Unitarni dual p-adske grupe SO(7) s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi

Brajković, Darija

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Darija Brajković

Unitarni dual p-adske grupe SO(7) s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Darija Brajković

Unitary dual of p-adic group SO(7) with support on minimal parabolic subgroup

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2019

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Darija Brajković

Unitarni dual p-adske grupe SO(7) s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi

DOKTORSKI RAD

Mentor:
izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Darija Brajković

Unitary dual of p-adic group SO(7) with support on minimal parabolic subgroup

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Zagreb, 2019

Zahvala

Veliko hvala mom mentoru, izv.prof.dr.sc. Ivanu Matiću, na svom trudu, vremenu, strpljenju i pomoći, kao i na mnogobrojnim razgovorima koji su uvelike pomogli pri izradi ove doktorske disertacije.

Posebno se zahvaljujem mojim roditeljima, bratu i Mariji, što su bili uz mene svo vrijeme, bez obzira na situacije u kojima smo se svi nalazili, od kojih neke nisu bile niti malo bezazlene niti lagane. Mama, bez svakodnevnih razgovora s tobom, ovoga možda ne bi niti bilo. Ogromna zahvala je tu i za moju nećakinju Miu, koja i najstresnije trenutke čini sunčanima i veselima.

Svim kolegicama i kolegama sa Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme hvala na podršci, motivaciji i razgovorima, slušanju na izlaganjima seminara i ohrabrivanju.

Zahvaljujem se i svim kolegicama i kolegama s Odjela za matematiku koji su mi pružili svoju podršku i mnogobrojne savjete, a posebno onima koji su me ohrabrivali, motivirali i nasmijavali na razgovorima uz kavu.

Hvala svim mojim prijateljima, koji su bez obzira u kojem dijelu svijeta se trenutno nalazili, uvijek bili prisutni sa svojim savjetima i podrškom.

Na kraju, bezgranično hvala Bruni, bez čije bi mirnoće, vedrine, razumijevanja, pomoći i beskonačno velike podrške, ohrabrivanja i motivacije, cijeli ovaj put bio pretežak, a ponekad i nemoguć.

Sažetak

U ovoj doktorskoj disertaciji ispitana je struktura neunitarnog i unitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi. Pri pronalasku unitarnog duala korišten je vanjski pristup, koji je temeljni pristup za ostvarivanje opisa unitarnog duala, a koji se sastoji od dva osnovna koraka: potpuni opis neunitarnog duala te izdvajanje klasa unitarizabilnih reprezentacija među dobivenim ireducibilnim subkvocijentima.

Najprije je dana klasifikacija temperiranih reprezentacija grupe $SO(7, F)$ koja je nužna za određivanje neunitarnog, pa onda i unitarnog duala grupe. Nakon toga je pomoću Langlandsove klasifikacije i klasifikacije temperiranih reprezentacija odgovarajućih neparnih specijalnih ortogonalnih grupa određen neunitarni dual p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

Kao zadnji korak napravljena je identifikacija klasa unitarizabilnih reprezentacija unutar neunitarnog duala, odnosno određen je unitarni dual p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi. Pri tome je prvenstveno iskorišten rezultat Tadića o unitarizabilnosti reprezentacija p-adskih klasičnih grupa generaliziranog ranga tri, kao i unitarni dual p-adske opće linearne grupe te p-adske grupe $SO(5)$.

Ključne riječi: teorija reprezentacija p-adskih grupa; temperirane reprezentacije; neunitarni dual; unitarni dual; p-adska grupa $SO(7)$

Summary

In this doctoral thesis the nonunitary and unitary dual of p-adic group $SO(7)$ with support on minimal parabolic subgroup is examined. In finding the unitary dual the external approach is used, which represents the basic approach for determining the unitary dual, and consists of two main steps: a complete description of the nonunitary dual and the extraction of the classes of unitarizable representations among the obtained irreducible subquotients.

Firstly, the classification of temepered representations of the group $SO(7, F)$ is given, which is neccesarry for determining the nonunitary, and later the unitary dual of the group. After that, the nonunitary dual of p-adic group $SO(7)$ with support on minimal parabolic subgroup is determined using Langlands classification and classification of tempered representations of appropriate odd special orthogonal groups.

As the last step, the identification of the unitarizable representation classes in the nonunitary dual has been achieved, that is the unitary dual of p-adic groups $SO(7)$ with support on minimal parabolic subgroup is determined. In doing so, Tadić's result regarding the unitarizability of representations in p-adic classical groups of generalized rank three, as well as the unitary dual of p-adic general linear groups and p-adic group $SO(5)$ are primarily used.

Keywords: representation theory of p-adic groups; tempered representations; nonunitary dual; unitary dual; p-adic group $SO(7)$

Extended Summary

Unitary dual determination problem of a reductive algebraic group over a local nonarchimedean field is one of the most important problems in representation theory. Unitary dual of general linear group of arbitrary rank over local nonarchimedean field was found by Tadić. In that work an external approach to determining of the unitary dual is used, in which the first step is to give a complete description of the nonunitary dual using Langlands classification. The second step is to find classes of unitarizable representations among irreducible subquotients.

Since then, unitary duals of some groups of rank two were found, but not much is known about the solution of the unitarizability problem for classical groups in the general case. As the natural next step leading towards the solution of this problem, that would provide deeper insight into the wanted structure, studying induced representations of classical groups of rank three is imposed. In that way, apart from enabling the study of induced representations of groups of small rank, one could also get a better insight into the structure of the unitary dual in the general case.

In this doctoral thesis the unitary dual of p-adic group $SO(7)$ with support on minimal parabolic subgroup is determined. In finding the unitary dual, the aforementioned external approach is used, which is the basic approach in determining the unitary dual.

Firstly, the classification of temepered representations of group $SO(7, F)$ is given, which is necessary for finding the nonunitary, and later the unitary dual of the group. After that, the nonunitary dual of p-adic group $SO(7)$ with support on minimal parabolic subgroup is determined using Langlands classification and classification of tempered representations of appropriate odd special orthogonal groups. The results are divided by the number of selfcontragradient characters that occur in the induced representation of the p-adic group $SO(7)$. In the case where all three characters that occur in the induced representation are selfcontragradient, the results are further divided by the number of $\frac{1}{2}$ that occur in the exponents. All irreducible subquotients in those cases are given in theorems 4.3, 4.4, 4.5 and 4.6. If there are exactly two selfcontragradient characters in the induced representation, then the results are further divided into two cases, depending on the exponent with the character that is not selfcontragradient. More precisely, depending on whether that exponent is greater than 0 or is it equal to 0. All irreducible subquotients in those two cases are given in theorems 4.8 and 4.10, respectively. Then all the remaining

irreducible subquotients are found, that is irreducible subquotiens in the cases where there is exactly one selfcontragradient character in the induced representation, and they are given in the theorem 4.11, or there aren't any selfcontragradient characters in the induced representation, and they are given in the theorem 4.12.

In order to get the complete description of the unitary dual of the p-adic group $SO(7)$ with the support on the minimal parabolic subgroup, identification of unitarizable classes has been done. That has been achieved using primarily Tadić's result about unitarizability of the representations of p-adic groups of generalized rank three, and also unitary dual of p-adic general linear groups and p-adic group $SO(5)$. The results are, as with the nonunitary dual, divided by the number of selfcontragradient characters that occur in the induced representation of the group $SO(7, F)$, and are also, in this chapter, further divided by the number of isomorphic characters. In the case of three selfcontragradient characters the additional division that depends on the number of $\frac{1}{2}$ that ocurr in the exponents is made. All irreducible unitarizable subquotients of the corresponding induced representations of group $SO(7, F)$ are given in theorems 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 and 5.14. After that, all irreducible unitarizable subquotients of the induced representations of group $SO(7, F)$ in which there are exactly two selfcontragradient characters are found and they are given in theorems 5.17 and 5.18. All irreducible unitarizable subquotiens of the induced representations of group $SO(7, F)$ in which there is exactly one selfcontragradient character are given in theorems 5.19 and 5.20. At the end, all irreducible unitarizable subquotients of the induced representations of group $SO(7, F)$ in which there aren't any selfcontragradient characters are given in theorems 5.21, 5.22 and 5.23.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Reprezentacije p-adskih grupa **7**

1.1 Lokalno nearhimedsko polje karakteristike 0 . . . 7

1.2 Osnovni pojmovi teorije reprezentacija . . . 7

1.2.1 Problem klasifikacije unitarnog duala . . . 11

1.3 Paraboličke podgrupe . . . 12

1.3.1 Paraboličke podgrupe opće linearne grupe . . . 12

1.3.2 Paraboličke podgrupe neparne specijalne ortogonalne grupe . . . 13

1.4 Parabolička indukcija . . . 14

1.4.1 Osnovna svojstva paraboličke indukcije . . . 15

1.4.2 Parabolički inducirane reprezentacije opće linearne grupe i osnovna svojstva . . . 16

1.4.3 Parabolički inducirane reprezentacije neparne specijalne ortogonalne grupe i osnovna svojstva . . . 17

1.5 Kvadratno integrabilne i temperirane reprezentacije . . . 18

1.6 Jacquetovi moduli . . . 19

1.6.1 Osnovna svojstva Jacquetovih modula . . . 20

1.6.2 Geometrijska lema i Jacquetovi moduli reprezentacija opće linearne grupe . . . 21

1.6.3 Jacquetovi moduli reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe 22

1.6.4 Tadićeva strukturna formula . . . 22

1.7 Frobeniusov reciprocitet . . . 24

1.8 Kuspidalne reprezentacije . . . 24

1.8.1 Kuspidalni nosač . . . 25

1.9 Langlandsova klasifikacija . . . 26

1.9.1 Langlandsova klasifikacija za opće linearne grupe . . . 26

1.9.2 Langlandsova klasifikacije za neparne specijalne ortogonalne grupe . 27

1.10 Kvadratno integrabilne reprezentacije opće linearne grupe . . . 28

1.11 Casselmanov kriterij . . . 29

2 Reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija 31
2.1 Ulančani segmenti . . . 31
2.2 Kuspidalne reducibilnosti i generalizirana Steinbergova reprezentacija . . . 33
2.3 Reducibilnost u kuspidalnom slučaju . . . 34
2.4 Kriterij reducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija . . . 35
2.5 Dokazivanje ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija . . . 37
2.6 Zanimljivi primjeri . . . 38
2.7 R-grupe . . . 39
2.8 Reducibilnost određenih klasa parabolički induciranih reprezentacija . . . 40
2.9 Kriterij ireducibilnosti . . . 44
2.10 Reducibilnosti u nekim grupama manjeg ranga . . . 46

3 Klasifikacija temperiranih reprezentacija 47
3.1 Temperirane reprezentacije grupe $SO(3, F)$ . . . 47
3.2 Temperirane reprezentacije grupe $SO(5, F)$ . . . 48
3.3 Temperirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ . . . 49

4 Neunitarni dual 53
4.1 Netemperirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj parabol ičkoj podgrupi . . . 53
4.2 Pomoćni rezultati . . . 56
4.3 Slučaj tri kvadratna karaktera . . . 59
4.4 Slučaj dva kvadratna karaktera . . . 88
4.5 Slučaj jednog kvadratog karaktera . . . 103
4.6 Slučaj bez kvadratnih karaktera . . . 112
4.7 Primjeri . . . 119

5 Unitarni dual 123
5.1 Strategija traženja unitarnog duala . . . 123
5.2 Aubertin dual . . . 124
5.3 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju tri kvadratna karaktera . 125
5.3.1 Slučaj kada se u eksponentu pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$ . . . 125
5.3.2 Slučaj kada se u eksponentima pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$ . . . 133
5.3.3 Slučaj kada su sva tri eksponenta jednaka $\frac{1}{2}$ . . . 147
5.3.4 Slučaj kada se u eksponentima ne pojavljuje niti jedna $\frac{1}{2}$ . . . 152
5.4 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju dva kvadratna karaktera 156
5.5 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju jednog kvadratnog karaktera 160
5.6 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju kada niti jedan karakter nije kvadratni . . . 168

Zaključak **177**

Bibliografija **179**

Životopis **184**

Uvod

Problem određivanja unitarnog duala reduktivne algebarske grupe G nad lokalnim nearhimedskim poljem F predstavlja jedan od fundamentalnih aspekata teorije reprezentacija u zadnjih nekoliko desetljeća. Radi se o problemu od iznimne važnosti, kako u klasičnoj harmonijskoj analizi na reduktivnim grupama, tako i u modernoj teoriji brojeva te su različite instance ovog i vezanih problema stalan predmet proučavanja na brojnim istaknutim centrima svjetske matematike.

Označimo s $\widetilde{G}$ skup svih ireducibilnih glatkih reprezentacija reduktivne p-adske grupe G, a s $\widehat{G}$ podskup svih unitarizabilnih klasa. Tada se $\widetilde{G}$ naziva neunitarnim dualom od G, a $\widehat{G}$ unitarnim dualom od G. Problem određivanja unitarnog duala problem je određivanja podskupa

$$\widehat{G}$$

od $\widetilde{G}$.

Potpuni opis unitarnog duala p-adske opće linearne grupe proizvoljnog ranga ostvaren je radom Tadića u [47] prije tridesetak godina. U tom je radu inicijalno iskorišten i jedan od temeljnih pristupa za ostvarivanje opisa unitarnog duala, koji je kasnije nazvan vanjskim pristupom u [49]. Ovaj se pristup sastoji od dva osnovna koraka:

1. Dolazi se do eksplicitnog opisa neunitarnog duala, obično temeljenog na Langlandsovoj klasifikaciji.

2. Iz dobivenog se opisa nastoje izdvojiti klase unitarizabilnih reprezentacija koristeći njihova svojstva, odnosno identificiraju se klase ireducibilnih unitarizabilnih reprezentacija iz dobivenih ireducibilnih subkvocijenata. Na taj se način najprije ostvaruju elementi unitarnog duala, nakon čega se pokazuje i potpunost dobivenog opisa.

Do sada se ovaj pristup nije uspio u potpunosti iskoristiti za klasifikaciju unitarnog duala drugih klasičnih grupa nad nearhimedskim lokalnim poljima, čija se teorija reprezentacija pokazuje daleko složenijom, osim u nekoliko slučajeva grupa ranga dva, poput grupe $Sp(4,F)$ u [41], grupe $U(2,2)$ u [24], grupe $SO(5,F)$ u [26], grupe G_2 u [35], te hermitske kvaternionske grupe ranga dva u [14]. Iako se ne zna mnogo o rješenju problema unitarizabilnosti za klasične grupe u općem slučaju, za neke je bitne podklase unitarizabilnih reprezentacija napravljena eksplicitna klasifikacija, poput generičkih reprezentacija u [25] i sferičnih reprezentacija u [39].

Osim što pristup proučavanja induciranih reprezentacija grupa malog ranga omogućuje direktno razmatranja svih uključenih slučajeva induciranih reprezentacija, može pružiti i dobar uvid u strukturu unitarnog duala u općem slučaju. Tako se kao prirodan sljedeći korak, koji bi trebao služiti za dobivanje dubljeg uvida u željenu strukturu, nameće proučavanje induciranih reprezentacija klasične grupe ranga tri.

U ovoj ćemo doktorskoj disertaciji ispitati strukturu neunitarnog i unitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi, odnosno odredit ćemo skup ireducibilnih unitarizabilnih klasa reprezentacija grupe $SO(7, F)$. Osnovni objekt proučavanja su nam parabolički inducirane reprezentacije od $SO(7, F)$. Općenito, neka je $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ uređena particija od m, gdje je $0 < m \leq n$, te neka je π_i reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $1 \leq i \leq k$, i neka je σ reprezentacija grupe $SO(2(n - m) + 1, F)$. Tada je

$$\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k \rtimes \sigma = \mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{SO(2n+1,F)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma)$$

parabolički inducirana reprezentacija grupe $SO(2n + 1, F)$ s

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma$$

iz paraboličke grupe P_α od G s Levijevom dekompozicijom $P_\alpha = M_\alpha N_\alpha$.

Pri tome ćemo slijediti Harish-Chandrin princip određivanja unitarnog duala, odnosno ranije naveden vanjski pristup. Najprije ćemo odrediti cijeli neunitarni dual grupe $SO(7, F)$ koristeći Langlandsovu klasifikaciju. Posebno, koristimo verziju Langlandsove klasifikacije za podreprezentacije, kako je opisano u [28]. Netemperiranu reprezentaciju $\pi \in \mathrm{Irr}(SO(2n + 1, F))$ zapišemo kao jedinstvenu ireducibilnu (Langlandsovu) podreprezentaciju inducirane reprezentacije oblika

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau,$$

gdje su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ ireducibilne esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije takve da je

$$e(\delta_1) \leq e(\delta_2) \leq \cdots \leq e(\delta_k) < 0,$$

a $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(2n' + 1, F))$ temperirana reprezentacija. Dakle, tada pišemo

$$\pi \cong L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau).$$

Reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija jedan je od najvažnijih problema u teoriji reprezentacija reduktivnih grupa. Najvažnija primjena reducibilnosti upravo je pri određivanju unitarnog duala klasičnih p-adskih grupa. Ukoliko se parabolički inducirana reprezentacija reduktivne p-adske grupe reducira, onda se svi odgovarajući Jacquetovi moduli reduciraju, a upravo ta činjenica i svojstvo tranzitivnosti Jacquetovih modula otvaraju mogućnost dokazivanja ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija.

Prema tome, traženje unitarnog duala nije samo stepenica koja vodi ka opisu unitarnog duala, već je i neunitarni dual zanimljiv sam po sebi. Naime, zanima nas je li inducirana reprezentacija grupe ireducibilna ili se pak reducira. Nadalje, ukoliko se inducirana reprezentacija grupe reducira, sljedeće zanimljivo pitanje je kako izgleda njezin kompozicioni niz.

Danas se prilikom početnog opisa neunitarnog duala mogu koristiti i detaljno razrađene klasifikacije temperiranih reprezentacija i ireducibilnih kvadratno integrabilnih reprezentacija iz [22], [33] i [58], uz od ranije poznate metode Jacquetovih modula iz [8] i [52], te metode operatora ispreplitanja iz [43] i R-grupa iz [13]. Također, može se koristiti i noviji fundamentalan rad Arthura [1].

Temeljni korak u eksplicitnom opisu neunitarnog duala predstavlja razumijevanje osnovnih serija grupe $SO(7, F)$. Poznato je iz [20] da je unitarna osnovna serija grupe $SO(2n + 1, F)$ ireducibilna. Ireducibilnost unitarnih osnovnih serija posljedica je teorije R-grupa, koja je razvijena za slučaj specijalne ortogonalne grupe i simplektičke grupe nad lokalnim nearhimedskim poljem karakteristike nula u [13]. S druge strane, nužni i dovoljni uvjeti za ireducibilnost neunitarnih osnovnih serija slijede iz [51], a zasnovani su na izomorfnosti određenih operatora ispreplitanja. Korištenjem klasifikacija temperiranih reprezentacija, diskretnih serija te strogo pozitivnih reprezentacija, uz uvjete na kuspidalni nosač proučavane inducirane reprezentacije, dolazimo do podjele na slučajeve neunitarnih osnovnih serija koji trebaju biti zasebno ispitani.

Na način započet u [36] te dalje razvijen u [28], korištenjem Tadićeve strukturne formule iz [52] kao posljedice Geometrijske leme Bernsteina i Zelevinskog za račun Jacquetovih modula, i Langlandsove klasifikacije, dolazimo do potpunog opisa potencijalnih ireducibilnih subkvocijenata u svakom od proučavanih slučajeva induciranih reprezentacija grupe $SO(7, F)$.

Nakon potpunog opisa neunitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi, unutar neunitarnog duala identificirat ćemo klase unitarizabilnih reprezentacija koristeći prvenstveno rezultat Tadića iz [59], kao i ranije dobiven unitarni dual p-adske opće linearne grupe i unitarni dual p-adske grupe $SO(5)$. Također, pri ispitivanju unitarizabilnosti pojedinih ireducibilnih reprezentacija koristimo se promatranjem komplementarnih serija i krajeva komplementarnih serija. Na taj ćemo način odrediti unitarni dual p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

U prvom poglavlju opisujemo objekte s kojima radimo te navodimo osnovna svojstva i činjenice o njima, kao i metode, koncepte i ideje koje koristimo u radu, a koji su otprije poznati. Definiramo polje u kojem radimo te navodimo osnovne pojmove teorije reprezentacija, opisujemo paraboličke podgrupe, kao i paraboličku indukciju, te osnovna svojstva paraboličke indukcije. Dajemo kratak pregled osnovnih klasa reprezentacija s kojima radimo, a koje su kvadratno integrabilne, kuspidalne i temperirane reprezentacije. Navodimo definiciju Jacquetovog modula i osnovna svojstva Jacquetovih modula, opisujemo Tadićevu strukturnu formulu i Frobeniusov reciprocitet. Na kraju poglavlja opisujemo Langlandsovu klasifikaciju i Casselmanov kriterij. Pri tome su paraboličke podgrupe, parabolička indukcija, Jacquetovi moduli i Langlandsova klasifikacija posebno detaljno opisani za opću linearnu grupu, kao i za neparnu specijalnu ortogonalnu grupu.

Osnovne pojmove i tvrdnje vezane uz reducibilnost, odnosno ireducibilnost parabolički induciranih reprezentacija navodimo u drugom poglavlju. Najprije opisujemo ulančane segmente te kuspidalne reducibilnosti i generaliziranu Steinbergovu reprezentaciju. Nakon toga navodimo Shahidijev rezultat o reducibilnosti u kuspidalnom slučaju. Također, navodimo kriterije reducibilnosti i ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija, te reducibilnost određenih klasa parabolički induciranih reprezentacija i neke poznate zanimljive primjere. Navodimo definiciju R-grupe, kao i osnovne rezultate koje koristimo u ostatku rada.

U trećem je poglavlju opisana klasifikacija temperiranih reprezentacija grupa $SO(3, F)$ i $SO(5, F)$, na temelju kojih se onda izvodi klasifikacija temperiranih reprezentacija grupe $SO(7, F)$, koja je također opisana u navedenom poglavlju.

Potpun i uniforman opis neunitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi dan je u četvrtom poglavlju. Najprije su opisane netemperirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi, a zatim su dokazani pomoćni rezultati koji će biti korišteni u ostatku poglavlja. Potpoglavlja su podijeljena prema broju kvadratnih karaktera koji se pojavljuju u induciranoj reprezentaciji grupe $SO(7, F)$. Tako najprije pronalazimo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj su sva tri karaktera kvadratna i u tom ih slučaju dijelimo prema broju $\frac{1}{2}$ koje se pojavljuju u eksponentima. Svi ireducibilni subkvocijenti u tim slučajevima dani su teoremima 4.3, 4.4, 4.5 i 4.6. Nakon toga pronalazimo ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj su točno dva karaktera kvadratna i u tom ih slučaju dijelimo u ovisnosti je li eksponent uz nekvadratni karakter veći od 0 ili je pak jednak 0. Svi ireducibilni subkvocijenti u ta dva slučaja dani su redom teoremima 4.8 i 4.10. Zatim, pronalazimo ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj je točno jedan karakter kvadratni i oni su dani teoremom 4.11, te inducirane reprezentacije u kojoj niti jedan karakter nije kvadratni, a oni su dani teoremom 4.12. U zadnjem potpoglavlju navodimo nekoliko primjera induciranih reprezentacija grupe $SO(7, F)$ za koje pronalazimo ireducibilne subkvocijente koristeći dobivene rezultate u prethodnim potpoglavljima.

U posljednjem, petom, poglavlju pronađen je unitarni dual p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi. Najprije je opisana strategija traženja unitarnog duala, a nakon toga je definirana Aubertina involucija i Aubertin dual, koji su korišteni u ostatku poglavlja. Potpoglavlja su, kao u četvrtom poglavlju, najprije podijeljena prema broju kvadratnih karaktera u induciranoj reprezentaciji grupe $SO(7, F)$. U slučaju tri kvadratna karaktera napravljena je dodatna podjela prema broju $\frac{1}{2}$ koje se pojavljuju u eksponentima i svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti odgovarajućih induciranih reprezentacija grupe $SO(7, F)$ dani su teoremima 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 i 5.14. Nakon toga pronađeni su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su točno dva karaktera kvadratna, a dani su teoremima 5.17 i 5.18. Svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj je točno jedan karakter kvadratni dani su teoremima 5.19 i 5.20. Na kraju, svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj niti jedan karakter nije kvadratni dani su teoremima 5.21, 5.22 i 5.23. Posebno, unutar svakog od potpoglavlja u kojima tražimo unitarizabilne subkvocijente rezultati su razdijeljeni i prema broju međusobno izomorfnih karaktera.

Poglavlje 1

Reprezentacije p-adskih grupa

U ovom poglavlju navodimo osnovne pojmove vezane uz teoriju reprezentacija, kao i osnovne metode, koncepte i ideje koje koristimo u radu. Detaljniji i širi opis istih moguće je pronaći u [9], [26], [49], [50], [54], [57] i drugima.

