

# Pappusov teorem: razni dokazi i varijacije

---

**Crnjac, Dorotea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:164739>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-10**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Dorotea Crnjac

**PAPUSOV TEOREM: RAZNI DOKAZI I  
VARIJACIJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Izv. prof. dr. sc. Matija  
Kazalicki

Zagreb, travanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Papus i Papusov teorem</b>	<b>2</b>
1.1 Papus iz Aleksandrije . . . . .	2
1.2 Papusov teorem i projektivna geometrija . . . . .	3
<b>2 Dokazi euklidske verzije Papusovog teorema</b>	<b>7</b>
2.1 Euklidska verzija Papusovog teorema . . . . .	7
2.2 Dokaz – Omjeri duljina dužina . . . . .	9
2.3 Dokaz – Metoda površina . . . . .	10
<b>3 Projektivni dokazi Papusovog teorema</b>	<b>14</b>
3.1 Homogene koordinate . . . . .	14
3.2 Dokaz – Poništavanje determinanti . . . . .	16
3.3 Dokaz – Grassmann-Plücker relacije . . . . .	19
<b>4 Konike i varijacije Papusovog teorema</b>	<b>21</b>
4.1 Konike u projektivnoj geometriji . . . . .	21
4.2 Varijacija 1: Pascalov teorem . . . . .	23
4.3 Varijacija 2: Chayley-Bacharach-Chasles teorem . . . . .	26
<b>5 Kompleksni brojevi i kružnice</b>	<b>29</b>
5.1 Veza kružnice i kompleksnih brojeva . . . . .	29
5.2 Varijacija 3: Miquelov teorem . . . . .	32
<b>6 Dokaz Papusovog teorema uz pomoć računala</b>	<b>36</b>
6.1 Spojnice točaka i sjecišta pravaca . . . . .	36
6.2 Dokaz - <i>Mathematica</i> . . . . .	38

*SADRŽAJ*

iv

**Bibliografija**

**41**

# Uvod

Papusov teorem smatra se najstarijim, a ujedno i temeljnim teoremom projektivne geometrije. Pripisujemo ga posljednjem velikom matematičaru aleksandrijske škole Papusu iz Aleksandrije iz čijeg smo djela *Kolekcije* saznali o mnogim izgubljenim djelima velikih matematičara antike.

Ovaj teorem, kojemu su jedini elementi u iskazu točke i pravci, često možemo naći i u verziji pod nazivom Papusov teorem o šesterovrhu jer dvije trojke točaka na polaznim pravcima u iskazu teorema čine vrhove običnog šesterovrha. Specifičnosti ovoga teorema istaknuti ćemo u prvom poglavlju ovoga rada zajedno s objašnjenjem zašto svoju punu općenitost ima upravo u projektivnoj geometriji.

Interpretacijom Papusovog teorema u euklidskoj ravnini dobivamo njegove različite specijalizacije, a jednu od njih ćemo iskazati i na dva načina dokazati u drugom poglavlju.

Papus je ovaj teorem originalno dokazao koristeći se pretpostavkama koje vrijede u euklidskoj ravnini, no razvojem projektivne geometrije matematičari su otkrili čisto projektivne načine kako dokazati Papusov teorem. U trećem poglavlju izdvojiti ćemo dva projektivna dokaza u kojima se koristimo isključivo projektivnim konceptima, a za potrebe tih dokaza uvesti ćemo specifičnu koordinatizaciju projektivne ravnine pomoću homogenih koordinata.

Promatramo li koniku kao degeneriranu krivulju drugog reda koja se može rastaviti na dva različita pravca uočavamo da je Papusov teorem specijalizacija Pascalovog teorema gledamo li njegove polazne pravce kao degeneriranu koniku. Četvrto poglavlje posvećeno je Pascalovom teoremu kao i Chayley-Bacharach-Chasles teoremu koji također kao svoju direktnu posljedicu ima Papusov teorem.

U petom poglavlju reći ćemo nešto više o vezi kružnica i kompleksnih brojeva kao uvod za iskaz i dokaz Miquelovog teorema koji je treća varijacija Papusovog teorema u ovome radu.

Za kraj ćemo u posljednjem poglavlju dati još jedan dokaz Papusovog teorema za čiju je provedbu potrebna upotreba računala, a temelji se na činjenici da se u projektivnoj ravnini svako sjecište pravaca i svaka spojnica točaka mogu jednostavno prikazati pomoću vektorskog produkta.

# Poglavlje 1

## Papus i Papusov teorem

Papusov teorem poznat još i kao Papusov teorem o šesterovrhu je jedan od prvih velikih teorema današnje projektivne geometrije, a pripisuje se grčkom matematičaru Papusu iz Aleksandrije.

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s Papusovim životom (o kojemu se jako malo zna), posebnostima Papusovog teorema te njegovom vezom s projektivnom geometrijom.

### 1.1 Papus iz Aleksandrije

Papus iz Aleksandrije živio je krajem 4. stoljeća (290.-350.) i zadnji je veliki grčki matematičar aleksandrijske škole koja je u to vrijeme već potpuno izumrla. Smatra se značajnim matematičarem toga vremena više zbog toga što je komentirao dotadašnju matematiku drugih matematičara nego zbog svojih originalnih doprinosa.

Jedino postojeće, a ujedno i glavno, Papusovo djelo je *Kolekcija*. Originalno je napisana u osam knjiga od kojih Knjiga I i neki dijelovi Knjige II nedostaju. *Kolekcija* je vrsta enciklopedije koja predstavlja skup starijih matematičarskih djela te je jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici. Sadrži nekoliko važnih otkrića od kojih je nekima autor upravo Papus dok je za neke lažno preuzeo zaslugu. Utjecaj ovog djela osjetio se tek stoljećima nakon njegove pojave [4] [1].

Papus je uveo pojam fokusa i direktrise hiperbole te je dokazao da je konika geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti do čvrste točke (fokusa) i čvrstog pravca (direktrise) konstantan. U 18. stoljeću je to svojstvo kao zajedničku definiciju konika iskoristio Ruđer Bošković i na temelju te definicije oformio prvu potpunu teoriju konika kao ravninskih krivulja [1].

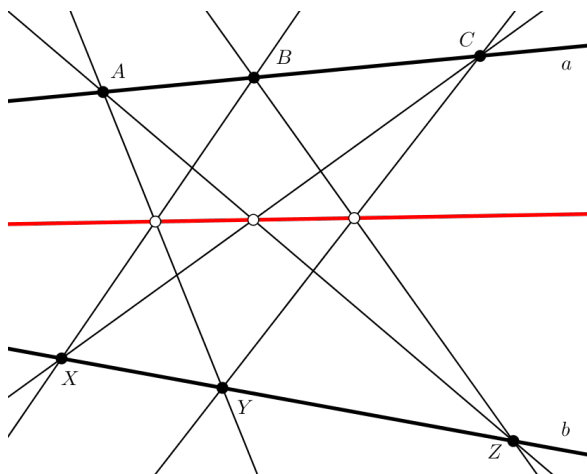
Poznato je da je komentirao Ptolomejev *Almagest*, a bavio se i pitanjima iz mehanike, obujmovima i oplošjima geometrijskih tijela te je dao rješenje jednog od tri klasična problema – problema trisekcije kuta (uz pomoć konika) [7].

## 1.2 Pappusov teorem i projektivna geometrija

U djelu *Kolekcija* Papusa iz Aleksandrije, točnije u Knjizi VII nalaze se dvije leme koje su zajedno postale poznate kao Pappusov teorem [4]. Moderna verzija ovog teorema kojeg smatramo prvim velikim teoremom projektivne geometrije glasi:

**Teorem 1.2.1** (Pappusov teorem). *Neka su  $A, B, C$  tri točke na nekom pravcu  $a$  i neka su  $X, Y, Z$  tri točke na drugom pravcu  $b$ . Ako pravci  $AY, BZ, CX$  sijeku pravce  $BX, CY, AZ$  redom, onda su tri točke sjecišta kolinearne.*

Prikaz ovog teorema, u kojem podrazumijevamo da se dva pravca sijeku u točno jednoj točki, možemo vidjeti na slici 1.1 na kojoj šest crnih točaka predstavljaju polazne točke koje leže na polaznim pravcima, a tri bijele točke predstavljaju točke sjecišta koje su kolinearne.



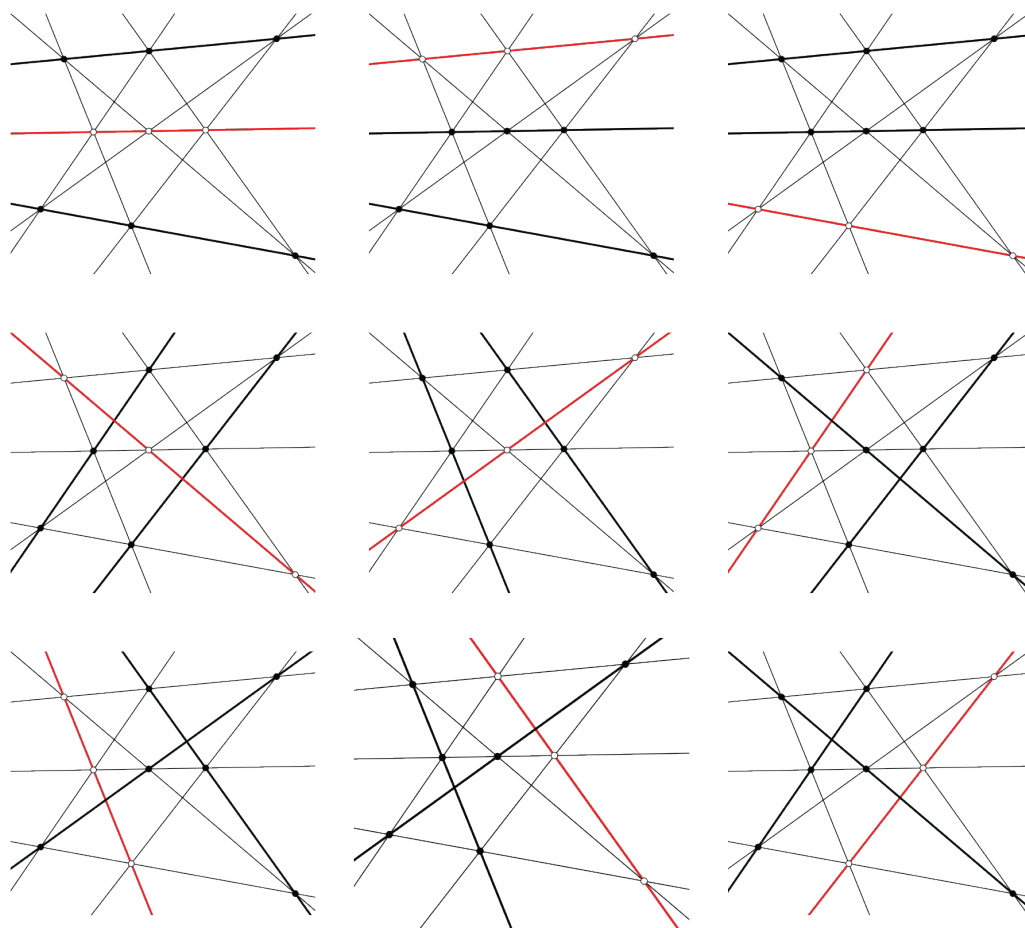
Slika 1.1: Pappusov teorem

Uočavamo da su jedini elementi korišteni pri iskazu ovog teorema točke i pravci koji su povezani relacijom incidencije pa Pappusov teorem na neki način možemo smatrati *najmanjim* teoremom iskazanim samo uz pomoć osnovnih elemenata. Ispravno iskazan teorem sastoji se od samo devet točaka i devet pravaca i ne postoji teorem s manje elemenata u svojem iskazu. U devet točaka Pappusovog teorema ubrajamo dvije trojke točaka na polaznim pravcima te tri točke sjecišta koje su kolinearne. Devet pravaca čine dva polazna pravca, šest unutarnjih pravaca koji se međusobno sijeku u parovima i posljednji pravac, poznatiji još i kao Pappusov pravac, je pravac na kojemu leže tri točke sjecišta [7]. Ovaj teorem često se naziva i Pappusov teorem o šesterovrhu jer dvije trojke točaka na polaznim pravcima čine vrhove običnog šesterovrha kojeg nazivamo Pappusov šesterovrh.



Papusova konfiguracija je simetrična geometrijska konfiguracija jer se sastoji od istog broja točaka i pravaca te svakom točkom prolazi onoliko pravaca koliko se točaka nalazi na svakom pravcu. Zanimljivost ove konfiguracije je što kao polazne pravce teorema možemo uzeti bilo koji par pravaca koji nema zajedničku točku konfiguracije. Odnosno, svaki pravac možemo uzeti kao Papusov pravac, na kojem leže tri točke konfiguracije, dok od preostalih šest točaka konfiguracije uvijek po tri leže na dva polazna pravca konfiguracije. Tih šest točaka, danih u određenom redosljedu, možemo uvijek shvatiti kao vrhove jednog Papusovog šesterovrha čije su stranice pravci dane konfiguracije [5].

U ovakvoj konfiguraciji u kojoj ne mijenjamo položaje točaka ni pravaca postoji devet različitih Papusovih šesterovrha. Svih devet primjera možemo vidjeti na slici 1.2.



Slika 1.2: Devet primjera Papusovog teorema

U svakom primjeru druge točke imaju ulogu dviju trojki polaznih točaka, odnosno drugi pravac ima ulogu Pappusovog pravca. Kao i na slici 1.1 deblji pravci predstavljaju polazne pravce na kojima leže crnom bojom označene polazne točke, dok crveni pravac na kojem leže sjecišta označena bijelom bojom predstavlja Pappusov pravac. Svi ostali pravci predstavljaju stranice Pappusovog šesterovrha.

U prvom primjeru prvog reda na slici 1.2 Pappusov pravac, na kojem leže kolinearne točke sjecišta, nalazi se između dvaju polaznih pravaca i to je primjer koji najčešće susrećemo kao prikaz Pappusovog teorema. Na iduća dva primjera u prvom redu slike 1.2 vidimo da se uloge dva polazna pravca i Pappusovog pravca mogu izmjenjivati, odnosno da polazni pravci mogu imati ulogu Pappusovog pravca. U drugom i trećem redu slike 1.2 vidimo da i bilo koji unutarnji pravac također može predstavljati Pappusov pravac.

