E}^* \left( \left[ \frac{h(X)f(X)}{g(X)} \right] \right)^2 = \mathbb{E}[h(X)]^2 = \mu^2 \quad (4.17)$$

dovoljno je usporediti druge momente. Drugi moment varijance procjenitelja za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja je

$$\mathbb{E}^* \left[ \left( h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ h(X)^2 \frac{f(X)}{g(X)} \right]. \quad (4.18)$$

Vidimo da drugi moment (4.18) dobiven metodom uzorkovanja po važnosti može biti i veći i manji od uobičajenog drugog momenta  $\mathbb{E}[h(X)^2]$  dobivenog Monte Carlo procjeniteljem. Odnos varijanci ovisi o izboru funkcije gustoće  $g(x)$ . Primijetimo da varijanca dobivena procjeniteljem za  $\mu$  može biti čak i beskonačna, zbog čega je odabir funkcije gustoće  $g(x)$  jako bitan.

Uzmimo na primjer slučaj kada je  $h$  nenegativna funkcija. Dakle,  $h(x) \geq 0$ , za neki  $x$  i pretpostavimo da je  $\mu > 0$ . Tada je i produkt  $h(x)f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nenegativan pa se može normalizirati u neku funkciju gustoće. Pretpostavimo da je to baš funkcija gustoće  $g(x)$ ,

$$g(x) = \frac{1}{\mu} h(x)f(x). \quad (4.19)$$

Tada slijedi da procjenitelj  $\hat{\mu}_g$  ima varijancu nula:

$$\begin{aligned} \text{Var}^*[\hat{\mu}_g] &= \text{Var}^* \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)} \right)^2 \right] - \mathbb{E}^* \left[ \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)} \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{E} \left[ \frac{h(X_i)^2 f(X_i)}{g(X_i)} \right] - \mu^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[h(X)\mu] - \mu^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\mu^2 - \mu^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Jednako tako, ako je  $h(x) < 0$ , za neki  $x$  i  $\mu < 0$ , nulta varijanca dobije se s funkcijom gustoće

$$g(x) = -\frac{1}{\mu} h(x)f(x). \quad (4.21)$$

Gustoća  $g(x)$  koju smo konstruirali u primjerima (4.19) i (4.21) je optimalna ali beskorisna. Naime, u praksi da bismo normalizirali umnožak  $h(x)f(x)$  trebamo ga podijeliti s njegovim očekivanjem, što je upravo  $\mu$ . Ono što se može zaključiti iz prethodne diskusije je da pri konstrukciji efektivne strategije trebamo pokušati uzorkovati proporcionalno s umnoškom  $h(x)f(x)$ .

Pogledajmo optimalnu gustoću u slučaju da je  $h$  karakteristična funkcija nekog skupa. Pretpostavimo da je  $h(x) = \mathbb{1}_{\{X \in A\}}$ , za neki  $A \in \mathbb{R}$ . Tada je  $\mu = \mathbb{P}(X \in A)$ . Neka je  $g(x) = \frac{h(x)f(x)}{\mu}$  funkcija gustoće za koju smo pokazali da ima nultu varijancu. Gustoća  $g(x)$  je upravo uvjetna gustoća  $f_{X|X \in A}(x)$ :

$$f_{X|X \in A}(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{X \in A\}}f(x)}{\mathbb{P}(X \in A)} = \frac{h(x)f(x)}{\mu}, \quad (4.22)$$

uz pretpostavku da je  $\mu > 0$ . Stoga kod procjenjivanja vjerojatnosti pomoću metode uzorkovanja po važnosti želimo da gustoća  $g(x)$  procjenjuje uvjetnu gustoću  $f_{X|X \in A}(x)$ . To znači da biramo  $g(x)$  tako da učinimo događaj  $\{X \in A\}$  vjerojatnijim.

## 4.2 Problemi u graničnim uvjetima

Promatramo dvije vjerojatnosne mjere  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}^*$  u odnosu na koje nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable  $X_1, X_2, \dots$  imaju gustoću  $f(x)$ , odnosno  $g(x)$ . Kako bismo vidjeli što se događa u pozadini problema kojeg ćemo opisati, potrebno je napomenuti da, iako su gustoće  $f(x)$  i  $g(x)$  međusobno ekvivalentne, vjerojatnosne mjere  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}^*$  ne moraju biti. Ekvivalentnost mjera  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{P}^*$  vrijedi za restrikcije na konačne inicijalne segmente  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , beskonačnog niza  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Problem kod apsolutne neprekidnosti dviju mjera i kako se to odražava na omjer vjerodostojnosti možemo vidjeti na sljedećem primjeru. Pretpostavimo da je

$$c \equiv \mathbb{E}^* \left[ \log \left( \frac{f(X_1)}{g(X_1)} \right) \right] < \infty. \quad (4.23)$$

Tada po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}^*-g.s.} \mathbb{E}^* \left[ \log \left( \frac{f(X_1)}{g(X_1)} \right) \right]. \quad (4.24)$$

Znamo da vrijedi

$$\mathbb{E}^* \left[ \frac{f(X_1)}{g(X_1)} \right] = \int \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = 1, \quad (4.25)$$

pa kako je prirodni logaritam strogo konkavna funkcija, primjenom obrnute stroge Jense-nove nejednakosti slijedi

$$\mathbb{E}^* \left[ \log \left( \frac{f(X_1)}{g(X_1)} \right) \right] < \log \mathbb{E}^* \left[ \frac{f(X_1)}{g(X_1)} \right] = \log 1 = 0. \quad (4.26)$$

Jer je  $c < 0$ , tada po (4.24) vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \log \left( \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}^*-g.s.} -\infty. \quad (4.27)$$

S druge strane, eksponiranjem dobivamo

$$\prod_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{g(X_i)} \xrightarrow{\mathbb{P}^*-g.s.} 0. \quad (4.28)$$

Vidimo da omjer vjerodostojnosti konvergira u 0, iako je njegovo očekivanje jednako 1,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Iz toga možemo zaključiti da omjer vjerodostojnosti ima jako asimetričnu distribuciju, gdje postoje ogromne vrijednosti s malom ali ne i beznačajnom vjerojatnošću. Rezultat može biti veliko povećanje u varijanci ako mjera nije pažljivo izabrana.

### 4.3 Analiza rezultata

Budući da kod procjenitelja za  $\mu$  pomoću uzorkovanja po važnosti ne postoje parametri koje moramo procijeniti, metoda ne uvodi međuzavisnosti te se može računati kao prosjek nezavisnih jednako distribuiranih simulacija te se pouzdani intervali konstruiraju na uobičajen način.

Potrebno je napomenuti da omjer vjerodostojnosti ima jako asimetričnu distribuciju pa uzoračka standardna devijacija često podcjenjuje pravu standardnu devijaciju i potreban je velik uzorak za konstrukciju pouzdanih intervala.