1.1 Lokalno nearhimedsko polje karakteristike 0

U ovom je radu F lokalno nearhimedsko polje karakteristike 0, stoga uvodimo najprije definiciju istog.

Lokalno kompaktno nediskretno polje F naziva se **lokalno polje**. Ako je ono povezano, kažemo da je lokalno polje **arhimedsko** i ono je tada izomorfno ili polju $\mathbb{R}$ ili polju $\mathbb{C}$, a u suprotnom kažemo da je lokalno polje F **nearhimedsko**. Na nearhimedskom lokalnom polju definirana je apsolutna vrijednost koja je nearhimedska, odnosno za nju vrijedi da je

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Neka je p prost broj i neka su $a, b, k \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, te neka $p \nmid ab$. Polje $\mathbb{Q}_p$ upotpunjenje je polja $\mathbb{Q}$ u odnosu na apsolutnu vrijednost

$$\left|\frac{a}{b}p^k\right|_p = p^{-k}.$$

Svako lokalno nearhimedsko polje karakteristike 0 jednako je, do na izomorfizam, nekom konačnom proširenju polja p-adskih brojeva $\mathbb{Q}_p$. Dokaz te činjenice može se pronaći u [60].

1.2 Osnovni pojmovi teorije reprezentacija

Kako su reprezentacije grupa osnovni objekti koje proučavamo u ovom radu, najprije ćemo ih definirati.

Definicija 1.1. *Neka je G grupa i V kompleksan vektorski prostor.* ***Reprezentacija*** *(π, V)* ***grupe*** *G homomorfizam je π s grupe G u grupu svih invertibilnih linearnih operatora na V, odnosno preslikavanje*

$$\pi\colon G \to GL(V)$$

takvo da je

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2), \text{ za sve } g_1, g_2 \in G.$$

Vektorski prostor V nazivamo ***prostorom reprezentacije*** *π. Obično reprezentaciju (π, V) označavamo samo s π ili, ponekad, samo s V.*

Pretpostavimo da je (π, H) reprezentacija grupe G, gdje je H Hilbertov prostor. Kažemo da je reprezentacija (π, H) **neprekidna** reprezentacija od G ako je preslikavanje s $G \times H$ u H koje je dano s

$$(g, v) \mapsto \pi(g)v$$

neprekidno. Ako je zatvoreni potprostor H' od H π-invarijantan, odnosno ako je

$$\pi(g)h' \in H', \text{ za sve } g \in G, h' \in H',$$

onda H' nazivamo **podreprezentacijom** neprekidne reprezentacije (π, H) od G i pišemo $H' \hookrightarrow (\pi, H)$. Kažemo da je neprekidna reprezentacija (π, H) **ireducibilna** ako nema netrivijalnih podreprezentacija, odnosno ako su $\{0\}$ i H jedine podreprezentacije od (π, H). Skup svih klasa ireducibilnih reprezentacija grupe G označavamo s $\mathrm{Irr}(G)$.

Neprekidnu reprezentaciju π od G takvu da su svi operatori $\pi(g)$, za $g \in G$, unitarni nazivamo **unitarizabilnom** reprezentacijom od G.

Karakter od G neprekidna je reprezentacija na jednodimenzionalnom prostoru i on je uvijek ireducibilna reprezentacija. Ako je reprezentacija od G na jednodimenzionalnom prostoru unitarizabilna, onda karakter od G nazivamo **unitarnim karakterom** od G. U nastavku s $\widehat{F^\times}$ označavamo skup unitarnih karaktera od $F^\times$.

Neophodan pojam za naš rad s reprezentacijama pojam je glatke reprezentacije, čiju definiciju navodimo.

Definicija 1.2. *Kažemo da je reprezentacija (π, V) grupe G* ***glatka*** *ako je za svaki $v \in V$ stabilizator od v u G otvoren, odnosno ako je skup*

$$\{g \in G\colon \pi(g)v = v\}$$

otvoren.

Skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih glatkih reprezentacija od G nazivamo **neunitarnim dualom** od G i označavamo s $\widetilde{G}$. Posebno, napomenimo da neunitaran dual ne sadrži samo neunitarizabilne reprezentacije, već se koristi taj izraz jer se želi naglasiti da se ne zahtijeva unitarnost u definiciji neunitarnog duala $\widetilde{G}$.

Problem proučavanja ireducibilnih unitarizabilnih reprezentacija može se algebraizirati i svodi se na proučavanje glatkih reprezentacija, zahvaljujući uglavnom radu Harish-Chandre i Bernsteina. Dakle, nije nužno promatrati Hilbertove prostore niti neprekidne reprezentacije. Zato u ostatku rada možemo promatrati glatke reprezentacije i podrazumijevamo da je reprezentacija glatka, ukoliko nije drugačije naznačeno.

Osim pojma glatke reprezentacije, od izuzetne je važnosti i pojam dopustive reprezentacije, čiju definiciju sada navodimo.

Definicija 1.3. *Kažemo da je glatka reprezentacija (π, V) grupe G **dopustiva** ako je za svaku otvorenu podgrupu U od G prostor*

$$V^U = \{v \in V : \pi(u)v = v, \ \textit{za sve } u \in U\}$$

konačnodimenzionalan vektorski prostor.

U nastavku navodimo još nekoliko osnovnih pojmova potrebnih za rad s reprezentacijama grupa.

Neka je (π, V) reprezentacija grupe G. Ukoliko je potprostor W od V π-invarijantan, onda se djelovanje grupe prirodno prenosi na kvocijentni prostor V/W i tako dobivena reprezentacija

$$\pi_{V/W}$$

zove se **kvocijentna reprezentacija** ili **kvocijent** reprezentacije π od G.

Subkvocijentna reprezentacija ili **subkvocijent** kvocijent je podreprezentacije reprezentacije π grupe G, odnosno ako su U i W π-invarijantni potprostori od V i ako je $U \subseteq W$, onda je

$$\pi_{W/U}$$

kvocijentna reprezentacija podreprezentacije π_W od π.

Neka su (π_1, V) i (π_2, W) reprezentacije grupe G. Za linearan operator

$$A \colon V \to W$$

kažemo da je **operator ispreplitanja** između reprezentacija π_1 i π_2 ako je

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A, \ \text{za sve } g \in G.$$

Skup svih operatora ispreplitanja između reprezentacija π_1 i π_2 označavamo s $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$. Glatke reprezentacije od G i ispreplitanja tvore Abelovu kategoriju koja se označava s Alg(G). Kažemo da su reprezentacije π_1 i π_2 međusobno **ekvivalentne** ili **izomorfne** ako postoji operator ispreplitanja između njih koji je izomorfizam, i pišemo

$$\pi_1 \cong \pi_2.$$

Sljedeća tvrdnja koju navodimo, poznata pod nazivom Schurova lema, značajna je tvrdnja koju koristimo u nastavku.

Lema 1.4. *(Schurova lema) Neka je π dopustiva ireducibilna reprezentacija grupe G. Tada je*

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \cong \mathbb{C}.$$

Nadalje, neka su π i Π reprezentacije grupe G i neka je reprezentacija π ireducibilna. Tada je svako netrivijalno ispreplitanje $\Pi \to \pi$ epimorfizam, a svako netrivijalno ispreplitanje $\pi \to \Pi$ monomorfizam, odnosno ulaganje. Ukoliko su pak reprezentacije π_1 i π_2 ireducibilne, onda je svako netrivijalno ispreplitanje $\pi_1 \to \pi_2$ izomorfizam.

Ako za reprezentaciju (π, V) od G postoji konačan rastući niz podreprezentacija

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

takav da je svaki od uzastopnih kvocijenata V_i/V_{i-1} ireducibilna reprezentacija, onda kažemo da je reprezentacija (π, V) **konačne duljine**. Takav niz ireducibilnih reprezentacija nazivamo **kompozicionim nizom** reprezentacije π. Skup ireducibilnih reprezentacija koje se pojavljuju u danom kompozicionom nizu jedinstveno je određen do na poredak i izomorfizam, ali nije nužno jedinstven. Broj pojavljivanja ireducibilne reprezentacije τ u kompozicionom nizu reprezentacije π naziva se **multiplicitet reprezentacije** τ u π i označava s $m(\tau : \pi)$.

Definicija 1.5. *Neka je (π, V) glatka reprezentacija od G. Na dualnom prostoru V^* od V definiramo reprezentaciju π^* s*

$$(\pi^*(g)v^*)(v) = v^*(\pi(g^{-1})v), \text{ za sve } g \in G, v \in V, v^* \in V^*.$$

Tada njezin glatki dio nazivamo ***kontragradijentnom reprezentacijom*** *od (π, V) i označavamo s $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$.*

Posebno, kažemo da je dopustiva reprezentacija π grupe G **samokontragradijentna** ako je

$$\widetilde{\pi} \cong \pi.$$

Uvijek postoji prirodno ispreplitanje između glatke reprezentacije (π, V) grupe G i reprezentacije $(\widetilde{\widetilde{\pi}}, \widetilde{\widetilde{V}})$. Međutim, ako je reprezentacija (π, V) dopustiva, onda je

$$(\pi, V) \cong \left(\widetilde{\widetilde{\pi}}, \widetilde{\widetilde{V}}\right).$$

Također, vrijedi i obrat, odnosno ako su reprezentacije (π, V) i $\left(\widetilde{\widetilde{\pi}}, \widetilde{\widetilde{V}}\right)$ međusobno izomorfne, onda je reprezentacija (π, V) od G dopustiva.

Nadalje, **Grothendieckovu grupu** kategorije svih glatkih reprezentacija konačne duljine grupe G označavamo s

$$R(G).$$

Za dvije reduktivne grupe G_1 i G_2 vrijedi

$$R(G_1 \times G_2) \cong R(G_1) \otimes R(G_2).$$

Ako je π reprezentacija konačne duljine od G, onda je

$$\text{s.s.}(\pi) = \sum_{\tau \in \widetilde{G}} m(\tau \colon \pi)\tau$$

semi-simplifikacija od π, koja je element u Grothendieckovoj grupi $R(G)$.

Klasa unitarizabilnih reprezentacija nam je posebno važna, stoga navodimo definiciju unitarizabilne reprezentacije za glatku reprezentaciju.

Kažemo da je glatka reprezentacija (π, V) grupe G **unitarizabilna** ako postoji skalarni produkt na V u odnosu na koji je svaki operator $\pi(g)$, za $g \in G$, unitaran. Posebno, ako je reprezentacija π ireducibilna, iz Schurove leme slijedi da je takav skalarni produkt jedinstven do na pozitivan skalar. Podskup svih unitarizabilnih klasa u neunitarnom dualu $\widetilde{G}$ označavamo s

$$\widehat{G}$$

i nazivamo **unitarnim dualom** od G.

Napomena 1.6. Svaka je ireducibilna glatka reprezentacija dopustiva. Upravo radi toga se $\widetilde{G}$ često naziva dopustivim dualom.

Prethodno navedenu korisnu činjenicu dokazao je H. Jacquet.

1.2.1 Problem klasifikacije unitarnog duala

Postoji injektivno preslikavanje s $\widehat{G}$ u $\widetilde{G}$, što slijedi iz Bernsteinovih rezultata iz [4]. Štoviše, to preslikavanje preslikava $\widehat{G}$ na skup svih unitarizabilnih klasa u $\widetilde{G}$, pa unitarni dual identificiramo s podskupom svih unitarizabilnih klasa u neunitarnom dualu. Kako je jednostavnije pronaći elemente od $\widetilde{G}$, a direktna klasifikacija $\widehat{G}$ do sada općenito nije dala rezultate, problem klasifikacije unitarnog duala grupe G rastavlja se u dva dijela:

(1) Problem klasifikacije neunitarnog duala $\widetilde{G}$, kojeg nazivamo **problemom neunitarnog duala**.

(2) Problem određivanja podskupa $\widehat{G}$ od $\widetilde{G}$, odnosno problem identificiranja unitarizabilnih klasa u neunitarnom dualu $\widetilde{G}$, kojeg nazivamo **problemom unitarizabilnosti**.

Da bismo pronašli unitarni dual naše grupe koristit ćemo Langlandsovu klasifikaciju, kao i klasifikaciju ireducibilnih temperiranih reprezentacija, što će biti iskazano u poglavlju 3. Temperirane reprezentacije su pak definirane u potpoglavlju 1.5.

Prije opisa Langlandsove klasifikacije, trebamo metodu pomoću koje ćemo konstruirati nove reprezentacije, a to je parabolička indukcija. Nadalje, trebamo metodu pomoću koje ćemo analizirati te nove inducirane reprezentacije, a to je metoda Jacquetovih modula.

1.3 Paraboličke podgrupe

Opisat ćemo podgrupe grupe G koje imaju veliku ulogu u teoriji reprezentacija od G, a to su paraboličke podgrupe. One omogućuju reduciranje nekih problema teorije reprezentacija grupe G na grupe sličnog tipa, ali manjeg ranga.

S A_{min} označavamo podgrupu svih dijagonalnih matrica u G. Ta je podgrupa maksimalan rascjepiv, nad F, torus u G. Nadalje, s P_{min} označavamo podgrupu svih gornjetrokutastih matrica grupe G i nazivamo ju **(standardnom) minimalnom paraboličkom podgrupom**. To je podgrupa grupe G koja sadrži A_{min}. Podgrupu od G koja sadrži standardnu minimalnu paraboličku podgrupu nazivamo **standardnom paraboličkom podgrupom**. Levijevu dekompoziciju standardne paraboličke podgrupe

$$P = MN,$$

gdje je N unipotentna podgrupa od P, nazivamo **standardnom Levijevom dekompozicijom** od P ukoliko M sadrži A_{min}. Grupu M nazivamo **standardnim Levijevim faktorom** (ili standardnom Levijevom podgrupom) od P, a grupu N **unipotentnim radikalom** od P.

Paraboličke podgrupe i njihove **Levijeve dekompozicije** dobijemo iz standardnih paraboličkih podgrupa od G i njihovih standardnih Levijevih dekompozicija konjugiranjem s elementima grupe G.

1.3.1 Paraboličke podgrupe opće linearne grupe

Opća linearna grupa skup je svih regularnih $n \times n$ matrica s elementima iz polja F i označava se s $GL(n, F)$. Neka je

$$\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

uređena particija od n, dakle $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prirodni su brojevi te je

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n,$$

i promatramo svaki element od $GL(n, F)$ kao blok matricu A s blokovima A_{ij}, gdje su $i, j = 1, 2, \dots, k$, veličine $n_i \times n_j$. Označimo s

$$P_\alpha = \{A \in GL(n, F) \colon A_{ij} = 0 \text{ za } i > j\},$$

$$M_\alpha = \{A \in GL(n, F) \colon A_{ij} = 0 \text{ za } i \neq j\},$$

a s N_α skup svih matrica $A \in P_\alpha$ takvih da su sve A_{ii} jedinične matrice.

Preslikavanje

$$\alpha \mapsto P_\alpha$$

bijekcija je sa skupa svih uređenih particija od n na skup svih standardnih paraboličkih podgrupa od $GL(n, F)$ i

$$P_\alpha = M_\alpha N_\alpha$$

standardna je Levijeva dekompozicija standardne paraboličke podgrupe P_α.

Grupa M_α standardni je Levijev faktor od P_α, a grupa N_α unipotentni radikal od P_α. Posebno, uočimo da je

$$M_\alpha \cong GL(n_1, F) \times GL(n_2, F) \times \cdots \times GL(n_k, F).$$

1.3.2 Paraboličke podgrupe neparne specijalne ortogonalne grupe

Neparna specijalna ortogonalna grupa $SO(2n+1, F)$ grupa je svih $(2n+1) \times (2n+1)$ matrica g s elementima iz F čija je determinanta jednaka 1 i koje zadovoljavaju

$${}^{\tau}g g = I_{2n+1},$$

gdje je I_{2n+1} jedinična matrica u $GL(2n+1, F)$, a ${}^{\tau}g$ označava transponiranu matricu matrice g u odnosu na drugu dijagonalu.

Fiksiramo minimalnu paraboličku podgrupu P_{min} od $SO(2n+1, F)$ koja se sastoji od svih gornjetrokutastih matrica u grupi $SO(2n+1, F)$. S P označavamo standardnu paraboličku podgrupu od $SO(2n+1, F)$, odnosno paraboličku podgrupu koja sadrži minimalnu paraboličku podgrupu. Maksimalan rascjepiv torus A sastoji se od svih dijagonalnih matrica u grupi i može se parametrizirati s a na sljedeći način:

$$a \colon (F^\times)^n \to A,$$

$$a(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n, 1, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1}).$$

Neka je $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ uređena particija od m, gdje je $0 < m \leq n$. Tada je

$$(n_1, n_2, \dots, n_k, 2(n-m)+1, n_k, \dots, n_2, n_1)$$

uređena particija od $2n+1$. Definirajmo

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 \\ m_2 &= n_2 \\ &\vdots \\ m_k &= n_k \\ m_{k+1} &= 2(n-m)+1 \\ m_{k+2} &= n_k \\ m_{k+3} &= n_{k-1} \\ &\vdots \\ m_{2k+1} &= n_1. \end{aligned}$$

Sada je $\beta = (m_1, m_2, \ldots, m_{2k+1})$ uređena particija od $2n+1$ i lako se vidi da postoji bijekcija između skupa svih uređenih particija svih m za koje je $0 < m \leq n$ i skupa svih pravih standardnih paraboličkih podgrupa od $SO(2n+1, F)$.

Neka je P_α parabolička podgrupa svih blok gornjetrokutastih matrica p u $SO(2n+1, F)$ takvih da je

$$p = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2k+1},$$

a p_{ij} je $m_i \times m_j$ matrica koja je nulmatrica ako je $i > j$. Tada parabolička podgrupa ima Levijevu dekompoziciju

$$P_\alpha = M_\alpha N_\alpha,$$

gdje je

$$M_\alpha = \{\mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_k, h, {}^\tau g_k^{-1}, \ldots, {}^\tau g_1^{-1}) \colon g_i \in GL(m_i, F), h \in SO(2(n-m)+1, F)\}$$

i

$$N_\alpha = \{p \in P_\alpha \colon p_{ii} = I_{m_i}\}.$$

Posebno, uočimo da je M_α prirodno izomorfna

$$GL(n_1, F) \times GL(n_2, F) \times \cdots \times GL(n_k, F) \times SO(2(n-m)+1, F).$$

Čak štoviše, za $m \leq n$ je

$$M_{(m)} \cong GL(m, F) \times SO(2(n-m)+1, F).$$

1.4 Parabolička indukcija

Na lokalno kompaktnoj topološkoj grupi G možemo definirati desnu Haarovu mjeru μ koja je invarijantna s obzirom na desne translacije, odnosno vrijedi $\mu(Bg) = \mu(B)$, za sve $g \in G$

i Borelov skup B, koji je podskup od G, i koja je jedinstvena do na pozitivnu konstantu. Nadalje, za Haarovu mjeru μ i fiksni $g \in G$, možemo promatrati mjeru $B \mapsto \mu(g^{-1}B)$, koja je također desna Haarova mjera. Tada iz jedinstvenosti slijedi da postoji konstanta $\delta_G(g)$ za koju vrijedi

$$\mu(g^{-1}B) = \delta_G(g)\mu(B),$$

za svaki Borelov skup $B \subseteq G$. Prema tome, imamo homomorfizam grupa

$$\delta_G \colon G \to \mathbb{R}^+$$

koji je definiran s $g \mapsto \delta_G(g)$ i nazivamo ga **modularnim karakterom** od G.

Sada možemo definirati parabolički induciranu reprezentaciju povezane reduktivne grupe G nad lokalnim nearhimedskim poljem F karakteristike 0.

Neka je P parabolička podgrupa od G s Levijevom dekompozicijom $P = MN$ te neka je (σ, U) glatka reprezentacija grupe M. Označimo s δ_P modularni karakter od P. Na prostoru

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$$

svih lokalno konstantnih funkcija $f \colon G \to U$ koje zadovoljavaju

$$f(mng) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\sigma(m)f(g),$$

za sve $m \in M$, $n \in N$ i $g \in G$, grupa G djeluje desnim translacijama:

$$(R_g f)(x) = f(xg).$$

Time je definirana glatka reprezentacija grupe G koja se naziva **parabolički inducirana reprezentacija** grupe G sa σ iz grupe P.

1.4.1 Osnovna svojstva paraboličke indukcije

Navedimo nekoliko osnovnih činjenica vezanih uz paraboličku indukciju:

(1) Neka je P parabolička podgrupa od G s Levijevom dekompozicijom $P = MN$ te neka je $\varphi \colon U_1 \to U_2$ ispreplitanje između glatkih reprezentacija (σ_1, U_1) i (σ_2, U_2) grupe M. Definiramo

$$\mathrm{Ind}_P^G(\varphi) \colon \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_1) \to \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_2)$$

formulom

$$f \mapsto \varphi \circ f.$$

Može se pokazati da je $\mathrm{Ind}_P^G(\varphi)$ ispreplitanje u G. Na taj način Ind_P^G postaje funktor iz kategorije svih glatkih reprezentacija grupe M u kategoriju svih glatkih reprezentacija grupe G, kojeg nazivamo **funktorom paraboličke indukcije**. On pridružuje parabolički induciranu reprezentaciju $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ grupe G reprezentaciji σ grupe M, egzaktan je i prenosi reprezentacije konačne duljine grupe M u reprezentacije konačne duljine grupe G.

(2) Ukoliko je glatka reprezentacija (σ, U) grupe M dopustiva, tada je i inducirana reprezentacija $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ grupe G dopustiva.

(3) Parabolička indukcija komutira s kontragradijentom, odnosno

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)^{\sim} \cong \mathrm{Ind}_P^G(\widetilde{\sigma}).$$

(4) Ako je glatka reprezentacija (σ, U) grupe M unitarizabilna, onda je i inducirana reprezentacija $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ grupe G unitarizabilna.

(5) Ako su $P_1 = M_1N_1$ i $P_2 = M_2N_2$ standardne paraboličke podgrupe od G sa standardnim Levijevim dekompozicijama takve da je $P_1 \subseteq P_2$ i ako je σ glatka reprezentacija grupe M_1, onda za parabolički inducirane reprezentacije vrijedi sljedeće:

$$\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\sigma) \cong \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\mathrm{Ind}_{P_1 \cap M_2}^{M_2}(\sigma)).$$

Navedeno svojstvo naziva se **indukcija u koracima**.

(6) Neka su $P_1 = MN_1$ i $P_2 = MN_2$ paraboličke podgrupe od G (ne nužno standardne) i neka je σ glatka reprezentacija grupe M konačne duljine, tada inducirane reprezentacije

$$\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\sigma) \text{ i } \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\sigma)$$

imaju jednake kompozicione nizove.

1.4.2 Parabolički inducirane reprezentacije opće linearne grupe i osnovna svojstva

Ako je π_1 glatka reprezentacija od $GL(k, F)$ i π_2 glatka reprezentacija od $GL(n-k, F)$, onda je

$$\pi_1 \times \pi_2 = \mathrm{Ind}_{P_{(k,n-k)}}^{GL(n,F)}(\pi_1 \otimes \pi_2)$$

parabolički inducirana reprezentacija grupe $GL(n, F)$ s $\pi_1 \otimes \pi_2$ iz grupe $P_{(k,n-k)}$, gdje je

$$P_{(k,n-k)} = \left\{ \begin{bmatrix} p_k & * \\ 0 & p_{n-k} \end{bmatrix} : p_k \in GL(k, F), p_{n-k} \in GL(n-k, F) \right\}$$

standardna parabolička podgrupa od $GL(n,F)$.

Iz indukcije u koracima slijedi da je

$$\pi_1 \times (\pi_2 \times \pi_3) \cong (\pi_1 \times \pi_2) \times \pi_3,$$

gdje je π_i glatka reprezentacija od $GL(n_i,F)$, za $i = 1,2,3$. Nadalje, ukoliko su glatke reprezentacije π_1 i π_2 konačne duljine, onda parabolički inducirane reprezentacije

$$\pi_1 \times \pi_2 \text{ i } \pi_2 \times \pi_1$$

imaju jednake kompozicione nizove. Također, ukoliko je reprezentacija $\pi_1 \times \pi_2$ ireducibilna, onda vrijedi

$$\pi_1 \times \pi_2 \cong \pi_2 \times \pi_1.$$

1.4.3 Parabolički inducirane reprezentacije neparne specijalne ortogonalne grupe i osnovna svojstva

Neka je $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ uređena particija od m, gdje je $0 < m \leq n$, te neka je π_i reprezentacija grupe $GL(n_i,F)$, za $1 \leq i \leq k$, i σ reprezentacija grupe $SO(2(n-m)+1,F)$. Tada je $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma$ reprezentacija Levijevog faktora M_α paraboličke podgrupe P_α od $SO(2n+1,F)$:

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma(\mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_k, h, {}^\tau g_k^{-1}, \ldots, {}^\tau g_1^{-1})) = \pi_1(g_1) \otimes \cdots \otimes \pi_k(g_k) \otimes \sigma(h).$$

Možemo ju proširiti trivijalno duž N_α do reprezentacije od P_α. Dobivenu reprezentaciju također označimo s $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma$. Tada je

$$\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k \rtimes \sigma = \mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{SO(2n+1,F)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma)$$

parabolički inducirana reprezentacija grupe $SO(2n+1,F)$ s $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma$ iz grupe P_α te imamo homomorfizam grupa

$$R(M_\alpha) \to R(SO(2n+1,F)).$$

U nastavku navodimo nekoliko poznatih svojstava vezanih uz parabolički inducirane reprezentacije neparne specijalne ortogonalne grupe.