Kako bi u teoremu 1.2.1 uopće mogle postojati točke sjecišta koje tvrdimo da su kolinearne, potrebno je da se parovi pravaca  $(AY, BX)$ ,  $(BZ, CY)$  i  $(CX, AZ)$  sijeku. Pappusov teorem iskazan kao u teoremu 1.2.1 vrijedi i u euklidskoj geometriji, ali tada više ne u punoj općenitosti jer neka dva pravca mogu biti paralelna ili se podudarati pa uvjet teorema da se pravci sijeku u točno jednoj točki tada više neće biti zadovoljen. Ove posebne slučajeve možemo eliminirati prelaskom u projektivnu geometriju [7].

Realna projektivna ravnina proširenje je euklidske ravnine elementima u beskonačnosti odnosno beskonačno dalekim točkama i beskonačno dalekim pravcem. Svaki pravac euklidske ravnine nadopunimo jednom beskonačno dalekom točkom u kojoj se sijeku svi s njim paralelni pravci, odnosno svaki pramen paralelnih pravaca u projektivnoj ravnini sijече se u drugoj beskonačno dalekoj točki. Sve te beskonačno daleke točke, koje su sjecišta svakog pramena paralelnih pravaca projektivne ravnine, leže na jednom pravcu te ravnine kojeg nazivamo njezinim beskonačno dalekim pravcem i označavamo ga s  $l_\infty$ . Za beskonačno daleke elemente projektivne ravnine vrijede jednaka svojstva kao i za sve ostale elemente te ravnine [3].

Za aksiomatsko zadavanje projektivne ravnine razmatraju se dva skupa primitivnih elemenata. Elemente prvog skupa označavamo velikim latinskim slovima i nazivamo ih točkama, a elemente drugog skupa označavamo malim latinskim slovima i nazivamo ih pravcima. Kao primitivnu relaciju uzimamo relaciju koju nazivamo relacija incidencije. Točka  $A$  incidentna je s pravcem  $a$  ako točka  $A$  leži (ili ne leži) na pravcu  $a$  ili obrnuto ako pravac  $a$  prolazi (ili ne prolazi) točkom  $A$ .

Ako je točka  $A$  incidentna sa dva različita pravca  $a$  i  $b$  tada kažemo da je točka  $A$  sjecište tih dvaju pravca ili da se ta dva pravca sijeku u točki  $A$ , a ako je pravac  $a$  incidentan s dvije različite točke  $A$  i  $B$  zvat ćemo ga spojnicom  $AB$  točaka  $A$  i  $B$ .

Ako je tri ili više različitih točaka incidentno s jednim pravcem, tada kažemo da su one kolinearne, a ako tri ili više različitih pravaca prolazi jednom točkom, tada kažemo da su oni konkurentni.

Dva skupa primitivnih elemenata, odnosno skup točaka i skup pravaca, zajedno s relacijom incidencije i sljedeća tri aksioma definira projektivnu ravninu:

A1: Postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke;

A2: Postoji točno jedna točka incidentna s dva različita pravca;

A3: Postoje četiri različite točke, od kojih tri nisu kolinearne.

Zamijenimo li u aksiomima A1 i A2 riječi točka i pravac dobivamo aksiome jedan iz drugog. Ova činjenica uvjetuje dualitet projektivne geometrije, pa točke i pravce u projektivnoj geometriji smatramo dualnim elementima. Zamjenom riječi točka i pravac te spajati i sjeći odnosno ležati na i prolaziti u nekoj istinitoj tvrdnji projektivne ravnine ponovno dobivamo istinitu tvrdnju. Dakle dokažemo li neki teorem projektivne geometrije, dokazali smo i njemu dualni [5].

Zaključujemo da se u projektivnoj geometriji za razliku od euklidske svaka dva pravca sijeku, pa Papusov teorem u projektivnoj geometriji postiže svoju punu općenitost jer sjecište dva pravca uvijek postoji samo će ono možda biti u beskonačnosti.

## Poglavlje 2

# Dokazi euklidske verzije Pappusovog teorema

### 2.1 Euklidska verzija Pappusovog teorema

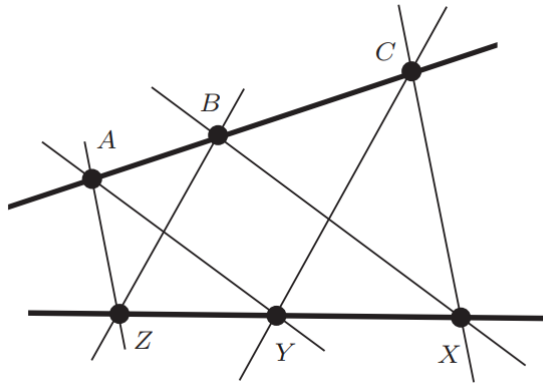
U prethodnom poglavlju istaknuli smo da prelaskom u projektivnu geometriju i uvođenjem elemenata u beskonačnosti eliminiramo posebne slučajeve Pappusovog teorema. Teorem tako i dalje vrijedi ako se bilo koja točka ili pravac nalaze u beskonačnosti i to u svojoj punoj općenitosti bez posebnih slučajeva.

Prelaskom u euklidsku geometriju teorem koji dobivamo zapravo predstavlja specijalizaciju za određeni pravac u beskonačnosti, pa tako često nekoliko teorema euklidske geometrije odgovara samo jednom teoremu u projektivnoj geometriji.

Pošaljemo li neke elemente Pappusovog teorema u beskonačnost dobiti ćemo zanimljive euklidske specijalizacije od kojih nekoliko primjera možemo pronaći u [7]. U ovom ćemo radu iskazati i na dva načina dokazati samo jednu od njih. Njezin prikaz možemo vidjeti na slici 2.1, a iskazana je na sljedeći način:

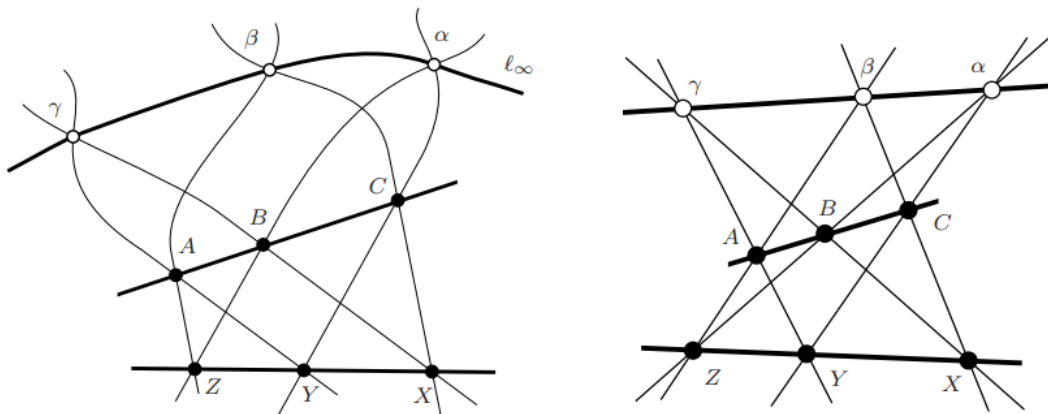
**Teorem 2.1.1.** *Neka su  $a$  i  $b$  dva pravca u euklidskoj geometriji. Neka su  $A, B, C$  tri točke na pravcu  $a$  i neka su  $X, Y, Z$  tri točke na pravcu  $b$ . Ako vrijedi  $AY \parallel BX$  i  $BZ \parallel CY$  onda vrijedi i  $AZ \parallel CX$ .*

Teorem 2.1.1 specijalizacija je Pappusovog teorema kojemu je konačni odnosno Pappusov pravac u beskonačnosti. Na slici 2.2 prikazano je kako se paralelnost pravaca prenosi u projektivni prostor. Ako za pravce  $AY$  i  $BX$  vrijedi  $AY \parallel BX$  tada se ta dva pravca sijeku u točki  $\gamma$  u beskonačnosti. Kako su i pravci  $BZ$  i  $CY$  paralelni onda se oni također sijeku u točki u beskonačnosti  $\alpha$ . Prema projektivnoj verziji Pappusovog teorema točke  $\gamma$  i  $\alpha$  i sjecište  $\beta$  pravca  $AZ$  s pravcem  $CX$  su kolinearne točke. Točke  $\gamma$  i  $\alpha$  određuju pravac u beskonačnosti  $l_\infty$  pa točka  $\beta$  također pripada tom pravcu i stoga mora vrijediti  $AZ \parallel CX$ .



Slika 2.1: Euklidska verzija Papusovog teorema [7]

Dakle Papusov pravac, odnosno pravac na kojemu leže točke sjecišta koje su kolinearne, sada se nalazi u beskonačnosti što možemo vidjeti na slici 2.2 lijevo. Na slici 2.2 desno vidimo verziju u kojoj se Papusov pravac nalazi u euklidskoj ravnini [7].



Slika 2.2: Euklidska verzija Papusovog teorema s Papusovim pravcem u beskonačnosti (lijevo) i prikaz konfiguracije u kojoj se Papusov pravac nalazi u euklidskoj ravnini (desno) [7]

Prva dva dokaza ovoga rada su algebarski dokazi gore navedene euklidske verzije Papusovog teorema u kojima ćemo geometrijske tvrdnje prevoditi u algebarske identitete.

Kao i svi algebarski dokazi ovisit će o pravilu dijeljenja s nulom koje u geometrijskim dokazima stvara određena ograničenja. U slučajevima kada ne postoje podudaranja nikojih točaka ni nikojih pravaca i ne pojavljuju se dodatne kolinearnosti dokazi većinom vrijede, no u određenim degeneriranim slučajevima ovo pravilo onemogućava provedbu dokaza.

Kako bi u našim dokazima izbjegli pojavljivanje degeneriranih slučajeva pretpostavit ćemo da je svih devet točaka konfiguracije međusobno različito i da su svih devet pravaca konfiguracije u parovima različiti. Ako dodatne pretpostavke budu potrebne iskazat ćemo ih prilikom dokaza [7].

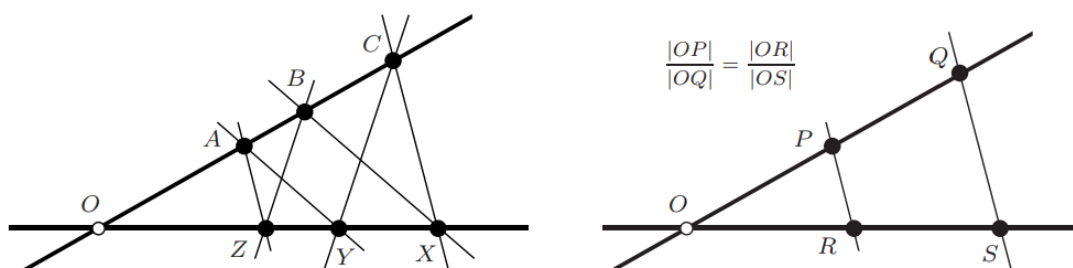
## 2.2 Dokaz – Omjeri duljina dužina

Prvi dokaz euklidske verzije Pappusovog teorema iskazane u ovom radu vrlo je jednostavan, a temelji se na omjerima duljina dužina. Problem ovog dokaza njegova je ograničenost i on vrijedi samo uz sljedeće dvije dodatne pretpostavke:

*Dva polazna pravca moraju se sjeći u točki  $O$ .*

*Točka  $O$  ne smije ležati između nijedne dvije od triju točaka na ovim pravcima.*

Uz ove dvije pretpostavke dobivamo prikaz teorema kao na slici 2.3 lijevo na kojoj se pravci  $a$  i  $b$  sijeku u točki  $O$ .



Slika 2.3: Euklidska verzija Pappusovog teorema u kojoj se pravci  $a$  i  $b$  sijeku u točki  $O$  (lijevo). Veza paralela i omjera duljina dužina (desno) [7]

*Dokaz.* Neka se pravac  $a$  i pravac  $b$  sijeku u točki  $O$  tako da se ona ne nalazi između nijedne dvije od triju točaka na tim pravcima.

Udaljenost dviju točaka  $P$  i  $Q$  označavamo s  $|PQ|$ . Ovaj dokaz temelji se na sljedećoj tvrdnji čiji prikaz možemo vidjeti na slici 2.3 desno:

Neka su dana dva pravca  $a$  i  $b$  koja se sijeku u točki  $O$  i neka su  $P$  i  $Q$  dvije točke na pravcu  $a$  takve da točka  $O$  ne leži između njih. Isto tako neka su  $R$  i  $S$  dvije točke na pravcu

$b$  takve da točka  $O$  ne leži između njih. Tada su pravci  $PR$  i  $QS$  paralelni ako i samo ako vrijedi

$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OR|}{|OS|}.$$

Ova tvrdnja zajedno s pretpostavkom teorema da su pravci  $AY$  i  $BX$  paralelni povlači

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OY|}{|OX|}.$$

Analogno, paralelnost pravaca  $BZ$  i  $CY$  povlači

$$\frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OZ|}{|OY|}.$$

Kako se nijedna od šest točaka teorema ne smije podudarati s  $O$  tada nijedan od nazivnika u prethodnim jednakostima nije jednak nuli.

Pomnožimo li dvije lijeve strane dobivenih jednakosti i dvije desne strane dobivamo izraz u kojem možemo pokratiti članove  $|OB|$  i  $|OY|$  nakon čega nam preostaje jednakost:

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OZ|}{|OX|}$$

Dobivena jednakost je ekvivalentna tvrdnji da su pravci  $AZ$  i  $CX$  paralelni.  $\square$

Ovaj naizgled jednostavan dokaz u sebi nosi brojne nedostatke, a jedan od najvećih je dokazivanje paralelnosti iz iskaza teorema pomoću omjera duljina dužina. To je moguće samo ako točka  $O$  kao sjecište dva polazna pravca ne leži između nijedne dvije od triju točaka na tim pravcima. Ovaj problem može se izbjeći korištenjem orijentiranih dužina, ali tada bi omjer u našem dokazu imao predznak ovisno o položaju točke  $O$ . Predznak bi bio negativan ako točka  $O$  leži između točaka, a pozitivan ako ne leži. Kako bi se uvjerali u točnost ovog zaključka ipak bi bio potreban dokaz detaljno po slučajevima. No čak i ako zanemarimo položaj točke  $O$ , ovaj dokaz u potpunosti ovisi o njezinom postojanju, pa u slučaju kada su pravci  $a$  i  $b$  paralelni točka  $O$  ne postoji i dokaz se uopće ne može provesti [7].