# Poglavlje 5

## Usporedba metoda

U ovom odjeljku usporedit ćemo obrađene metode te pokazati povezanost između njih. Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je  $X \in \mathbb{R}$ . Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Neka je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajna varijabla i neka su  $A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{F}$  disjunktni podskupovi u  $\mathbb{R}$ .

Prvo ćemo usporediti metodu kontrolnih varijabli i metodu slojevitog uzorkovanja. Pretpostavimo da  $X$  može poprimiti vrijednosti u proizvoljno velikom broju ekvidistantnih intervala  $A_i = \langle a_{i-1}, a_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, K$ , te  $A_K = \langle a_{K-1}, a_K \rangle$  za  $a_K = \infty$ . U literaturi [3] navodi se da će se profinjavanjem podskupova postići da će  $\mathbb{E}[Y|\eta]$  težiti prema  $\mathbb{E}[Y|X]$ . Dekompoziciju (3.34) možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y = \mathbb{E}[Y|X] + \varepsilon = h(X) + \varepsilon \quad (5.1)$$

gdje je  $h(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$ . Budući da smo zaključili kako je kod metode kontrolnih varijabli u okolini od  $\mu$  značajan samo linearan dio procjenitelja za  $\mu$  te da pomoću metode kontrolnih varijabli uklanjamo samo dio variances povezan s tim linearnim dijelom, vrijedi da, ukoliko je  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  linearna funkcija, tada je varijanca reducirana beskonačno profinjenim podskupovima upravo ona koja bi bila reducirana koristeći  $X$  kao kontrolnu varijablu. S druge strane, beskonačnim profinjavanjem podskupova i korištenjem metode slojevitog uzorkovanja uklanja se cijela varijanca funkcije  $h(X)$  nevezano uz to je li ta funkcija linearna ili ne.

Nadalje, usporedit ćemo i metodu slojevitog uzorkovanja s metodom uzorkovanja po važnosti. U literaturi [3] navodi se kako se slojevito uzorkovanje uz alokaciju različitu od proporcionalne može smatrati varijantom metode uzorkovanja po važnosti. Naime, u uzorkovanju po važnosti promjenom mjere zapravo mijenjamo originalnu gustoću  $f(x)$  slučajne varijable  $X$  s novom gustoćom  $g(x)$ . U slojevitom uzorkovanju iz originalne gustoće  $f(x)$  alokacijom uzorka podskupovima konstruiramo nove uvjetne gustoće  $f_{X|X \in A_i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Tako konstruirane nove gustoće dobivene slojevitim uzorkovanjem

možemo gledati kao restrikciju nove gustoće  $g(x)$  u uzorkovanju po važnosti na familiju uvjetnih gustoća  $\{f_{X|X \in A_i}(x), i = 1, \dots, K\}$ . Na taj način zapravo u obje metode reduciramo varijancu dajući veće težine rijetkim događajima.

Metoda kontrolnih varijabli najjednostavnija je metoda kod koje uvijek dobivamo redukciju varijance te zahtjeva samo poznavanje očekivanja neke slične slučajne varijable. Nešto kompleksnija je metoda slojevitog uzorkovanja gdje također uvijek dobivamo redukciju varijance ali ona zahtjeva poznavanje uvjetne distribucije i vjerojatnosti s kojima slučajna varijabla poprima vrijednosti u svakom pojedinom podskupu. Najkompleksnija metoda jest metoda uzorkovanja po važnosti koja zahtjeva poznavanje distribucije slučajne varijable. Uz dobar odabir nove distribucije može se postići redukcija varijance, dok loš odabir nove distribucije može povećati varijancu.



# Poglavlje 6

## Primjena u financijskoj matematici

### 6.1 Financijsko modeliranje

U ovom poglavlju opisan će se osnovni principi određivanja cijena financijskih izvedenica. Teorija određivanja cijena izvedenica bazira se na nekoliko ključnih ideja. Prva pretpostavka jest da se izvedenice mogu replicirati kroz trgovanje s ostalim financijskim instrumentima te da je tada cijena izvedenice jednaka cijeni replicirajućeg portfelja. Druga pretpostavka jest da je diskontirana vrijednost financijskog instrumenta martingal s obzirom na mjeru neutralnu na rizik. Treća pretpostavka jest da na potpunom tržištu postoji replicirajući portfelj te da je mjera neutralna na rizik jedinstvena.

Za svaku metodu opisanu u radu navest će se po dva primjera. Na tim primjerima pokazat će se kako se primjenjuju metode Monte Carlo i tehnike redukcije varijance. Za sve metode implementirat će se jedan primjer europske opcije te promatrati postignuta redukcija varijance. Primjeri 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.16 su preuzeti iz [3], dok je primjer 6.15 preuzet iz [7].

#### 6.1.1 Osnovne definicije

Ovdje ćemo definirati osnovne pojmove i rezultate koji su potrebni za shvaćanje teorije i primjera. Definicije 6.1 i 6.3 preuzete su iz [4], definicija 6.5 iz [8], a 6.4 iz [10]. Krenut ćemo od definicije Brownovog gibanja koje predstavlja osnovu slučajnih procesa definiranih u nastavku.

**Definicija 6.1** (Brownovo gibanje). *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Slučajni proces  $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$  je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

1. Putovi  $t \mapsto W(t)$  su neprekidne funkcije sa  $\mathbb{R}_+$  u  $\mathbb{R}$ .
2.  $W(0) = 0$ .

3. Za sve  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$  su prirasti

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}) \quad (6.1)$$

nezavisni.

4. Za sve  $0 \leq s < t \leq T$  je prirast  $W(t) - W(s)$  normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom  $t - s$ .

Nakon definicije Brownovog gibanja navest ćemo alternativnu karakterizaciju Brownovog gibanja kako bismo se kasnije direktno mogli pozvati na tvrdnje tog teorema.

**Teorem 6.2** (Alternativna karakterizacija Brownovog gibanja). *Neka je  $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor, te neka je  $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$  slučajni proces takav da su putovi  $t \mapsto W(t)$  neprekidni i  $W(0) = 0$ . Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. Za sve  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$  su prirasti

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}) \quad (6.2)$$

nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom  $\text{Var}[W(t_i) - W(t_{i-1})] = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

2. Za sve  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$  slučajni vektor  $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m))$  ima normalnu distribuciju s vektorom očekivanja nula i kovarijacijskom matricom

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Za dokaz vidi [10]. Nadalje, potrebno je objasniti kako matematički interpretiramo informacije vezane uz neki slučajni proces. U matematičkom smislu, informacija je predstavljena  $\sigma$ -algebrom. U nastavku definiramo posebnu familiju  $\sigma$ -algebri za Brownovo gibanje.