Neka je π_1 glatka reprezentacija grupe $GL(n_1,F)$, π_2 glatka reprezentacija grupe $GL(n_2,F)$ i σ glatka reprezentacija od $SO(2n+1,F)$. Tada iz indukcije u koracima slijedi da je

$$\pi_1 \rtimes (\pi_2 \rtimes \sigma) \cong (\pi_1 \times \pi_2) \rtimes \sigma.$$

Nadalje, ako su glatka reprezentacija π od $GL(m, F)$ i glatka reprezentacija σ od $SO(2n+1, F)$ konačne duljine, onda parabolički inducirane reprezentacije

$$\pi \rtimes \sigma \text{ i } \widetilde{\pi} \rtimes \sigma$$

imaju jednake kompozicione nizove. Također, vrijedi

$$\widetilde{\pi \rtimes \sigma} \cong \widetilde{\pi} \rtimes \widetilde{\sigma}.$$

1.5 Kvadratno integrabilne i temperirane reprezentacije

Pojam temperirane reprezentacije jedan je od osnovnih pojmova teorije reprezentacija kojeg ćemo koristiti. Prije same definicije, uvedimo najprije nekoliko pojmova koji su nam potrebni za razumijevanje definicije temperirane reprezentacije.

Neka je (π, V) glatka reprezentacija od G i $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V})$ njezina kontragradijentna reprezentacija. Funkcija s G u $\mathbb{C}$ zadana s

$$g \mapsto \widetilde{v}(\pi(g)v),$$

gdje je $v \in V$ i $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$, naziva se **matrični koeficijent** reprezentacije (π, V).

Schurova lema implicira, jer je operator $\pi(z)$, za $z \in Z(G)$, netrivijalno ispreplitanje iz $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$, da za svaku glatku ireducibilnu reprezentaciju (π, V) postoji karakter ω_π centra $Z(G)$ od G takav da je

$$\pi(z) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_V,$$

za sve $z \in Z(G)$. Karakter

$$\omega_\pi \colon Z(G) \to \mathbb{C}^\times$$

homomorfizam je grupa i naziva se **centralni karakter** od π.

Definicija 1.7. *Kažemo da je ireducibilna reprezentacija (π, V) grupe G* ***kvadratno integrabilna modulo centar*** *ako vrijedi sljedeće:*

(i) Centralni karakter od π unitaran je karakter.

(ii) Apsolutne vrijednosti svih matričnih koeficijenata reprezentacije π kvadratno su integrabilne funkcije na $G/Z(G)$.

Ako je centar od G kompaktan, kažemo samo kvadratno integrabilne reprezentacije. Ponekad, čak ako centar i nije kompaktan, svejedno kažemo samo kvadratno integrabilne reprezentacije. Također, ovakve reprezentacije nazivamo ***reprezentacijama diskretne serije****.*

Posebno, može se pokazati da su takve reprezentacije unitarizabilne.

Definicija 1.8. *Glatka reprezentacija* (π, V) *od* G *naziva se* ***esencijalno kvadratno integrabilna*** *ako postaje kvadratno integrabilna modulo centar nakon što ju pomnožimo s nekim karakterom od* G.

Skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija grupe G označavamo s $D(G)$, dok s $D_u(G)$ označavamo podskup svih unitarizabilnih klasa u $D(G)$.

Sada možemo definirati temperiranu reprezentaciju.

Definicija 1.9. *Ireducibilnu glatku reprezentaciju* τ *grupe* G *nazivamo* ***temperiranom reprezentacijom*** *ako postoji parabolička podgrupa* $P = MN$ *od* G *i ireducibilna kvadratno integrabilna modulo centar reprezentacija* σ *od* M *takva da je*

$$\tau \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma).$$

Također, bitna je tvrdnja i da su ireducibilne temperirane reprezentacije unitarizabilne, koja se može pronaći u [7].

Za kraj ovog potpoglavlja navodimo definiciju Steinbergove reprezentacije iz [10].

Definicija 1.10. *Neka je* G *povezana reduktivna grupa nad lokalnim poljem. Reprezentacija*

$$\mathrm{Ind}_{P_{min}}^G(\delta_{P_{min}}^{\frac{1}{2}}|_{M_{min}})$$

sadrži jedinstven kvadratno integrabilan subkvocijent. Taj subkvocijent naziva se ***Steinbergova reprezentacija*** *od* G *i označava* St_G.

1.6 Jacquetovi moduli

Neka je (π, V) reprezentacija grupe G i P parabolička podgrupa od G s Levijevom dekompozicijom $P = MN$. Definirat ćemo funktor koji je lijevo adjungiran funktoru paraboličke indukcije Ind_P^G, no najprije definiramo Jacquetov modul reprezentacije π.

Neka je

$$V(N) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(n)v - v \colon n \in N, v \in V\}.$$

Grupa M normalizira grupu N, pa je $V(N)$ invarijantan s obzirom na djelovanje od M. Tada na kvocijentu $r_M^G(V) = V/V(N)$ možemo definirati reprezentaciju π_N grupe M s

$$\pi_N(m)(v + V(N)) = \pi(m)v + V(N).$$

Označimo li pak s

$$r_M^G(\pi)$$

kvocijentnu reprezentaciju od M na $V/V(N)$ pomnoženu s $(\delta_P|_M)^{-\frac{1}{2}}$, imamo

$$(r_M^G(\pi))(m)(v+V(N)) = \delta_P^{-\frac{1}{2}}(m)\pi(m)v + V(N),$$

pri čemu je δ_P modularni karakter od P. Tada

$$(r_M^G(\pi), r_M^G(V))$$

nazivamo (normaliziranim) **Jacquetovim modulom** reprezentacije π u odnosu na paraboličku podgrupu $P = MN$.

1.6.1 Osnovna svojstva Jacquetovih modula

Jacquetovi moduli parabolički induciranih reprezentacija često se koriste u teoriji reprezentacija, osobito kod ispitivanja reducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija.

Navedimo sada nekoliko osnovnih svojstava Jacquetovih modula:

(1) Jacquetov modul se na prirodan način može promatrati kao funktor iz kategorije glatkih reprezentacija grupe G u kategoriju glatkih reprezentacija grupe M kojeg nazivamo **Jacquetovim funktorom** i on je egzaktan funktor.

(2) Jacquetov funktor prenosi dopustive reprezentacije od G u dopustive reprezentacije od M. Također, Jacquetov funktor prenosi glatke reprezentacije konačne duljine grupe G u glatke reprezentacije konačne duljine grupe M. Dokazi se mogu potražiti u [11].

(3) Ako su $P_1 = M_1N_1$ i $P_2 = M_2N_2$ standardne paraboličke podgrupe od G sa standardnim Levijevim dekompozicijama takve da je $P_1 \subseteq P_2$ i ako je π glatka reprezentacija od G, onda je

$$r_{M_1}^G(\pi) \cong r_{M_1}^{M_2}(r_{M_2}^G(\pi)).$$

Navedeno svojstvo naziva se **tranzitivnost Jacquetovih modula**.

(4) Opisat ćemo sada **Jacquetov modul kontragradijentne reprezentacije**:

Ako je π glatka reprezentacija od G konačne duljine i $P = MN$ standardna parabolička podgrupa od G sa standardnom Levijevom dekompozicijom. Tada je Jacquetov modul

$$r_M^G(\widetilde{\pi})$$

izomorfan kontragradijentnoj reprezentaciji Jacquetovog modula od π u odnosu na $\overline{P} = M\overline{N}$, gdje je $\overline{P} = M\overline{N}$ parabolička podgrupa za koju je $P \cap \overline{P} = M$ i koju nazivamo suprotnom paraboličkom podgrupom.

1.6.2 Geometrijska lema i Jacquetovi moduli reprezentacija opće linearne grupe

Geometrijska lema opisuje određenu filtraciju Jacquetovih modula induciranih reprezentacija i od izrazite je važnosti u teoriji reprezentacija. Detaljan opis može se pronaći u [8] i [11], a brojne posljedice u [57]. Međutim, za opće linearne grupe i klasične grupe može se koristiti algebarska verzija spomenute leme.

Neka je

$$R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n,$$

gdje je $R_n = R(GL(n, F))$, pri čemu za $n = 0$ imamo trivijalnu grupu. Za reprezentacije π_1 grupe $GL(n_1, F)$ i π_2 grupe $GL(n_2, F)$ imamo pridruživanje

$$(\pi_1, \pi_2) \mapsto \pi_1 \times \pi_2,$$

koje je definirano paraboličkom indukcijom.

Tada na prirodan način dođemo do množenja $\times\colon R \times R \to R$ koje se bilinearno proširi do preslikavanja

$$m\colon R \otimes R \to R$$

definiranog s

$$m(\pi_1 \otimes \pi_2) = \pi_1 \times \pi_2.$$

Na taj način R postaje komutativan prsten.

Nadalje, sada za ireducibilnu reprezentaciju π grupe $GL(n, F)$ možemo promatrati

$$\text{s.s.}(r_{(k)}(\pi)) \in R_k \otimes R_{n-k},$$

gdje s $r_{(k)}(\pi)$ označavamo (normalizirani) Jacquetov modul reprezentacije π u odnosu na standardnu paraboličku podgrupu čiji je Levijev faktor

$$M_{(k,n-k)} \cong GL(k, F) \times GL(n-k, F),$$

za $0 \leq k \leq n$. Definiramo

$$m^*(\pi) = \sum_{k=0}^{n} \text{s.s.}(r_{(k)}(\pi)) \in \sum_{k=0}^{n} R_k \otimes R_{n-k} \hookrightarrow R \otimes R$$

i m^* se proširuje do aditivnog preslikavanja

$$m^*\colon R \to R \otimes R.$$

Bitna posljedica Geometrijske leme je sljedeća činjenica:

$$m^*(\pi_1 \times \pi_2) = m^*(\pi_1) \times m^*(\pi_2).$$

Posebno, može se pokazati da je $R(GL(n,F)) \to R(M_{(k,n-k)})$ homomorfizam Grothendieckovih grupa.

1.6.3 Jacquetovi moduli reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe

Označimo s

$$R(S) = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n(S),$$

gdje je $R_n(S) = R(SO(2n+1,F))$, direktnu sumu Grothendieckovih grupa neparne specijalne ortogonalne grupe. Za reprezentacije π grupe $GL(m,F)$ i σ grupe $SO(2n+1,F)$ imamo pridruživanje

$$(\pi, \sigma) \mapsto \pi \rtimes \sigma,$$

koje je definirano paraboličkom indukcijom. Tada na prirodan način dođemo do preslikavanja

$$\rtimes \colon R \times R(S) \to R(S)$$

i $R(S)$ tada je R-modul. Nadalje, $\rtimes$ bilinearno se proširi do $R \otimes R(S)$. Sada za ireducibilnu reprezentaciju σ grupe $SO(2n+1,F)$ možemo promatrati

$$\text{s.s.}(s_{(k)}(\sigma)) \in R_k \otimes R_{n-k}(S),$$

gdje sa $s_{(k)}(\sigma)$ označavamo (normalizirani) Jacquetov modul reprezentacije σ u odnosu na standardnu paraboličku podgrupu čiji je Levijev faktor $M_{(k)}$, za $k \leq n$. Definiramo

$$\mu^*(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} \text{s.s.}(s_{(k)}(\sigma)) \in R \otimes R(S).$$

Preslikavanje μ^* proširuje se do aditivnog preslikavanje $\mu^* \colon R(S) \to R \otimes R(S)$.

Posebno, može se pokazati da je preslikavanje $R(SO(2n+1,F)) \to R(M_{(k)})$ homomorfizam Grothendieckovih grupa.

1.6.4 Tadićeva strukturna formula

Neka je π dopustiva reprezentacija konačne duljine grupe $GL(m,F)$, a σ dopustiva reprezentacija konačne duljine grupe $SO(2n+1,F)$. Formula za

$$\mu^*(\pi \rtimes \sigma),$$

koja nam omogućava računanje faktora u kompozicionim nizovima Jacquetovih modula od $\pi \rtimes \sigma$, formula je M. Tadića iz [52] i naziva se **strukturna formula**. Opisat ćemo ju u nastavku.

Uočimo da je $R \otimes R(S)$ na očit način $R \otimes R$-modul, dakle vrijedi

$$(\pi_1 \otimes \pi_2) \rtimes (\pi_3 \otimes \sigma) = (\pi_1 \times \pi_3) \otimes (\pi_2 \rtimes \sigma).$$

Neka je $s\colon R \otimes R \to R \otimes R$ transpozicija

$$s\left(\sum_i x_i \otimes y_i\right) = \sum_i y_i \otimes x_i$$

i neka je

$$M^* = (m \otimes 1) \circ (\sim \otimes m^*) \circ s \circ m^* \colon R \to R \otimes R,$$

pri čemu 1 označava identiteta preslikavanje na R, a $\sim$ kontragradijent.

Sada možemo iskazati teorem iz [52], za parabolički inducirane reprezentacije neparne specijalne ortogonalne grupe, koji nam daje strukturnu formulu pomoću koje dobijemo kompozicione faktore Jacquetovih modula parabolički induciranih reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe. Ta formula algebraizira Geometrijsku lemu.

Teorem 1.11. *Neka je π dopustiva reprezentacija konačne duljine grupe $GL(m, F)$ i neka je σ dopustiva reprezentacija konačne duljine grupe $SO(2n + 1, F)$. Tada je*

$$\mu^*(\pi \rtimes \sigma) = M^*(\pi) \rtimes \mu^*(\sigma).$$

Pomoću prethodne formule izvodi se i formula dana sljedećom lemom koja se također često koristi pri računanju Jacquetovih modula.

Lema 1.12. *Neka je ρ ireducibilna kuspidalna reprezentacija grupe $GL(m, F)$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $b - a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Za dopustivu reprezentaciju konačne duljine σ grupe $SO(2n + 1, F)$ imamo*

$$\mu^*(\sigma) = \sum_{\tau, \sigma'} \tau \otimes \sigma'.$$

Tada vrijedi sljedeća jednakost:

$$\begin{aligned}\mu^*(\delta([\nu^a \rho, \nu^b \rho]) \rtimes \sigma) = \sum_{i=a-1}^{b} \sum_{j=1}^{b} \sum_{\tau, \sigma'} \delta([\nu^{-i} \widetilde{\rho}, \nu^{-a} \widetilde{\rho}]) \times \delta([\nu^{j+1} \rho, \nu^b \rho]) \times \tau \otimes \\ \otimes \delta([\nu^{i+1} \rho, \nu^j \rho]) \rtimes \sigma'.\end{aligned}$$

Ako je $x > y$, onda se $\delta([\nu^x \rho, \nu^y \rho])$ izostavlja.

Napomenimo da će reprezentacije oblika $\delta([\rho, \nu^k \rho])$ biti opisane u potpoglavlju 1.10, a kuspidalne reprezentacije u potpoglavlju 1.8.

1.7 Frobeniusov reciprocitet

Osnovna činjenica koja povezuje paraboličku indukciju i Jacquetove module jest Frobeniusov reciprocitet. Kako je Jacquetov funktor lijevo adjungiran funktoru paraboličke indukcije, postoji prirodni izomorfizam

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)) \cong \mathrm{Hom}_M(r_M^G(\pi), \sigma),$$

za reprezentaciju π od G i reprezentaciju σ Levijevog faktora M paraboličke podgrupe $P = MN$ od G.

Taj izomorfizam dobije se evaluacijom od $f \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_P^G(\sigma))$ u 1.

Napomena 1.13. U kontekstu neparne specijalne ortogonalne grupe Frobeniusov reciprocitet bi glasio:

$$\mathrm{Hom}_{SO(2n+1,F)}(\pi, \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k \rtimes \sigma) \cong \mathrm{Hom}_{M_\alpha}(s_\alpha(\pi), \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma),$$

za reprezentaciju π od $SO(2n+1, F)$ i reprezentaciju $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \sigma$ Levijevog faktora M_α paraboličke podgrupe P_α od $SO(2n+1, F)$, pri čemu je $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ uređena particija od m, gdje je $0 < m \leq n$, a π_i reprezentacija od $GL(n_i, F)$, za $1 \leq i \leq k$, i σ reprezentacija grupe $SO(2(n-m)+1, F)$.

1.8 Kuspidalne reprezentacije

Definicija 1.14. *Ireducibilnu reprezentaciju π grupe G za koju je*

$$r_M^G(\pi) = \{0\}$$

za sve prave paraboličke podgrupe $P = MN$ od G nazivamo ***kuspidalnom reprezentacijom****.*

Neka je (π, V) ireducibilna reprezentacija od G za koju je Jacquetov modul

$$r_M^G(\pi) \neq \{0\}$$

za (standardnu) pravu paraboličku podgrupu $P = MN$ od G. Tada Frobeniusov reciprocitet implicira da se π ulaže u $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ za neku ireducibilnu reprezentaciju σ od M. Uzmemo li najmanju takvu paraboličku podgrupu P, iz svojstava Jacquetovih modula slijedi da se π ulaže u $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$, gdje σ zadovoljava

$$r_{M'}^M(\sigma) = \{0\}$$

za sve prave paraboličke podgrupe $P' = M'N'$ od M, odnosno σ je kuspidalna reprezentacija grupe M. Dakle, ireducibilna glatka reprezentacija π od G kuspidalna je ili postoji prava parabolička podgrupa $P = MN$ od G i ireducibilna kuspidalna reprezentacija σ od M takva da je π izomorfna podreprezentaciji od $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$.

Ireducibilne kuspidalne reprezentacije mogu se opisati i kao reprezentacije koje se nikada ne pojavljuju kao subkvocijenti parabolički induciranih reprezentacija iz pravih paraboličkih podgrupa.

H. Jacquet dokazao je da je svaka kuspidalna reprezentacija dopustiva i više o tome može se pronaći u [42]. Također, može se pokazati da su ireducibilne kuspidalne reprezentacije esencijalno kvadratno integrabilne.

Nadalje, neka su reprezentacije $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ ireducibilne kuspidalne reprezentacije općih linearnih grupa. Ako je σ ireducibilan kuspidalni subkvocijent Jacquetovog modula od $\rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_k$ u odnosu na standardnu paraboličku podgrupu, onda se može pokazati da postoji permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ takva da je

$$\sigma \cong \rho_{p(1)} \otimes \rho_{p(2)} \otimes \cdots \otimes \rho_{p(k)}.$$

Također, svaka se $\rho_{p(1)} \otimes \rho_{p(2)} \otimes \cdots \otimes \rho_{p(k)}$, s permutacijom p kao gore, pojavljuje kao subkvocijent Jacquetovog modula u odnosu na neku standardnu paraboličku podgrupu.

1.8.1 Kuspidalni nosač

Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe G. Tada postoje jedinstvene, do na relaciju asociranosti, parabolička podgrupa $P = MN$ od G i ireducibilna kuspidalna reprezentacija σ od M za koje je

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma).$$

Više o relaciji asociranosti može se pronaći u [7]. Klasu ekvivalencije s obzirom na relaciju asociranosti reprezentacije σ zajedno s odgovorajućom Levijevom podgrupom paraboličke podgrupe P od G nazivamo **kuspidalnim nosačem** reprezentacije π.

Posebno, naglasimo da je poznato iz [32] i [33] da ako se

$$\nu^x \rho$$

pojavljuje u kuspidalnom nosaču reprezentacije π, onda je ρ samokontragradijentna i $2x \in \mathbb{Z}$.

Parcijalni kuspidalni nosač od $\sigma \in \mathrm{Irr}(SO(2n+1, F))$ ireducibilna je kuspidalna reprezentacija σ_{cusp} grupe $SO(2m+1, F)$, $m \leq n$, za koju postoji ireducibilna dopustiva reprezentacija π grupe $GL(n-m, F)$ takva da je σ podreprezentacija od

$$\pi \rtimes \sigma_{cusp}.$$

1.9 Langlandsova klasifikacija

Opišimo sada Langlandsovu klasifikaciju, metodu koja je ključna za ovaj rad.

Imamo trojku

$$(P, \tau, \chi),$$

gdje je P standardna parabolička podgrupa od G sa standardnom Levijevom dekompozicijom $P = MN$, τ ireducibilna temperirana reprezentacija od M i χ karakter od M koji poprima samo pozitivne vrijednosti te zadovoljava određene uvjete pozitivnosti (koji će preciznije biti opisani u potpoglavljima 1.9.1 i 1.9.2, odnosno za opće linearne grupe i neparne specijalne ortogonalne grupe).

Takvoj trojci pridružimo ireducibilan kvocijent od

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi\tau)$$

koji je jedinstven i multipliciteta je jedan u cijeloj induciranoj reprezentaciji. Na taj je način neunitarni dual $\widetilde{G}$ parametriziran navedenom trojkom (P, τ, χ).

Naglasimo kako je svaka reprezentacija $\pi \in \widetilde{G}$ izomorfna nekom Langlandsovom kvocijentu.

1.9.1 Langlandsova klasifikacija za opće linearne grupe

Neka je

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(GL(n, F)) \text{ i } D_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_u(GL(n, F)).$$

Neka je $\nu\colon GL(n, F) \to \mathbb{R}^\times$ karakter

$$\nu\colon g \mapsto |\det(g)|_F$$

od $GL(n, F)$, gdje je $|\ |_F$ modularni karakter od F. Za svaku $\delta \in D$ postoji jedinstveni $e(\delta) \in \mathbb{R}$ i $\delta^u \in D_u$ takvi da je

$$\delta \cong \nu^{e(\delta)}\delta^u.$$

Nadalje, neka su reprezentacije $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in D$ takve da je

$$e(\delta_1) \geq e(\delta_2) \geq \cdots \geq e(\delta_k).$$

Tada reprezentacija $\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k$ odgovarajuće opće linearne grupe, koja je parabolički inducirana iz odgovarajuće standardne paraboličke podgrupe, ima jedinstven ireducibilan kvocijent kojeg označavamo s

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k)$$

i imamo bijekciju

$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k) \mapsto L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k)$$

sa skupa svih konačnih multiskupova u D na skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\widetilde{GL(n, F)})$ svih klasa ekvivalencije ireducibilnih glatkih reprezentacija svih općih linearnih grupa nad F. Reprezentacije $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in D$ jedinstvene su do na permutaciju.

Time smo opisali **Langlandsovu klasifikaciju za opće linearne grupe**.

1.9.2 Langlandsova klasifikacije za neparne specijalne ortogonalne grupe

Neka je

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D(GL(m, F)) \text{ i } D_+ = \{\delta \in D \colon e(\delta) > 0\}.$$

Za svaku $\delta \in D$ postoji jedinstveni $e(\delta) \in \mathbb{R}$ i δ^u, koja je unitarizabilna, takvi da je

$$\delta \cong \nu^{e(\delta)} \delta^u.$$

Uzmimo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in D_+$ takve da je

$$e(\delta_1) \geq e(\delta_2) \geq \cdots \geq e(\delta_k)$$

i ireducibilnu temperiranu reprezentaciju σ od $SO(2n+1, F)$, za $n \geq 0$. Tada reprezentacija

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma$$

ima jedinstven ireducibilan kvocijent kojeg označavamo s

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma).$$

Tada imamo bijekciju

$$((\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k), \sigma) \mapsto L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma)$$

sa skupa $M(D_+) \times T$, gdje je $M(D_+)$ skup svih konačnih multiskupova u D_+, a T skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih temperiranih reprezentacija svih $SO(2n+1, F)$, za $n \geq 0$, na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih glatkih reprezentacija svih $SO(2n+1, F)$, za $n \geq 0$.

Time smo opisali **Langlandsovu klasifikaciju za neparne specijalne ortogonalne grupe**.

Napomena 1.15. Svaka ireducibilna reprezentacija π grupe $SO(2n+1, F)$, za $n \geq 0$, izomorfna je jedinstvenom $L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma)$ do na permutaciju reprezentacija $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k \in D_+$.