## 2.3 Dokaz – Metoda površina

Iako smo u prethodnom dokazu sami birali početne uvjete bez kojih dokaz ne bi mogli provesti, euklidska verzija Papusovog teorema zapravo uopće ne ovisi o posebnim zahtjevima položaja točaka i pravaca. U to ćemo se i uvjeriti tako što ćemo u sljedećem dokazu koristiti samo šest točaka iz teorema 2.1.1.

Za ovaj dokaz potrebne su nam tri netrivialne tvrdnje o polinomima i površinama orijentiranog trokuta i orijentiranog četverokuta koje ćemo navesti prije samog dokaza.

*Tvrdnja 1 - Površina orijentiranog trokuta*

Za tri točke  $A = (a_x, a_y)$ ,  $B = (b_x, b_y)$ ,  $C = (c_x, c_y)$  površinu orijentiranog trokuta  $(A, B, C)$  možemo izraziti preko polinoma u koordinatama. Taj polinom dobivamo na sljedeći način

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a_x b_y + b_x c_y + c_x a_y - a_x c_y - b_x a_y - c_x b_y)$$

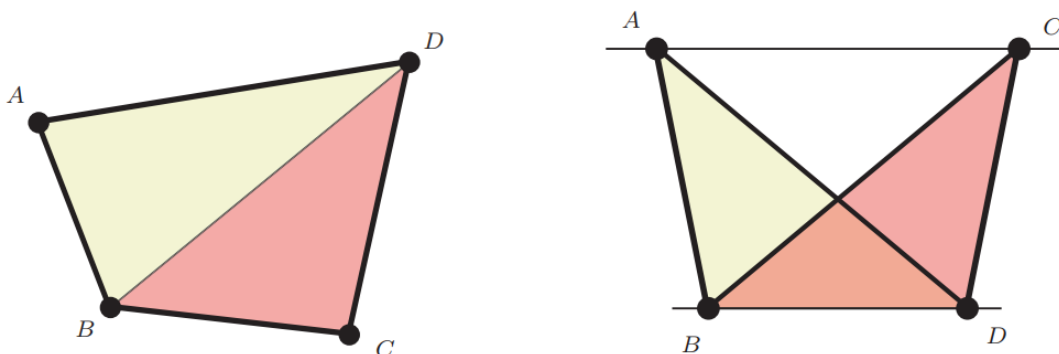
Površinu trokuta označavati ćemo s  $P_{\Delta}(A, B, C)$ . Za naš dokaz ova formula nije toliko bitna koliko je značenje pojma orijentirani trokut. Ako se obilazak vrhova trokuta vrši u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, onda je trokut  $(ABC)$  pozitivno orijentiran i vrijedi  $P_{\Delta}(A, B, C) > 0$ , a ako se obilazak vrhova vrši u smjeru kazaljke na satu trokut je negativno orijentiran i vrijedi  $P_{\Delta}(A, B, C) < 0$ . Ako su tri točke kolinearne tada trokut ne postoji i površina je jednaka nuli [6].

*Tvrdnja 2 - Površina orijentiranog četverokuta*

Površinu orijentiranog četverokuta označavati ćemo s  $P_{\square}(A, B, C, D)$ , a može se definirati kao:

$$P_{\square}(A, B, C, D) = P_{\Delta}(A, B, D) + P_{\Delta}(B, C, D).$$

Prethodni izraz sada opet možemo izraziti kao polinom u koordinatama točaka.



Slika 2.4: Površina konveksnog četverokuta (lijevo) i površina samopresječnog četverokuta koja je jednaka nuli (desno) [7]



Ako rub tog četverokuta (izlomljena linija od  $A$  do  $B$  do  $C$  do  $D$  i nazad do  $A$ ) nije samopresječan (stranice četverokuta ne sijeku se međusobno) njegova površina računa se na ovaj način pri čemu predznak ovisi o orijentaciji (slika 2.4 lijevo). No ako je četverokut samopresječan tada od dva trokuta koja se nalaze u njegovoj sumi jedan ima pozitivnu vrijednost, dok drugi ima negativnu.

Površina samopresječnog četverokuta  $(A, B, C, D)$  jednaka je nuli ako i samo ako dva trokuta koja su u njegovoj sumi imaju jednake površine sa suprotnim predznakom (slika 2.4 desno). Dakle, ako imamo ovaj slučaj i oba trokuta dijele stranicu  $(B, D)$  to povlači da je duljina visine iz  $A$  na tu stranicu jednaka duljini visine iz  $C$  na tu stranicu, odnosno pravac kroz  $A$  i  $C$  paralelan je pravcu kroz  $B$  i  $D$ . Zaključujemo dakle da vrijedi

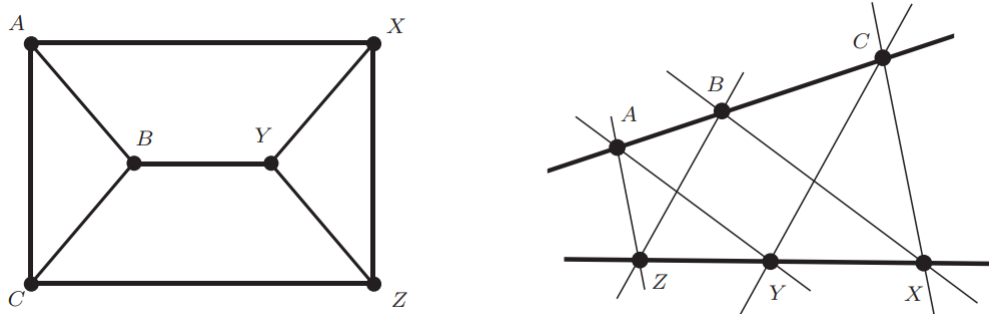
$$AC \parallel BD \iff P_{\square}(A, B, C, D) = 0.$$

### Tvrđnja 3 - Nul-polinom

Ako je polinom jednak nuli na nekoj okolini neke točke, onda je on nul polinom.

Sada ćemo dokazati teorem 2.1.1 metodom površina u kojem ćemo se pozivati na tri prethodno navedene tvrdnje [7].

*Dokaz.* Neka su  $A, B, C, X, Y, Z$  šest točaka u euklidskoj ravnini koje se nalaze na položajima koji otprilike nalikuju prikazu na slici 2.5 lijevo.



Slika 2.5: Dokaz Pappusovog teorema metodom površina [7]

Ako pogledamo taj lik uočavamo da ga možemo promatrati kao da se sastoji od dva trokuta  $\triangle(A, C, B)$  i  $\triangle(X, Y, Z)$  te dva četverokuta  $\square(B, Y, X, A)$  i  $\square(C, Z, Y, B)$ . Zbroj površina ta dva orijentirana trokuta i dva orijentirana četverokuta (s oznakama vrhova u slijedu suprotnom smjeru kazaljke na satu) upravo je jednak površini četverokuta  $\square(C, Z, X, A)$ :

$$+P_{\triangle}(A, C, B) + P_{\triangle}(X, Y, Z) + P_{\square}(B, Y, X, A) + P_{\square}(C, Z, Y, B) = P_{\square}(C, Z, X, A).$$

Iz toga slijedi:

$$+ P_{\Delta}(A, C, B) + P_{\Delta}(X, Y, Z) + P_{\square}(B, Y, X, A) + P_{\square}(C, Z, Y, B) - P_{\square}(C, Z, X, A) = 0. \quad (2.1)$$

Izraz s lijeve strane ove jednakosti je polinom i ne ovisi o točnom položaju točaka jer nam je zapravo samo bitno da su svi mnogokuti pozitivno orijentirani, odnosno da im je obilazak vrhova u slijedu suprotnom od smjera kazaljke na satu i da se vanjski četverokut može rastaviti na unutarnje likove. Stoga, prema tvrdnji 3, ova formula mora vrijediti za proizvoljne položaje šest točaka, pa čak i u degeneriranim slučajevima.

Kako ova formula vrijedi za proizvoljne točke uzmimo sada šest točaka Papusovog teorema prikazanog na slici 2.5 desno. Trojke točaka  $(A, B, C)$  i  $(X, Y, Z)$  su prema teoremu 2.1.1 kolinearne pa interpretiramo li te pretpostavke preko površina prema tvrdnji 1 vrijedi:

$$P_{\Delta}(A, C, B) = 0,$$

$$P_{\Delta}(X, Y, Z) = 0.$$

U teoremu smo pretpostavili i da su pravci  $AY$  i  $XB$  te pravci  $BZ$  i  $YC$  paralelni, pa interpretiramo li i te dvije pretpostavke preko površina prema tvrdnji 2 dobivamo:

$$P_{\square}(B, Y, X, A) = 0,$$

$$P_{\square}(C, Z, Y, B) = 0.$$

Uvrstimo li ove površine u jednakost 2.1 dobivamo

$$P_{\square}(C, Z, X, A) = 0.$$

Prema tvrdnji 2 sada zaključujemo da vrijedi  $AZ \parallel XC$  i time je teorem dokazan.  $\square$

Dokaz metodom površina zahtjeva dodatne tvrdnje koje smo naveli prije samog dokaza i nije toliko jednostavan kao prethodni dokaz, ali zbog toga ima i svoju prednost. Ovaj dokaz zapravo se svodi na to da ako su četiri površine iz jednakosti 2.1 jednake nuli, onda i posljednja površina mora biti jednaka nuli. Teorem u ovom obliku, za razliku od prethodnog dokaza, vrijedi bez ikakvih ograničenja pa čak i u slučaju kada se točke podudaraju [7].

## Poglavlje 3

# Projektivni dokazi Pappusovog teorema

U prvom poglavlju zaključili smo da u projektivnoj geometriji Pappusov teorem postiže svoju punu općenitost i u ovome poglavlju dokazati ćemo Pappusov teorem koristeći se samo projektivnim konceptima kao što su incidencija i kolinearnost. Prije samih dokaza uvest ćemo za njih potrebnu specifičnu koordinatizaciju proširene euklidske ravnine pomoću homogenih koordinata.

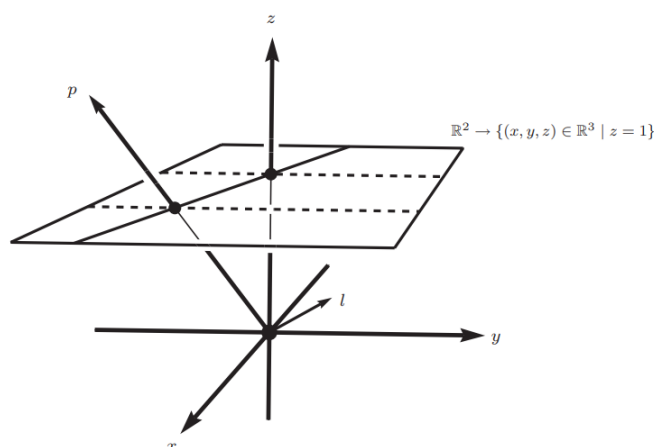
### 3.1 Homogene koordinate

Realna projektivna ravnina proširenje je euklidske ravnine uvođenjem beskonačnih točki kao sjecišta svakog pramena paralelnih pravaca i beskonačnog pravca na kojem leže sve beskonačne točke. Sve točke projektivne ravnine možemo prikazati kao vektore trodimenzionalnog prostora (izostavljajući vektor  $(0, 0, 0)$ ), poznatije kao homogene koordinate, a sada ćemo pokazati kako uvodimo takvu koordinatizaciju.

Podsjetimo se prvo koordinatizacije euklidske ravnine pomoću skupa  $\mathbb{R}^2$ . Točke euklidske ravnine predstavljamo vektorima  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a pravce smatramo skupovima svih točaka  $(x, y)$  koje zadovoljavaju jednadžbu  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ . Kako pravce ne želimo promatrati kao skupove točaka, nego kao zasebne objekte, predstavljati ćemo ih parametrima  $(a, b, c)$ . Uočimo da za  $\lambda \neq 0$  vektor  $(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)$  predstavlja isti pravac kao i  $(a, b, c)$ .

Smjestimo sada euklidsku ravninu  $H$  u  $\mathbb{R}^3$  tako da ne sadrži ishodište od  $\mathbb{R}^3$  (prikaz vidimo na slici 3.1). Za euklidsku ravninu  $H$  prikladno je uzeti ravninu  $z = 1$ .

Svaku točku projektivne ravnine identificiramo s pravcem u  $\mathbb{R}^3$  koji prolazi kroz tu točku i ishodište te ju možemo predstaviti bilo kojim vektorom tog pravca različitim od nule. Ako za točku vrijedi  $z \neq 0$ , taj pravac siječe ravninu  $H$  u jedinstvenoj točki koju možemo izračunati dijeljenjem koordinatom  $z$ . Dakle za  $z \neq 0$  vektor  $(x, y, z)$  predstavlja euklidsku točku  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ . Svaki vektor oblika  $\lambda(x, y, z)$ ,  $\lambda \neq 0$  predstavljaju istu euklidsku točku.

Slika 3.1: Smještanje euklidske ravnine u  $\mathbb{R}^3$  [7]

Ako sjecište ravnine  $H$  i tog pravca ne postoji, odnosno ako je taj pravac paralelan s ravninom  $H$ , onda ne postoji euklidska točka koja se povezuje sa  $(x, y, z)$ . U tom slučaju vektor homogenih koordinata  $(x, y, z)$  predstavlja beskonačnu točku. To su točke iz  $\mathbb{R}^3$  koje imaju koordinatu  $z$  jednaku nuli, odnosno oblika su  $\lambda(x, y, 0)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Pravac  $p$  u  $H$  identificiramo s ravninom u  $\mathbb{R}^3$  koja sadrži taj pravac i ishodište. Dakle, pravcu  $p$  odgovara linearna jednačnja

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mid ax + by + cz = 0\}$$

i predstavljamo ga parametrom  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ . Interpretiramo li ovu jednačnju u trodimenzionalnom prostoru, vidimo da je vektor  $(a, b, c)$  zapravo vektor normale ravnine koja sadrži sve vektore  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$  koji zadovoljavaju tu jednačnju.

Uzmemo li točku ovog pravca sa homogenim koordinatama  $(x, y, 1)$  ovaj oblik degenerira u euklidsku verziju. Presiječemo li ovu ravninu s našom ravninom  $H$ , dobivamo pravac u euklidskoj ravnini koji odgovara euklidskom pravcu našeg pravca  $p$ .