**Definicija 6.3.** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka je  $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$  Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T)$   $\sigma$ -algebri koja zadovoljava*

1. Za sve  $0 \leq s < t \leq T$ ,  $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ .

2. Za svaki  $t \geq 0$ ,  $W(t)$  je  $\mathcal{F}(t)$ -izmjeriva slučajna varijabla.
3. Za sve  $0 \leq s < t \leq T$ , prirast  $W(t) - W(s)$  nezavisan je od  $\mathcal{F}(s)$ .

Nakon što smo uveli pojmove vezane uz Brownovo gibanje, definirat ćemo i geometrijsko Brownovo gibanje koje služi kao model kretanja cijena financijskih imovina u Black-Sholes-Mertonovom modelu.

**Definicija 6.4** (Geometrijsko Brownovo gibanje). *Neka su  $\mu \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$  konstante. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajni proces  $S = (S(t), 0 \leq t \leq T)$  definiran sa*

$$S(t) = S(0) \exp\left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \quad (6.4)$$

Može se pokazati da je geometrijsko Brownovo gibanje  $S = (S(t), 0 \leq t \leq T)$  rješenje stohastičke diferencijalne jednačbe

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (6.5)$$

Sada ćemo uvesti pojam mjere neutralne na rizik pomoću koje računamo cijene financijskih imovina. Uz tu mjeru će očekivana vrijednost rizične imovine biti jednaka očekivanoj vrijednosti nerizične imovine.

**Definicija 6.5** (Mjera neutralna na rizik ili ekvivalentna martingalna mjera). *Vjerojatnosna mjera  $\mathbb{P}^*$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  naziva se ekvivalentna martingalna mjera ili mjera neutralna na rizik ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na  $\mathbb{P}^*$  i ako je  $\mathbb{P}^*$  vjerojatnost ekvivalentna s  $\mathbb{P}$ .*

Vjerojatnost  $\mathbb{P}$  je stvarna, objektivna vjerojatnost dok je  $\mathbb{P}^*$  vjerojatnost neutralna na rizik. U sljedećem teoremu eksplicitno ćemo definirati vjerojatnost  $\mathbb{P}^*$  te proces Brownovog gibanja u odnosu na tu vjerojatnost.

**Teorem 6.6** (Girsanovljev teorem). *Neka je  $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$  Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  te neka je  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T)$  filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je proces*

$$Z(t) = \exp\left(-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \quad t \geq 0 \quad (6.6)$$

*martingal u odnosu na filtraciju  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T)$ . Relacija*

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A Z(T)d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z(T)] \quad (6.7)$$

definira vjerojatnost na  $(\Omega, \mathcal{F})$  koja je ekvivalentna vjerojatnosti  $\mathbb{P}$ , a u odnosu na  $\mathbb{P}^*$  je proces

$$W^*(t) = W(t) + \theta t \quad (6.8)$$

Brownovo gibanje i adaptiran je na istu filtraciju  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T)$ .

Za dokaz vidi [10].

### 6.1.2 Određivanje cijena izvedenica

U radu ćemo pretpostavljati Black-Sholes-Mertonov model. Promatramo financijsko tržište u kojem postoje dvije financijske imovine. Financijska imovina može biti dionica, obveznica, valuta ili novac. Pretpostavimo da je prva financijska imovina novac koji se ukamaćuje po neprekidnoj kamatnoj stopi  $r$  te je on reprezentiran svojim diskontnim faktorom

$$\beta(t) = e^{-rt}. \quad (6.9)$$

Pretpostavimo da je druga financijska imovina dionica čiju cijenu u trenutku  $t$  označavamo sa  $S(t)$  i modeliramo pomoću geometrijskog Brownovog gibanja

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (6.10)$$

gdje je  $\mu$  srednja stopa povrata, a  $\sigma > 0$  volatilitnost dionice te su  $\mu$  i  $\sigma$  konstante.

Neka je  $X(t)$  vrijednost portfelja u trenutku  $t$  te neka je  $\Delta(t)$  broj dionica u portfelju u trenutku  $t$ . Pretpostavljamo da investitor ulaže u  $\Delta(t)$  dionica, dok ostatak portfelja  $X(t) - \Delta(t)S(t)$  ukamaćuje po kamatnoj stopi  $r$ . Promjenu vrijednosti portfelja od trenutka  $t$  do trenutka  $t + dt$  možemo pisati

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \\ &= \Delta(t)(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \\ &= rX(t)dt + \Delta(t)(\mu - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Slučajni zahtjev  $V(T)$  je  $\mathcal{F}(T)$ -izmjeriva slučajna varijabla koja predstavlja vrijednost, odnosno cijenu neke izvedenice u trenutku  $T$ . Vrijednost slučajnog zahtjeva određuje se uz pretpostavku replicirajućeg portfelja. To znači da tražimo portfelj  $(X(t), 0 \leq t \leq T)$  takav da vrijedi

$$V(t) = X(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.12)$$

Pretpostavka koja nam omogućuje da odredimo cijenu izvedenice jest da je  $(\beta(t)V(t), t \geq 0)$  martingal u odnosu na mjeru neutralnu na rizik  $\mathbb{P}^*$ . Budući da promjena diskontirane vrijednosti portfelja u potpunosti ovisi o promjeni diskontiranih cijena dionica slijedi da je diskontirana vrijednost portfelja martingal s obzirom na mjeru neutralnu na rizik  $\mathbb{P}^*$ . Slijedi

$$\beta(t)V(t) = \beta(t)X(t) = \mathbb{E}^*[\beta(T)X(T)|\mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}^*[\beta(T)V(T)|\mathcal{F}(t)]. \quad (6.13)$$

Iz svojstava martingala slijedi da je sadašnja vrijednost slučajnog zahtjeva  $V(T)$  jednaka

$$V(0) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}V(T)]. \quad (6.14)$$

Ukoliko modeliramo cijenu dionice u odnosu na mjeru neutralnu na rizik  $\mathbb{P}^*$  jednadžba (6.10) postaje

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^*(t). \quad (6.15)$$

Rješenjem te jednadžbe dobivamo

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W^*(t)\right). \quad (6.16)$$

Budući da je  $S(0)$  trenutna cijena, pretpostavljamo da je taj podatak poznat. Slučajna varijabla  $W^*(t)$  je normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom  $t$ . Istu distribuciju ima slučajna varijabla  $\sqrt{t}Z$ , ako je  $Z$  standardna normalna slučajna varijabla. Vrijednost dionice u trenutku  $t$  možemo sada pisati

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \sqrt{t}Z\right). \quad (6.17)$$

U primjerima u narednim poglavljima pretpostavljat ćemo da sve izračune radimo uz mjeru neutralnu na rizik te je nećemo posebno označavati zvjezdicom.