U radu koristimo verziju Langlandsove klasifikacije za podreprezentacije, kako je opisano u [28]. Naime, netemperiranu reprezentaciju $\pi \in \mathrm{Irr}(SO(2n+1, F))$ zapišemo kao jedinstvenu ireducibilnu (Langlandsovu) podreprezentaciju inducirane reprezentacije oblika

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau,$$

gdje su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ ireducibilne esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije takve da je

$$e(\delta_1) \leq e(\delta_2) \leq \cdots \leq e(\delta_k) < 0,$$

a $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(2n'+1, F))$ temperirana reprezentacija. Dakle, tada pišemo

$$\pi \cong L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau).$$

1.10 Kvadratno integrabilne reprezentacije opće linearne grupe

U ovom potpoglavlju navodimo najvažnije rezultate iz [61] vezane uz reprezentacije opće linearne grupe.

Sa C označavamo skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih kuspidalnih reprezentacija svih $GL(n, F)$, za $n \in \mathbb{N}$. Skup

$$[\rho, \nu^k \rho] = \{\rho, \nu\rho, \nu^2\rho, \ldots, \nu^k\rho\},$$

gdje je $\rho \in C$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nazivamo **segmentom** u C, a skup svih segmenata u C označavamo sa $S(C)$. Svakom segmentu $[\rho, \nu^k\rho] \in S(C)$ možemo pridružiti jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju od

$$\nu^k\rho \times \nu^{k-1}\rho \times \cdots \times \nu\rho \times \rho.$$

Takvu podreprezentaciju označavamo s

$$\delta([\rho, \nu^k\rho])$$

i ona je esencijalno kvadratno integrabilna, a naziva se **generaliziranom Steinbergovom reprezentacijom**.

Jedna je od posljedica Bernstein i Zelevinsky teorije da je preslikavanje

$$[\rho, \nu^k\rho] \mapsto \delta([\rho, \nu^k\rho])$$

bijekcija sa $S(C)$ na skup svih klasa ekvivalencije ireducibilnih esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija od $GL(n, F)$, za $n \in \mathbb{N}$.

Ireducibilna reprezentacija $\delta([\rho, \nu^k\rho])$ okarakterizirana je činjenicom da njezin Jacquetov modul u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^k\rho \otimes \nu^{k-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu\rho \otimes \rho,$$

iz čega slijedi formula

$$m^*(\delta([\rho, \nu^k\rho])) = \sum_{i=-1}^{k} \delta([\nu^{i+1}\rho, \nu^k\rho]) \otimes \delta([\rho, \nu^i\rho]), \tag{1.1}$$

u kojoj uzimamo da je $\delta(\emptyset) = 1$.

Formula (1.1), prema tranzitivnosti Jacquetovih modula, opisuje sve Jacquetove module ireducibilnih esencijalno kvadratno integrabilnih reprezentacija općih linearnih grupa.

Također, ukoliko je $b = a - 1$, onda uzimamo da je $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) = 1$, a ukoliko je $b < a - 1$, uzimamo da je $\delta([\nu^a\rho, \nu^b\rho]) = 0$.

1.11 Casselmanov kriterij

Za određivanje kvadratne integrabilnosti i temperiranosti reprezentacija klasičnih grupa koristi se **Casselmanov kriterij** iz [11], kojeg ćemo u nastavku opisati za neparnu specijalnu ortogonalnu grupu.

Neka je π ireducibilna dopustiva reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$ te neka je k-torka $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ uređena particija od m, gdje je $m \leq n$, takva da je P_α standardna parabolička podgrupa koja je minimalna u odnosu na svojstvo da je Jacquetov modul

$$s_\alpha(\pi) \neq \{0\}.$$

S obzirom da Jacquetov modul $s_\alpha(\pi)$ sadrži netrivijalan kuspidalni subkvocijent, neka je σ ireducibilan kuspidalni subkvocijent od $s_\alpha(\pi)$. Tada σ možemo zapisati u obliku

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_k \otimes \rho,$$

gdje je ρ_i kuspidalna reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, i ρ kuspidalna reprezentacija grupe $SO(2(n-m)+1, F)$. Ako za sve α i σ kao gore vrijede sve nejednakosti

$$\begin{array}{rcl} n_1e(\rho_1) & > & 0 \\ n_1e(\rho_1) + n_2e(\rho_2) & > & 0 \\ & \vdots & \\ n_1e(\rho_1) + n_2e(\rho_2) + \cdots + n_ke(\rho_k) & > & 0, \end{array}$$

onda je reprezentacija π kvadratno integrabilna. Također, vrijedi i obrat, odnosno ako je π kvadratno integrabilna reprezentacija, onda vrijede sve prethodno navedene nejednakosti za sve α i σ kao gore.

Ukoliko u gornjem kriteriju sve nejednakosti zamijenimo s $\geq$, dobijemo kriterij za temperiranu reprezentaciju.

Posebno, naglasimo da je

$$e(\delta([\nu^a \rho, \nu^b \rho])) = \frac{a+b}{2},$$

za ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju ρ opće linearne grupe.

Na kraju ovog poglavlja navodimo definiciju još jedne bitne klase reprezentacija.

Definicija 1.16. *Kažemo da je ireducibilna reprezentacija σ od $SO(2n+1, F)$* ***strogo pozitivna*** *ili* ***strogo pozitivna diskretna serija*** *ako za svako ulaganje*

$$\sigma \hookrightarrow \nu^{a_1}\rho_1 \times \nu^{a_2}\rho_2 \times \cdots \times \nu^{a_k}\rho_k \rtimes \sigma_{cusp},$$

gdje je $\rho_i \in \mathrm{Irr}(GL(n_i, F))$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, kuspidalna unitarizabilna reprezentacija i $\sigma_{cusp} \in \mathrm{Irr}(SO(2n'+1, F))$ kuspidalna reprezentacija, imamo da je $a_i > 0$, za svaki i.

Svaka je strogo pozitivna reprezentacija kvadratno integrabilna.

Poglavlje 2

Reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija

U ovom ćemo poglavlju navesti osnovne pojmove i tvrdnje vezane uz reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija. Detalje, širi opis, kao i brojne primjere reducibilnih i ireducibilnih reprezentacija moguće je pronaći u [13], [18], [36], [37], [38], [44], [53], [57] i drugima.

Reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija jedan je od najvažnijih problema u teoriji reprezentacija reduktivnih grupa. Ukoliko se parabolički inducirana reprezentacija reduktivne p-adske grupe reducira, onda se svi odgovarajući Jacquetovi moduli reduciraju. Ta činjenica i svojstvo tranzitivnosti Jacquetovih modula otvaraju mogućnost dokazivanja ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija.

Posebno, razumijevanje reducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija vrlo je korisno za razumijevanje unitarizabilnosti, odnosno najvažnija je primjena reducibilnosti upravo pri određivanju unitarnog duala klasičnih p-adskih grupa.

2.1 Ulančani segmenti

Označimo, radi jednostavnosti, segment iz $S(C)$ s Δ.

Definicija 2.1. *Kažemo da su segmenti $\Delta_1, \Delta_2 \in S(C)$ **ulančani** ako je*

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \in S(C) \backslash \{\Delta_1, \Delta_2\}.$$

Reprezentacija

$$\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2)$$

reducira se ako i samo ako su segmenti Δ_1 i Δ_2 ulančani i tada je

$$\{L(\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2)), \delta(\Delta_1 \cup \Delta_2) \times \delta(\Delta_1 \cap \Delta_2)\}$$

kompozicioni niz reprezentacije $\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2)$.

Neka je $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k) \in M(S(C))$, gdje je $M(S(C))$ skup svih konačnih multiskupova u $S(C)$. Ako postoje i, j takvi da je $1 \leq i < j \leq k$ za koje su segmenti Δ_i i Δ_j ulančani, onda ukoliko segmente Δ_i i Δ_j zamijenimo segmentima

$$\Delta_i \cup \Delta_j \text{ i } \Delta_i \cap \Delta_j,$$

odnosno uzmemo li

$$(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{i-1}, \Delta_i \cup \Delta_j, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_{j-1}, \Delta_i \cap \Delta_j, \Delta_{j+1}, \dots, \Delta_{k-1}, \Delta_k),$$

dobijemo multiskup $(\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_k')$. Pisat ćemo

$$(\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_k') \prec (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k)$$

i s $\prec$ se generira parcijalni uređaj na $M(S(C))$ koji se označava s $\leq$.

Tada je za skupove $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k)$ i $(\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_k')$ iz $M(S(C))$

$$L(\delta(\Delta_1') \times \delta(\Delta_2') \times \cdots \times \delta(\Delta_k'))$$

subkvocijent od $\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2) \times \cdots \times \delta(\Delta_k)$ ako i samo ako je

$$(\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_k') \leq (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k). \tag{2.1}$$

Nadalje, ukoliko je $(\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_k')$ najmanji takav za kojeg vrijedi (2.1), tada je navedeni subkvocijent multipliciteta jedan u $\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2) \times \cdots \times \delta(\Delta_k)$.

Ukoliko među segmentima $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ nema ulančanih parova segmenata, onda je reprezentacija

$$\delta(\Delta_1) \times \delta(\Delta_2) \times \cdots \times \delta(\Delta_k)$$

ireducibilna. Širi opis i detalji mogu se pronaći u [61].

Kažemo da je segment Δ **balansiran** ukoliko je

$$e(\delta(\Delta)) = 0,$$

a da je **samokontragradijentan** ako je

$$\Delta = \widetilde{\Delta},$$

gdje je $\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{\rho} \in \Delta \colon \rho \in \Delta\}$. Svaki je samokontragradijentan segment balansiran.

2.2 Kuspidalne reducibilnosti i generalizirana Steinbergova reprezentacija

Poznato je da je parabolički inducirana reprezentacija iz unitarizabilne reprezentacije unitarizabilna i takvu reprezentaciju nazivamo **osnovna serija**. Također, unitarizabilne su osnovne serije grupe $SO(2n+1, F)$ ireducibilne, što je poznato iz [20]. Međutim, može se dogoditi da su neke reprezentacije koje su inducirane iz neunitarizabilnih unitarizabilne. Za takve reprezentacije kažemo da pripadaju **komplementarnoj seriji** reprezentacije ili su izolirane u unitarnom dualu. Više o tome može se pronaći u [40] i [49].

Neka je u ostatku ovog potpoglavlja ρ fiksirana ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija grupe $GL(m, F)$ i σ fiksirana ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$.

Može se pokazati da ako se reprezentacija $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma$ reducira za neki $\alpha \in \mathbb{R}$, onda je $\rho \cong \widetilde{\rho}$. Obratno, promotre li se komplementarne serije, može se pokazati da ako je $\rho \cong \widetilde{\rho}$, onda se reprezentacija $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma$ reducira za neki $\alpha \geq 0$.

Iz svojstva (6) paraboličke indukcije iz potpoglavlja 1.4.1 slijedi da se reprezentacija

$$\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma$$

reducira ako i samo ako se reprezentacija

$$\nu^{-\alpha} \rho \rtimes \sigma$$

reducira. Prema tome, dovoljno je promatrati samo nenegativne eksponente.

U nastavku navodimo veoma bitnu tvrdnju iz [46].

Lema 2.2. *Za samokontragradijentnu reprezentaciju ρ postoji točno jedan $\alpha \geq 0$ za kojeg se reprezentacija*

$$\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma$$

reducira. Ta se točka označava s $\alpha_{\rho,\sigma}$, ili, kraće, samo s α.

Poznata slutnja tvrdi da je za svaku reprezentaciju σ

$$\alpha_{\rho,\sigma} - \alpha_{\rho,1_{F^\times}} \in \mathbb{Z}.$$

Ta se slutnja naziva **osnovna pretpostavka**. Detalji se mogu pogledati u [30] i [33]. Ona implicira da je

$$\alpha_{\rho,\sigma} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

za bilo koju reprezentaciju σ.

Iz nedavnih radova Arthura, Mœglin i Waldspurgera sada je poznato da su, u lokalnom polju karakteristike 0, kuspidalne točke reducibilnosti iz

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Dokaz se, za polja karakteristike 0, može pronaći u [32, Théorème 3.1.1.], a za polja pozitivne karakteristike u [12, Theorem 7.8.]. Pri tome se koristi fundamentalan rad Arthura [1].

Za fiksiranu σ trebalo bi postojati samo konačno mnogo ρ za koje $\alpha_{\rho,\sigma} \notin \{0, \frac{1}{2}\}$, a Mœglin je postavila slutnju o takvim ρ, o čemu se više može pronaći u [31] i [33]. Upravo iz tog razloga se točke reducibilnosti različite od 0 i $\frac{1}{2}$ nazivaju iznimkama.

Nadalje, neka je ρ ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija grupe $GL(m, F)$ i σ ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$, te neka je $\rho \cong \tilde{\rho}$. Pretpostavimo da se $\nu^\alpha \rho \rtimes \sigma$ reducira za neki $\alpha > 0$. Reprezentacija

$$\nu^{\alpha+n}\rho \times \nu^{\alpha+n-1}\rho \times \cdots \times \nu^{\alpha+1}\rho \times \nu^\alpha \rho \rtimes \sigma,$$

za $n \geq 0$, ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju koju označavamo s

$$\delta([\nu^\alpha \rho, \nu^{\alpha+n}\rho]; \sigma).$$

Ta je reprezentacija kvadratno integrabilna i nazivamo ju **generaliziranom Steinbergovom reprezentacijom**. Imamo

$$\mu^*(\delta([\nu^\alpha \rho, \nu^{\alpha+n}\rho]; \sigma)) = \sum_{k=-1}^{n} \delta([\nu^{\alpha+k+1}\rho, \nu^{\alpha+n}\rho]) \otimes \delta([\nu^\alpha \rho, \nu^{\alpha+k}\rho]; \sigma)$$

(uzimamo da je $\delta(\emptyset; \sigma) = \sigma$). Vrijedi

$$\delta([\nu^\alpha \widetilde{\rho, \nu^{\alpha+n}}\rho]; \sigma) \cong \delta([\nu^\alpha \rho, \nu^{\alpha+n}\rho]; \widetilde{\sigma}).$$

2.3 Reducibilnost u kuspidalnom slučaju

Opisat ćemo u nastavku Shahidijev rezultat o reducibilnosti u kuspidalnom slučaju iz [43], [44] i [55].

Neka je $\rho \in C$ samokontragradijentna reprezentacija i neka je σ ireducibilna kuspidalna generička reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$. Tada postoji $\alpha_0 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ takav da se reprezentacija

$$\nu^{\alpha_0}\rho \rtimes \sigma$$

reducira, te da je reprezentacija

$$\nu^{\beta}\rho \rtimes \sigma$$

ireducibilna za $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $|\beta| \neq \alpha_0$. Kažemo da par (ρ, σ) zadovoljava uvjet (C).

Shahidi je u [44] pokazao da prethodni uvjet vrijedi, ukoliko je $n = 0$, za svaku reprezentaciju ρ.

Štoviše, može se pokazati da ukoliko par (ρ, σ) kao gore zadovoljava uvjet (C), onda zadovoljava točno jedan od sljedećih uvjeta:

(C0) Reprezentacija $\rho \rtimes \sigma$ reducira se i reprezentacija $\nu^\beta \rho \rtimes \sigma$ ireducibilna je ako je $\beta \in \mathbb{R}^\times$.

(C$\frac{1}{2}$) Reprezentacija $\nu^{\frac{1}{2}} \rho \rtimes \sigma$ reducira se i reprezentacija $\nu^\beta \rho \rtimes \sigma$ ireducibilna je ako je $\beta \in \mathbb{R} \backslash \{\pm \frac{1}{2}\}$.

(C1) Reprezentacija $\nu \rho \rtimes \sigma$ reducira se i reprezentacija $\nu^\beta \rho \rtimes \sigma$ ireducibilna je ako je $\beta \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$.

2.4 Kriterij reducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija

U ovom ćemo potpoglavlju opisati način iz [53] i [57] kojim se, u mnogim slučajevima, može odrediti reducibilnost parabolički induciranih reprezentacija.

Neka je $P_0 = M_0 N_0$ parabolička podgrupa od G i neka je σ ireducibilna reprezentacija od M_0. Pretpostavimo da su π and Π reprezentacije od G konačne duljine te da postoji parabolička podgrupa $P = MN$ takva da vrijede sljedeća tri uvjeta:

(R1) $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma) \leq \Pi$, $\pi \leq \Pi$.

(R2) $r_M^G(\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)) + r_M^G(\pi) \not\leq r_M^G(\Pi)$.

(R3) $r_M^G(\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)) \not\leq r_M^G(\pi)$.

Kako je Jacquetov funktor egzaktan, slijedi da se inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)$$

reducira.

Pri primjeni ovog kriterija uobičajeno je da se za reprezentacije π i Π odaberu reprezentacije koje su parabolički inducirane reprezentacije iz različitih paraboličkih podgrupa.

Naglasimo ovdje što znači da je

$$\pi \leq \pi'.$$

Neka su π i π' dopustive reprezentacije grupe G konačne duljine. Tada je $\pi \leq \pi'$ ako je za svaku ireducibilnu dopustivu reprezentaciju σ od G, multiplicitet od σ u π manji ili jednak multiplicitetu od σ u π'.

Dakle, ukoliko želimo pokazati da $\pi \nleq \pi'$, dovoljno je pronaći ireducibilnu reprezentaciju σ čiji je multiplicitet u π veći ili jednak od multipliciteta u π'. Štoviše, dovoljno je pronaći ireducibilnu reprezentaciju σ koja je subkvocijent od π, ali nije subkvocijent od π', ukoliko takva reprezentacija postoji. Nadalje, da bismo pokazali da $\pi \nleq \pi'$, dovoljno je pronaći paraboličku podgrupu $P = MN$ od G takvu da $r_M^G(\pi) \nleq r_M^G(\pi')$.

Sljedeći teorem iz [57] daje jednostavan, ali osobito koristan kriterij za ispitivanje reducibilnosti reprezentacija. Napomenimo da je teorem naveden uz izmjenu u pretpostavci s obzirom da je sada poznato da je, za reprezentacije ρ i σ (ireducibilna je kuspidalna reprezentacija σ unitarizabilna) kao iz teorema, za samokontragradijentnu reprezentaciju ρ, reprezentacija $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma$ ireducibilna za sve $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(1/2)\mathbb{Z}$.

Teorem 2.3. *Neka je reprezentacija $\rho \in C$ unitarizabilna i neka je σ ireducibilna kuspidalna reprezentacija od $SO(2n+1, F)$. Ako je ρ samokontragradijentna reprezentacija, tada je $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma$ ireducibilna za sve $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(1/2)\mathbb{Z}$. Pretpostavimo da je $\Delta \in S(C)$ takav da je $\Delta \subset \{\nu^\alpha\rho \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Tada se reprezentacija*

$$\delta(\Delta) \rtimes \sigma \text{ reducira}$$

ako i samo ako se reprezentacija

$$\rho' \rtimes \sigma \text{ reducira za neku } \rho' \in \Delta.$$

Reprezentacija

$$\pi = \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}1_{F^\times}, \nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times}]) \rtimes 1_{F^\times}$$

poseban je slučaj kojeg pokriva prethodni teorem. Koristeći ranije naveden kriterij reducibilnosti može se pokazati da se reprezentacija $\pi = \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}1_{F^\times}, \nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times}]) \rtimes 1_{F^\times}$ reducira. S obzirom da je reprezentacija π unitarizabilna, iz Frobeniusovog reciprociteta slijedi da svaki ireducibilan subkvocijent od π, koji je ujedno podreprezentacija od π, u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}1_{F^\times}, \nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times}]) \otimes 1_{F^\times}.$$

Prema tome, reprezentacija π duljine je 2. Označimo s τ_1 i τ_2 jedinstvene ireducibilne subkvocijente od π, pri čemu je τ_1 jedinstven ireducibilan subkvocijent od π koji u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times} \times \nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times} \otimes 1_{F^\times}.$$

Dakle, imamo

$$\pi = \tau_1 \oplus \tau_2.$$

2.5 Dokazivanje ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija

U nastavku ćemo opisati kako se može pokazati da je parabolički inducirana reprezentacija ireducibilna. Detalji, kao i brojni primjeri, mogu se pogledati u [53] i [57].

Neka je reprezentacija σ ireducibilna reprezentacija Levijevog faktora M_0 paraboličke podgrupe $P_0 = M_0N_0$ grupe G i pretpostavimo da se $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)$ reducira. Tada je

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma) = \pi_1 + \pi_2$$

u Grothendieckovoj grupi, gdje je i $\pi_1 > 0$ i $\pi_2 > 0$. Neka je P standardna parabolička podgrupa od G sa standardnom Levijevom dekompozicijom $P = MN$. Promatramo Jacquetove module

$$r_M^G(\pi_i),\ i = 1, 2,$$

kao elemente Grothendieckove grupe $R(M)$. Tada moraju vrijediti sljedeći uvjeti:

(I1) $r_M^G(\pi_i) \geq 0$ i $r_M^G(\pi_1) \neq 0$ ako i samo ako je $r_M^G(\pi_2) \neq 0$.

(I2) $r_M^G(\pi_1) + r_M^G(\pi_2) = r_M^G(\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma))$ u $R(M)$.

(I3) $r_{M_2}^{M_1}(r_{M_1}^G(\pi_i)) = r_{M_2}^G(\pi_i)$, za $P_1 \supset P_2$.

Prema tome, pokažemo li da ne postoji sustav $r_M^G(\pi_i) \in R(G)$, za $i = 1, 2$, gdje P ide po podskupu standardnih paraboličkih podgrupa, koji zadovoljava uvjete (I1), (I2) i (I3), onda je parabolički inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)$$

ireducibilna.

Štoviše, često je moguće pokazati da ne postoji takav sustav za tri prave standardne paraboličke podgrupe P, P_1 i P_2 takve da je $P \subset P_1, P_2$, pri pokazivanju ireducibilnosti parabolički induciranih reprezentacija.

Posebno, treba napomenuti da su uvjeti (I1), (I2) i (I3) nužni za reducibilnost. Prema tome, postojanje takvog sustava ne dokazuje reducibilnost.

Uzmemo li ireducibilnu dopustivu reprezentaciju σ_0 od M_0 i nenul subkvocijent τ od $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma_0)$, može se pokazati da ako je

$$r_M^G(\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma_0)) \neq 0,$$

za neku paraboličku podgrupu $P = MN$ od G, onda je

$$r_M^G(\tau) \neq 0.$$

Napomena 2.4. Neka je sada reprezentacija σ, koja je ranije zadana, unitarizabilna. U tom se slučaju ireducibilnost parabolički inducirane reprezentacije $\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)$ može dokazati na jednostavniji način, od kojih jedan navodimo (detalji, kao i dodatni načini pokazivanja ireducibilnosti u ovakvim slučajevima, mogu se pronaći u [57]). Pretpostavimo, primjerice, da je

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P'}^G(\sigma'),$$

za neku ireducibilnu reprezentaciju σ' standardne Levijeve podgrupe M' standardne paraboličke podgrupe P' od G. Prema Frobeniusovom reciprocitetu znamo da je multiplicitet reprezentacije σ' u

$$r_{M'}^G(\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma))$$

veći ili jednak 1. Ukoliko je navedeni multiplicitet jednak 1, onda je parabolički inducirana reprezentacija

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^G(\sigma)$$

ireducibilna, što slijedi iz egzaktnosti Jacquetovih funktora.

2.6 Zanimljivi primjeri

Navest ćemo nekoliko poznatih primjera ireducibilnosti u ovom potpoglavlju.

Označimo s $\delta(\nu^\alpha\rho;\sigma)$ jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju od $\nu^\alpha\rho \rtimes \sigma$.

Neka su ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija ρ grupe $GL(p,F)$ i ireducibilna unitarizabilna kuspidalna reprezentacija σ grupe $SO(2n+1,F)$ takve da se reprezentacija

$$\nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes \sigma$$

reducira. Tada se reprezentacija

$$\delta([\nu^{-\frac{m-1}{2}}\rho, \nu^{\frac{m-1}{2}}\rho]) \rtimes \delta(\nu^{\frac{1}{2}}\rho;\sigma)$$

reducira za svaki parni $m \in \mathbb{N}$, osim za $m=2$, a ireducibilna je za svaki neparni $m \in \mathbb{N}$.

Nadalje, neka je ρ samokontragradijentna ireducibilna kuspidalna reprezentacija grupe $GL(p,F)$ takva da se reprezentacija

$$\nu^{\frac{1}{2}}\rho \rtimes 1_{F^\times}$$

reducira. Tada je za svaku samokontragradijentnu ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju ρ' od $GL(p',F)$ reprezentacija

$$\delta([\nu^{-\frac{m-1}{2}}\rho', \nu^{\frac{m-1}{2}}\rho']) \rtimes \delta(\nu^{\frac{1}{2}}\rho;1_{F^\times})$$

ireducibilna za sve neparne m.

Jedina je iznimka u slučaju reducibilnosti kada je $\rho' \cong \rho$ i $m = 2$.

2.7 R-grupe

U ovom ćemo potpoglavlju opisati R-grupe za grupu $SO(2n+1, F)$. Više o navedenim R-grupama može se pronaći u [13], [21] i [57].