Postoji samo jedan oblik vektora kojemu ne odgovara nijedan euklidski pravac. Uzmemo li vektor  $(0, 0, c)$  za koji vrijedi  $c \neq 0$  njemu ortogonalan vektorski prostor je  $xy$ -ravnina kroz ishodište koja ne siječe ravninu  $H$ . Sve točke u beskonačnost, odnosno točke oblika  $(x, y, 0)$ , ortogonalne su na taj vektor jer vrijedi  $0 \cdot x + 0 \cdot y + c \cdot 0 = 0$ . Zaključujemo da je taj pravac incidentan sa svim točkama u beskonačnosti pa se radi o pravcu u beskonačnosti kojeg predstavljamo vektorom  $\lambda(0, 0, 1)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Dakle sve točke i svi pravci realne projektivne ravnine mogu se prikazati vektorima u  $\mathbb{R}^3$  različitim od nule.

Želimo li provjeriti jesu li neke tri točke u ravnini  $H$  kolinearne provjeravamo za-  
pravo jesu li odgovarajući pravci u  $\mathbb{R}^3$  s kojima ih identificiramo komplanarni. Potrebno je  
dakle utvrditi leže li tri odgovarajuća pravca u istoj ravnini što možemo pomoću formule  
mješovitog produkta.

Zaključujemo da su točke  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$  i  $C = (x_3, y_3, z_3)$ , zadane  
homogenim koordinatama, kolinearne ako i samo ako  $(A \times B) \cdot C = 0$ , odnosno ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako u projektivnoj ravnini ne razlikujemo beskonačne od konačnih točaka ovo vrijedi  
za sve točke projektivne ravnine.

Ovakva determinanta može se zapisati i na kraći način pa za tri točke  $A, B, C$  projek-  
tivne ravnine vrijedi:

$$[ABC] := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Za determinante trećeg reda vrijedi sljedeće svojstvo o naizmjeničnim predznacima [7]:

$$[ABC] = [BCA] = [CAB] = -[ACB] = -[CBA] = -[BAC] \quad (3.2)$$

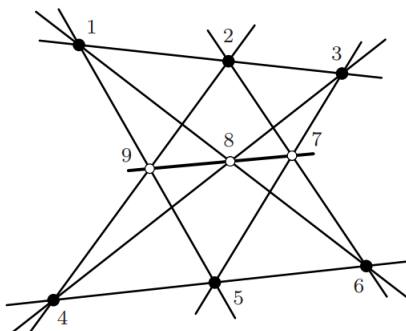
## 3.2 Dokaz – Poništavanje determinanti

Prvi projektivni dokaz Papusovog teorema temeljit će se na tvrdnji da su tri točke  $A, B, C$   
projektivne ravnine kolinearne ako i samo ako je determinanta njihovih homogenih koor-  
dinata jednaka nuli i takvu determinantu kraće zapisujemo kao  $[ABC]$ .

*Dokaz.* Dosadašnje oznake devet točaka Papusovog teorema u ovom dokazu ćemo zami-  
jeniti znamenkama od 1 do 9 radi lakšeg snalaženja i boljeg razumijevanja. Prikaz konfi-  
guracije s novim oznakama točaka možemo vidjeti na slici 3.2.

Uz uvjet da se nikoje dvije točke niti nikoja dva pravca ne podudaraju, koji smo imali i u  
prethodnim dokazima, u ovom dokazu nam je potreban dodatan uvjet kojim se izbjegavaju  
degenerirani slučajevi. Trojka točaka  $(1, 4, 7)$  ne smije biti kolinearna.

Pretpostavimo da trojka točaka  $(1, 4, 7)$  nije kolinearna. Primijenimo li prikladnu afinu  
transformaciju, koja ne utječe na incidenciju točaka i pravaca, na konfiguraciju možemo  
bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da trojka točaka  $(1, 4, 7)$  čini jednakostraničan tro-  
kut. Ravninu u kojoj se nalazi naša konfiguracija smještamo u trodimenzionalni prostor  
tako da točkama 1, 4 i 7 odgovaraju jedinični vektori  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$  redom.



Slika 3.2: Konfiguracija Papusovog teorema sa točkama označenim znamenkama [7]

Konfiguracija je sada smještena u  $\mathbb{R}^3$  pa je svaka točka predstavljena homogenim koordinatama. Homogene koordinate točaka 1, 4, 7 su redom  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ , a koordinate preostalih točaka označili smo slovima:

$$1 = (1, 0, 0),$$

$$2 = (a, b, c),$$

$$3 = (d, e, f),$$

$$4 = (0, 1, 0),$$

$$5 = (g, h, i),$$

$$6 = (j, k, l),$$

$$7 = (0, 0, 1),$$

$$8 = (m, n, o),$$

$$9 = (p, q, r).$$

Uvjet da se nikoje dvije točke i nikoja dva pravca ne podudaraju povlači da nijedno od ovih slova sigurno ne može biti jednako nuli u što se možemo i uvjeriti na sljedeći način.

Trojka točaka  $(3, 4, 7)$  ne može biti kolinearna jer bi se u suprotnom dva pravca ove konfiguracije podudarala. Determinanta te trojke točaka jednaka je  $a$ , a kako trojka točaka nije kolinearna znači da njena determinanta mora biti različita od nule pa slijedi

$$a = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dakle,  $a \neq 0$ . Na analogan način možemo se uvjeriti da su i ostale slovom označene koordinate različite od nule.

Zbog posebnog izbora koordinata u ovome dokazu svaka od osam pretpostavljenih kolinearnosti može se prikazati kao determinanta drugog reda. Svaku od determinanti možemo izračunati tako da ju razvijemo upravo po redu kojeg čine koordinate jediničnih vektora. Pri takvom razvoju dobivamo tri determinante drugog reda od kojih se dvije ponište jer se množe s nulom.

$$\begin{aligned} [123] = 0 &\implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \implies 1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0 \\ &\implies \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \implies bf - ce = 0 \implies ce = bf \end{aligned}$$

Analognim postupkom dobivamo slične jednakosti i za preostalih sedam kolinearnosti:

$$[123] = 0 \implies ce = bf$$

$$[159] = 0 \implies iq = hr$$

$$[168] = 0 \implies ko = ln$$

$$[249] = 0 \implies ar = cp$$

$$[267] = 0 \implies bj = ak$$

$$[348] = 0 \implies fm = do$$

$$[357] = 0 \implies dh = eg$$

$$[456] = 0 \implies gl = ij$$

Pomnožimo li sada sve lijeve strane jednakosti i sve desne strane tih jednakosti dobivamo jednakost u kojoj se određena slova ponavljaju s obje strane. Utvrdili smo da su zbog početnog uvjeta sva slova različita od nule, pa slova koja se ponavljaju i s lijeve i s desne strane smijemo skratiti. Preostaje nam sljedeća jednakost:

$$mq = np.$$

Iz ove jednakosti slijedi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m & n & o \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

odnosno  $[789] = 0$  što povlači kolinearnost trojke  $(7, 8, 9)$  [7]. □

Poništavanje određenih determinanti, a time i provedba ovoga dokaza, u potpunosti ovisi o početnom izboru baze. Svaku od osam kolinearnosti možemo prikazati kao determinantu drugog reda upravo zbog nula u jediničnim vektorima baze. Izborom neke druge baze nestala bi jednostavnost i simetričnost ovoga dokaza u kojemu se određena slova pojavljuju s obje strane konačne jednakosti.

### 3.3 Dokaz – Grassmann-Plücker relacije

Za razliku od prethodnog dokaza u kojem su poništavanja determinanti u potpunosti ovisila o izboru baze, u sljedećem dokazu koristit ćemo se samo osnovnim svojstvima determinanti i na taj način izbjeći korištenje koordinata točaka.

Iako je ovaj dokaz sličan dokazu poništavanjem determinanti, za njegovu provedbu nije nam potreban poseban izbor baze jer ćemo raditi isključivo sa determinantama.

Osnova ovoga dokaza je Grassmann-Plücker relacija prema kojoj za pet proizvoljnih točaka  $A, B, C, D, E$  u projektivnoj ravnini vrijedi sljedeća relacija između determinanti njihovih homogenih koordinata:

$$[ABC][ADE] - [ABD][ACE] + [ABE][ACD] = 0.$$

Ovaj identitet koji ima veliku važnost za projektivnu geometriju u ovom dokazu koristimo samo kao algebarsku tvrdnju, a više o Grassmann-Plücker relacijama moguće je pronaći u [7].

*Dokaz.* Kao i u prethodnom dokazu dosadašnje oznake devet točaka Papusovog teorema zamijeniti ćemo znamenkama od 1 do 9 radi lakšeg snalaženja i boljeg razumijevanja. Pretpostavimo ponovno da trojka točaka (1, 4, 7) nije kolinearna. Zajedno s ovom pretpostavkom koristit ćemo se i pretpostavkom teorema da je trojka točaka (1, 2, 3) kolinearna.

Za ovih pet točaka vrijedi sljedeća Grassmann-Plücker relacija

$$[147][123] - [142][173] + [143][172] = 0.$$

Kolinearnost trojke (1, 2, 3) ekvivalenta je tvrdnji  $[123] = 0$ . Uzmemo li tu tvrdnju zajedno s prethodnom relacijom dobivamo

$$[142][173] = [143][172].$$

Analogno, za svaku od osam kolinearnosti pretpostavljenih teoremom možemo dobiti sličnu jednakost:

$$\begin{aligned} [147][123] - [142][173] + [143][172] = 0 \wedge [123] = 0 &\implies [142][173] = [143][172] \\ [147][159] - [145][179] + [149][175] = 0 \wedge [159] = 0 &\implies [145][179] = [149][175] \\ [147][186] - [148][176] + [146][178] = 0 \wedge [186] = 0 &\implies [148][176] = [146][178] \\ [471][456] - [475][416] + [476][415] = 0 \wedge [456] = 0 &\implies [475][416] = [476][415] \\ [471][483] - [478][413] + [473][418] = 0 \wedge [483] = 0 &\implies [478][413] = [473][418] \\ [471][429] - [472][419] + [479][412] = 0 \wedge [429] = 0 &\implies [472][419] = [479][412] \\ [714][726] - [712][746] + [716][742] = 0 \wedge [726] = 0 &\implies [712][746] = [716][742] \\ [714][753] - [715][743] + [713][745] = 0 \wedge [753] = 0 &\implies [715][743] = [713][745] \end{aligned}$$



Kao i u prethodnom dokazu pomnožit ćemo sve lijeve strane i sve desne strane dobivenih jednakosti. Uočavamo da se određene determinante pojavljuju s obje strane jednakosti uzmemo li u obzir svojstvo determinanti 3.2. Zbog uvjeta da se nikoja dva pravca i nikoje dvije točke ne smiju podudarati sve determinante su različite od nule pa smijemo skratiti članove koji se pojavljuju na obje strane dobivene jednakosti pri tome pazeći na predznake prema svojstvu 3.2. Preostaje nam sljedeća jednakost

$$[179][478] = -[178][479]$$

što je zbog svojstva determinanti 3.2 ekvivalentno jednakosti

$$[718][749] = [719][748].$$

Sljedeća Grassmann-Plücker relacija

$$[714][789] - [718][749] + [719][748] = 0$$

zajedno s prethodnom jednakosti povlači da je

$$[714][789] = 0.$$

Na početku smo pretpostavili da točke 1, 4 i 7 nisu kolinearne, dakle determinanta njihovih homogenih koordinata je različita od nula iz čega slijedi  $[789] \neq 0$ . Tvrdnja  $[789] \neq 0$  ekvivalenta je tvrdnji da je trojka (7, 8, 9) kolinearna.  $\square$

## Poglavlje 4

# Konike i varijacije Pappusovog teorema

Konike ili krivulje drugog reda koncept su projektivne geometrije najbliži kružnici u euklidskoj geometriji. U ovom poglavlju ćemo ih definirati i navesti neka njihova svojstva potrebna za dokaz dviju poznatih varijacija Pappusovog teorema.

### 4.1 Konike u projektivnoj geometriji

Konike ili krivulje drugog reda poznavali su još i stari narodi pa se u upotrebi mogu pronaći različite definicije, dok je za nazive elipsa, hiperbola i parabola zaslužan Apolonije iz Perge. Starogrčki matematičari definiraju ih kao presjeke stošca ravninom odakle potiče hrvatski naziv čunjosječnice. U srednjim školama konike se definiraju kao geometrijska mjesta točaka koje zadovoljavaju izvjesna svojstva o čemu više možemo pronaći u [8].

U projektivnoj geometriji elipsa, hiperbola i parabola se ne razlikuju već se promatraju zajednički kao konike, a njihova definicija [8] glasi:

**Definicija 4.1.1.** *Skup svih točaka projektivne ravnine čije koordinate  $(x, y, z)$  zadovoljavaju (homogenu) jednadžbu drugog reda*

$$a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{12}yz = 0 \quad (4.1)$$

*nazivamo konikama ili krivuljama drugog reda.*

Prethodni izraz možemo zapisati i u matričnom obliku:

$$X^T A X = 0$$

gdje je  $X$  jednostupčana koordinatna matrica, a  $A = (a_{ij})$  simetrična matrica trećeg reda (odnosno matrica identična sa svojom transponiranom matricom) [8].

Ukoliko je matrica  $A$  regularna tada govorimo o nedegeneriranim konikama. U ovom radu nama će biti posebno zanimljivo promatrati degenerirane konike, odnosno konike koje se mogu rastaviti na dva pravca.

Preimenujemo li parametre u jednadžbi 4.1.1 i ubacimo li faktor 2 unutar parametra dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu koja definira koniku:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0 \quad (4.2)$$

Konika može degenerirati u dva pravca kada se jednadžba

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

može faktorizirati na dvije linearne komponente

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = (\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z) \cdot (\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z).$$

Konika se tako raspala u dvije nedegenerirane krivulje takve da je njihov zbroj redova jednak redu degenerirane krivulje. Drugim riječima, konika se raspala na dva pravca od kojih je svaki određen linearnom jednadžbom jednog od faktora. Pri tome moramo paziti na to da ova dva faktora mogu biti jednaka odnosno da se pravci mogu podudarati.

U projektivnoj ravnini postoji samo jedna vrsta konika, a podjela na elipse, parabole i hiperbole moguća je samo ako promatramo presjek konike i beskonačno dalekog pravca  $l_\infty$ . Ako sjecište ne postoji, odnosno konika ne sadrži točke u beskonačnosti, radi se o elipsi, ako postoje dva sjecišta konika je hiperbola (ima dvije točke u beskonačnosti koje odgovaraju dvjema asimptotama) i ako postoji samo jedno sjecište, odnosno konika sadrži jednu točku u beskonačnosti, onda je parabola [7].