## 6.2 Metode Monte Carlo

Opcije su jedna vrsta financijskih izvedenica. Preciznije, opcija je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti (call) ili prodati (put) neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) po unaprijed dogovorenoj cijeni.

Postoje razne vrste opcija. Primjerice, opcija čija cijena ovisi o cijenama koje je dionica poprimila do trenutka dospjeća ili one čija je cijena određena cijenom dionice baš u trenutku dospjeća. Nadalje, postoje opcije koje se mogu kupiti/prodati u svakom trenutku ili one koje se mogu kupiti/prodati samo u trenutku dospjeća. U nastavku ćemo definirati europsku i azijsku call i put opciju te ćemo objasniti kako se određuje njihova cijena na primjerima call opcija.

**Definicija 6.7.** *Europska call opcija s dospjećem  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  definirana je s*

$$V(T) = (S(T) - K)^+, \quad (6.18)$$

*a europska put opcija s dospjećem  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  definirana je s*

$$V(T) = (K - S(T))^+. \quad (6.19)$$

**Primjer 6.8** (Europska call opcija).

Problem određivanja cijene Europske call opcije ekvivalentan je računanju

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K)^+]. \quad (6.20)$$

Budući da je potrebno odrediti samo cijenu financijskog instrumenta  $S(T)$  u trenutku dostižea  $T$  formula za generiranje simulacije dana je s

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right), \quad (6.21)$$

gdje je  $Z$  standardna normalna slučajna varijabla.

**Definicija 6.9.** *Neka je*

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i), \quad (6.22)$$

za  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ . Azijska call opcija s dostižecom  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  definirana je s

$$V(T) = (\bar{S} - K)^+, \quad (6.23)$$

a azijska call opcija s dostižecom  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  definirana je s

$$V(T) = (K - \bar{S})^+. \quad (6.24)$$

**Primjer 6.10** (Azijska call opcija).

Problem određivanja cijene azijske call opcije ekvivalentan je određivanju

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(\bar{S} - K)^+]. \quad (6.25)$$

Za razliku od europske opcije, cijena azijske opcije ovisi o svim cijenama koje je dionica poprimila u prethodnim trenucima  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Stoga, ako želimo izračunati cijenu azijske opcije moramo simulirati sve vrijednosti  $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_m)$ . Formula za generiranje  $i$ -te simulacije dana je s

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i\right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.26)$$

gdje su  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  nezavisne jednako distribuirane standardne normalne slučajne varijable.

### 6.3 Metoda kontrolnih varijabli

U ovom odjeljku obradit ćemo dva primjera. U primjerima ćemo opisati koje slučajne varijable mogu predstavljati kontrolne varijable i na koje ih načine možemo koristiti.

**Primjer 6.11** (Pripadajuća financijska imovina).

Kod određivanja cijena financijskih izvedenica, pripadajuće financijske imovine predstavljaju jedan širok skup potencijalnih kontrolnih varijabli. Iz definicije 6.5 znamo da je uz mjeru neutralnu na rizik diskontirana cijena neke financijske imovine martingal. Stoga svaki martingal s poznatom početnom (inicijalnom) vrijednošću može predstavljati kontrolnu varijablu.

Promatramo cijenu neke financijske imovine  $S(t)$  u trenutku  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Uz mjeru neutralnu na rizik je  $e^{-rt}S(t)$  martingal i  $\mathbb{E}[e^{-rT}S(T)] = S(0)$ . Pretpostavimo da želimo odrediti cijenu opcije čija je diskontirana vrijednost  $Y = e^{-rT}V(T)$ , gdje je  $V(T)$  vrijednost opcije s dospijanjem  $T$  te ovisi o cijeni  $(S(t), 0 \leq t \leq T)$ .

Procjenitelj  $\bar{Y}(\beta)$  za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable možemo dobiti generiranjem nezavisnih jednako distribuiranih simulacija  $S_i(T)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Iz toga možemo izračunati diskontiranu vrijednost opcije  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ako je primjerice  $V(T) = (S(T) - K)^+$  europska call opcija s dospijanjem  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  tada je  $Y_i = e^{-rT}(S_i(T) - K)^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Iz definicije procjenitelja za  $\mu$  pomoću kontrolne varijable (2.3) slijedi

$$\bar{Y}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta(S_i(T) - e^{rT}S(0))), \quad (6.27)$$

gdje  $\beta$  možemo zamijeniti njegovim jako konzistentnim procjeniteljem  $\hat{\beta}_n$ .

Nadalje, u [3] se navodi da ako se radi o spomenutoj europskoj call opciji čija je diskontirana vrijednost  $Y = e^{-rT}(S(T) - K)^+$  tada, ako promatramo korelaciju između  $Y$  i  $S(T)$ , vidimo da korelacija ovisi o cijeni izvršenja  $K$ . Korelacija je veća što je  $K$  manji. To ćemo u nastavku potkrijepiti numeričkim rezultatima.

U svrhu ilustracije ovog primjera napraviti ćemo  $N = 10000$  simulacija europske call opcije. Prvo ćemo procijeniti vrijednost opcije običnom metodom Monte Carlo, a potom ćemo primijeniti metodu kontrolnih varijabli te usporediti dobivene rezultate. Parametri za simulaciju opcije su vrijeme dospijanja  $T = 1$ , početna cijena  $S(0) = 110$ , volatilitet  $\sigma = 0.2$ , kamatna stopa  $r = 0.05$ .

Za simulaciju nam je potrebna još i cijena izvršenja  $K$ . Napraviti ćemo tri simulacije, varirajući veličinu  $K$ . U prvoj simulaciji cijena izvršenja bit će  $K = 70$ , u drugoj  $K = 120$  i u trećoj  $K = 140$ . Za svaku simulaciju promatrat ćemo redukciju u varijanci dobivenu korištenjem metode kontrolnih varijabli u odnosu na metodu Monte Carlo. Zbog jednostavnosti promatrat ćemo standardne devijacije. Kako bi lakše uočili kolika je redukcija u varijanci promatrat ćemo omjer varijance procjenitelja dobivenog pomoću metode Monte

Carlo i pomoću metode kontrolnih varijabli za svaku cijenu izvršenja  $K$ . Nadalje, promatrat ćemo korelaciju između diskontirane vrijednosti opcije i same cijene. Rezultati su dani u tablici 6.1, pri čemu koristimo oznake "MC" za Monte Carlo procjenitelj i "KV" za procjenitelj pomoću kontrolnih varijabli.