Neka je P standardna parabolička podgrupa od $SO(2n+1, F)$ sa standardnom Levijevom dekompozicijom $P = MN$ te neka je σ ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija standardne Levijeve podgrupe M. Nadalje, neka je $W(\sigma)$ stabilizator od σ u Weylovoj grupi od $SO(2n+1, F)$.

Označimo s $W(\sigma)'$ podgrupu onih elemenata u $W(\sigma)$ za koje odgovarajući normalizirani standardni operator ispreplitanja djeluje na $\mathrm{Ind}_P^{SO(2n+1,F)}(\sigma)$ kao skalar.

Tada je

$$W(\sigma)/W(\sigma)'$$

R-**grupa** od σ i ta je grupa komutativna.

U nastavku navodimo jednu posljedicu koju je dokazao Goldberg u [13].

Teorem 2.5. *Neka su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ (unitarizabilne) ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije općih linearnih grupa te neka je π ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$. Označimo s l broj međusobno neizomorfnih reprezentacija δ_i među $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ takvih da se reprezentacija*

$$\delta_i \rtimes \pi$$

reducira. Tada je reprezentacija

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \pi$$

multipliciteta jedan i reducira se u direktnu sumu 2^l ireducibilnih (temperiranih) reprezentacija.

Prethodni je teorem bitan pri traženju neunitarnog duala koristeći Langlandsovu klasifikaciju s obzirom da nas za ireducibilnu kvadratno integrabilnu reprezentaciju grupe $SO(2n+1, F)$ zanima koje se sve ireducibilne temperirane reprezentacije pojavljuju.

Nadalje, neka su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ (unitarizabilne) ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije općih linearnih grupa te neka je π ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$. Ako je p permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ i $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$, onda su reprezentacija

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \pi$$

i reprezentacija
$$\delta_{p(1)}^{\epsilon_1} \times \delta_{p(2)}^{\epsilon_2} \times \cdots \times \delta_{p(k)}^{\epsilon_k} \rtimes \pi,$$
gdje $\delta_{p(i)}^{\epsilon_i}$ označava $\delta_{p(i)}$ ako je $\epsilon_i = 1$ i $\widetilde{\delta}_{p(i)}$ ako je $\epsilon_i = -1$, međusobno izomorfne.

Neka je
$$\delta_1' \times \delta_2' \times \cdots \times \delta_{k'}' \rtimes \pi'$$
neka druga reprezentacija, pri čemu su $\delta_1', \delta_2', \ldots, \delta_{k'}'$ (unitarizabilne) ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije općih linearnih grupa i π' ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija grupe $SO(2n'+1, F)$. Pretpostavimo da reprezentacija
$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \pi$$
i reprezentacija
$$\delta_1' \times \delta_2' \times \cdots \times \delta_{k'}' \rtimes \pi'$$
imaju zajednički ireducibilan subkvocijent. Tada je
$$\pi \cong \pi',$$
pa je i $n = n'$, i $k = k'$, te postoje permutacija p skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ i $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$ takvi da je
$$\delta_i' \cong \delta_{p(i)}^{\epsilon_i},$$
za sve $i = 1, 2, \ldots, k$.

2.8 Reducibilnost određenih klasa parabolički induciranih reprezentacija

U ovom ćemo potpoglavlju navesti nekoliko osnovnih rezultata o reducibilnosti reprezentacija koji se mogu pronaći u [17]. Ti su rezultati generalizacija rezultata iz [51].

Lema 2.6. *Neka su $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL(n_1, F), GL(n_2, F), \ldots, GL(n_k, F)$ i neka je σ ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija od $SO(2n+1, F)$, te neka je $\pi = \delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma$. Tada se π reducira ako i samo ako se barem jedna od $\delta_i \rtimes \sigma$ reducira.*

Dokaz. Pretpostavimo da se $\delta_i \times \sigma$ reducira za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. U Grothendieckovoj grupi imamo
$$\pi = \delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_{i-1} \times \delta_{i+1} \times \cdots \times \delta_k \rtimes (\delta_i \rtimes \sigma)$$
i π se očito reducira.

Pretpostavimo sada da je $\delta_i \rtimes \sigma$ ireducibilna za svaki $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Prema [45], dovoljno je pokazati da je R-grupa za π trivijalna da bismo pokazali da je π ireducibilna. Bez smanjenja općenitosti, zapišimo π kao

$$\pi = \delta_1^{(1)} \times \delta_2^{(1)} \times \cdots \times \delta_{j_1}^{(1)} \times \delta_1^{(2)} \times \delta_2^{(2)} \times \cdots \times \delta_{j_2}^{(2)} \times \cdots \times \delta_1^{(m)} \times \delta_2^{(m)} \times \cdots \times \delta_{j_m}^{(m)} \rtimes \sigma,$$

gdje su $\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \dots, \delta_{j_i}^{(i)}$ reprezentacije od $GL(k_i, F)$, pri čemu su svi k_i međusobno različiti. Neka R_i označava R-grupu za

$$\delta_1^{(i)} \times \delta_2^{(i)} \times \cdots \times \delta_{j_i}^{(i)} \rtimes \sigma.$$

Sada, ako R označava R-grupu za π, onda prema [13] znamo da je

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m.$$

Dakle, R je trivijalna ako i samo ako je svaka R_i trivijalna, a prema [13] je R_i trivijalna ako i samo ako su sve

$$\delta_1^{(i)} \rtimes \sigma,\ \delta_2^{(i)} \rtimes \sigma, \dots, \delta_{j_i}^{(i)} \rtimes \sigma$$

ireducibilne. Prema tome, možemo zaključiti da je reprezentacija π ireducibilna. □

Posebno, uočimo da je prethodna lema poseban slučaj teorema 2.5.

Sljedeći rezultat, čiji se dokaz može pronaći u [51], koristi se u dokazu teorema 2.8.

Lema 2.7. *Ako su $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ ireducibilne esencijalno kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL(m_1, F), GL(m_2, F), \dots, GL(m_k, F)$ takve da je*

$$e(\delta_1) \geq e(\delta_2) \geq \cdots \geq e(\delta_k) > 0$$

i σ temperirana reprezentacija od $SO(2n+1, F)$, onda je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \sigma)\tilde{} = L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tilde{\sigma}).$$

Dokaz idućeg rezultata, kojeg ćemo u nastavku često koristiti, može se pronaći u [17].

Teorem 2.8. *Neka su $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ ireducibilne kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL(n_1, F), GL(n_2, F), \dots, GL(n_l, F)$ i σ ireducibilna kvadratno integrabilna reprezentacija od $SO(2n+1, F)$. Za $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$, stavimo*

$$\pi = \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_l}\delta_l \rtimes \sigma.$$

Tada se π reducira ako i samo ako se barem jedna od sljedećih reprezentacija reducira:

(1) $\nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{\alpha_j}\delta_j$, *za* $i \neq j$.

(2) $\nu^{\alpha_i}\delta_i \rtimes \sigma$.

(3) $\nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j$, *za* $i \neq j$.

Dokaz. Promotrimo najprije

$$\nu^{\alpha_1}\delta_1 \otimes \nu^{\alpha_2}\delta_2 \otimes \cdots \otimes \nu^{\alpha_l}\delta_l \otimes \sigma.$$

Ako je neki $\alpha_i < 0$, zamijenimo $\nu^{\alpha_i}\delta_i$ s $\nu^{-\alpha_i}\tilde{\delta}_i$. Prema [6], reprezentacija dobivena induciranjem te reprezentacije jednaka je π u Grothendieckovoj grupi i ireducibilna je ako i samo ako je reprezentacija π ireducibilna. Prema tome, možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je $\alpha_i \geq 0$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Nadalje, permutirajmo $\nu^{\alpha_i}\delta_i$ tako da bude

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l \geq 0.$$

To možemo napraviti jer to odgovara djelovanju Weylove grupe, pa se u Grothendieckovoj grupi ništa neće promijeniti.

Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\pi = \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma,$$

pri čemu je $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k > 0$.

Pretpostavimo da su sve reprezentacije u (1), (2) i (3) ireducibilne. Radi jednostavnosti, neka je $\delta = \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma$. Prema Lemi 2.6 je δ ireducibilna i δ jest temperirana reprezentacija. Uočimo da je

$$\pi_1 = L(\nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \rtimes \delta)$$

jedinstven ireducibilan kvocijent od π.

S obzirom da su reprezentacije u (1), (2) i (3) ireducibilne, imamo sljedeće izomorfizme:

$$\begin{aligned}
\nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{\alpha_j}\delta_j &\cong \nu^{\alpha_j}\delta_j \times \nu^{\alpha_i}\delta_i,\\
\nu^{\alpha_i}\delta_i \rtimes \sigma &\cong \nu^{-\alpha_i}\tilde{\delta}_i \rtimes \sigma,\\
\nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j &\cong \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j \times \nu^{\alpha_i}\delta_i,\\
\nu^{-\alpha_i}\tilde{\delta}_i \times \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j &\cong \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j \times \nu^{-\alpha_i}\tilde{\delta}_i.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\pi &\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times (\nu^{\alpha_k}\delta_k \times \delta_{k+1}) \times \delta_{k+2} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma\\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \delta_{k+1} \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \times \delta_{k+2} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-1}}\delta_{k-1} \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes (\nu^{\alpha_k}\delta_k \rtimes \sigma) \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-1}}\delta_{k-1} \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \rtimes \sigma \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-1}}\delta_{k-1} \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \delta_l \rtimes \sigma \\
&\vdots \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-1}}\delta_{k-1} \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-2}}\delta_{k-2} \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \nu^{\alpha_{k-1}}\delta_{k-1} \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma \\
&\vdots \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-2}}\delta_{k-2} \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \nu^{-\alpha_{k-1}}\tilde{\delta}_{k-1} \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma \\
&\cong \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_{k-2}}\delta_{k-2} \times \nu^{-\alpha_{k-1}}\tilde{\delta}_{k-1} \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma \\
&\vdots \\
&\cong \nu^{-\alpha_1}\tilde{\delta}_1 \times \nu^{-\alpha_2}\tilde{\delta}_2 \times \cdots \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma.
\end{aligned}
$$

Promotrimo sada reprezentaciju

$$\pi^* = \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \times \tilde{\delta}_{k+1} \times \cdots \times \tilde{\delta}_l \rtimes \tilde{\sigma}$$

koja ima jedinstven ireducibilan kvocijent

$$\pi_1^* = L(\nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \rtimes \tilde{\delta}).$$

Nadalje, vidimo da

$$\widetilde{\pi^*} = \nu^{-\alpha_1}\tilde{\delta}_1 \times \nu^{-\alpha_2}\tilde{\delta}_2 \times \cdots \times \nu^{-\alpha_k}\tilde{\delta}_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma$$

ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju $\widetilde{\pi_1^*}$ koja je, prema prethodno pokazanom, jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od π. Sada, iz Leme 2.7 slijedi da je

$$\widetilde{\pi_1^*} = \pi_1.$$

Prema tome, ako bi se π reducirala, sadržavala bi π_1 s multiplicitetom dva. Naime, sadržavala bi ju jednom kao jedinstvenu podreprezentaciju, a jednom kao jedinstveni kvocijent. Kako se, prema Langlandsovoj klasifikaciji, π_1 pojavljuje s multiplicitetom jedan u danoj reprezentaciji, došli smo do kontradikcije. Dakle, reprezentacija π jest ireducibilna.

Pretpostavimo sada da se jedna od reprezentacija u (1), (2) ili (3) reducira. Bez smanjenja općenitosti neka se, primjerice, reprezentacija

$$\nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{-\alpha_j}\tilde{\delta}_j$$

reducira. Tada je u Grothendieckovoj grupi

$$\pi = \nu^{\alpha_1}\delta_1 \times \nu^{\alpha_2}\delta_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_i}\delta_i \times \nu^{-\alpha_j}\widetilde{\delta}_j \times \nu^{\alpha_{i+1}}\delta_{i+1} \times \cdots \times \nu^{\alpha_{j-1}}\delta_{j-1} \times \\ \times \nu^{\alpha_{j+1}}\delta_{j+1} \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\delta_k \times \delta_{k+1} \times \cdots \times \delta_l \rtimes \sigma$$

i vidimo da se reprezentacija π reducira.

Time je dokaz teorema gotov. □

2.9 Kriterij ireducibilnosti

U ovom ćemo potpoglavlju navesti kriterij ireducibilnosti kojeg ćemo koristiti pri traženju unitarnog duala, a koji se može pronaći u [56].

Neka je τ ireducibilna reprezentacija grupe $SO(2n+1, F)$. Tada je τ subkvocijent od $\rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_k \rtimes \sigma$, za neke ireducibilne kuspidalne reprezentacije $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ općih linearnih grupa i ireducibilnu kuspidalnu reprezentaciju σ grupe $SO(2m+1, F)$. Reprezentacija $\sigma = \tau_{cusp}$ parcijalni je kuspidalni nosač od τ. Ako je $\rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_k$ reprezentacija grupe $GL(p, F)$, onda se Jacquetov modul $s_{(p)}(\tau)$ označava sa

$$s_{GL}(\tau).$$

Ireducibilna kuspidalna reprezentacija ρ opće linearne grupe naziva se **faktorom** od τ ako postoji ireducibilan subkvocijent

$$\pi \otimes \tau_{cusp}$$

od $s_{GL}(\tau)$ takav da je ρ u kuspidalnom nosaču od π. Tada je skup svih faktora od τ sadržan u

$$\{\rho_1, \widetilde{\rho}_1, \rho_2, \widetilde{\rho}_2, \ldots, \rho_k, \widetilde{\rho}_k\}.$$

Za svaki $1 \leq i \leq k$, barem je jedna reprezentacija iz $\{\rho_i, \widetilde{\rho}_i\}$ faktor od τ.

Lema 2.9. *Neka je π ireducibilna reprezentacija klasične grupe $SO(2n+1, F)$ i neka je ρ ireducibilna kuspidalna reprezentacija opće linearne grupe $GL(m, F)$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

(i) $\rho \not\cong \widetilde{\rho}$.

(ii) Reprezentacija $\rho \rtimes \pi_{cusp}$ jest ireducibilna.

(iii) Reprezentacije $\rho \times \rho'$ i $\widetilde{\rho} \times \rho'$ ireducibilne su za svaki faktor ρ' od π.

(iv) Niti ρ niti $\widetilde{\rho}$ nisu faktori od π.

Tada je $\rho \rtimes \pi$ ireducibilna reprezentacija.

Neka je X skup nekih glatkih reprezentacija. Tada označavamo

$$\widetilde{X} = \{\widetilde{\pi} \colon \pi \in X\}.$$

Propozicija 2.10. *Neka je π ireducibilna reprezentacija klasične grupe $SO(2n+1,F)$.*

(i) Neka je X skup svih ireducibilnih kuspidalnih reprezentacija općih linearnih grupa koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(a) $\nu^{\pm 1}\rho \notin \widetilde{X}$, za svaki $\rho \in X$.

(b) $X \cap \widetilde{X} = \emptyset$.

(c) Niti jedan element od $X \cup \widetilde{X}$ nije faktor od π.

(d) Reprezentacija $\rho \rtimes \pi_{cusp}$ ireducibilna je za svaki $\rho \in X$.

(e) Reprezentacije $\rho \times \rho'$ i $\widetilde{\rho} \times \rho'$ ireducibilne su za svaki $\rho \in X$ i za svaki faktor ρ' od π.

Pretpostavimo da je θ ireducibilna reprezentacija opće linearne grupe čiji je kuspidalni nosač sadržan u X. Tada je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi$$

ireducibilna.

(ii) Pretpostavimo da možemo naći skupove X i Y (klase ekvivalencije) ireducibilnih kuspidalnih reprezentacija općih linearnih grupa takve da $X \cup \widetilde{X} \cup Y \cup \widetilde{Y}$ sadrži sve faktore od π, $X \cap (Y \cup \widetilde{Y}) = \emptyset$ i da vrijede uvjeti (a), (b) i (d) iz (i). Nadalje, pretpostavimo da su reprezentacije $\rho \times \rho'$ i $\widetilde{\rho} \times \rho'$ ireducibilne, za sve $\rho \in X \cup \widetilde{X}$ i $\rho' \in Y$ (to jest, da vrijedi uvjet (e) iz (i), za sve $\rho \in X \cup \widetilde{X}$ i $\rho' \in Y$).

Tada postoji ireducibilna reprezentacija θ opće linearne grupe čiji je kuspidalni nosač sadržan u X (odnosno, svaka reprezentacija nosača) i postoji ireducibilna reprezentacija π' klasične grupe čiji su svi faktori sadržani u $Y \cup \widetilde{Y}$ takva da je

$$\pi \cong \theta \rtimes \pi'.$$

Parcijalni kuspidalni nosač od π' jest π_{cusp}. Nadalje, π određuje θ i π' kao gore do na ekvivalenciju.

Ako je X podskup skupa svih faktora od π, onda se svaka reprezentacija od X pojavljuje u kuspidalnom nosaču od θ.

2.10 Reducibilnosti u nekim grupama manjeg ranga

Za kraj, navodimo rezultat iz [16] vezan uz reducibilnost reprezentacija u grupama $GL(2,F)$ i $SO(3,F)$.

Naglasimo najprije kako sa St_G označavamo Steinbergovu, a s 1_G trivijalnu reprezentaciju reduktivne grupe G. Posebno, poznato je da je

$$\mathrm{St}_{SO(2n+1,F)} = \delta([\nu^{\frac{1}{2}}1_{F^\times}, \nu^{n-\frac{1}{2}}1_{F^\times}]; 1_{F^\times}),$$

a da je

$$\mathrm{St}_{GL(m,F)} = \delta([\nu^{-\frac{m-1}{2}}1_{F^\times}, \nu^{\frac{m-1}{2}}1_{F^\times}]).$$

Propozicija 2.11. *Neka su χ, χ_1, χ_2 i ζ karakteri od $F^\times$, pri čemu je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.*

(i) Reprezentacija $\chi_1 \times \chi_2$ grupe $GL(2,F)$ reducira se ako i samo ako je $\chi_1 = \nu^{\pm 1}\chi_2$. Imamo: $\nu^{\frac{1}{2}}\chi \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi = \chi\mathrm{St}_{GL(2,F)} + \chi 1_{GL(2,F)}$.

(ii) Reprezentacija $\chi \rtimes 1_{F^\times}$ grupe $SO(3,F)$ reducira se ako i samo ako je $\chi^2 = \nu^{\pm 1}$. Imamo: $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times} = \zeta\mathrm{St}_{SO(3,F)} + \zeta 1_{SO(3,F)}$.

Poglavlje 3

Klasifikacija temperiranih reprezentacija

U ovom ćemo poglavlju opisati klasifikaciju temperiranih reprezentacija grupa $SO(3,F)$, $SO(5,F)$ i $SO(7,F)$ koju ćemo koristiti u sljedećem poglavlju pri određivanju neunitarnog duala p-adske grupe $SO(7,F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

Opis temperiranih reprezentacija grupa $SO(3,F)$ i $SO(5,F)$ može se pronaći u [26], a navodimo ga u potpoglavlju 3.1 i potpoglavlju 3.2, dok se opis temperiranih reprezentacija grupe $SO(7,F)$ izvodi pomoću njih. Potpuni opis temperiranih reprezentacija grupe $SO(7,F)$ dan je u potpoglavlju 3.3.

Napomenimo najprije da je jedina temperirana reprezentacija grupe $SO(1,F)$ trivijalna reprezentacija $1_{F^\times}$.

3.1 Temperirane reprezentacije grupe $SO(3,F)$

Sljedeći teorem daje nam sve temperirane reprezentacije grupe $SO(3,F)$:

Teorem 3.1. *Ako je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$, onda vrijedi jedno od sljedećeg:*

(1) *τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

za neki kvadratni karakter $\zeta \in \widehat{F^\times}$. Tada je τ strogo pozitivna reprezentacija koju označavamo sa St_ζ.

(2) *τ je izomorfna reprezentaciji*

$$\chi \rtimes 1_{F^\times},$$

za neki $\chi \in \widehat{F^\times}$.

3.2 Temperirane reprezentacije grupe $SO(5, F)$

Temperirane reprezentacije grupe $SO(5, F)$ dane su sljedećim teoremom:

Teorem 3.2. *Ako je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$, onda vrijedi jedno od sljedećeg:*

(1) *τ je strogo pozitivna reprezentacija i vrijedi jedno od idućeg:*

  (i) *τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

  pri čemu su $\zeta_1, \zeta_2 \in \widehat{F^\times}$ međusobno neizomorfni kvadratni karakteri.

  (ii) *τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

  pri čemu je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.

(2) *τ nije diskretna serija i vrijedi jedno od idućeg:*

  (i) *τ je izomorfna reprezentaciji*

$$\chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

  pri čemu su $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{F^\times}$.

  (ii) *τ je izomorfna reprezentaciji*

$$\chi_1 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

  pri čemu je $\chi_1 \in \widehat{F^\times}$ i $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.

  (iii) *τ je ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi, \nu^{\frac{1}{2}}\chi]) \rtimes 1_{F^\times}$, za $\chi \in \widehat{F^\times}$. Pri tome je reprezentacija*

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi, \nu^{\frac{1}{2}}\chi]) \rtimes 1_{F^\times},$$

  ireducibilna ako je $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$, dok reprezentacija

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

  za $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, sadrži dvije međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od kojih točno jedna u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \otimes 1_{F^\times}.$$

3.3 Temperirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$

Sada lako možemo doći do svih temperiranih reprezentacija grupe $SO(7,F)$ i one su dane sljedećim teoremom:

Teorem 3.3. *Ako je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(7,F)$, onda vrijedi jedno od sljedećeg:*

(1) *τ je strogo pozitivna reprezentacija i vrijedi jedno od idućeg:*

(i) τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu su $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \widehat{F^\times}$ međusobno neizomorfni kvadratni karakteri.

(ii) τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu su $\zeta_1, \zeta_2 \in \widehat{F^\times}$ međusobno neizomorfni kvadratni karakteri.

(iii) τ je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.

(2) *τ je diskretna serija i jedinstvena je ireducibilna podreprezentacija od*

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$. Reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}$ sadrži dvije međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije koje su obje diskretne serije. Točno jedna od njih u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži reprezentaciju

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \otimes \sigma_{sp},$$

gdje je σ_{sp} strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Nadalje, τ je podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{3}{2}}\zeta \rtimes \tau',$$

za ireducibilnu temperiranu podreprezentaciju τ' od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(3) *τ nije diskretna serija i vrijedi jedno od idućeg:*

(i) τ je izomorfna reprezentaciji

$$\delta([\nu^{-1}\chi, \nu\chi]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu je $\chi \in \widehat{F^\times}$.

(ii) τ je ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi, \nu^{\frac{1}{2}}\chi]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

pri čemu je $\chi \in \widehat{F^\times}$ i $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, Posebno, reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi, \nu^{\frac{1}{2}}\chi]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta$, direktna je suma dviju međusobno neizomorfnih ireducibilnih temperiranih reprezentacija ako i samo ako je $\chi \in \widehat{F^\times}$ kvadratni karakter koji nije izomorfan kvadratnom karakteru $\zeta \in \widehat{F^\times}$.

(iii) τ je izomorfna reprezentaciji

$$\chi \rtimes \tau_1,$$

pri čemu je $\chi \in \widehat{F^\times}$ i τ_1 temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$, pa je stoga reprezentacija $\chi \rtimes \tau_1$ jednog od sljedećih oblika:

(a)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

gdje je $\sigma_{sp}^{(1)}$ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu su $\zeta_1, \zeta_2 \in \widehat{F^\times}$ međusobno neizomorfni kvadratni karakteri.

(b)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(2)},$$

gdje je $\sigma_{sp}^{(2)}$ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.

(c)

$$\chi \times \chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu su $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{F^\times}$.

(d)

$$\chi \times \chi_1 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

pri čemu je $\chi_1 \in \widehat{F^\times}$ *i* $\zeta \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$.

(e)

$$\chi \rtimes \tau_2,$$

gdje je τ_2 *ireducibilna podreprezentacija od*

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_1, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

pri čemu je $\chi_1 \in \widehat{F^\times}$.

Poglavlje 4

Neunitarni dual

Cilj ovog poglavlja jest opis neunitarnog duala p-adske grupe $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

U potpoglavlju 4.1 opisujemo netemperirane reprezentacije od $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi. Zatim, u potpoglavlju 4.2 navodimo nekoliko pomoćnih tvrdnji koje ćemo koristiti prilikom opisivanja neunitarnog duala u potpoglavljima 4.3, 4.4, 4.5 i 4.6, a koja dijelimo u ovisnosti o broju kvadratnih karaktera koji se pojavljuju u induciranoj reprezentaciji grupe $SO(7, F)$. Konačno, u potpoglavlju 4.7 navodimo nekoliko primjera u kojima određujemo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije od $SO(7, F)$ primjenom odgovarajućeg teorema iz nekog od prethodnih potpoglavlja.