Pet točaka projektivne ravnine određuje jedinstvenu koniku koja prolazi kroz svaku od njih, a kako bi provjerili leži li nekih 6 točaka na istoj konici možemo se koristiti sljedećim teoremom:

**Teorem 4.1.2.** *Šest točaka  $A, B, C, X, Y, Z$  pripadaju istoj konici ako i samo ako među determinantama homogenih koordinata vrijedi sljedeće:*

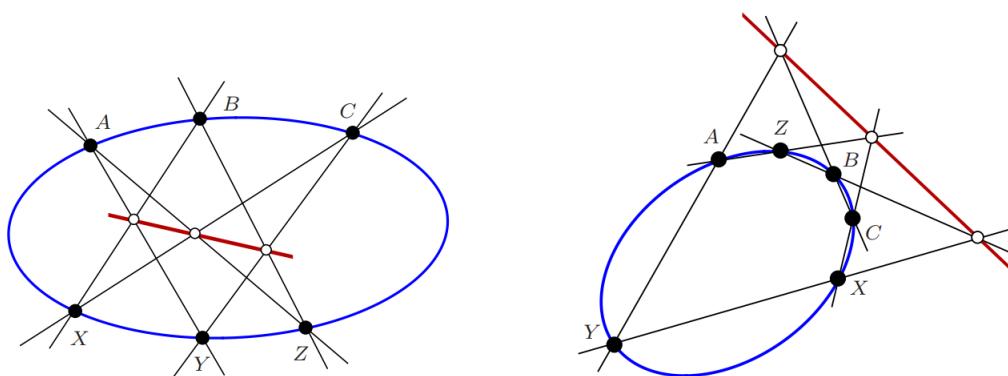
$$[ABC][AYZ][XBZ][XYC] = [XYZ][XBC][AYC][ABZ].$$

Možemo uočiti simetričnost ove jednakosti jer svaka zagrada s lijeve strane jednakosti ima svoj komplement (zagradu koja se sastoji od preostala tri slova) s druge strane jednakosti. Dokaz ovog teorema moguće je pronaći u [7], a u ovom radu koristiti ćemo tu karakterizaciju kako bi dokazali prvu varijaciju Papusovog teorema.

## 4.2 Varijacija 1: Pascalov teorem

Prva od tri varijacije Papusovog teorema koju ćemo iskazati i dokazati u ovome radu je teorem francuskog matematičara Blaisea Pascala poznatiji pod nazivom Pascalov teorem.

**Teorem 4.2.1** (Varijacija 1: Pascalov teorem). *Neka su  $A, B, C, X, Y, Z$  šest točaka na konici. Ako pravci  $AY, BZ, CX$  sijeku pravce  $BX, CY, AZ$  redom, onda su tri točke sjecišta kolinearne.*



Slika 4.1: Primjeri Pascalovog teorema [7]

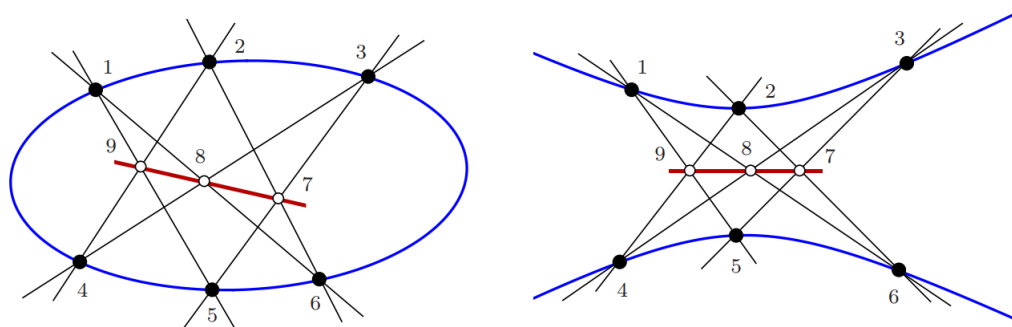
Primjere Pascalovog teorema možemo vidjeti na slici 4.1. Ovaj teorem Pascal je otkrio kao šesnaestogodišnjak 1640. godine i, iako je otkriven 1300 godina nakon Papusovog teorema, on je njegova očita generalizacija. Primijenimo li Pascalov teorem na degeneriranu koniku koja se sastoji samo od dva pravca dobivamo upravo Papusov teorem.

Pascalov dokaz ovog teorema vidio je i pohvalio G.W.Leibniz kada je posjetio Pariz, no kasnije je bio izgubljen. Sve što je ostalo od njegovog rada u vezi teorema uključujući njegov iskaz kratak je *Essay pour les coniques* (1640.) [2]. Pri dokazu teorema 4.2.1 koristit ćemo se sličnim zaključcima o poništavanju determinanti koristeći Grassmann-Plücker relacije koje smo koristili i u četvrtom dokazu danom u trećem poglavlju te teoremom 4.1.2 [7]. Na slici 4.2 nalaze se dva primjera Pascalovog teorema s oznakama koje ćemo koristiti u dokazu. Na prvom primjeru konika je elipsa dok je u drugom konika hiperbola.

*Dokaz.* Pretpostavimo da se nikoje dvije točke i nikoja dva pravca teorema ne podudaraju. Označavanje koje ćemo koristiti u dokazu prikazano je na slici 4.2.

Točke 1, 2, 3, 4, 5 i 6 leže na konici pa prema teoremu 4.1.2 vrijedi

$$[125][136][426][435] = +[436][425][135][126]$$



Slika 4.2: Primjer Pascalovog teorema s elipsom (lijevo) i hiperbolom (desno) [7]

odnosno primijenimo li svojstvo 3.2 determinanti

$$[125][136][246][345] = +[126][135][245][346]. \quad (4.3)$$

Šest pretpostavljenih kolinearnosti teorema zajedno sa odgovarajućim Grassmann-Plücker relacijama povlači sljedećih šest jednakosti (uz primjenu svojstva determinanti 3.2):

$$\begin{aligned} [159] = 0 \wedge [597][512] - [591][572] + [592][571] = 0 &\implies [157][259] = -[125][597] \\ [168] = 0 \wedge [612][683] - [618][623] + [613][628] = 0 &\implies [126][368] = +[136][268] \\ [249] = 0 \wedge [245][297] - [249][257] + [247][259] = 0 &\implies [245][297] = -[247][259] \\ [267] = 0 \wedge [246][287] - [248][267] + [247][268] = 0 &\implies [247][268] = -[246][287] \\ [348] = 0 \wedge [346][358] - [345][368] + [348][365] = 0 &\implies [346][358] = +[345][368] \\ [357] = 0 \wedge [587][513] - [581][573] + [583][571] = 0 &\implies [135][587] = -[157][358] \end{aligned}$$

Pomnožimo li prethodno dobivenim jednakostima (uključujući i jednakost 4.3) sve izraze s lijeve strane i sve izraze s desne strane te poništimo sve determinante koje se pojavljuju na obje strane preostaje nam izraz

$$[287][597] = +[297][587].$$

Uzmemo li tu jednakost zajedno sa sljedećom Grassmann-Plücker relacijom

$$[728][759] - [725][789] + [729][785] = 0$$

odnosno sa

$$[287][597] - [257][789] - [297][587] = 0$$

dobivamo

$$[257][789] = 0.$$

Uz pretpostavku  $[257] \neq 0$  prethodna jednakost povlači kolinearnost trojke (7, 8, 9).  $\square$

Pascalov teorem često možemo pronaći i u sljedećoj verziji:

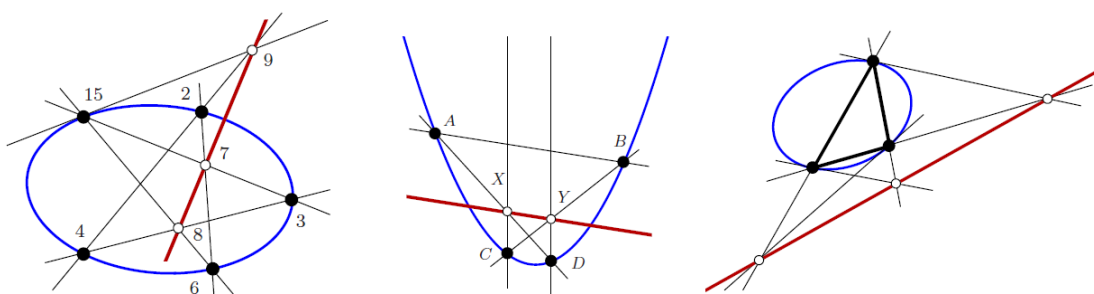
**Teorem 4.2.2.** *Ako je šesterovrh upisan u koniku u projektivnoj ravnini, onda su sjecišta triju parova nasuprotnih stranica kolinearne točke.*

Pošaljemo li pravac na kojem leže tri kolinearne točke u beskonačnost dobivamo zanimljivu euklidsku verziju ovog teorema koja glasi:

**Teorem 4.2.3.** *Ako je šesterokut upisan u koniku i ako su dva para suprotnih stranica paralelna, onda je i treći par paralelan.*

Iz Pascalovog teorema možemo dobiti i ograničene slučajeve koji uključuju tangente. Pretpostavimo da konika ima fiksnu poziciju i neka se neke dvije točke Pascalovog teorema povezane spojnicom kontinuirano približavaju jedna drugoj dok se ne podudare. Spojnica tih točaka tada postaje tangenta na koniku u točki podudaranja i tako dobivamo ograničen slučaj ovoga teorema [7].

Na slici 4.3 prikazane su tri degenerirane verzije Pascalovog teorema pri čemu je prva najmanje degenerirani slučaj, dok je posljednja slučaj koji je najviše degeneriran.



Slika 4.3: Tri degenerirane verzije Pascalovog teorema [7]

U prvom primjeru slike 4.3 označavanje je jednako onome na slici 4.2 pri čemu nova oznaka 15 označava da se točke 1 i 5 podudaraju. Tada spojnica točaka 1 i 5 postaje tangenta u točki 15. Protumačimo li ovu konstrukciju u obrnutom smjeru dobit ćemo tvrdnju koja je jedna od glavnih primjena ovoga teorema, a bila je poznata još Pascalu. Ako su dani konika  $C$  i na njoj točka 15 moguće je konstruirati tangentu u 15 tako da odaberemo proizvoljne točke 2, 3, 4, 6 na  $C$ , konstruiramo spojnice i sjecišta dana kao na slici i dobijemo točku 9, koja je druga točka tražene tangente.

Drugi primjer na slici 4.3 prikaz je situacije kao i u prvom primjeru, ali se ovdje točka 15 nalazi u beskonačnosti što povlači da se i odgovarajuća tangenta nalazi u beskonačnosti.

Konika tako postaje parabola, a druga dva pravca koja prolaze točkom 15 postaju paralelna s osi simetrije te parabole. Teorem tada glasi:

**Teorem 4.2.4.** *Neka su  $A, B, C, D$  točke na paraboli. Ako dva pravca kroz  $C$  i  $D$ , koja su paralelna osi simetrije te parabole, presječemo s  $AD$  i  $BC$  redom, tada je spojnica ta dva sjecišta paralelna sa spojnicom točaka  $A$  i  $B$ .*

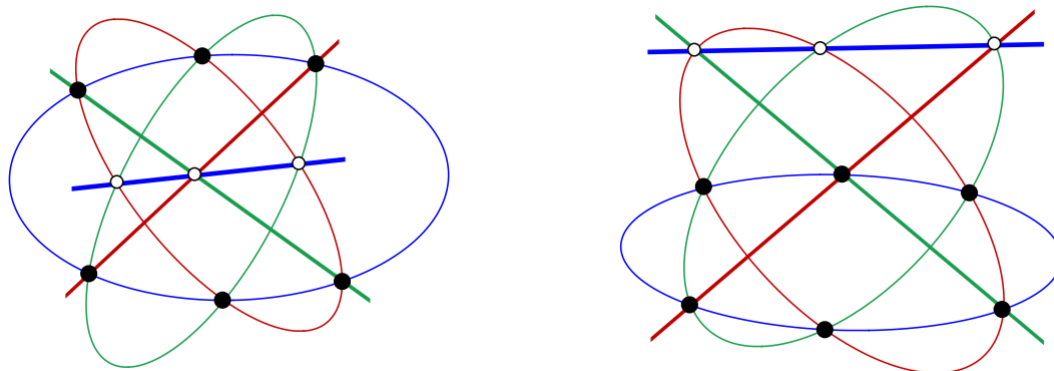
Posljednji primjer na slici 4.3 ima samo tri točke pa je primjer najveće degeneriranosti od svih na slici prikazanih:

**Teorem 4.2.5.** *Neka je trokut upisan u koniku. Ako tangente povučene u vrhovima trokuta presječemo sa nasuprotnim stranicama trokuta dobivamo tri sjecišta koja su kolinearna.*

### 4.3 Varijacija 2: Chayley-Bacharach-Chasles teorem

Utvdili smo da Pascalov teorem možemo gledati kao generalizaciju Papusovog teorema, ali isto tako Pascalov teorem možemo smatrati izvedenim iz Papusovog teorema ako dva pravca koja nemaju zajedničku točku konfiguracije smatramo (degeneriranom) konikom. Primijenimo li isti postupak još dva puta dobit ćemo teorem sa tri konike i tri pravca.

Na slici 4.4 vidimo dva načina na koja se tri para pravaca Papusovog teorema mogu spojiti u tri konike. Razlika je lako uočljiva jer se u prvom primjeru sva tri pravca sijeku, dok se u drugom sijeku samo dva, ali za obje dobivene konfiguracije teorem i dalje vrijedi.