Tablica 6.1: Rezultati simulacija

K	Sd		Omjer varijanci	Korelacija varijabli
	MC	KV		
70	0.220886	0.004686	2634.415000	0.999812
120	0.129490	0.067117	3.722714	0.857100
140	0.076329	0.056174	1.846439	0.677228

Vidimo da se najveća redukcija varijance postiže za najmanji  $K$ , dok se najmanja postiže za veliki  $K$ . Nadalje, uočavamo da korelacija između diskontirane vrijednosti opcije i cijene dionice opada kako  $K$  raste. Dakle, kao što smo zaključili ranije, redukcija varijance je veća što je veća korelacija između diskontirane vrijednosti opcije i same cijene dionice, a ona je veća što je  $K$  manji.

**Primjer 6.12** (Opcije ovisne o putu).

Za jednostavnije opcije, koje nisu ovisne o putu, postoje formule iz kojih se direktno može izračunati njihova cijena. Stoga se cijena opcije može, ali i ne mora, određivati simulacijama. S druge strane, postoje opcije koje ovise o putu te se one ne mogu izračunati u zatvorenoj formi.

Primjer navedenog jest azijska opcija. Iz definicije azijske opcije 6.9 znamo da kako bismo izračunali njezinu cijenu, potrebno je izračunati aritmetičku sredinu vrijednosti financijske imovine  $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_m)$  koje su se poprimile u prethodnim vremenskim trenucima  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Preciznije

$$\bar{S}_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i), \quad (6.28)$$

za  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ . Međutim, azijske call i put opcije koje nisu bazirane na aritmetičkoj sredini već geometrijskoj sredini mogu se egzaktno izračunati u zatvorenoj formi. Geometrijska sredina vrijednosti financijske imovine  $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_m)$  koje su se poprimile u prethodnim vremenskim trenucima  $t_1, t_2, \dots, t_m$  dana je s

$$\bar{S}_G = \left( \prod_{i=1}^m S(t_i) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (6.29)$$

za  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ .



Sada ćemo pokazati kako možemo egzaktno odrediti cijenu dionice baziranu na geometrijskoj sredini. Cijenu modeliramo stohastičkom diferencijalnom jednačinom iz (6.15), odnosno geometrijskim Brownovim gibanjem u odnosu na mjeru neutralnu na rizik. Vrijedi

$$\left( \prod_{i=1}^m S(t_i) \right)^{\frac{1}{m}} = S(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i + \frac{\sigma}{m} \sum_{i=1}^m W(t_i) \right). \quad (6.30)$$

Linearnom transformacijom normalnog slučajnog vektora  $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m))$  čija je kovarijacijska matrica dana s (6.3) slijedi

$$\sum_{i=1}^m W(t_i) \sim N \left( 0, \sum_{i=1}^m (2i-1)t_{m+1-i} \right). \quad (6.31)$$

## 6.4 Slojevito uzorkovanje

U ovom odjeljku, prvo ćemo opisati općeniti primjer slojevitog uzorkovanja koji će se u drugom primjeru primijeniti u slučaju modeliranja cijene financijske imovine.

**Primjer 6.13** (Raslojavanje uniformnih slučajnih varijabli).

Jedan primjer slojevitog uzorkovanja jest da se pri uzorkovanju iz uniformne distribucije na jediničnom intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , taj interval podjeli na  $M$  jednakih podskupova.

Neka je  $A_1, A_2, \dots, A_M$  particija jediničnog intervala  $\langle 0, 1 \rangle$  definirana na sljedeći način

$$A_1 = \left\langle 0, \frac{1}{M} \right], A_2 = \left\langle \frac{1}{M}, \frac{2}{M} \right], \dots, A_M = \left\langle \frac{M-1}{M}, 1 \right]. \quad (6.32)$$

Vjerojatnost da neka uniformno distribuirana slučajna varijabla  $U$  poprima vrijednost na tom intervalu jest  $\mathbb{P}(U \in A_i) = \frac{1}{M}$ . Dakle, uz pretpostavku porporcionalne alokacije, iz svakog podskupa trebamo generirati  $n_i = \frac{n}{M}$  slučajnih varijabli. Za  $i = 1, \dots, M$  neka je  $U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih uniformnih slučajnih varijabli na jediničnom intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  te neka je

$$V_{ij} = \frac{i-1}{M} + \frac{U_{ij}}{M}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, n_i. \quad (6.33)$$

Ako je  $F_{U_{ij}}(x) = x$ ,  $0 < x < 1$ , tada je

$$F_{V_{ij}}(x) = \mathbb{P}(V_{ij} \leq x) = \mathbb{P} \left( U_{ij} \leq \frac{x - \frac{i-1}{M}}{\frac{1}{M}} \right),$$

$$\frac{i-1}{M} < x < \frac{i}{M}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, n_i. \quad (6.34)$$

Iz čega slijedi

$$V_{ij} \sim Unif\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}\right), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, n_i. \quad (6.35)$$

Također, vidimo da  $V_{ij}, j = 1, \dots, n_i$ , ima upravo uvjetnu distribuciju  $F_{U|U \in A_i}, i = 1, \dots, M$ , gdje je  $U$  uniformno distribuirana slučajna varijabla na jediničnom intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Stoga je za  $i = 1, \dots, M$ ,  $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in_i}$  uzorak iz uvjetne distribucije pomoću kojeg računamo procjenitelj za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja.

Neka je  $Y = h(U)$ . Iz (3.3) slijedi da je procjenitelj  $\hat{Y}$  za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja dan s

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} h(V_{ij}). \quad (6.36)$$

U slučaju da je  $n = M$  procjenitelj  $\hat{Y}$  za  $\mu$  pomoću slojevitog uzorkovanja poprima sljedeći oblik:

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(V_i). \quad (6.37)$$

Taj primjer možemo lako generalizirati na particiju intervala  $\langle 0, 1 \rangle$  na intervale različitih duljina. Ako je  $A_i = \langle a_i, b_i \rangle$  tada definiramo

$$V = a_i + U(b_i - a_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.38)$$

Slijedi

$$V \sim Unif(a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.39)$$

U svrhu ilustracije ovog primjera napraviti ćemo  $N = 10000$  simulacija europske call opcije. Prvo ćemo simulirati opciju običnom metodom Monte Carlo, a potom ćemo primijeniti slojevito uzorkovanje te usporediti dobivene rezultate. Parametri za simulaciju opcije su vrijeme dospijeca  $T = 1$ , početna cijena  $S(0) = 110$ , volatilitnost  $\sigma = 0.2$ , kamatna stopa  $r = 0.05$  i cijena izvršenja opcije  $K = 120$ .