4.1 Netemperirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi

Neka je π netemperirana reprezentacija koja je subkvocijent inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$$

grupe $SO(7, F)$, pri čemu je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ i $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$. Tada je

$$\pi \hookrightarrow \delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau,$$

gdje je δ_i ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, a τ je ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(n_{k+1}, F)$, pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = 3.$$

Pri tome je

$$\delta_i = \delta([\nu^{-x_i}\rho_i, \nu^{y_i}\rho_i])$$

za svaki $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, i

$$e(\delta_i) \leq e(\delta_{i+1}) < 0,$$

za $i = 1, 2, \dots, k-1$. Preciznije,

$$-x_i + y_i < 0$$

te je $y_i + x_i \in \mathbb{Z}$, za $i = 1, 2, \dots, k$.

Nadalje, sada možemo zaključiti da je

$$y_i + x_i \leq 2 \ \text{ i } \ 1 \leq k \leq 3.$$

Ukoliko je $k = 3$, onda je $n_i = 1$, za $i = 1, 2, 3$, odnosno reprezentacija δ_i ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(1, F)$. Tada je

$$\delta_i = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1}$$

i vrijedi $e(\delta_1) \leq e(\delta_2) \leq e(\delta_3) < 0$ te zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}.$$

Nadalje, iz Frobeniusovog reciprociteta slijedi da Jacquetov modul netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \otimes \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \otimes \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \otimes 1_{F^\times}.$$

Ako je $k = 2$, onda imamo sljedeće slučajeve:

(a) Kada je $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$, odnosno reprezentacija δ_1 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(1, F)$, a reprezentacija δ_2 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(2, F)$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \ \text{ i } \ \delta_2 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]),$$

pri čemu je $a_i \neq 0$ i

$$(a_j, \chi_j) \in \{(a_l + 1, \chi_l), (1 - a_l, \chi_l^{-1})\}$$

te $a_j > \frac{1}{2}$ ako je $(a_j, \chi_j) = (1 - a_l, \chi_l^{-1})$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$. Također, vrijedi $e(\delta_1) \leq e(\delta_2)$. Sada zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i tada Jacquetov modul netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \otimes \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \otimes 1_{F^\times}.$$

(b) Kada je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$, odnosno reprezentacija δ_1 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(2,F)$, a reprezentacija δ_2 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(1,F)$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \quad \text{i} \quad \delta_2 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1},$$

pri čemu je $a_i \neq 0$ i

$$(a_j, \chi_j) \in \{(a_l + 1, \chi_l), (1 - a_l, \chi_l^{-1})\}$$

te $a_j > \frac{1}{2}$ ako je $(a_j, \chi_j) = (1 - a_l, \chi_l^{-1})$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$. Također, vrijedi $e(\delta_1) \leq e(\delta_2)$. Opet zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i tada Jacquetov modul netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \otimes \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \otimes 1_{F^\times}.$$

(c) Kada je $n_1 = n_2 = 1$, odnosno reprezentacije δ_1 i δ_2 ireducibilne su reprezentacije grupe $GL(1,F)$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \quad \text{i} \quad \delta_2 = \nu^{-a_j}\chi_j^{-1},$$

gdje je $0 < a_j \leq a_i$, za $i, j \in \{1, 2, 3\}$ te $i \neq j$. Tada zaključujemo da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Nadalje, u Jacquetovom modulu netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu nalazi se

$$\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \otimes \nu^{-a_j}\chi_j^{-1} \otimes \tau.$$

Ukoliko je pak $k = 1$, onda je $1 \leq n_1 \leq 3$, pa imamo sljedeće slučajeve:

(a) Kada je $n_1 = 3$, odnosno reprezentacija δ_1 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(3,F)$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]),$$

pri čemu je ili $a_3 = a_1 + 2$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_1 \cong \chi_2 \cong \chi_3$, ili $a_3 = 2 - a_1$ i $a_3 = a_2 + 1$

uz $a_3 > 1$ te $\chi_2^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_1$, ili pak $a_3 = 2 - a_2$ i $a_3 = a_1 + 1$ uz $a_3 > 1$ te $\chi_1^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_2$. Tada zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i Jacquetov modul netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]) \otimes 1_{F^\times}.$$

(*b*) Kada je $n_1 = 2$, odnosno reprezentacija δ_1 ireducibilna je reprezentacija grupe $GL(2, F)$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_i}\chi_i^{-1}, \nu^{-a_i+1}\chi_i^{-1}]),$$

pri čemu je

$$(a_i, \chi_i) \in \{(a_j + 1, \chi_j), (1 - a_j, \chi_j^{-1})\}$$

te $a_i > \frac{1}{2}$ ako je $(a_i, \chi_i) = (1 - a_j, \chi_j^{-1})$, za međusobno različite $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Iz toga slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$. Tada se

$$\delta([\nu^{-a_i}\chi_i^{-1}, \nu^{-a_i+1}\chi_i^{-1}]) \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu.

(*c*) Kada je $n_1 = 1$, odnosno reprezentacija δ_1 je ireducibilna reprezentacija grupe $GL(1, F)$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1},$$

za neki $i \in \{1, 2, 3\}$ i $a_i \neq 0$. Tada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$ i

$$\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \otimes \tau$$

se nalazi u Jacquetovom modulu netemperirane reprezentacije π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu.

4.2 Pomoćni rezultati

U ovom ćemo potpoglavlju navesti nekoliko tehničkih rezultata koje ćemo koristiti u nastavku.

Krenimo s poznatom tvrdnjom:

$$\delta([\nu^{s_1}\chi_1, \nu^{t_1}\chi_1]) \times \delta([\nu^{s_2}\chi_2, \nu^{t_2}\chi_2]) \cong \delta([\nu^{s_2}\chi_2, \nu^{t_2}\chi_2]) \times \delta([\nu^{s_1}\chi_1, \nu^{t_1}\chi_1]), \tag{4.1}$$

za $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ te $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{F^\times}$ i $\chi_1 \not\cong \chi_2$.

Opis ireducibilnog subkvocijenta inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ kada se pojavi ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(2,F)$ dan je sljedećom lemom:

Lema 4.1. *Neka je*

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.2}$$

gdje su $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ *i* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, *inducirana reprezentacija grupe* $SO(7,F)$. *Pretpostavimo da postoje* $i, j \in \{1,2,3\}$, *gdje je* $i \neq j$, *takvi da je* $a_j = a_i + 1$ *i* $\chi_i \cong \chi_j$ *ili* $a_j = 1 - a_i$, $a_j > \frac{1}{2}$ *i* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$. *Tada, za* $l \in \{1,2,3\}$ *te* $l \neq i$ *i* $l \neq j$, *postoji ireducibilan subkvocijent od* (4.2) *koji je jednog od sljedećih oblika:*

(i) $L(\nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times})$, *ako je* $a_l \geq a_j - \frac{1}{2}$.

(ii) $L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \rtimes 1_{F^\times})$, *ako je* $a_l < a_j - \frac{1}{2}$.

(iii) $L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times})$, *ako je* $a_l = 0$.

Vrijedi i obrat, ako postoje ireducibilni subkvocijenti nekog od gornjih oblika, onda postoje $i, j \in \{1,2,3\}$, *gdje je* $i \neq j$, *takvi da je* $a_j = a_i + 1$ *i* $\chi_i \cong \chi_j$ *ili* $a_j = 1 - a_i$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *i* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$.

Dokaz. Neka je $a_l \neq 0$. Ako je $a_l \geq a_j - \frac{1}{2}$, definiramo netemperirane reprezentacije $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(2,F))$ s

$$\delta_1 = \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \quad \text{i} \quad \delta_2 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]),$$

gdje je $a_j = a_i + 1$ i $\chi_i \cong \chi_j$ ili $a_j = 1 - a_i$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1,2,3\}$. Neka je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i tada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1} \times \nu^{-a_j}\chi_j^{-1} \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.2).

Ako je $a_l < a - \frac{1}{2}$, stavimo

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \quad \text{i} \quad \delta_2 = \nu^{-a_l}\chi_l^{-1},$$

gdje je $a_j = a_i + 1$ i $\chi_i \cong \chi_j$ ili $a_j = 1 - a_i$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1,2,3\}$. Neka je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1} \times \nu^{-a_j}\chi_j^{-1} \times \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.2).

Ako je $a_l = 0$, stavimo

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]),$$

gdje je $a_j = a_i + 1$ i $\chi_i \cong \chi_j$ ili $a_j = 1 - a_i$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j \in \{1,2,3\}$, i

$$\tau \cong \chi_l \rtimes 1_{F^\times},$$

za $l \in \{1,2,3\}$ i $l \neq i$ te $l \neq j$. Tada imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1} \times \nu^{-a_j}\chi_j^{-1} \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.2).

Obrat slijedi direktno i time je lema dokazana. □

Sljedeća lema daje nam opis ireducibilnog subkvocijenta inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ koji je oblika $L(\delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3 \rtimes 1_{F^\times})$:

Lema 4.2. *Neka su $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ i $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Inducirana reprezentacija*

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{4.3}$$

ima jedinstven ireducibilan subkvocijent oblika

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

Dokaz. Ako je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.3) oblika

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3 \rtimes \tau),$$

onda Frobeniusov reciprocitet implicira da Jacquetov modul od (4.3) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \delta_3 \otimes \tau.$$

Sada, iz potpoglavlja 4.1, slijedi da je δ_i oblika

$$\nu^{-a}\chi^{-1},$$

odnosno

$$\delta_i \cong \nu^{-a_j}\chi_j^{-1},$$

za neki $j \in \{1, 2, 3\}$, te da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}.$$

Prema tome, zbog $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ i (4.1), imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes \tau \\ &= \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.3). Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.3) jednak je

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3$. □

4.3 Slučaj tri kvadratna karaktera

U ovom ćemo potpoglavlju promatrati inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojima su sva tri karaktera kvadratna.

Najprije ćemo pronaći sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj se pojavljuje točno jedan $\nu^a\zeta$ takav da je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ kvadratni karakter i $a = \frac{1}{2}$.

Teorem 4.3. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ i $a_i \geq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka postoji točno jedan $i \in \{1, 2, 3\}$ takav da je $a_i = \frac{1}{2}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da je $a_3 = \frac{1}{2}$ te neka je $0 \leq a_1 \leq a_2$. Nadalje, neka je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$. Tada:*

(a) Ako je $(a_s, \zeta_s) \neq (\frac{3}{2}, \zeta_3)$, za $s \in \{1, 2\}$, i $(a_1, \zeta_1) \neq (a_2 - 1, \zeta_2)$, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\frac{1}{2} < a_1$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2} < a_2$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$ *i* $a_2 < \frac{1}{2}$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 > \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = 1 - a_1$ *uz* $a_2 > \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_1 \cong \zeta_2$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 > 0$*, ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$*, ili*

$$\zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3},$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(v)

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_2 = 1 - a_1$ *uz* $a_2 > \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_1 \cong \zeta_2$.

(b) Ako je $(a_s, \zeta_s) \neq (\frac{3}{2}, \zeta_3)$*, za* $s \in \{1, 2\}$*, i* $(a_1, \zeta_1) = (a_2 - 1, \zeta_2)$*, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\frac{1}{2} < a_1$*, ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2} < a_2$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 > 1$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \delta([\nu^{-1}\zeta_2, \zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = 1$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}).$$

(c) *Ako je* $(a_s, \zeta_s) = (\frac{3}{2}, \zeta_3)$, *za neki* $s \in \{1, 2\}$, *i* $(a_1, \zeta_1) \neq (a_2 - 1, \zeta_2)$, *onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\frac{1}{2} < a_1$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_j}\zeta_j \times \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_j \geq 1$ *i* $a_l = \frac{3}{2}$, *za* $\{j, l\} = \{1, 2\}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < 1$, ili

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 > 0$, ili

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_j}\zeta_j \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $a_j > 0$ i $a_i = \frac{3}{2}$, za $\{i, j\} = \{1, 2\}$, ili

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$, gdje je $\sigma_{sp}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(d) Ako je $(a_1, \zeta_1) = (\frac{3}{2}, \zeta_3)$ i $(a_2, \zeta_2) = (\frac{5}{2}, \zeta_3)$, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3 \times \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}).$$

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}).$$

(v)

$$L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}).$$

(vi)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}).$$

(vii)

$$L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

pri čemu je $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(viii) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{sp}^{(2)}$ *koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Dokaz. Promatramo induciranu reprezentaciju

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.4}$$

pri čemu je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, i $0 \leq a_1 \leq a_2$.

Ukoliko je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

zaključujemo da je $k \leq 3$.

Ako je $k = 3$, onda ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) dobijemo koristeći lemu 4.2 i on je, za $a_1, a_2 \neq 0$, jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\frac{1}{2} > a_2$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 < \frac{1}{2} < a_2$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\frac{1}{2} < a_1$.

Nadalje, ako je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da Jacquetov modul od (4.4) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau.$$

Sada zaključujemo, koristeći potpoglavlje 4.1, da je δ_i ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2$, pri čemu je ili $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$ ili je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$ ili je pak $n_1 = n_2 = 1$.

Ukoliko je $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$, promatramo nekoliko mogućnosti.

Prvo, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1, imamo

$$\delta_1 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \ \text{ i } \ \delta_2 = \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$. Međutim, koristeći lemu 4.1 zaključujemo da je $a_2 \leq 1$. Prema tome, s obzirom da je $a_1 \geq 0$ prema pretpostavci teorema, slučaj kada je $a_2 = a_1 + 1$ moguć je samo kada je $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$, a slučaj kada je $a_2 = 1 - a_1$ imamo uz $\frac{1}{2} < a_2 \leq 1$. Sada zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2+1}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Prema tome, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_1 = 0$ i $a_2 = 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $\frac{1}{2} < a_2 \leq 1$.

Drugo, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1, još može biti

$$\delta_1 = \nu^{-a_j}\zeta_j \ \text{ i } \ \delta_2 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]),$$

u slučaju da je $a_j \neq 0$ i $a_l = \frac{3}{2}$ te $\zeta_l \cong \zeta_3$, za međusobno različite $j, l \in \{1, 2\}$. Koristeći lemu 4.1 zaključujemo da je $a_j \geq 1$. Prema tome, slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_j}\zeta_j \times \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_j}\zeta_j \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Stoga, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-a_j}\zeta_j \times \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_j \geq 1$ i $a_l = \frac{3}{2}$ te $\zeta_l \cong \zeta_3$, za međusobno različite $j, l \in \{1, 2\}$.

Ukoliko je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$, opet imamo dvije mogućnosti.

Prvo, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1, imamo

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3,$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$. Koristeći lemu 4.1 zaključujemo da je $a_2 > 1$. Prema tome, s obzirom da je $a_1 \geq 0$ prema pretpostavci teorema, slučaj kada je $a_2 = a_1 + 1$ moguć je uz $a_1 > 0$, no slučaj kada je $a_2 = 1 - a_1$ nije moguć. Sada zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_2+1}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Prema tome, dobijemo da je

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = a_1 + 1$ uz $a_2 > 1$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2$, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.4).

Drugo, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1, može biti

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-a_j}\zeta_j,$$

ako je $a_l = \frac{3}{2}$ i $a_j \neq 0$ te $\zeta_l \cong \zeta_3$. Također, iz leme 4.1 i pretpostavke teorema slijedi da je $a_j < 1$, pa je $j = 1$ i $l = 2$. Sada možemo zaključiti da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Tada je

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < 1$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.4).

Ako je $n_1 = n_2 = 1$, odnosno δ_1 i δ_2 su ireducibilne netemperirane reprezentacije grupe $GL(1, F)$, onda su oblika

$$\nu^{-a}\zeta,$$

te je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$. Koristeći teorem 3.1 zaključujemo da je τ tada ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$$

ili je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2$. Sada, uz (4.1), u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

pri čemu su $a_1, a_2 \neq 0$, što je jednako (4.4) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Dakle, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.4) jednak je

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

za $a_1, a_2 \neq 0$. Nadalje, koristeći (4.1), u drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

gdje je $a_2 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Prema tome, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika, ako je $a_1 = 0$, jednak je ili

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 > \frac{1}{2}$, ili je jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

Ukoliko je $k = 1$ i ako je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda Frobeniusov reciprocitet implicira da se

$$\delta_1 \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu od (4.4) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Koristeći potpoglavlje 4.1 zaključujemo da je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija opće linearne grupe $GL(n_1, F)$, gdje je $1 \leq n_1 \leq 3$.

Ako je $n_1 = 3$, onda je, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1,

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]),$$

za $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$. Tada je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.4) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Tada je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika jednak

$$L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

Ako je $n_1 = 2$, onda je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(2, F)$, pa je oblika

$$\delta([\nu^{-a}\zeta, \nu^{-a+1}\zeta]),$$

dok je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$. Koristeći teorem 3.1 zaključujemo da je τ ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$$

ili je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2$. U prvom je slučaju

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_2+1}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). U drugom je slučaju

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.4). Stoga, koristeći lemu 4.1, zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika jednak ili

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$, ili je jednak

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_3, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3]) \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

Nadalje, ako je $n_1 = 1$, odnosno δ_1 je ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(1, F)$, pa je oblika

$$\nu^{-a}\zeta,$$

onda je τ ireducibilna temperirana reprezentacija od $SO(5, F)$ i zaključujemo, koristeći teorem 3.2, da je τ jedna od sljedećih reprezentacija:

(1) Jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_i = \frac{3}{2}$ i $\zeta_i \cong \zeta_3$, za neki $i \in \{1, 2\}$.

(2) $\tau \cong \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(3) $\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}$, ako je $a_1 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2$.

U slučaju (1) imamo

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}$$

te je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_j}\zeta_j \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_j}\zeta_j \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_j}\zeta_j \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_j \neq 0$, za $j \in \{1, 2\}$ i $j \neq i$, što je jednako (4.4) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.4) tada je jednak

$$L(\nu^{-a_j}\zeta_j \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $a_i = \frac{3}{2}$ i $a_j \neq 0$ te $\zeta_i \cong \zeta_3$, za međusobno različite $i, j \in \{1, 2\}$, pri čemu je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, u slučaju (2) je

$$\tau \cong \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$$

te je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.4) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Tada je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.4) traženog oblika.

Konačno, u slučaju (3) imamo

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}$$

te je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3} \\ &\leq \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_2 \neq 0$, što je jednako (4.4) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Prema tome,

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, ireducibilan je subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.4).

Preostalo je još pogledati kada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(7, F)$. Koristeći teorem 3.3 zaključujemo da imamo sljedeće ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.4):

(1) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $a_2 = \frac{5}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

(2) $\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, zbog $a_1 \le a_2$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(3) $\zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

Time je teorem dokazan. □

U nastavku pronalazimo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u čijem se kuspidalnom nosaču pojavljuju točno dva karaktera oblika $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta$ i $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta'$ takva da su $\zeta, \zeta' \in \widehat{F^\times}$ kvadratni karakteri.

Teorem 4.4. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ i $a_i \ge 0$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, te neka postoje točno dva $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \ne j$, takva da je $a_i = a_j = \frac{1}{2}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti da je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$. Neka je St_{ζ_t} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_t \rtimes 1_{F^\times}$, za $t \in \{2,3\}$. Tada:*

(a) Ako je $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_s}\zeta_s$ ireducibilna, za sve $s \in \{2,3\}$, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 > \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, ili pak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_1 > \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, za $\{j,l\} = \{2,3\}$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $a_1 > 0$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, ili

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = 0$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(v)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

ako je $a_1 > 0$ *i* $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *ili*

$$\zeta_1 \rtimes \tau_1 \quad i \quad \zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(b) *Ako se* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_s}\zeta_s$ *reducira, za neki* $s \in \{2, 3\}$, *tada je* $a_1 = \frac{3}{2}$ *te* $\zeta_1 \cong \zeta_s$ *i svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako postoje j, l *takvi da je* $\zeta_j \cong \zeta_1$ *i* $\{j, l\} = \{2, 3\}$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

za $\{j, l\} = \{2, 3\}$.

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(v)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako postoje i, j *takvi da je* $\zeta_i \cong \zeta_1$ *te* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(vi)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \sigma_{sp}^{(2)}),$$

ako postoje i, j *takvi da je* $\zeta_i \cong \zeta_1$ *te* $\{i, j\} = \{2, 3\}$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(vii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

ako je $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(viii) Strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{sp}^{(2)},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *te* $\zeta_1 \cong \zeta_j \not\cong \zeta_i$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(ix) Međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije, σ_1 *i* σ_2, *od*

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

koje su diskretne serije, ako je $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

Dokaz. Promatramo induciranu reprezentaciju oblika

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.5}$$

pri čemu je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te $a_1 \geq 0$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$.

Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

tada je $k \leq 3$.

Iz leme 4.2, a zbog (4.1), za $k = 3$ i $a_1 \neq 0$ dobijemo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) jednak

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > \frac{1}{2}$, ili jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 < \frac{1}{2}$.

Ukoliko je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

iz Frobeniusovog reciprociteta slijedi da se

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu of (4.5) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Sada, koristeći potpoglavlje 4.1, zaključujemo da je δ_i ireducibilna reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2$, gdje je $1 \leq n_i \leq 2$. Nadalje, može biti $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$ ili $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$ ili pak $n_1 = n_2 = 1$.

Ako je $n_i = 2$, tada je

$$\delta_i = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_j$, za $j \in \{2, 3\}$, zbog pretpostavke teorema. Iz toga slijedi da ako je $n_i = 1$, onda je

$$\delta_i = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l,$$

za $l \in \{2, 3\}$ i $l \neq j$.

Koristeći lemu 4.1, zaključujemo da u slučaju kada je $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$, ne postoji ireducibilan subkvocijent takvog oblika inducirane reprezentacije (4.5) jer je $\frac{1}{2} < 1$.

Nadalje, kada je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$, odnosno

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l,$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_j$, za međusobno različite $j, l \in \{2, 3\}$, zaključujemo da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.5). Tada je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika jednak

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_j$, za $\{j, l\} = \{2, 3\}$.

Ostalo je još pogledati slučaj kada je $n_1 = n_2 = 1$, odnosno kada su δ_1 i δ_2 ireducibilne netemperirane reprezentacije grupe $GL(1,F)$. Tada su one oblika

$$\nu^{-a}\zeta$$

i zaključujemo da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Koristeći teorem 3.1 lako vidimo da je τ ili jedinstvena ireducibilna temperirana podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times},$$

za $j \in \{2,3\}$, ili je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$. Prema tome, zbog (4.1), bez smanjenja općenitosti, u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

ako je $a_1 \neq 0$, za $l \in \{2,3\}$ i $l \neq j$, što je jednako (4.5) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. U drugom slučaju, zbog (4.1), imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.5) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika, za $\{j,l\} = \{2,3\}$, je ili jednak

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_1 > \frac{1}{2}$, ili je jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, ili je pak jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

Ako je $k = 1$ i ukoliko je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda slijedi da Jacquetov modul od (4.5) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \tau.$$

Tada je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(n_1, F)$ i iz potpoglavlja 4.1 slijedi da je $1 \leq n_1 \leq 3$.

Za $n_1 = 3$, zbog pretpostavke teorema, iz potpoglavlja 4.1 slijedi da je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]),$$

za $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$. Tada je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.5). Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika jednak je

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

Ukoliko je $n_1 = 2$, onda koristeći teorem 3.1 i teorem 3.2 te potpoglavlje 4.1 dobijemo da je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_i$, za $i \in \{2, 3\}$. Sada slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$ te zaključujemo da je τ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times},$$

za $j \in \{2, 3\}$ i $j \neq i$. Prema tome, imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.5). Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika jednak je

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_i$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

Nadalje, ako je $n_1 = 1$, onda je reprezentacija δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ i oblika je

$$\nu^{-a}\zeta,$$

te je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$, što zaključujemo koristeći potpoglavlje 4.1. Koristeći sada teorem 3.2 vidimo da je τ jedna od sljedećih reprezentacija:

(1) Jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$, za $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$.

(2) Jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_i$, za $i \in \{2, 3\}$.

(3) $\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}$, ako je $a_1 = 0$, za $i \in \{2, 3\}$.

(4) Ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$, za $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

Dakle, u slučaju (1) je

$$\tau \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

te je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1 \neq 0$, što je jednako (4.5) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Stoga, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.5) jednak je

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $a_1 \neq 0$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, u slučaju (2) je

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

te je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $j \in \{2, 3\}$ i $j \neq i$, što je jednako (4.5) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$. Tada je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.5) jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_i$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

U slučaju (3) je pak

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i},$$

za $i \in \{2,3\}$, te imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i} \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $j \in \{2,3\}$ i $j \neq i$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.5). Sada slijedi da je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = 0$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika.

Konačno, u slučaju (4) je

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times},$$

te imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.5). Koristeći teorem 3.2 sada zaključujemo da su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.5) traženog oblika jednaki

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1) \;\text{ i }\; L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 \neq 0$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

Preostalo je još odrediti ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.5) kada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(7,F)$. Iskoristimo li teorem 3.3, vidimo da su oni sljedeći:

(1) Strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_j \not\cong \zeta_i$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(2) Međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije, σ_1 i σ_2, od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

koje su diskretne serije, ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

(3) $\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$, ako je $a_1 = 0$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}.$$

(4) $\zeta_1 \rtimes \tau_1$ i $\zeta_1 \rtimes \tau_2$, ako je $a_1 = 0$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Time je dokaz teorema gotov. □

Pronađimo sada sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj su sva tri eksponenta jednaka $\frac{1}{2}$.