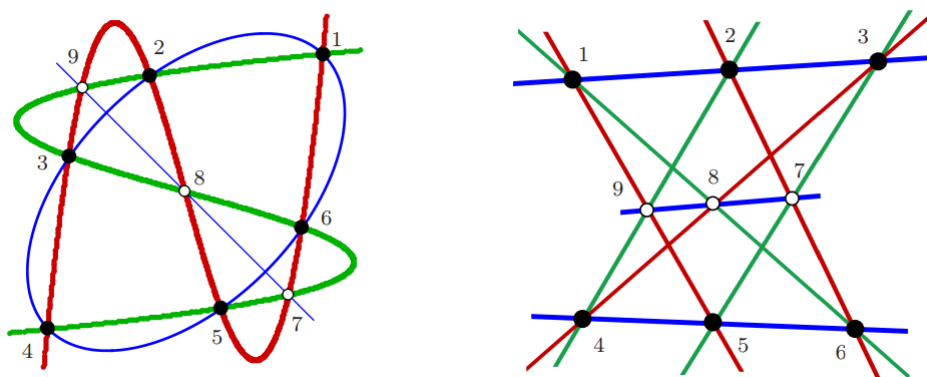


Slika 4.4: Generalizacije Pascalovog teorema [7]

Oba ova teorema posljedice su teorema poznatijeg pod nazivom Chayley-Bacharach-Chasles teorem. Taj teorem druga je varijacija Papusovog teorema u ovome radu, a nazvan je po trojici matematičara koji su ga otkrili. Prva osoba koja ga je otkrila u njejoj

općenitijoj verziji bio je francuski matematičar Michel Floréal Chasles. Iako je Chasles vjerovatno prvi otkrio ovaj teorem on se pripisuje dvojici matematičara Arthuru Cayleyu i Isaaku Bacharachu koji su slične rezultate objavili nakon Chaslesa [7].

**Teorem 4.3.1** (Varijacija 2: Cayley-Bacharach-Chasles teorem). *Neka su  $A$  i  $B$  dvije krivulje trećeg reda koje se sijeku u točno devet različitih točaka. Ako je šest od tih devet točaka na konici, onda su preostale tri točke kolinearne.*



Slika 4.5: Primjer Cayley-Bacharach-Chasles teorema (lijevo) i Papusovog teorema kao njegove direktne posljedice (desno) [7]

Na slici 4.5 lijevo možemo vidjeti primjer teorema 4.3.1. Dokaz ovog teorema temelji se na Bezoutovom teoremu pomoću kojega možemo odrediti broj sjecišta dviju algebarskih krivulja. Prije samog dokaza teorema 4.3.1 definirat ćemo algebarsku krivulju i dati iskaz Bezoutovog teorema kojim ćemo se koristiti pri dokazu.

**Definicija 4.3.2.** *Algebarska krivulja reda  $d$  u projektivnoj ravnini skup je nultočaka homogenog polinoma stupnja  $d$  [7].*

**Teorem 4.3.3** (Bezoutov teorem). *Ako se algebarska krivulja stupnja  $n$  i algebarska krivulja stupnja  $m$  sijeku, onda je broj sjecišta ili konačan i nije veći od  $n \cdot m$  ili se krivulje sijeku u beskonačno mnogo točaka i dijele komponentu [7].*

Nakon iskaza ovog teorema prelazimo na dokaz Cayley-Bacharach-Chasles teorema u kojem Bezoutov teorem ima ključnu ulogu.



*Dokaz.* Neka su  $A$  i  $B$  dvije krivulje i neka su  $p_A(x, y, z)$  i  $p_B(x, y, z)$  njihovi odgovarajući homogeni polinomi trećeg stupnja.

Prema pretpostavci teorema krivulje  $A$  i  $B$  sijeku se u točno devet točaka. Nazovimo ih  $1, \dots, 9$ . Pretpostavimo da su točke  $1, \dots, 6$  na konici  $C$  sa odgovarajućim polinomom  $p_C$  i dokazat ćemo da su preostale tri točke, odnosno točke  $7, 8$  i  $9$ , kolinearne.

Promotrimo linearnu kombinaciju  $p_\mu = p_A + \mu \cdot p_B$  dva polinoma za neki realni parametar  $\mu$ . Polinomi  $p_A$  i  $p_B$  trećeg su stupnja pa je polinom  $p_\mu$  stupnja  $\leq 3$ . Kako je svaka od točaka  $1, \dots, 9$  nultočka i od  $p_A$  i od  $p_B$  to povlači da je svaka od tih točaka nultočka i od linearne kombinacije ta dva polinoma. Dakle krivulja određena polinomom  $p_\mu$  prolazi kroz svi devet točaka  $1, \dots, 9$ . Promotrimo sada dodatnu točku  $q$  na konici  $C$  različitu od točaka  $1, \dots, 6$ . Postoji parametar  $\mu$  takav da  $p_\mu$  također prolazi kroz  $q$ , a dobivamo ga riješavanjem linearne jednadžbe  $p_A(q) + \mu \cdot p_B(q) = 0$ . Promotrimo li sada krivulju  $p_\mu$  sa tako dobivenim parametrom  $\mu$  ona prolazi kroz točke  $1, \dots, 6$ , ali i kroz točku  $q$ . Zaključujemo da  $p_\mu$  s konikom  $C$  ima sedam zajedničkih točaka.

Prema Bezoutovom teorem ako se konika i krivulja trećeg reda sijeku u sedam točaka, onda je krivulja trećeg reda degenerirana odnosno unija je te konike i pravca. Dakle  $p_\mu$  tada mora imati  $C$  kao jednu komponentu i vrijedi  $p_\mu = p_C \cdot L$  pri čemu je  $L$  polinom prvog stupnja.

To povlači da se preostale tri točke  $7, 8, 9$  moraju nalaziti na pravcu određenom linearnom jednadžbom  $L$  jer se zbog pretpostavke teorema ne mogu nalaziti na konici  $C$ . Kada bi se te točke nalazile na konici  $C$  to bi značilo da krivulje  $A$  i  $B$  imaju koniku  $C$  kao zajedničku komponentu odnosno da se sijeku u beskonačno mnogo točaka što je suprotno pretpostavci teorema.  $\square$

Posebnost ovoga teorema njegova je vidljiva veza s prethodno iskazanim Pascalovim teoremom kao i s glavnim teoremom ovoga rada, Papusovim teoremom.

Generalizacije Pascalovog teorema prikazane na slici 4.4 neposredne su specijalizacije Cayley-Bacharach-Chasles teorema. Svaka od dvije krivulje trećeg reda može se rastaviti na krivulju drugog reda (koniku) i krivulju prvog reda (pravac). Rastav lako uočavamo promatrajući boje na slici 4.4 i na lijevoj slici 4.5 na kojima vidimo da crvena konika i crveni pravac čine jednu krivulju trećeg reda, a zelena konika i zeleni pravac čine drugu krivulju trećeg reda. Ostatak je direktna primjena teorema.

Papusov teorem smatramo direktnom posljedicom Cayley-Bacharach-Chasles teorema. Pogledamo li prikaze oba teorema na slici 4.5 istim je bojama jasno prikazan rastav u kojem tri zelena pravca Papusovog teorema promatramo kao jednu krivulju trećeg reda, a tri crvena pravca kao drugu krivulju trećeg reda.

## Poglavlje 5

# Kompleksni brojevi i kružnice

U ovom poglavlju proširit ćemo zaključke iz prethodnog poglavlja i reći nešto više o vezi kružnice i kompleksnih brojeva koja povezuje euklidsku i projektivnu geometriju. Tu bitnu vezu euklidske i projektivne geometrije za kraj ćemo primijeniti i na posljednoj varijaciji Pappusovog teorema u ovome radu.

### 5.1 Veza kružnice i kompleksnih brojeva

U dosadašnjim poglavljima promatrali smo objekte u realnom projektivnom prostoru kao najprikladnijem za proučavanje incidencije pravaca i točaka, konika te dvoomjera. No njezova mana je nemogućnost promatranja kružnica, kutova ili udaljenosti. Kao što smo euklidsku ravninu proširili dodavanjem pravca u beskonačnosti i dobili realnu projektivnu ravninu, na sličan način euklidsku ravninu možemo proširiti dodavanjem točke u beskonačnosti  $\infty$  i tako dobiti najjednostavniji slučaj kompleksnog projektivnog prostora: kompleksno projektivni pravac. Tako dobivamo primjer projektivnog prostora pogodnog za proučavanje kružnica kao i za proučavanje koncikličnosti i kutova. U ovom proširenju euklidske ravnine točkom u beskonačnosti pretpostavljamo da su pravci kružnice koje sadrže upravo tu točku odnosno pravce smatramo kružnicama beskonačnog radijusa.

Sada ćemo vidjeti u kakvoj su vezi kružnice i kompleksni brojevi. Kako bi promatrali kružnice koje su objekti euklidske geometrije ponovno moramo odrediti položaj pravca u beskonačnosti  $l_\infty$ . Homogene koordinate možemo promatrati kao smještanje euklidske ravnine u  $\mathbb{R}^3$  na nekoj afinoj hiperravnini. Izborom afine hiperravnine  $\{(x, y, z) | z = 1\}$  točku sa euklidskim koordinatama  $(x, y)$  možemo prikazati homogenim koordinatama  $(x, y, 1)$  odnosno sa  $\lambda(x, y, 1)$ , za  $\lambda \neq 0$ . Tada su točke sa koordinatama  $(x, y, 0)$  točke u beskonačnosti.

Promotrimo sada kružnicu kao posebni oblik konike i odredimo njezinu odgovarajuću kvadratnu jednadžbu.

U euklidskoj geometriji jednadžba kružnice zadana sa središtem  $(p, q)$  i radijusom  $r$  glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Proširimo li ju i interpretiramo u homogenim koordinatama sa  $z = 1$  dobivamo

$$\begin{aligned} & (x - p \cdot z)^2 + (y - q \cdot z)^2 - r^2 \cdot z^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2pxz + p^2z^2 + y^2 - 2qyz + q^2z^2 - r^2z^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2pxz - 2qyz + (p^2 + q^2 - r^2)z^2 = 0 \end{aligned}$$

Za bolje izabrane parametre  $a, b, c$  posljednja jednadžba upravo predstavlja posebnu koniku kojoj su koeficijenti od  $x^2$  i  $y^2$  jednaki, a koeficijent od  $xy$  jednak je nuli i dobivamo:

$$x^2 + y^2 + a \cdot x \cdot z + b \cdot y \cdot z + c \cdot z^2 = 0.$$

Iz prethodnog poglavlja znamo da realna sjecišta s pravcem u beskonačnosti imaju samo hiperbola i parabola. Zaključujemo da želimo li presjeći kružnicu s pravcem u beskonačnosti odnosno želimo li pronaći rješenja prethodne jednadžbe za  $z = 0$  dobiti ćemo kompleksna rješenja. Tako dolazimo do zanimljive veze kružnica i kompleksnih brojeva.

Pronađimo sada sjecišta kružnice i pravca u beskonačnosti. Za  $z = 0$  jednadžba kružnice degenerira u

$$x^2 + y^2 = 0.$$

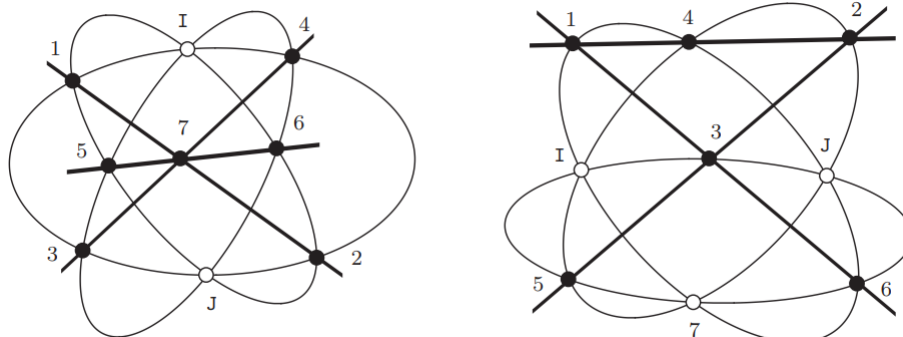
Rješenja ove jednadžbe do na skalar su:

$$\begin{aligned} I &= (1, i, 0), \\ J &= (1, -i, 0). \end{aligned}$$

Točke  $I$  i  $J$  kompleksne su točke kojima je koordinata  $z$  jednaka nuli što povlači da se radi o točkama na pravcu u beskonačnosti. Kako su ove dvije točke različite možemo reći da  $I$  i  $J$  određuju pravac  $l_\infty$ .

Točke  $I$  i  $J$  dvije su posebne točke čijim uvođenjem dobivamo mogućnost izraziti euklidska svojstva u projektivnoj geometriji odnosno sva euklidska svojstva možemo izraziti kao projektivno invarijante izraze u kojima ove dvije točke imaju posebnu ulogu.

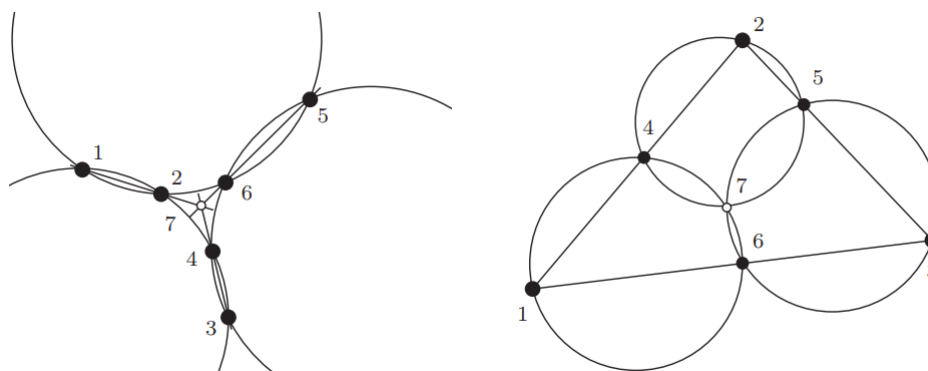
Kako smo do ovih dviju točaka došli rješavanjem opće jednadžbe kružnice uočavamo da one ne ovise o posebnom izboru određene kružnice. Dakle zaključujemo da sve kružnice prolaze kroz točke  $I$  i  $J$ , a svaka konika koja prolazi kroz točke  $I$  i  $J$  je kružnica. Ova tvrdnja je važna veza euklidske i projektivne geometrije koja nam omogućava da odnose među kružnicama izrazimo kao relacije incidencije konika kojima pripadaju točke  $I$  i  $J$ . Zbog ove veze svaki se euklidski teorem o incidencijama može izraziti kao projektivni teorem u kojem dvije točke imaju ulogu točaka  $I$  i  $J$  [7].



Slika 5.1: Generalizacije Pascalovog teorema na kojima su dvije točke sjecišta triju konika točke  $I$  i  $J$  [7]

Sada ćemo vidjeti kako to možemo primijeniti kada je u pitanju Pappusov teorem. Pro-  
motrimo na slici 5.1 prikaze dviju generalizacija već prethodno viđenih na slici 4.4.