Dodatno, ovdje moramo odlučiti koji broj podskupova ćemo uzeti. Simulirat ćemo tri slučaja,  $M = 10$ ,  $M = 100$ ,  $M = 1000$ . Za sva tri slučaja promatrat ćemo redukciju u varijanci postignutu korištenjem slojevitog uzorkovanja, omjer varijanci dobivenih slojevitim uzorkovanjem i Monte Carlo procjeniteljem te prosječnu širinu 95% pouzdanog intervala za varijancu podskupova. Napomenimo da slučaj  $M = 1$  zapravo odgovara procjenitelju Monte Carlo. Zbog jednostavnosti umjesto varijance promatrat ćemo standardnu devijaciju. Rezultati se nalaze u tablici 6.2, pri čemu koristimo oznake "MC" za Monte Carlo procjenitelj i "SU" za procjenitelj pomoću slojevitog uzorkovanja.

Vidimo da je za Monte Carlo procjenitelj ( $M = 1$ ) varijanca najveća te se ona smanjuje kako uzimamo veći broj podskupova. Međutim, što je broj podskupova veći, to je i pouzdani interval za varijancu širi. Veći broj podskupova znači manji broj realizacija po

Tablica 6.2: Rezultati simulacija

Metoda	Broj podskupova	Sd	Omjer varijanci	Širina intervala
MC	1	0.131853	-	$0.0308 \cdot 10^{-3}$
SU	10	0.042463	3.105136	$0.1013 \cdot 10^{-3}$
	100	0.010731	12.286819	$0.2073 \cdot 10^{-3}$
	1000	0.002390	55.163748	$0.3023 \cdot 10^{-3}$

podskupu zbog čega se smanjuje točnost procjene varijance. Kao što smo zaključili u poglavlju 3.4, profinjenjem podskupova postiže se sve veća redukcija u varijanci, međutim smanjuje se točnost procjene varijance koja indirektno utječe na točnost normalne aproksimacije u pouzdanim intervalima.

**Primjer 6.14** (Raslojavanje terminalne vrijednosti Brownovog gibanja).

Neka je  $W = (W(t), 0 \leq t \leq T)$  Brownovo gibanje. Kod određivanja cijena opcija, najbitnija jest vrijednost Brownovog gibanja  $W(t_m)$  u trenutku izvršenja opcije  $T = t_m$ , odnosno njegova terminalna (završna) vrijednost. Želimo generirati slučajne varijable  $W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_m)$  te raslojiti terminalnu vrijednost  $W(t_m)$ . Nakon toga poznate su nam vrijednosti  $W(t_0) = W(0) = 0$  i  $W(t_m) = W(T)$ . Potom ćemo uvjetovanjem na najbliže poznate vrijednosti odrediti distribuciju svih ostalih varijabli  $W(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ .

Pretpostavimo da je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost iz nekog podskupa jednaka za sve podskupove te da podskupova ima  $M$ . Pretpostavimo također da je alokacija proporcionalna. Pretpostavimo da je broj simulacija  $m$  te da je broj simulacija jednak broju podskupova,  $m = M$ . Neka su  $U_1, U_2, \dots, U_M$  nezavisne slučajne varijable iz uniformne distribucije na  $[0, 1]$  te neka je

$$V_i = \frac{i-1}{M} + \frac{U_i}{M}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (6.40)$$

Neka je  $F$  funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable. Tada je po (1.9)  $F^{-1}(V_1), F^{-1}(V_2), \dots, F^{-1}(V_M)$  uzorak iz  $N(0, 1)$ . Nadalje,  $\sqrt{t_m}F^{-1}(V_1), \sqrt{t_m}F^{-1}(V_2), \dots, \sqrt{t_m}F^{-1}(V_M)$  je uzorak iz  $N(0, t_m)$  što je upravo distribucija od  $W(t_m)$ .

Da bismo dobili distribuciju slučajnog vektora  $W(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ , potrebno je izračunati uvjetnu distribuciju od  $(W(t_j)|W(t_{j-1}) = x_{j-1}, W(t_m) = x_m)$ , gdje  $t_{j-1} < t_j < t_m$ . Tada distribuciju od  $W(t_j)$  možemo dobiti na sljedeći način

$$W(t_j) \stackrel{D}{=} \mu_j + \sigma_j Z, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.41)$$

gdje je  $Z$  standardna normalna slučajna varijabla nezavisna od svih  $W(t_{j-1})$  i  $W(t_m)$ ,  $j =$

1, ..., m, i

$$\begin{aligned}\mu_j &= \mathbb{E}[W(t_j)|W(t_{j-1}), W(t_m)], \\ \sigma_j^2 &= \text{Var}[W(t_j)|W(t_{j-1}), W(t_m)].\end{aligned}\quad (6.42)$$

Detaljan izvod navedenih tvrdnji može se pronaći u [3].

Formula za uvjetno očekivanje  $\mu_j$  i uvjetnu varijancu  $\sigma_j^2$  može se izračunati ukoliko poznajemo funkciju gustoće normalnog slučajnog vektora. Neka je  $(X, Y)$  slučajni vektor takav da

$$(X, Y) \sim N\left([\mu_X, \mu_Y], \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}\right), \quad (6.43)$$

tada uz pretpostavku da  $\Sigma_{YY}$  nije singularna matrica vrijedi (vidi [3])

$$(X|Y = y) \sim N(\mu_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(y - \mu_Y), \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}). \quad (6.44)$$

Primijenimo to sada na naš slučaj. Iz (6.3) i permutacijom vektora slijedi

$$(W(t_j), W(t_{j-1}), W(t_m)) \sim N\left([0, 0, 0], \begin{bmatrix} t_j & t_{j-1} & t_j \\ t_{j-1} & t_{j-1} & t_{j-1} \\ t_j & t_{j-1} & t_m \end{bmatrix}\right), \quad (6.45)$$

za  $t_{j-1} < t_j < t_m$  i svaki  $j = 1, \dots, m - 1$ . Dakle

$$\begin{aligned}(W(t_j)|W(t_{j-1}) = x_{j-1}, W(t_m) = x_m) \\ \sim N\left(\frac{(t_m - t_j)}{(t_m - t_{j-1})}x_{j-1} + \frac{(t_j - t_{j-1})}{(t_m - t_{j-1})}x_m, \frac{(t_m - t_j)(t_j - t_{j-1})}{(t_m - t_{j-1})}\right).\end{aligned}\quad (6.46)$$

Ako je cijena financijske imovine  $S(t)$  modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem tada je ona monotona transformacija od  $W(t)$ . Iz toga slijedi da raslojavanjem  $W(t_m)$ , raslojavamo i vrijednost  $S(t_m)$ .

## 6.5 Uzorkovanje po važnosti

U ovom odjeljku navest ćemo dva primjera u kojima ćemo diskutirati odabir pogodne nove distribucije slučajne varijable.