Teorem 4.5. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ i $a_i = \frac{1}{2}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, te neka je St_{ζ_i} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}$. Tada su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$$

sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_l}),$$

za $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $\zeta_j \not\cong \zeta_l$, *za* $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_2),$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$, *za* $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$, *gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(v) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{sp}^{(2)}$ *koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $\zeta_1 \not\cong \zeta_2$, $\zeta_1 \not\cong \zeta_3$ *i* $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$.

(vi)

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1},$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

(vii) Dvije međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i},$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ *i* $\zeta_j \not\cong \zeta_i$, *za* $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$.

Dokaz. Dana je inducirana reprezentacija

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.6}$$

pri čemu je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$.

Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je $k \leq 3$.

Ukoliko je $k = 3$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.6) dobijemo iz leme 4.2 i on je, zbog (4.1), jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

Nadalje, ukoliko je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da se

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu od (4.6) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Zbog pretpostavke teorema, a koristeći potpoglavlje 4.1, zaključujemo da su δ_1 i δ_2 ireducibilne netemperirane reprezentacije grupe $GL(1, F)$, odnosno da je

$$\delta_1 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j,$$

za međusobno različite $i, j \in \{1, 2, 3\}$, te da je tada τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$. Iz teorema 3.1 sada slijedi da je τ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times},$$

za $l \in \{1, 2, 3\}$ i $l \neq i$ te $l \neq j$. Tada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.6). Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.6) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_l}),$$

za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Ako je $k = 1$ i ako je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda Frobeniusov reciprocitet implicira da Jacquetov modul od (4.6) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \tau.$$

Sada lako vidimo, zbog pretpostavke teorema i potpoglavlja 4.1, da je netemperirana reprezentacija $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1, F))$, odnosno, preciznije, da je

$$\delta_1 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i,$$

za $i \in \{1,2,3\}$, iz čega slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5,F)$. Koristeći teorem 3.2 dolazimo do svih ireducibilnih subkvocijenata $L(\delta_1 \rtimes \tau)$.

Temperirana reprezentacija τ može biti, za $j,l \in \{1,2,3\}$ te $j \neq l$, $j \neq i$ i $l \neq i$, ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times},$$

za $\zeta_j \not\cong \zeta_l$, ili ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times},$$

za $\zeta_j \cong \zeta_l$. Tada je u prvom slučaju

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.6) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. U drugom je slučaju

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.6) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. Prema tome, ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.6) traženog oblika su ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_1) \;\text{ i }\; L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_2),$$

gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$, za međusobno različite $i,j,l \in \{1,2,3\}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $\zeta_j \not\cong \zeta_l$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times},$$

za međusobno različite $i,j,l \in \{1,2,3\}$.

Konačno, ukoliko je temperirana reprezentacija $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(7,F))$), onda, iz teorema

3.3, slijedi da su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.6) sljedeći:

(1) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

gdje je $\zeta_1 \not\cong \zeta_2$, $\zeta_1 \not\cong \zeta_3$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$.

(2) $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$, ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

(3) Dvije međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i},$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ i $\zeta_j \not\cong \zeta_i$, za $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Dokaz teorema time je završen. □

Na kraju, potražimo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije ukoliko se niti u jednom eksponentu ne pojavljuje $\frac{1}{2}$.

Teorem 4.6. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ i $a_i \neq \frac{1}{2}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Tada:*

(a) Ako je $(a_s, \zeta_s) \neq (a_t - 1, \zeta_t)$, za sve $s, t \in \{1, 2, 3\}$, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 > 0$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 > 0$, ili pak

$$\zeta_1 \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\zeta_j \cong \zeta_l$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\zeta_j \cong \zeta_l$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \zeta_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l = 0$ *i* $a_3 = 1 - a_j$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\zeta_3 \cong \zeta_j$, *za* $\{j, l\} = \{1, 2\}$.

(b) Ako je $(a_s, \zeta_s) = (a_t - 1, \zeta_t)$, *za neke* $s, t \in \{1, 2, 3\}$, *ali ne postoje* s, t, u *takvi da je* $\{s, t, u\} = \{1, 2, 3\}$, $(a_s, \zeta_s) = (a_t - 1, \zeta_t)$ *i* $(a_t, \zeta_t) = (a_u - 1, \zeta_u)$, *onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$ *ili ako je* $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\zeta_j \cong \zeta_l$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+2}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = 2 - a_i$ *i* $a_3 = a_j + 1$, *za* $\{i, j\} = \{1, 2\}$, *uz* $a_3 > 1$ *i* $\zeta_1 \cong \zeta_2$.

(v)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \zeta_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l = 0$ *i* $a_3 = a_j + 1$, *za* $\{j, l\} = \{1, 2\}$.

(vi)

$$\delta([\nu^{-1}\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$ *te* $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

(c) Ako je $(a_1, \zeta_1) = (a_2 - 1, \zeta_2)$ *i* $(a_2, \zeta_2) = (a_3 - 1, \zeta_3)$*, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$*, ili*

$$L(\nu^{-2}\zeta_1 \times \nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_j \times \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$*, za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$*, ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \times \nu^{-a_i}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$*, za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+2}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}).$$

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-2}\zeta_3, \nu^{-1}\zeta_3]) \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

Dokaz. Promatramo induciranu reprezentaciju

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.7}$$

gdje je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ te $a_i \neq \frac{1}{2}$ i $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$. Ukoliko je $L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau)$ ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.7), onda je $k \leq 3$.

Ako je $k = 3$, onda je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.7) jednak

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

gdje je $a_i \neq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, a dobijemo ga iz leme 4.2.

Nadalje, ako je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

tada je, prema Frobeniusovom reciprocitetu,

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau$$

sadržan u Jacquetovom modulu od (4.7) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Koristeći potpoglavlje 4.1 zaključujemo da imamo tri slučaja i to ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ ili su pak δ_1 i δ_2 ireducibilne netemperirane reprezentacije od $GL(1, F)$.

Ako je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1, F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(2, F))$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\zeta_i \;\text{ i }\; \delta_2 = \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]),$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ te $a_i \neq 0$ i $a_j = a_l + 1$ ili $a_i \neq 0$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$. Nadalje, koristeći lemu 4.1, zaključujemo da je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$. Sada slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i tada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_i}\zeta_i \times \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_i}\zeta_i \times \nu^{-a_j+1}\zeta_j \times \nu^{-a_j}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.7). Stoga, vidimo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.7) jednak

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ te $a_i \neq 0$, $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = a_l + 1$ ili $a_i \neq 0$, $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Analogno, zbog (4.1) i uz korištenje leme 4.1, dobijemo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.7) u slučaju kada je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(2, F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1, F))$, koji je jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\zeta_j, \nu^{-a_j+1}\zeta_j]) \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ te $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = a_l + 1$ ili $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Ako su $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\zeta_i \;\text{ i }\; \delta_2 = \nu^{-a_j}\zeta_j,$$

gdje su $a_i, a_j \neq 0$, za $i, j \in \{1,2,3\}$ te $i \neq j$. Prema tome, τ je ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Sada zaključujemo, koristeći teorem 3.1 i pretpostavku teorema, da je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$, jer je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, a onda je, zbog (4.1),

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\zeta_3 \;\text{ i }\; \delta_2 = \nu^{-a_2}\zeta_2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.7) i ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.7) jednak je

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2, a_3 \neq 0$.

Ukoliko je $k = 1$ i ako je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda slijedi da Jacquetov modul od (4.7) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes 1_{F^\times}.$$

Prema tome, koristeći potpoglavlje 4.1, zaključujemo da je netemperirana reprezentacija $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(n_1,F))$, gdje je $1 \leq n_1 \leq 3$.

Ako je $n_1 = 3$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+2}\zeta_3]),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$ i $-a_3 + 2 \in \{-a_1, a_1, a_2\}$, uz $a_3 > 1$ kada je $-a_3 + 2 \neq -a_1$. Iz toga slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i tada je

$$\begin{aligned}L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+2}\zeta_3]) \rtimes \tau\\&\leq \nu^{-a_3+2}\zeta_3 \times \nu^{-a_3+1}\zeta_3 \times \nu^{-a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.7). Sada zaključujemo da je

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+2}\zeta_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$ i $-a_3+2 \in \{-a_1, a_1, a_2\}$, uz $a_3 > 1$ kada je $-a_3+2 \neq -a_1$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.7) traženog oblika.

Ukoliko je $n_1 = 2$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_i}\zeta_i, \nu^{-a_i+1}\zeta_i]),$$

ako je $\zeta_i \cong \zeta_j$ te $a_i = a_j + 1$ ili $a_i = 1 - a_j$ uz $a_i > \frac{1}{2}$, za međusobno različite $i, j \in \{1,2,3\}$. Sada možemo zaključiti da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Iz teorema 3.1, zbog pretpostavke teorema, slijedi da je

$$\tau \cong \zeta_l \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_l = 0$, za $l \in \{1,2\}$ i $l \neq j$, jer je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. No, tada je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]),$$

ako je $\zeta_3 \cong \zeta_j$ te $a_3 = a_j + 1$ ili $a_3 = 1 - a_j$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$, za $j \in \{1,2\}$ i $j \neq l$. Prema tome, imamo

$$\begin{aligned}L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \rtimes \tau\\&\leq \nu^{-a_3+1}\zeta_3 \times \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_l \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

što je jednako (4.7) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ te stoga, koristeći lemu 4.1, zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.7) jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \zeta_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_3 \cong \zeta_j$ te $a_l = 0$ i $a_3 = a_j + 1$ ili $a_l = 0$ i $a_3 = 1 - a_j$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$, za $\{j, l\} = \{1,2\}$.

Ako je pak $n_1 = 1$, odnosno $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, onda je

$$\nu^{-a_i}\zeta_i,$$

ako je $a_i \neq 0$, za $i \in \{1,2,3\}$. Tada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe

$SO(5, F)$ te zaključujemo, koristeći teorem 3.2 i pretpostavku teorema, da je

$$\tau \cong \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Prema tome, zaključujemo da je

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\zeta_3.$$

Sada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.7) i

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$, ireducibilan je subkvocijent inducirane reprezentacije (4.7) traženog oblika.

Konačno, ukoliko je $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(7, F))$, koristeći teorem 3.3, zaključujemo da imamo sljedeće ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.7):

(1) $\delta([\nu^{-1}\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$.

(2) $\zeta_1 \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Time smo teorem dokazali. □

4.4 Slučaj dva kvadratna karaktera

Slučaj kada se u induciranoj reprezentaciji grupe $SO(7, F)$ pojavljuju točno dva kvadratna karaktera promatramo u ovom potpoglavlju.

Započinjemo s pomoćnom lemom koju ćemo koristiti u sljedećem teoremu:

Lema 4.7. *Neka su $\chi, \zeta_1, \zeta_2 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta_1^2 \cong \zeta_2^2 \cong 1_{F^\times}$ i $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$ te neka je $0 \leq a_1 \leq a_2$ i $a_3 > 0$. Pretpostavimo da postoji ireducibilan subkvocijent π inducirane reprezentacije*

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times} \tag{4.8}$$

koji je oblika

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau),$$

gdje su δ_i ireducibilne netemperirane kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, i τ temperirana reprezentacija od $SO(2n+1, F)$. Neka je

$$\tau \leq \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_l \rtimes \tau',$$

za $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ i τ' kuspidalne. Tada je

$$\pi_j \ncong \nu^{\pm a_3} \chi^{\pm 1},$$

za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

Dokaz. Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times},$$

onda Frobeniusov reciprocitet implicira da Jacquetov modul od π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \cdots \otimes \delta_k \otimes \tau.$$

S obzirom da je π subkvocijent inducirane reprezentacije (4.8), koristeći tranzitivnost Jacquetovih modula zaključujemo da postoji ireducibilna reprezentacija π' odgovarajuće opće linearne grupe takva da

$$\mu^*(\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times}) \geq \pi' \otimes \tau.$$

Nadalje, koristeći strukturnu formulu tri puta, zaključujemo da postoje i_m i j_m takvi da je

$$a_m - 1 \leq i_m \leq j_m \leq a_m,$$

za sve $m \in \{1, 2, 3\}$, i

$$\tau \leq \delta([\nu^{i_1+1}\zeta_1, \nu^{j_1}\zeta_1]) \times \delta([\nu^{i_2+1}\zeta_2, \nu^{j_2}\zeta_2]) \times \delta([\nu^{i_3+1}\chi, \nu^{j_3}\chi]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Očito je $i_3 + 1 > 0$ jer je $a_3 > 0$. Sada iz klasifikacije temperiranih reprezentacija u poglavlju 3 slijedi traženo. $\square$

Najprije ćemo pronaći sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj se pojavljuje $\nu^{a_3}\chi$ takav da je $\chi \in \widehat{F^\times}$ karakter koji nije kvadratni i $a_3 > 0$.

Teorem 4.8. *Neka su $\chi, \zeta_1, \zeta_2 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta_1^2 \cong \zeta_2^2 \cong 1_{F^\times}$ i $\chi^2 \ncong 1_{F^\times}$ te neka je $0 \leq a_1 \leq a_2$ i $a_3 > 0$. Tada:*

(a) *Ako je $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2$ ireducibilna, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$ i $a_3 \geq a_2$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_3 < a_2$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 < a_1$.

(ii)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $a_3 \geq a_2 > 0$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $a_3 < a_2$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$.

(iii)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$ i $a_3 \geq a_2 - \frac{1}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2$, ili

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$ i $a_3 < a_2 - \frac{1}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2$.

(iv)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_3 \geq a_i > 0$ i $a_j = \frac{1}{2}$, za $\{i,j\} = \{1,2\}$, ili

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_j = \frac{1}{2}$ i $a_3 < a_i$, za $\{i,j\} = \{1,2\}$, gdje je St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna *podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}$.

(v)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_1 \not\cong \zeta_2$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(vi)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = \frac{1}{2}$, *gdje je* St_{ζ_2} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(vii)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau_2),$$

ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_1 \cong \zeta_2$, *gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(b) *Ako se* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2$ *reducira, tada je* $a_2 - a_1 = 1$ *te* $\zeta_1 \cong \zeta_2$ *i svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$ *i* $a_3 \geq a_2$, *ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_3 < a_2$, *ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 < a_1$.

(ii)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_3 \geq 1$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_3 < 1$.

(iii)
$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 \geq a_2 - \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 < a_2 - \frac{1}{2}$*.*

(iv)

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_3 \geq \frac{3}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ *te* $a_3 < \frac{3}{2}$*, gdje je* St_{ζ_1} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$*.*

(v)

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \sigma_{sp}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$*.*

Dokaz. Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times},$$

gdje je

$$\delta_i \cong \delta([\nu^{-x_i}\rho_i, \nu^{y_i}\rho_i])$$

te $-x_i + y_i < 0$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, onda iz leme 4.7 slijedi da je

$$\delta_i = \nu^{-a_3}\chi^{-1}, \tag{4.9}$$

za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nadalje, zaključujemo da je $k \leq 3$ te da τ nije temperirana reprezentacija grupe $SO(7, F)$.

Ako je $k = 3$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.8) dobivamo iz leme 4.2 i on je, ako su $a_1, a_2 \neq 0$, jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_3 \geq a_2$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \leq a_3 < a_2$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_3 < a_1$.

Ukoliko je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da Jacquetov modul od (4.8) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau.$$

Sada, koristeći potpoglavlje 4.1, možemo zaključiti da imamo tri slučaja i to ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ ili su pak δ_1 i δ_2 ireducibilne netemperirane reprezentacije od $GL(1, F)$.

U slučaju kada je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1, F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(2, F))$, zbog pretpostavke teorema, koristeći potpoglavlje 4.1 zaključujemo da je

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\chi^{-1} \quad \text{i} \quad \delta_2 = \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te ili $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$. Nadalje, koristeći lemu 4.1 zaključujemo da je pak $a_3 \geq a_2 - \frac{1}{2}$. Sada slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2+1}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.8). Prema tome, dobivamo da je

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_3 \geq a_2 - \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_3 \geq a_2 - \frac{1}{2}$ i $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.8) traženog oblika.

Analogno, zbog (4.1), dobivamo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije

(4.8) kada je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(2,F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$. On je jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_2, \nu^{-a_2+1}\zeta_2]) \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_1 \cong \zeta_2$ te $a_3 < a_2 - \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_3 < a_2 - \frac{1}{2}$ i $a_2 = 1 - a_1$ uz $a_2 > \frac{1}{2}$.

Ukoliko su netemperirane reprezentacije $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, koristeći (4.9) zaključujemo da je, zbog (4.1),

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\chi^{-1} \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-a_i}\zeta_i,$$

ako je $a_i \neq 0$, za $i \in \{1,2\}$. Prema tome, τ je ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Iz teorema 3.1 slijedi da je, za $j \in \{1,2\}$ i $j \neq i$, reprezentacija τ ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_j = \frac{1}{2}$, ili je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2$. Dakle, u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_i}\zeta_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.8) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ i zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.8), ako je $a_i \neq 0$ i $a_j = \frac{1}{2}$, za $\{i,j\} = \{1,2\}$, jednak ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_3 \geq a_i$, ili

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_3 < a_i$, gdje je St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}$. U drugom je pak slučaju $\delta_2 = \nu^{-a_2}\zeta_2$ i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.8) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ i zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.8), ako je $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, jednak ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_3 \geq a_2$, ili
$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$
za $a_3 < a_2$.

Konačno, ako je $k = 1$ i ako je
$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\chi \rtimes 1_{F^\times},$$
Frobeniusov reciprocitet implicira da se
$$\delta_1 \otimes \tau$$
nalazi u Jacquetovom modulu od (4.8) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Sada, koristeći (4.9) i potpoglavlje 4.1, zaključujemo da je netemperirana reprezentacija δ_1 ireducibilna reprezentacija grupe $GL(1, F)$, pa je
$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\chi^{-1}.$$
Tada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$ i koristeći teorem 3.2 dolazimo do svih ireducibilnih subkvocijenata $L(\delta_1 \rtimes \tau)$ od (4.8).

Temperirana reprezentacija τ je ili strogo pozitivna ili temperirana koja nije kvadratno integrabilna.

Ako je τ strogo pozitivna reprezentacija, tada može biti ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ od
$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$
uz uvjet $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_1 \ncong \zeta_2$, ili jedinstvena ireducibilna podreprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ od
$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$
uz uvjet $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2$. Tada je u prvom slučaju
$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$
što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.8). Nadalje, u drugom je slučaju
$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$
što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.8). Prema tome, ireducibilan

subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.8) jednak je ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_1 \ncong \zeta_2$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

ili je jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_1 \cong \zeta_2$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Nadalje, ako τ nije strogo pozitivna reprezentacija, tada može biti jedna od sljedećih:

(1) $\tau \cong \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(2) $\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{1}{2}$, zbog $a_1 \leq a_2$, gdje je St_{ζ_2} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(3) Ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_2$.

Ako je

$$\tau \cong \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.8) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. Tada je

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.8) traženog oblika.

Ukoliko je

$$\tau \cong \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.8), i ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.8) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_2} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

Konačno, ako je pak

$$\tau \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi^{-1} \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.8). Koristeći sada teorem 3.2 vidimo da su ireducibilni subkvocijenti traženog oblika inducirane reprezentacije (4.8) sljedeći:

$$L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau_1) \ \text{ i } \ L(\nu^{-a_3}\chi^{-1} \rtimes \tau_2),$$

ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_1 \cong \zeta_2$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

I time je dokaz teorema gotov. □

Nastavljamo s pomoćnom lemom koju ćemo pak koristiti u sljedećem teoremu:

Lema 4.9. *Neka su $\chi, \zeta_2, \zeta_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta_2^2 \cong \zeta_3^2 \cong 1_{F^\times}$ i $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$ te neka je $a_1 = 0$ i $0 \leq a_2 \leq a_3$. Pretpostavimo da postoji ireducibilan subkvocijent π inducirane reprezentacije*

$$\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{4.10}$$

koji je oblika

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau),$$

gdje su δ_i ireducibilne netemperirane kvadratno integrabilne reprezentacije od $GL(n_i, F)$, *za* $i = 1, 2, \ldots, k$, *i* τ *temperirana reprezentacija od* $SO(2n+1, F)$. *Neka je*

$$\tau \leq \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_l \rtimes \tau',$$

za $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ *i* τ' *kuspidalne. Tada postoji* $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ *takav da je*

$$\pi_j \cong \chi^{\pm 1}.$$

Dokaz. Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda Frobeniusov reciprocitet implicira da se

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \cdots \otimes \delta_k \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu od π u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu.

Nadalje, kako je π subkvocijent inducirane reprezentacije (4.10), koristeći tranzitivnost Jacquetovih modula zaključujemo da postoji ireducibilna reprezentacija π' odgovarajuće opće linearne grupe takva da

$$\mu^*(\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}) \geq \pi' \otimes \tau.$$

Sada, koristeći strukturnu formulu tri puta, zaključujemo da postoje i_m i j_m takvi da je

$$a_m - 1 \leq i_m \leq j_m \leq a_m,$$

za sve $m \in \{1, 2, 3\}$, i

$$\begin{aligned} \pi' \leq\ & \delta([\nu^{-i_1}\chi^{-1}, \nu^{-a_1}\chi^{-1}]) \times \delta([\nu^{j_1+1}\chi, \nu^{a_1}\chi]) \\ & \times \delta([\nu^{-i_2}\zeta_2, \nu^{-a_2}\zeta_2]) \times \delta([\nu^{j_2+1}\zeta_2, \nu^{a_2}\zeta_2]) \\ & \times \delta([\nu^{-i_3}\zeta_3, \nu^{-a_3}\zeta_3]) \times \delta([\nu^{j_3+1}\zeta_3, \nu^{a_3}\zeta_3]) \times 1_{F^\times}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $a_1 = 0$, koristeći poglavlje 3 sada lako zaključimo da slijedi traženo. □

U nastavku ćemo pronaći sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije u kojoj se pojavljuje $\nu^{a_3}\chi$ takav da je $\chi \in \widehat{F^\times}$ karakter koji nije kvadratni, ali je $a_3 = 0$.

Teorem 4.10. *Neka su* $\chi, \zeta_2, \zeta_3 \in \widehat{F^\times}$ *takvi da je* $\zeta_2^2 \cong \zeta_3^2 \cong 1_{F^\times}$ *i* $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$ *te neka je* $a_1 = 0$ *i* $0 \leq a_2 \leq a_3$. *Tada:*

(a) *Ako je* $\nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3$ *ireducibilna, svi su ireducibilni kompozicioni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 > 0$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 = 0$ i $a_3 > 0$, ili pak

$$\chi \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_i > 0$ i $a_j = \frac{1}{2}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, gdje je St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{sp}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(v)

$$\chi \rtimes \tau_1 \quad i \quad \chi \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(vi)

$$\chi \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3},$$

ako je $a_2 = 0$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(b) Ako se $\nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3$ reducira, tada je $a_3 - a_2 = 1$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$ i svi su ireducibilni kompozicioni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 > 0$, ili

$$L(\nu^{-1}\zeta_2 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 = 0$.

(ii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \chi \rtimes 1_{F^\times}).$$

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}),$$

za $a_2 = \frac{1}{2}$, *gdje je* St_{ζ_2} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(2)},$$

ako je $a_2 = \frac{1}{2}$, *gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Dokaz. Ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k) \leq \chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

gdje je

$$\delta_i \cong \delta([\nu^{-x_i}\rho_i, \nu^{y_i}\rho_i])$$

te $-x_i + y_i < 0$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, onda iz leme 4.9 slijedi da je

$$\delta_i \neq \nu^{-a_1}\chi^{-1}, \tag{4.11}$$

za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Sada zaključujemo da je $k < 3$.

Ukoliko je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

Frobeniusov reciprocitet implicira da se

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu od (4.10) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Nadalje, iz potpoglavlja 4.1 i zbog pretpostavke teorema, slijedi da su netemperirane reprezentacije δ_1 i δ_2 iz $\mathrm{Irr}(GL(1, F))$. Prema tome, zbog (4.1), vidimo da je

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\zeta_3 \quad \text{i} \quad \delta_2 = \nu^{-a_2}\zeta_2,$$

za $a_2, a_3 \neq 0$, te slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$. Koristeći teorem 3.1 zaključujemo da je

$$\tau \cong \chi \rtimes 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.10) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. Dakle,

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2, a_3 \neq 0$, ireducibilan je subkvocijent inducirane reprezentacije (4.10) traženog oblika.

Nadalje, ako je $k = 1$ i

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da Jacquetov modul od (4.10) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \tau.$$

Sada, koristeći potpoglavlje 4.1, zaključujemo da je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(n_1, F))$, gdje je, zbog pretpostavke teorema, $1 \leq n_1 \leq 2$.