Sjecišta triju konika na ovim slikama označena su bijelim točkama. Pretpostavit ćemo da su na svakoj od slika dvije od tih točkama u kojima se konike sijeku upravo  $I$  i  $J$ , a sve ostale točke ostaju na svojim položajima. Tvrdnja da je konika koja prolazi točkama  $I$  i  $J$  kružnica povlači da konike našeg teorema postaju kružnice. Ovime dobivamo novu interpretaciju dva teorema kao euklidskih teorema o sedam točaka, tri pravca i tri kružnice čije prikaze možemo vidjeti na slici 5.2.



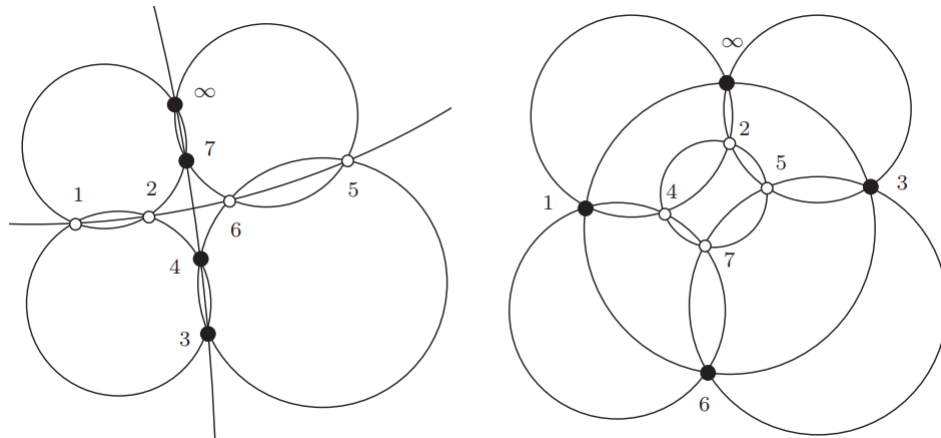
Slika 5.2: Euklidski teoremi o sedam točaka, tri pravca i tri kružnice [7]

Lijevi prikaz na slici 5.2 tada može odgovarati teoremu iskazanom na sljedeći način:

**Teorem 5.1.1.** *Neka su dane tri kružnice koje se međusobno sijeku u dvije točke. Tri pravca određena sjecištima svakog para kružnica tada se sijeku u jednoj točki.*

Točka sjecišta triju pravaca ovoga teorema odgovara točki označenoj znamenkom 7 polaznog teorema.

Proširivanje euklidske ravnine točkom  $\infty$  u beskonačnosti i pretpostavka da su pravci kružnice kojima pripada ta točka omogućilo nam je da više ne moramo razlikovati pravce i kružnice. Pravci su jednostavno kružnice beskonačnog radijusa pa naša dva teorema tada možemo iskazati kao teoreme o šest kružnica i osam točaka pri čemu beskonačnu točku  $\infty$  promatramo kao običnu točku. Njihove prikaze u kojima je točka  $\infty$  smještena u euklidskoj ravnini vidimo na slici 5.3.



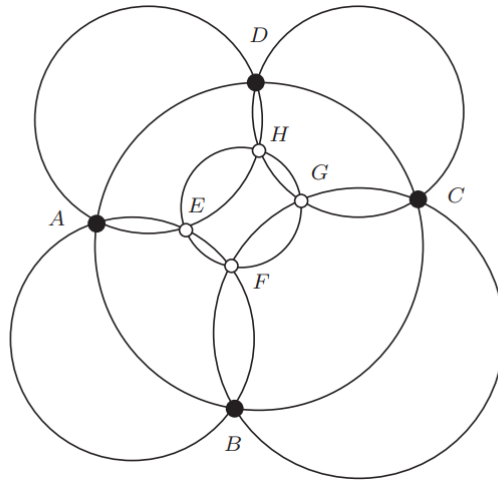
Slika 5.3: Teoremi u kojima je točka  $\infty$  u euklidskoj ravnini [7]

Desni prikaz slike 5.3 posebno nam je zanimljiv jer odgovara teoremu poznatijem kao Miquelov teorem koji je treća varijacija Papusovog teorema u ovome radu.

## 5.2 Varijacija 3: Miquelov teorem

Treća varijacija Papusovog teorema u ovome radu teorem je francuskog matematičara Augustea Miquela poznatiji kao Miquelov teorem o šest kružnica čiji prikaz možemo vidjeti na slici 5.4, a iskazati na sljedeći način:

**Teorem 5.2.1** (Varijacija 3: Miquelov teorem). *Neka su  $A, B, C, D$  četiri točke na kružnici. Neka su  $C_1, C_2, C_3, C_4$  četiri kružnice koje prolaze redom kroz parove točaka  $(A, B)$ ,  $(B, C)$ ,  $(C, D)$  i  $(D, A)$ . Tada su četiri sjecišta kružnica  $C_i$  i  $C_{i+1}$  za  $i = 1, 2, 3, 4$  također konciklična.*



Slika 5.4: Miquelov teorem [7]

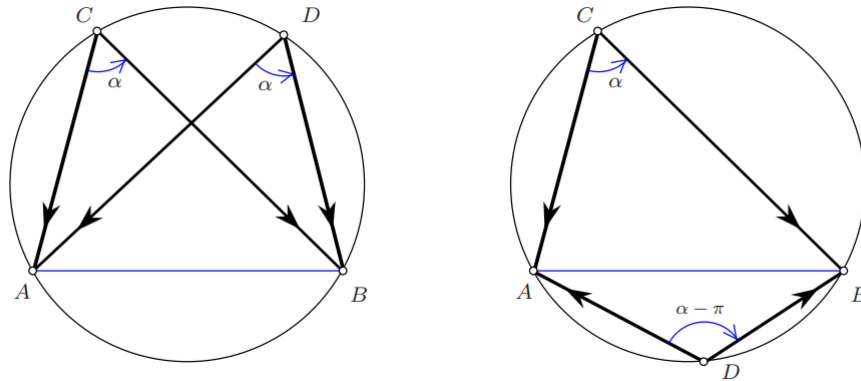
Ovaj teorem moguće je dokazati ako znamo kada su četiri točke konciklične. Da bi došli do karakterizacije o koncikličnosti točaka promotrit ćemo označene kutove na slici 5.5.

Na slici 5.5 nalaze se dvije kružnice na kojima leže četiri točke  $A, B, C, D$ . Na lijevoj kružnici točke  $C$  i  $D$  nalaze se s iste strane tetive  $AB$ , dok se na desnoj kružnici one nalaze s različite strane tetive  $AB$ .

Uočavamo da su primjeri na slici slučajevi teorema o obodnom i središnjem kutu u kojima se tetiva  $AB$  iz točke  $C$  vidi pod kutom  $\angle ACB$ , a iz točke  $D$  pod kutom  $\angle ADB$ .

**Teorem 5.2.2.** *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom. Drugim riječima, obodni kut je jednak polovici pripadnog središnjeg kuta [6].*

Prema ovom su teoremu obodni kutovi nad istim kružnim lukom sukladni, a obodni kutovi nad različitim lukovima iste kružnice s istom tetivom suplementarni. Dakle kutovi  $\angle ACB$  i  $\angle ADB$  u prvom su primjeru sukladni, a u drugom primjeru suplementarni i njihov zbroj jednak je  $\pi$ . Kutovi na slici 5.5 označeni su kao orijentirani pa komplementarni kut moramo računati s negativnim predznakom. U oba slučaja razlika kutova  $\angle ACB$  i  $\angle ADB$



Slika 5.5: Primjeri teorema o obodnom i središnjem kutu [7]

višekratnik je od  $\pi$ . Ako su točke  $C$  i  $D$  s iste strane tetive kutovi su sukladni i razlika je jednaka nuli, a ako su s različitih strana tetive razlika je  $\pi$  ili  $-\pi$  ovisno o poretku [7]. Kao zaključak dobivamo sljedeću karakterizaciju o koncikličnosti četiri točke:

**Teorem 5.2.3.** *Neka su četiri točke  $A, B, C, D$  na kružnici smještenoj u kompleksnoj ravnini. Razlika kutova  $\angle ACB - \angle ADB$  višekratnik je od  $\pi$  [7].*

Primijenimo li ovaj teorem na šest kružnica Miquelovog teorema lako ćemo dokazati teorem. No u ovom radu ćemo ipak dokazati teorem uz pomoć karakterizacije koju dobijemo izrazimo li odnose kutova pomoću kompleksnih brojeva [7].

Pretpostavimo da je svih osam točaka Miquelovog teorema konačno i neka je njegova slika smještena u ravninu kompleksnih brojeva. Neka su točke  $A, B, C, D$  slike 5.5 kompleksni brojevi. Tada na primjer  $A - C$  čini kompleksni broj koji pokazuje u smjeru od  $C$  prema  $A$ .

Kut  $\angle ACB$  jednak je argumentu (kutu u odnosu na realnu os) kompleksnog broja

$$\frac{(A - C)}{(B - C)},$$

a kut  $\angle ADB$  jednak je argumentu kompleksnog broja

$$\frac{(A - D)}{(B - D)}.$$

Podijelimo li ova dva broja dobiti ćemo razliku ta dva kuta

$$\frac{\frac{(A - C)}{(B - C)}}{\frac{(A - D)}{(B - D)}}.$$

Kako je razlika dva kuta višekratnik od  $\pi$  ovaj broj mora biti realan. Uočavamo da je dobiveni količnik jednak izrazu

$$\frac{(A - C)(B - D)}{(B - C)(A - D)}$$

kojeg nazivamo dvoomjer. Više o dvoomjerima u projektivnoj geometriji moguće je pročitati u [5] i [7].

Dakle, dobivamo sljedeći teorem o koncikličnosti četiri točke na kružnici:

**Teorem 5.2.4.** Četiri točke  $A, B, C, D$  u kompleksnoj ravnini konciklične su ako i samo ako je

$$\frac{(A - C)(B - D)}{(B - C)(A - D)}$$

realan broj.

Sada uz pomoć teorema 5.2.4 možemo jednostavno dokazati Miquelov teorem [7].

*Dokaz.* Pretpostavimo da su četvorke točaka

$$(A, B, C, D), (A, B, E, F), (B, C, F, G), (C, D, G, H), (D, A, H, E)$$

konciklične. Kako bi jednostavnije pratili dokaz možemo promotriti sliku 5.4.

Koncikličnost ovih četvorki prema teoremu 5.2.4 povlači da su sljedeći dvoomjeri realni brojevi:

$$\frac{(A - B)(C - D)}{(C - B)(A - D)}, \frac{(F - B)(A - E)}{(A - B)(F - E)}, \frac{(C - B)(F - G)}{(F - B)(C - G)}, \frac{(H - D)(C - G)}{(C - D)(H - G)}, \frac{(A - D)(H - E)}{(H - D)(A - E)}.$$

Ako pomnožimo sve prethodno dobivene dvoomjere i skratimo sve faktore koji se pojavljuju i u brojniku i u nazivniku preostaje nam sljedeći izraz:

$$\frac{(F - G)(H - E)}{(H - G)(F - E)}.$$

Kako je ovaj izraz rezultat množenja realnih brojeva slijedi da je i on sam realan broj. Prema teoremu 5.2.4 tvrdnja da je ovaj izraz realan broj ekvivalenta je tvrdnji da je četvorka  $(E, F, G, H)$  konciklična. Dakle, točke  $E, F, G, H$  leže na istoj kružnici i time je teorem dokazan.  $\square$



## Poglavlje 6

# Dokaz Pappusovog teorema uz pomoć računala

Posljednji dokaz u ovom radu dokaz je Pappusovog teorema u njegovoj punoj općenitosti čiji iskaz se nalazi u prvom poglavlju (teorem 1.2.1). Na prvi pogled ovaj dokaz se možda čini jednostavan i lako izvediv, ali njegova provedba zapravo zahtjeva korištenje nekog računalnog programa. Dokaz će se temeljit na načinu na koji možemo računati sjecišta pravaca i spojnice točaka u projektivnoj geometriji.

### 6.1 Spojnice točaka i sjecišta pravaca

Uvodeći koordinatizaciju proširene euklidske ravnine pomoću homogenih koordinata u trećem poglavlju utvrdili smo da se svaka točka  $(x_0, x_1, x_2)$  može identificirati s pravcem kroz ishodište i tu točku, a svaki pravac  $[u_0, u_1, u_2]$  s ravninom određenom tim pravcem i točkom ishodišta.

Incidenciju točke i pravca u projektivnoj ravnini dakle možemo promatrati kao ortogonalnost vektora smjera pravca i vektora normalne ravnine. Kako su dva vektora ortogonalna ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak nuli, dovoljno je izračunati njihov skalarni produkt [5]. Točka  $(x_0, x_1, x_2)$  i pravac  $[u_0, u_1, u_2]$  incidentni su ako i samo ako vrijedi

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0. \quad (6.1)$$

Sada ćemo pokazati kako možemo izračunati spojnice točaka i sjecište pravaca u projektivnoj ravnini.

Točku  $A$  koja je dana koordinatnom trojkom  $(a_0, a_1, a_2)$  označavat ćemo sa  $A(a_0, a_1, a_2)$ , a pravac  $p$  zadan koordinatnom trojkom  $(p_0, p_1, p_2)$  sa  $p(p_0, p_1, p_2)$ .

Neka su  $A(a_0, a_1, a_2)$  i  $B(b_0, b_1, b_2)$  dvije različite točke naše projektivne ravnine. Koordinate pravca  $[u_0, u_1, u_2]$  koji je incidentan s obje te točke moraju prema 6.1, zadovolja-

vati jednadžbe

$$\begin{aligned} u_0 a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 &= 0 \\ u_0 b_0 + u_1 b_1 + u_2 b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Taj sustav od dvije homogene jednadžbe sa tri nepoznanice ima netrivialno rješenje

$$u_0 : u_1 : u_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

i svaka trojka oblika  $\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2$  također je rješenje tog sustava. Međutim, trojke  $[u_0, u_1, u_2]$  i  $[\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2]$  (obje različite od  $(0, 0, 0)$ ) pripadaju istoj klasi pa obje označavaju koordinate istog pravca, spojnice točaka  $A$  i  $B$ . Kao predstavnika te klase možemo uzeti

$$[u_0, u_1, u_2] = \left[ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \right]. \quad (6.2)$$

Na temelju 6.1 i 6.2 zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem

**Teorem 6.1.1.** *Jednadžbu spojnice dviju različitih točaka  $A (a_0, a_1, a_2)$  i  $B (b_0, b_1, b_2)$  možemo pisati u obliku*

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.3)$$

Dakle spojnica dviju točaka može se računati pomoću vektorskog produkta. Kako svaka točka  $(x_0, x_1, x_2)$  koja leži na spojnici točaka  $A$  i  $B$  mora zadovoljavati 6.3 kao posljedicu ovoga teorema dobivamo uvjet kolinearnosti triju točaka [5].