**Primjer 6.15** (Promjena mjere).

Uzorkovanje po važnosti najčešće se koristi za call opcije čija je cijena izvršenja  $K$  puno veća od cijene temeljne financijske imovine  $S(0)$  ili put opcije čija je cijena izvršenja  $K$  puno manja od  $S(0)$ . U ovom primjeru obradit ćemo slučaj call opcije. To konkretno znači

da bi pri korištenju metoda Monte Carlo simulirane vrijednosti opcije najčešće bile nula jer bi vrijednosti simulirane varijable  $S(T)$  bile većinom manje od  $K$ , što bi uzorkovalo veliku pogrešku Monte Carlo procjenitelja. Uzorkovanje po važnosti se tada koristi kako bi se promjenom mjere simulirale slučajne varijable  $S(T)$  iz takve distribucije da će vrijednost opcije biti pozitivna s većom vjerojatnošću.

Želimo procijeniti

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K)^+], \quad (6.47)$$

gdje je  $\mathbb{E}$  očekivanje u odnosu na mjeru neutralnu na rizik  $Q$  te su distribucija slučajne varijable  $Z(T)$  u odnosu na mjeru  $Q$  i cijena financijske imovine  $S(T)$  u odnosu na mjeru  $Q$  dane s:

$$\begin{aligned} Z(T) &\sim N\left(rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right) \\ S(T) &= S(0)e^{Z(T)} = S(0) \exp\left(rT - \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma T\right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Pretpostavimo sada da je  $\tilde{\mathbb{E}}$  očekivanje u odnosu na mjeru  $\tilde{Q}$ . Tada su distribucija slučajne varijable  $Z(T)$  u odnosu na mjeru  $\tilde{Q}$  i cijena financijske imovine  $S(T)$  u odnosu na tu mjeru dane s:

$$\begin{aligned} Z(T) &\sim N\left(\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right) \\ S(T) &= S(0)e^{Z(T)} = S(0) \exp\left(\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma T\right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Obje vjerojatnosne mjere  $Q$  i  $\tilde{Q}$  su mjere neutralne na rizik. Uz mjeru neutralnu na rizik je očekivana vrijednost rizične financijske imovine jednaka očekivanoj vrijednosti nerizične imovine. To znači da se eliminira varijabilnost  $\sigma$ . Pogledajmo očekivanu vrijednost od  $S(T)$  u odnosu na mjeru  $Q$  i  $\tilde{Q}$  (vidi [7]):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(T)] &= e^{rT} S(0) \\ \tilde{\mathbb{E}}[S(T)] &= S(0)e^{\log\left(\frac{K}{S(0)}\right)} = K. \end{aligned} \quad (6.50)$$

To pokazuje da postoji veća vjerojatnost da će cijena prijeći vrijednost  $K$ , ako ju simuliramo u odnosu na mjeru  $\tilde{Q}$ .

Da bismo mogli izračunati omjer vjerodostojnosti potrebna nam je funkcija gustoće normalne slučajne varijable. Ona je dana s

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6.51)$$

Tada je omjer vjerodostojnosti

$$\frac{dQ}{d\tilde{Q}}(Z(T)) = \frac{\varphi\left(Z(T), rT - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)}{\varphi\left(Z(T), \log\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)} := \frac{f(Z(T))}{g(Z(T))}. \quad (6.52)$$

Cijenu europske call opcije sada određujemo u odnosu na mjeru  $\tilde{Q}$  na sljedeći način:

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K)^+] = \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rT}(S(T) - K)^+ \frac{f(Z(T))}{g(Z(T))}\right]. \quad (6.53)$$

Da bismo ilustrirali ovaj primjer napraviti ćemo  $N = 10000$  simulacija europske call opcije. Prvo ćemo simulirati opciju običnom metodom Monte Carlo, a potom ćemo primijeniti uzorkovanje po važnosti te usporediti dobivene rezultate. Parametri za simulaciju opcije su vrijeme dospijeca  $T = 1$ , početna cijena  $S(0) = 110$ , volatilitnost  $\sigma = 0.2$ , kamatna stopa  $r = 0.05$ .

Za simulaciju nam je potrebna još i cijena izvršenja  $K$ . Napraviti ćemo dvije simulacije, u jednoj će  $K$  biti malo veći od  $S(0)$ , a u drugoj puno veći. U oba slučaja promatrat ćemo redukciju u varijanci dobivenu korištenjem uzorkovanja po važnosti u odnosu na metodu Monte Carlo. Zbog jednostavnosti ćemo promatrati standardne devijacije oba procjenitelja. Kako bismo lakše uočili redukciju u varijanci diskutirat ćemo omjer varijance procjenitelja Monte Carlo i uzorkovanja po važnosti. Nadalje, pobrojat ćemo koliko simuliranih opcija nije imalo nultu isplatu ako se simuliralo metodom Monte Carlo i ako se koristilo uzorkovanje po važnosti. U prvom slučaju uzimamo da je  $K = 120$ , dakle samo malo veći od  $S(0)$ , a u drugom slučaju uzimamo  $K = 150$ , odnosno značajno veći od  $S(0)$ . U tablici 6.3 se nalaze dobiveni rezultati, pri čemu koristimo oznake "MC" za Monte Carlo procjenitelj i "UZV" za procjenitelj pomoću uzorkovanja po važnosti.

Tablica 6.3: Rezultati simulacija

<b>K</b>	<b>Metoda</b>	<b>Sd</b>	<b>Broj isplata &gt; 0</b>	<b>Omjer varijanci</b>
120	MC	0.130527	3977	11.023010
	UPV	0.039314	4706	
150	MC	0.054075	821	60.234320
	UPV	0.006968	4623	

Prvo promatramo slučaj kada je  $K = 120$ . Vidimo da je korištenjem uzorkovanja po važnosti postignuta velika redukcija u varijanci. Broj opcija koje nisu imale nultu isplatu je veći kada se koristi uzorkovanje po važnosti, ali u ovom slučaju nije značajno. Zatim promatramo slučaj kada je  $K = 150$ . Postignuta redukcija u varijanci je još veća nego u prethodnom slučaju. Broj opcija koje nisu imale nultu isplatu je značajno veći pri

korištenju uzorkovanja po važnosti. Vidimo da je uzorkovanje po važnosti prikladnije za opcije u kojima je razlika između  $K$  i  $S(0)$  velika.

**Primjer 6.16** (Optimalna mjera).

Budući da se u ovom poglavlju koncentriramo na promjenu mjere kojom ćemo reducirati varijancu procjenitelja, u ovom primjeru ćemo objasniti jedan način na koji možemo izabrati novu distribuciju te pokazati to na primjeru azijske call opcije.