**Korolar 6.1.2.** *Tri različite točke  $A (a_0, a_1, a_2)$ ,  $B (b_0, b_1, b_2)$  i  $C (c_0, c_1, c_2)$  projektivne ravnine kolinearne su ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako su točke i pravci u projektivnoj ravnini međusobno dualni elementi dobivamo slične zaključke [5]:

jednadžba sjecišta dvaju različitih pravaca  $p [p_0, p_1, p_2]$  i  $q [q_0, q_1, q_2]$  može se pisati u obliku

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

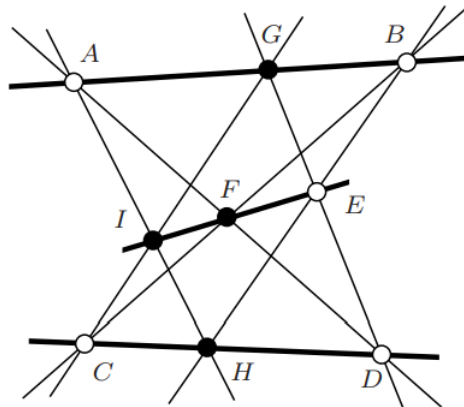
Dakle, sjecište dva pravca također se može izraziti pomoću vektorskog produkta.

Tri pravca  $p [p_0, p_1, p_2]$ ,  $q [q_0, q_1, q_2]$  i  $r [r_0, r_1, r_2]$  konkurentna su ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

## 6.2 Dokaz - *Mathematica*

Za ovaj dokaz točke Papusovog teorema ponovno ćemo izraziti u homogenim koordinatama i uzet ćemo u obzir da se svaka spojnica točaka i svako sjecište pravaca u projektivnoj ravnini mogu izračunati pomoću vektorskog produkta te da se kolinearnost točaka može provjeriti izjednačimo li determinantu koordinata triju točaka s nulom [7]. Zaključujemo da uz ove dvije tvrdnje Papusov teorem možemo konstruirati koristeći samo vektorske produkte, a konačnu kolinearnost točaka provjeriti pomoću determinante njihovih koordinata.



Slika 6.1: Konstrukcija konfiguracije Papusovog teorema [7]

*Dokaz.* Konstruirat ćemo Papusovu konfiguraciju tako što ćemo određene pravce (koje promatramo kao spojnice dviju točaka) i određene točke (koje promatramo kao sjecišta dvaju pravaca) računati pomoću vektorskog produkta. Na slici 6.1 vidimo prikaz te konstrukcije.

Neka su  $A, B, C, D, E$  pet proizvoljnih točaka, a koordinate preostale četiri točke konstrukcije, odnosno koordinate točaka  $F, G, H, I$ , izračunat ćemo pomoću vektorskog produkta na sljedeći način.

Promotrimo li sliku 6.1 vidimo da je točka  $F$  sjecište pravca  $AD$  i pravca  $BC$ . Pravac  $AD$  spojnica je točaka  $A$  i  $D$  i računamo ga pomoću vektorskog produkta  $A \times D$ , a pravac  $BC$  spojnica je točaka  $B$  i  $C$  pa ga računamo pomoću vektorskog produkta  $B \times C$ . Točku  $F$ , koja je sjecište pravaca  $AD$  i  $BC$ , također možemo izračunati pomoću vektorskog produkta, pa dobivamo:

$$F = (A \times D) \times (B \times C).$$

Na analogan način dobiju se i koordinate preostalih triju točaka:

$$G = (A \times B) \times (D \times E),$$

$$H = (C \times D) \times (B \times E),$$

$$I = (A \times H) \times (C \times G).$$

Kako bi dokazali da su točke  $E, F, I$  kolinearne prema korolaru 6.1.2 dovoljno je provjeriti vrijedi li

$$\det(E, F, I) = 0.$$

```
In[3]:= cross[{a_, b_, c_}, {x_, y_, z_}] := {b * z - c * y, -a * z + c * x, a * y - b * x};
a := {a1, a2, a3};
b := {b1, b2, b3};
c := {c1, c2, c3};
d := {d1, d2, d3};
e := {e1, e2, e3};
f := cross[cross[a, d], cross[b, c]];
g := cross[cross[a, b], cross[d, e]];
h := cross[cross[c, d], cross[b, e]];
i := cross[cross[a, h], cross[c, g]];

In[13]:= Det[{e, f, i}]
Out[13]= 0
```

Slika 6.2: Dokaz Papusovog teorema u programu *Mathematica*

Ova naizgled jednostavna tvrdnja čija provjera se čini iznimno izravnom ipak zahtjeva dodatnu pomoć nekog računalnog programa. Potrebno je izračunati sve vektorske produkte i determinantu triju točaka zadanih na gore prikazan način što bi nas dovelo do konačnog izraza koji sadrži 15456 pribrojnika stupnja 15. Koristeći neki računalni program kao što je *Mathematica*, ovaj dokaz moguće je jednostavno provesti u samo nekoliko redaka. Prikaz

toga možemo vidjeti na slici 6.2 na kojoj je nula u posljednjem redu rezultat računanja determinante trojke  $(E, F, I)$ . Na slici 6.3 možemo vidjeti kako bi izgledala točka  $I$  što nam pokazuje koliko bi zapravo bilo komplicirano provesti ovaj dokaz bez računala.

```
In[17]:= i // Simplify
Out[17]:= { (a3 (c3 d1 - c1 d3) (-b2 e1 + b1 e2) + a3 (c2 d1 - c1 d2) (b3 e1 - b1 e3) +
    a1 (c3 d2 - c2 d3) (b3 e1 - b1 e3) + a1 (c3 d1 - c1 d3) (-b3 e2 + b2 e3) )
    ( (a3 b1 - a1 b3) c2 (d2 e1 - d1 e2) + (a3 b2 - a2 b3) c1 (-d2 e1 + d1 e2) +
    (-a2 b1 + a1 b2) c2 (d3 e1 - d1 e3) + (a2 b1 - a1 b2) c1 (d3 e2 - d2 e3) ) -
    (a2 (c3 d1 - c1 d3) (b2 e1 - b1 e2) + a1 (c3 d2 - c2 d3) (-b2 e1 + b1 e2) +
    a2 (-c2 d1 + c1 d2) (b3 e1 - b1 e3) + a1 (c2 d1 - c1 d2) (b3 e2 - b2 e3) )
    ( (a3 b1 - a1 b3) c3 (-d2 e1 + d1 e2) + (a3 b2 - a2 b3) c1 (d3 e1 - d1 e3) +
    (a2 b1 - a1 b2) c3 (d3 e1 - d1 e3) + (a3 b1 - a1 b3) c1 (-d3 e2 + d2 e3) ) ,
    (a3 (c3 d2 - c2 d3) (-b2 e1 + b1 e2) + a2 (c3 d2 - c2 d3) (b3 e1 - b1 e3) +
    a3 (c2 d1 - c1 d2) (b3 e2 - b2 e3) + a2 (c3 d1 - c1 d3) (-b3 e2 + b2 e3) )
    ( (a3 b1 - a1 b3) c2 (d2 e1 - d1 e2) + (a3 b2 - a2 b3) c1 (-d2 e1 + d1 e2) +
    (-a2 b1 + a1 b2) c2 (d3 e1 - d1 e3) + (a2 b1 - a1 b2) c1 (d3 e2 - d2 e3) ) +
    (a2 (c3 d1 - c1 d3) (b2 e1 - b1 e2) + a1 (c3 d2 - c2 d3) (-b2 e1 + b1 e2) +
    a2 (-c2 d1 + c1 d2) (b3 e1 - b1 e3) + a1 (c2 d1 - c1 d2) (b3 e2 - b2 e3) )
    (-c3 ( (a3 b2 - a2 b3) (-d2 e1 + d1 e2) + (a2 b1 - a1 b2) (d3 e2 - d2 e3) ) +
    c2 ( (-a3 b2 + a2 b3) (d3 e1 - d1 e3) + (a3 b1 - a1 b3) (d3 e2 - d2 e3) ) ) ,
    ( (a3 b1 - a1 b3) c3 (-d2 e1 + d1 e2) + (a3 b2 - a2 b3) c1 (d3 e1 - d1 e3) +
    (a2 b1 - a1 b2) c3 (d3 e1 - d1 e3) + (a3 b1 - a1 b3) c1 (-d3 e2 + d2 e3) )
    (-a3 ( (c3 d2 - c2 d3) (-b2 e1 + b1 e2) + (c2 d1 - c1 d2) (b3 e2 - b2 e3) ) +
    a2 ( (-c3 d2 + c2 d3) (b3 e1 - b1 e3) + (c3 d1 - c1 d3) (b3 e2 - b2 e3) ) ) -
    (a3 (c3 d1 - c1 d3) (-b2 e1 + b1 e2) + a3 (c2 d1 - c1 d2) (b3 e1 - b1 e3) +
    a1 (c3 d2 - c2 d3) (b3 e1 - b1 e3) + a1 (c3 d1 - c1 d3) (-b3 e2 + b2 e3) )
    (-c3 ( (a3 b2 - a2 b3) (-d2 e1 + d1 e2) + (a2 b1 - a1 b2) (d3 e2 - d2 e3) ) +
    c2 ( (-a3 b2 + a2 b3) (d3 e1 - d1 e3) + (a3 b1 - a1 b3) (d3 e2 - d2 e3) ) ) }
```

Slika 6.3: Raspis točke  $I$  pomoću programa *Mathematica*

Zaključujemo da će konstruiranjem teorema na ovaj način konačna determinanta točaka  $E, F, I$  bit nula neovisno o izboru početnih koordinata točaka. Važno je uzeti u obzir da se nula može dobiti i ako se pri konstrukciji pojavi degenerirani slučaj, kao na primjer sjecište dvaju jednakih pravaca, što rezultira nulvektorom već u nekom međukoraku. No ipak u većini slučajeva se dobije upravo nedegenerirana konfiguracija u kojoj su točke  $E, F, I$  zaista kolinearne.  $\square$

# Bibliografija

- [1] F. M. Brueckler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera. Odjel za matematiku, Osijek, 2014.
- [2] H. S. M. Coxeter, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.
- [3] S. Gorjanc, *Proširena euklidska ravnina*, <http://www.grad.hr/geomteh3d/skripta/uvod.html>.
- [4] E. A. Marchisotto, *The Theorem of Pappus: A Bridge between Algebra and Geometry*, The American Mathematical Monthly **109** (2002), br. 6, 497–516, <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.2002.11919880>.
- [5] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [6] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- [7] J. Richter-Geber, *Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour through Real and Complex Geometry*, Springer, 2010, <https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/WS0910/ProjektiveGeometrieWS0910/GeomBook.pdf>.
- [8] S. Varošaneć, *Krivulje drugog reda*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/nacrt20-36.pdf>.

# Sažetak

Papusov teorem je jednostavan, ali u isto vrijeme jako bitan i koristan teorem pripisan Papusu iz Aleksandrije, posljednjem velikom matematičaru Aleksandrijske škole. Ovaj teorem pravilno iskazan sastoji se od samo devet točaka i devet pravaca i smatra se jednim od prvih velikih teorema projektivne geometrije.

Fokus ovoga rada dokazi su Papusovog teorema u namjeri prezentiranja raznih metoda i razlika među njima, istodobno prikazujući njegove generalizacije i varijacije.

U ovome radu naglasit ćemo posebnosti ovoga teorema koji svoju punu općenitost ima u projektivnoj geometriji. Iskazat ćemo i na dva načina dokazati jednu njegovu euklidsku varijaciju koja je zapravo specijalizacija Papusovog teorema kada se Papusov pravac nalazi u beskonačnosti. Papus je originalno dokazao ovaj teorem primjenom euklidskih metoda, ali u ovome radu ćemo također dati i dva projektivna načina kako ga dokazati koristeći homogene koordinate.

Istaknuti ćemo i tri varijacije Papusovog teorema: Pascalov teorem, Chayley-Bacharach-Chasles teorem i Miquelov teorem. Svaki od ovih teorema ćemo iskazati i dokazati te objasniti u kakvoj je vezi s Papusovim teoremom.

Rad ćemo završiti algebarskim dokazom Papusovog teorem u njegovoj punoj općenitosti tako što ćemo Papusov teorem izraziti pomoću vektorskih produkata i determinante. U tom na prvi pogled jednostavnom dokazu nužna je upotreba računalnog programa.

# Summary

Pappus's Theorem is simple yet very important and useful theorem contributed to Pappus of Alexandria, the last great mathematician of the Alexandrian School. The statement of this theorem, when properly stated, consists only of nine point and nine lines and we consider it one of the first great theorems of projective geometry.

This thesis focuses on proofs of Pappus's Theorem with intention of giving variety of methods and discussing differences between them while also presenting his generalizations and variations.

In this thesis, we will emphasize special properties of this theorem which attains its full generality in projective geometry. We will state one of his Euclidean versions which is actually the specialization of the Pappus's theorem when Pappus's line is send to infinity. Pappus originally proved this theorem using Euclidean methods but in this thesis we will also describe two projective ways how to prove it using homogeneous coordinates.

We will also present three variations of Pappus's Theorem: Pascal's Theorem, Chayley-Bacharach-Chasles Theorem and Miquel's Theorem. We will state and prove each of these theorems and explain what connections do they have with Pappus's Theorem.

We will end this thesis with algebraic proof of Pappus's Theorem in its full generality by expressing the statements of Pappus's Theorem using cross-products and a determinant. At first that proof seems to be very simple but the help of the computer program is essential here.



# Životopis

Rođena sam 25. veljače 1995. godine u Zadru. Svoje obrazovanje započela sam 2001. godine u Osnovnoj školi Ljudevita Gaja u Osijeku. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja 2009. godine sam upisala I. gimnaziju u Osijeku i maturirala 2013. godine. U srpnju iste godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisala sam pred-diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na matematičkom odsjeku. Nakon trogodišnjeg preddiplomskog studija i stjecanjem prvostupničke diplome 2016. godine sam upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.