Cijenu azijske opcije modeliramo na način objašnjen u (6.26). Prisjetimo se da je formula za generiranje  $i$ -te simulacije dana s

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i\right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.54)$$

gdje su  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  nezavisne jednako distribuirane standardne normalne slučajne varijable. Iz čega slijedi

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma \sqrt{t_i - t_{i-1}}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i)\right). \quad (6.55)$$

Definirajmo sada

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \rho(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = e^{-rT} (\bar{S} - K)^+ \\ \phi(Z) &= -rT + \log(\bar{S} - K)^+, \end{aligned} \quad (6.56)$$

te ako  $\rho(Z)$  poprima strogo nenegativne vrijednosti možemo pisati

$$\rho(Z) = e^{\phi(Z)}, \quad (6.57)$$

uz  $\phi(Z) = -\infty$ , ako je  $\rho(Z) = 0$ .

Promatramo slučaj gdje mijenjanjem distribucije mijenjamo očekivanje slučajne varijable. Neka su  $\mathbb{E}$  očekivanje,  $Z \sim N(0, I)$  i  $f(Z)$  funkcija gustoće od  $Z$  u odnosu na originalnu mjeru  $Q$ . Neka su  $\tilde{\mathbb{E}}$  očekivanje,  $Z \sim N(\theta, I)$  i  $g(Z)$  funkcija gustoće od  $Z$  u odnosu na mjeru  $\tilde{Q}$ . Budući da znamo funkciju gustoće normalne slučajne varijable možemo izračunati omjer vjerodostojnosti:

$$\frac{f(Z)}{g(Z)} = \exp\left(-\theta^\top Z + \frac{1}{2}\theta^\top \theta\right). \quad (6.58)$$

Nakon uvođenja svih potrebnih oznaka, procjenjujemo očekivanje diskontirane vrijednosti azijske call opcije:

$$\mathbb{E}[\rho(Z)] = \mathbb{E}[e^{\phi(Z)}] = \mathbb{E}[e^{-rT} (\bar{S} - K)^+]. \quad (6.59)$$

Primijetimo sada da je očekivanje slučajnog vektora  $Z$  uz mjeru  $\tilde{Q}$  jednako očekivanju vektora  $\theta + Z$  uz originalnu mjeru  $Q$ . Stoga računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\phi(Z)}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{\phi(Z)}e^{-\theta^\top Z + \frac{1}{2}\theta^\top \theta}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\phi(\theta+Z)}e^{-\theta^\top(\theta+Z) + \frac{1}{2}\theta^\top \theta}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\phi(\theta+Z)}e^{-\theta^\top Z - \frac{1}{2}\theta^\top \theta}\right].\end{aligned}\tag{6.60}$$

Da bismo odredili očekivanje  $\theta$  aproksimiramo procjenitelj na sljedeći način

$$e^{\phi(\theta+Z)}e^{-\theta^\top Z - \frac{1}{2}\theta^\top \theta} \approx e^{\phi(\theta) + \nabla\phi(\theta)^\top Z}e^{-\theta^\top Z - \frac{1}{2}\theta^\top \theta},\tag{6.61}$$

gdje je  $\nabla\phi(Z)$  gradijent funkcije  $\phi$  u točki  $\theta$ . Izaberemo li  $\theta$  takav da vrijedi

$$\nabla\phi(\theta) = \theta^\top,\tag{6.62}$$

tada izraz (6.61) na desnoj strani postaje konstanta koja ne ovisi o  $Z$ . Stoga će varijanca aproksimacije procjenitelja s desne strane izraza biti nula, dok će egzaktno dobiveni procjenitelj s lijeve strane imati varijancu blizu nula.



# Bibliografija

- [1] K. L. Chung, *A Course in Probability Theory*, Second edition, Academic Press, New York, 2001.
- [2] T. S. Ferguson, *A Course in Large Sample Theory*, Chapman & Hall, London, 1996.
- [3] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York, 1993.
- [4] D. Lamberton i B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, London, 1996.
- [5] E. L. Lehmann i G. Cassela, *Theory of Point Estimation*, Second edition, Springer, New York, 1998.
- [6] C. Lemieux, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*, Springer, New York, 2009.
- [7] D. L. McLeish, *Monte Carlo simulation and finance*, John Willey & Sons, New Jersey, 2005.
- [8] M. Musiela i M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, New York, 1996.
- [9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- [10] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2008.

# Sažetak

Glavni cilj ovog rada je proučiti nekoliko osnovnih tehnika redukcije varijance za metode Monte Carlo te potom prikazati na primjerima kako se one mogu primijeniti u financijskoj matematici.

U prvom poglavlju definira se problem Monte Carlo integracije te se objašnjava na kojim teoremima se ona bazira. Potom se detaljno obrađuju tehnike redukcije varijance. Prvo se obrađuje metoda kontrolnih varijabli koja se bazira na korištenju rješenja već poznatog problema koji je sličan promatranom. Zatim se obrađuje slojevito uzorkovanje koje se bazira na strateškom generiranju varijabli iz različitih podskupova. Na kraju se obrađuje uzorkovanje po važnosti koje se bazira na promjeni mjere kojom će se dati veća težina rijetkim događajima. Nakon toga se ukratko komentiraju sličnosti i razlike među metodama.

Zadnje poglavlje posvećeno je samoj primjeni opisanih metoda u financijskoj matematici. U tom poglavlju prvo se obrađuju osnovni principi teorije financijskog modeliranja, a potom se za svaku tehniku redukcije varijance obrađuju primjeri. Naposljetku se implementira jedan od primjera na kojem se uspoređuje pogreška dobivena uobičajenim Monte Carlo procjeniteljem i pogreška dobivena korištenjem tehnika redukcija varijance.

# Summary

The main goal of this thesis is to study some of the basic variance reduction techniques for Monte Carlo methods and apply them on examples from financial mathematics.

In the first chapter Monte Carlo integration problem is explained, as well as theorems that it is based on. A detailed analysis of variance reduction techniques follows. Firstly, the Control Variates method, which is based on using the solutions of a known problem similar to the one which is being observed, is introduced. Then comes the Stratified Sampling method, which is based on the strategic variable generating from different subsets. Finally comes the Importance Sampling method, based on the measure alterations which emphasize the importance of rare occurrences. After that, similarities and differences between these methods are briefly discussed.

The last chapter deals with the application of the described methods in financial mathematics. Firstly, the basic principles of the derivative pricing theory are explained, and then follow examples for each of the variance reduction techniques. Finally, an implemented example shows the comparison between a Monte Carlo method variance and a variance resulting from the usage of the variance reduction technique.

# Životopis

Rođena sam 23.10.1993. godine u Čakovcu. Pohađala sam IV. osnovnu školu Varaždin te Osnovnu glazbenu školu u Varaždinu. Potom sam upisala Prvu gimnaziju Varaždin, smjer opća gimnazija, i Srednju glazbenu školu u Varaždinu. Srednju glazbenu školu završila sam 2011. godine, a u gimnaziji sam maturirala 2012. godine. Zatim sam 2012. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu koji sam završila 2015. godine. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.