Ako je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(2,F))$, onda je, zbog pretpostavke teorema,

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]),$$

ako je $\zeta_2 \cong \zeta_3$ te ili $a_3 = a_2 + 1$ ili $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$, te slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Koristeći teorem 3.1 zaključujemo da je

$$\tau \cong \chi \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3+1}\zeta_3 \times \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.10) i zaključujemo, koristeći lemu 4.1, da je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.10) traženog oblika jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_3, \nu^{-a_3+1}\zeta_3]) \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $\zeta_2 \cong \zeta_3$ te $a_3 = a_2 + 1$ ili $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$.

Ukoliko je pak $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, onda je, zbog (4.11),

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\zeta_i,$$

ako je $a_i \neq 0$, za $i \in \{2,3\}$. Iz toga slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5,F)$. Koristeći teorem 3.2 zaključujemo da je, zbog (4.1),

$$\tau \leq \chi \times \nu^{a_j}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times},$$

za $j \in \{2,3\}$ te $j \neq i$. Nadalje, τ je ili izomorfna reprezentaciji

$$\chi \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_2 = 0$, zbog $a_2 \leq a_3$, ili je τ izomorfna reprezentaciji

$$\chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j},$$

za $a_j = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}$. Sada je u prvom slučaju $\delta_1 = \nu^{-a_3}\zeta_3$ i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\zeta_3 \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\zeta_3 \times \chi \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.10). U drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_i}\zeta_i \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_i}\zeta_i \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.10). Prema tome, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.10) jednak je ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_i}\zeta_i \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $a_i \neq 0$ i $a_j = \frac{1}{2}$, za međusobno različite $i,j \in \{2,3\}$, gdje je St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}$.

Konačno, ukoliko je $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(7,F))$ temperirana reprezentacija, onda imamo sljedeće ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.10):

(1) $\chi \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}.$$

(2) $\chi \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$, ako je $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(3) $\chi \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$, za $a_2 = a_3 = 0$.

(4) $\chi \rtimes \tau_1$ i $\chi \rtimes \tau_2$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(5) $\chi \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}$, za $a_2 = 0$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Time je teorem dokazan. □

4.5 Slučaj jednog kvadratog karaktera

U ovom ćemo poglavlju pronaći sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj se pojavljuje točno jedan kvadratni karakter.

Teorem 4.11. *Neka su $\zeta, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, $\chi_2^2 \not\cong 1_{F^\times}$ i $\chi_3^2 \not\cong 1_{F^\times}$ te $a_i \geq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, pri čemu je $0 \leq a_2 \leq a_3$. Nadalje, neka je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$. Tada:*

(a) Ako je $\nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3$ ireducibilna, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \geq a_3$ i $a_2 > 0$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 \leq a_1 < a_3$*, ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_2$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$*, ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$ *i* $a_3 > 0$*, ili*

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = 0$*, za svaki* $i \in \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \geq a_3 > 0$ *i* $a_2 = 0$*, ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_3$ *i* $a_2 = 0$*, ili*

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 > 0$ *i* $a_2 = a_3 = 0$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 \geq a_3 - \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = 1 - a_2$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$*, ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < a_3 - \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = 1 - a_2$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

(v)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_2 > 0$*, ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ *i* $a_3 > 0$, *ili*

$$\chi_2 \times \chi_3 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = a_3 = 0$.

(vi)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = 1 - a_2$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_3 = 1 - a_2$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

(vii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 > 0$ *i* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$, *ili*

$$\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(viii)

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_l = \frac{1}{2}$, *za svaki* $l \in \{1, 2, 3\}$ *i* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(b) Ako se $\nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3$ *reducira, tada je* $a_3 - a_2 = 1$ *te* $\chi_2 \cong \chi_3$ *i svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \geq a_3$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 \leq a_1 < a_3$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_2$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\chi_2^{-1} \times \zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$.

(*iii*)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-1}\chi_2^{-1} \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \geq 1$ *i* $a_2 = 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < 1$ *i* $a_2 = 0$.

(*iv*)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 \geq a_3 - \frac{1}{2}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < a_3 - \frac{1}{2}$.

(*v*)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\chi_2^{-1} \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = 0$.

(*vi*)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

Dokaz. Promatramo induciranu reprezentaciju

$$\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.12}$$

gdje su $\zeta, \chi_1, \chi_2 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, $\chi_2^2 \ncong 1_{F^\times}$ i $\chi_3^2 \ncong 1_{F^\times}$ te $a_i \geq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, pri čemu je $0 \leq a_2 \leq a_3$.

Ako je
$$L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$
tada je $k \leq 3$.

Ukoliko je $k = 3$, onda koristeći lemu 4.2 dobivamo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12), koji je, ako je $a_i \neq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, jednak
$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$
za $a_1 < a_2$, ili je jednak
$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$
za $a_2 \leq a_1 < a_3$, ili je jednak
$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$
za $a_1 \geq a_3$.

Ako je $k = 2$ i ako je
$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$
slijedi da Jacquetov modul od (4.12) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži
$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau.$$
Sada, koristeći potpoglavlje 4.1 zaključujemo da je δ_i ireducibilna netemperirana reprezentacija grupe $GL(n_i, F)$, za $i = 1, 2$, te da je pri tome ili $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$ ili je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$ ili je pak $n_1 = n_2 = 1$.

Ako je $n_1 = 1$ i $n_2 = 2$, onda je, zbog potpoglavlja 4.1 i pretpostavke teorema,
$$\delta_1 = \nu^{-a_1}\zeta \quad \text{i} \quad \delta_2 = \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]),$$
ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ te $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$. Nadalje, iz leme 4.1 slijedi da je $a_1 \geq a_3 - \frac{1}{2}$. Prema tome, vidimo da je
$$\tau \cong 1_{F^\times}$$
te je
$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Sada zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika, za $a_1 \geq a_3 - \frac{1}{2}$, jednak

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ te $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

Koristeći (4.1) dobijemo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) u slučaju kada je $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$, za $a_1 < a_3 - \frac{1}{2}$, koji je jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_1 \neq 0$ i $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ te $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

Nadalje, ako je $n_1 = n_2 = 1$, onda su δ_1 i δ_2 oblika

$$\nu^{-a}\chi^{-1},$$

što znamo iz potpoglavlja 4.1. Sada možemo zaključiti da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Koristeći teorem 3.1 tada znamo da je τ ili ireducibilna temperirana podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$, za $a_1 = \frac{1}{2}$, ili je $\tau \cong \chi' \rtimes 1_{F^\times}$, gdje je $\chi' \cong \zeta$ i $a_1 = 0$ ili je $\chi' \cong \chi_2$ i $a_2 = 0$, zbog $a_2 \leq a_3$.

Ako je

$$\tau \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je, zbog (4.1),

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_2, a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Tada je

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2, a_3 \neq 0$, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika.

Ukoliko je

$$\tau \cong \zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

onda, koristeći (4.1), imamo da je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_2, a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.12) tada je jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $a_2, a_3 \neq 0$.

A ukoliko je pak

$$\tau \cong \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda, koristeći (4.1), imamo da je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1, a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.12), ako je $a_2 = 0$, tada je jednak ili

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \geq a_3 > 0$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_3$.

Nadalje, ako je $k = 1$ i ako je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda iz Frobeniusovog reciprociteta slijedi da se

$$\delta_1 \otimes \tau$$

nalazi u Jacquetovom modulu od (4.12) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu. Netemperirana reprezentacija δ_1 ireducibilna je reprezentacija od $GL(n_1, F)$, gdje je, zbog potpoglavlja 4.1 i pretpostavke teorema, $1 \leq n_1 \leq 2$.

Ako je $n_1 = 2$, onda je, zbog pretpostavke teorema,

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]),$$

ako je $a_3 = a_2 + 1$ i $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ i $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$. Prema tome, slijedi da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Sada, koristeći teorem 3.1, dolazimo do ireducibilnih subkvocijenata $L(\delta_1 \rtimes \tau)$ od (4.12).

Temperirana reprezentacija τ može biti ili ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$, ili je

$$\tau \cong \zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$. Tada u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.12) i ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.12), za $a_1 = \frac{1}{2}$, jednak je

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

ako je $a_3 = a_2 + 1$ i $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ i $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$. U drugom pak slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ jednako (4.12) i zaključujemo, koristeći lemu 4.1, da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.12), za $a_1 = 0$, jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = a_2 + 1$ i $\chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 1 - a_2$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ i $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

Ukoliko je pak $n_1 = 1$, iskoristimo li potpoglavlje 4.1, znamo da je netemperirana reprezentacija δ_1 oblika

$$\nu^{-a}\chi^{-1}.$$

Tada zaključujemo da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$. Sada, koristeći (4.1) i teorem 3.2, zaključujemo da je τ jedna od sljedećih reprezentacija:

(1) $\tau \cong \chi' \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}$, za $a_1 = 0$ i $\chi' \cong \zeta$ ili za $a_3 = 0$ i $\chi' \cong \chi_3$, zbog $a_2 \leq a_3$.

(2) $\tau \cong \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta$, za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = 0$, zbog $a_2 \leq a_3$.

(3) $\tau \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

Ako je

$$\tau \cong \zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Tada je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$.

Ukoliko je

$$\tau \cong \chi_3 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_3 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Tada je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika jednak

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 \neq 0$ i $a_2 = a_3 = 0$.

Nadalje, ako je

$$\tau \cong \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_3 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Tada je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$.

Ukoliko je

$$\tau \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

onda je

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_1 \neq 0$, što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.12). Dakle, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.12) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 \neq 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

Na kraju promatramo slučaj kada je temperirana reprezentacija τ ireducibilna reprezentacija grupe $SO(7,F)$. Tada, koristeći teorem 3.3, zaključujemo da imamo sljedeće ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.12):

(1) $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta$, ukoliko je $a_l = \frac{1}{2}$, za svaki $l \in \{1,2,3\}$, i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(2) $\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$.

(3) $\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(4) $\chi_2 \times \chi_3 \rtimes \mathrm{St}_\zeta$, za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$.

Time završavamo dokaz teorema. $\square$

4.6 Slučaj bez kvadratnih karaktera

U ovom potpoglavlju pronaći ćemo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u kojoj nijedan karakter nije kvadratni.

Teorem 4.12. *Neka je $\chi_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\chi_i \not\cong \chi_i^{-1}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, te neka je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Tada:*

(a) Ako je $(a_s, \chi_s) \neq (a_t - 1, \chi_t)$, za sve $s,t \in \{1,2,3\}$, onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$ *i* $a_3 > 0$, *ili pak*

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l = 0$ *i* $a_3 = 1 - a_j$ *uz* $a_3 > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_j \cong \chi_3^{-1}$, *za* $\{j, l\} = \{1, 2\}$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l \neq 0$ *i* $a_i = a_j = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(v)

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(b) Ako je $(a_s, \chi_s) = (a_t - 1, \chi_t)$, *za neke* $s, t \in \{1, 2, 3\}$, *ali ne postoje* s, t, u *takvi da je* $\{s, t, u\} = \{1, 2, 3\}$, $(a_s, \chi_s) = (a_t - 1, \chi_t)$ *i* $(a_t, \chi_t) = (a_u - 1, \chi_u)$, *onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $a_2 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-1}\chi_3^{-1} \times \chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$ *ili ako je* $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = 1 - a_l$ *uz* $a_j > \frac{1}{2}$ *te* $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = 2 - a_1$ *i* $a_3 = a_2 + 1$ *uz* $a_3 > 1$ *te* $\chi_3^{-1} \cong \chi_1$ *ili ako je* $a_3 = 2 - a_2$ *i* $a_3 = a_1 + 1$ *uz* $a_3 > 1$ *te* $\chi_3^{-1} \cong \chi_2$.

(v)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l = 0$ *i* $a_3 = a_j + 1$, *za* $\{j, l\} = \{1, 2\}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-1}\chi_3^{-1}, \chi_3^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$ *i* $\chi_1 \times \chi_2 \cong \chi_l \times \chi_3^{-1}$, *za* $l \in \{1, 2\}$.

(vi)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\chi_3^{-1} \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_3, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_3]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ *te* $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi_3, \chi_3^{-1}\}$.

(vii)

$$\delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$ *te* $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$.

(c) Ako je $(a_1, \chi_1) = (a_2 - 1, \chi_2)$ *i* $(a_2, \chi_2) = (a_3 - 1, \chi_3)$, *onda su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\chi_1^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_1^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 > 0$, *ili*

$$L(\nu^{-2}\chi_1^{-1} \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_i}\chi_j^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$, *ili*

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_i}\chi_j^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ *i* $a_j = a_l + 1$, *za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}).$$

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-2}\chi_3^{-1}, \nu^{-1}\chi_3^{-1}]) \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

Dokaz. Neka je

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.13}$$

gdje je $\chi_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\chi_i \not\cong \chi_i^{-1}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, i $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, inducirana reprezentacija. Ukoliko je $L(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau)$ ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.13), onda je $k \leq 3$.

Ako je $k = 3$, onda ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.13) dobivamo iz leme 4.2 i on je jednak

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \nu^{-a_1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \neq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ukoliko je $k = 2$ i ako je

$$L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

onda iz Frobeniusovog reciprociteta slijedi da Jacquetov modul od (4.13) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes \delta_2 \otimes \tau.$$

Koristeći potpoglavlje 4.1 zaključujemo da imamo tri slučaja i to ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ ili je δ_1 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(2, F)$ i δ_2 ireducibilna netemperirana reprezentacija od $GL(1, F)$ ili su pak δ_1 i δ_2 ireducibilne netemperirane reprezentacije od $GL(1, F)$.

Ako je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(2,F))$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \ \text{ i } \ \delta_2 = \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]),$$

ako je $a_i \neq 0$ i $a_j = a_l + 1$ te $\chi_l \cong \chi_j$ ili ako je $a_i \neq 0$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ te $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$. Nadalje, koristeći lemu 4.1 zaključujemo da je $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$. Sada slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}$$

i imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1} \times \nu^{-a_j}\chi_j^{-1} \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.13). Prema tome, ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.13) jednak je

$$L(\nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \times \delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_i \neq 0$, $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = a_l + 1$ te $\chi_l \cong \chi_j$ ili ako je $a_i \neq 0$, $a_i \geq a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ te $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Zbog (4.1), analogno dobijemo ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.13) za $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(2,F))$ i $\delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, koji je jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_j}\chi_j^{-1}, \nu^{-a_j+1}\chi_j^{-1}]) \times \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = a_l + 1$ te $\chi_l \cong \chi_j$ ili ako je $0 < a_i < a_j - \frac{1}{2}$ i $a_j = 1 - a_l$ uz $a_j > \frac{1}{2}$ te $\chi_l \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Ako su $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Irr}(GL(1,F))$, onda je

$$\delta_1 = \nu^{-a_i}\chi_i^{-1} \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-a_j}\chi_j^{-1},$$

ako su $a_i, a_j \neq 0$, za međusobno različite $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Tada je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3,F)$. Sada, koristeći teorem 3.1 i pretpostavku teorema, zaključujemo da je

$$\tau \cong \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = 0$, jer je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, a onda je, zbog (4.1),

$$\delta_1 = \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-a_2}\chi_2^{-1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}L(\delta_1 \times \delta_2 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.13). Prema tome, ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.13) traženog oblika jednak je

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_2}\chi_2^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $a_2, a_3 \neq 0$.

Ukoliko je $k = 1$ i ako je

$$L(\delta_1 \rtimes \tau) \leq \nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da Jacquetov modul od (4.13) u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\delta_1 \otimes 1_{F^\times}$$

i vidimo, koristeći potpoglavlje 4.1, da je $\delta_1 \in \mathrm{Irr}(GL(n_1, F))$, gdje je $1 \leq n_1 \leq 3$.

Ako je $n_1 = 3$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]),$$

ako je $a_3 = a_1 + 2$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_1 \cong \chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 2 - a_1$ i $a_3 = a_2 + 1$ uz $a_3 > 1$ te $\chi_2^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_1$ ili ako je $a_3 = 2 - a_2$ i $a_3 = a_1 + 1$ uz $a_3 > 1$ te $\chi_1^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_2$, iz čega slijedi da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]) \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

što je u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$ jednako (4.13), te zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent inducirane reprezentacije (4.13) traženog oblika jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+2}\chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = a_1 + 2$ i $a_3 = a_2 + 1$ te $\chi_1 \cong \chi_2 \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 2 - a_1$ i $a_3 = a_2 + 1$ uz $a_3 > 1$ te $\chi_2^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_1$ ili ako je $a_3 = 2 - a_2$ i $a_3 = a_1 + 1$ uz $a_3 > 1$ te $\chi_1^{-1} \cong \chi_3^{-1} \cong \chi_2$.

Ukoliko je $n_1 = 2$, onda je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_i}\chi_i^{-1}, \nu^{-a_i+1}\chi_i^{-1}]),$$

ako je $a_i = a_j + 1$ i $\chi_j \cong \chi_i$ ili ako je $a_i = 1 - a_j$ uz $a_i > \frac{1}{2}$ i $\chi_j \cong \chi_i^{-1}$, za međusobno različite $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Sada zaključujemo da je τ ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(3, F)$ i iz teorema 3.1, zbog pretpostavke teorema, slijedi da je

$$\tau \cong \chi_l \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_l = 0$, za $l \in \{1, 2\}$ i $l \neq j$, jer je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. No tada je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]),$$

ako je $a_3 = a_j + 1$ i $\chi_j \cong \chi_3$ ili ako je $a_3 = 1 - a_j$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ te $\chi_j \cong \chi_3^{-1}$, za $j \in \{1, 2\}$ i $j \neq l$. Prema tome, imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}] \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

što je jednako (4.13) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7, F))$ te stoga, koristeći lemu 4.1, zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.7) jednak

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\chi_3^{-1}, \nu^{-a_3+1}\chi_3^{-1}]) \times \chi_l \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l = 0$ i $a_3 = a_j + 1$ te $\chi_j \cong \chi_3$ ili ako je $a_l = 0$ i $a_3 = 1 - a_j$ uz $a_3 > \frac{1}{2}$ te $\chi_j \cong \chi_3^{-1}$, za $\{j, l\} = \{1, 2\}$.

Ukoliko je $n_1 = 1$, onda je δ_1 oblika

$$\nu^{-a}\chi^{-1}$$

i τ je ireducibilna temperirana reprezentacija grupe $SO(5, F)$. Koristeći teorem 3.2 zaključujemo da je τ ili izomorfna reprezentaciji

$$\chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = a_2 = 0$, zbog $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, ili je τ izomorfna reprezentaciji

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = a_j = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Prema tome, zbog

(4.1) i pretpostavke teorema, u prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_3 \neq 0$, što je jednako (4.13) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$, dok u drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned} L(\delta_1 \rtimes \tau) &\hookrightarrow \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \rtimes \tau \\ &\leq \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\leq \nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

za $a_l \neq 0$, što je jednako (4.13) u Grothendieckovoj grupi $R(SO(7,F))$. Iz toga zaključujemo da je ireducibilan subkvocijent traženog oblika inducirane reprezentacije (4.13) jednak ili

$$L(\nu^{-a_3}\chi_3^{-1} \times \chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 \neq 0$, ili je jednak

$$L(\nu^{-a_l}\chi_l^{-1} \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_l \neq 0$ i $a_i = a_j = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za međusobno različite $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Konačno, ako je $\tau \in \mathrm{Irr}(SO(7,F))$ temperirana reprezentacija, onda koristeći teorem 3.3 zaključujemo da imamo sljedeće ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (4.13):

(1) $\delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$.

(2) $\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$, za $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(3) $\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

I time završavamo dokaz. □

4.7 Primjeri

Napravit ćemo sada nekoliko primjera induciranih reprezentacija grupe $SO(7,F)$ kojima ćemo pronaći sve ireducibilne subkvocijente koristeći odgovarajuće teoreme iz nekog od prethodnih potpoglavlja.

Primjer 4.13. Neka je

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta \times \nu^{\frac{5}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.14}$$

gdje je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, inducirana reprezentacija grupe $SO(7, F)$. S obzirom da su sva tri karaktera kvadratna, koristimo potpoglavlje 4.3. Nadalje, kako se pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$, zaključujemo da koristimo teorem 4.3. Prema tome, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.14) sljedeći:

(i) $L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$.

(ii) $L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times})$.

(iii) $L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$.

(iv) $L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times})$.

(v) $L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \rtimes \mathrm{St}_\zeta)$, gdje je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od
$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vi) $L(\delta([\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta)$, pri čemu je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od
$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vii) $L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)})$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od
$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(viii) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$, koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od
$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Primjer 4.14. Neka je
$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times} \tag{4.15}$$
inducirana reprezentacija grupe $SO(7, F)$. Pri tome je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2\}$, a karakteri ζ_1 i ζ_2 su međusobno neizomorfni. Kako su sva tri karaktera kvadratna, koristimo potpoglavlje 4.3, a s obzirom da se pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$, zaključujemo da koristimo teorem 4.4. Prema tome, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.15) sljedeći:

(i) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$.

(ii) $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$.

(iii) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j})$, gdje je reprezentacija St_{ζ_j} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times},$$

za $\{i,j\} = \{1,2\}$.

(iv) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)})$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ je strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}.$$

(v) $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, pri čemu je St_{ζ_1} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vi) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vii) Strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)},$$

gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Primjer 4.15. Neka je

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.16}$$

gdje je $\zeta \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, inducirana reprezentacija grupe $SO(7,F)$. Kao u prethodnom primjeru, koristimo teorem 4.4. Prema tome, svi su ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.16) sljedeći:

(i) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$.

(ii) $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$.

(iii) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes \mathrm{St}_{\zeta})$, pri čemu je St_{ζ} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}.$$

(iv) $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times})$.

(v) $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta)$, pri čemu je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vi) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(vii) $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \rtimes \tau_1)$ i $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta \rtimes \tau_2)$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

(viii) Međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije, σ_1 i σ_2, od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta]) \rtimes 1_{F^\times},$$

koje su diskretne serije.

Primjer 4.16. Neka je

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \times \chi_2 \times \nu\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{4.17}$$

gdje su $\zeta, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$ i $\chi_2^2, \chi_3^2 \not\cong 1_{F^\times}$ te $\chi_2 \not\cong \chi_3$, inducirana reprezentacija grupe $SO(7, F)$. Kako imamo jedan kvadratni karakter, koristimo potpoglavlje 4.5, odnosno koristimo teorem 4.11. Neka je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}.$$

Tada su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (4.17) sljedeći subkvocijenti:

(i) $L(\nu^{-1}\chi_3^{-1} \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times})$.

(ii) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \times \delta([\nu^{-1}\chi_3^{-1}, \chi_3^{-1}]) \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

(iii) $L(\nu^{-1}\chi_3^{-1} \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta)$.

(iv) $L(\delta([\nu^{-1}\chi_3^{-1}, \chi_3^{-1}]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta)$, ako je $\chi_2 \cong \chi_3^{-1}$.

Poglavlje 5

Unitarni dual

Cilj je ovog poglavlja potpuni opis unitarnog duala p-adske grupe $SO(7, F)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

U potpoglavlju 5.1 opisana je strategija traženja unitarnog duala, u potpoglavlju 5.2 definirana je Aubertina involucija i Aubertin dual, a u potpoglavljima 5.3, 5.4, 5.5 i 5.6 opisani su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$, pri čemu su potpoglavlja podijeljena prema broju kvadratnih karaktera koji se pojavljuju u induciranoj reprezentaciji.

5.1 Strategija traženja unitarnog duala

U poglavlju 4 opisali smo sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$, a u nastavku ćemo između danih ireducibilnih subkvocijenata odabrati one koji su unitarizabilni.

U slučaju kada su sva tri karaktera kvadratna, koristimo odgovarajuće rezultate iz [59] da bismo odredili unitarizabilne subkvocijente, a u slučaju kada imamo jedan, dva ili tri nekvadratna karaktera, problem unitarnosti svodi se na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe i reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe nižeg ranga. Unitarni dual opće linearne grupe pronašao je Tadić u [48], a unitarni dual specijalne ortogonalne grupe $SO(5, F)$ Matić u [26].

Također, bitna metoda koju koristimo pri traženju unitarizabilnih subkvocijenata jest Aubertina involucija, koja je uvedena za reduktivne p-adske grupe u [2]. Ona predstavlja određenu generalizaciju involucije na Grothendieckovoj grupi glatkih reprezentacija konačne duljine reduktivne grupe koju su proučavali Zelevinsky, Bernstein, Casselman, Iwahori, Schneider, Moy i drugi.

Jedna od najzanimljivijih slutnji o Aubertinoj involuciji tvrdi da Aubertina involucija čuva unitarnost. Tu je slutnju postavio Bernstein za opće linearne grupe u [5], a dokazao ju je Tadić. Također, Hanzer je dokazala u [15] da je Aubertin dual strogo pozitivne diskretne serije unitarizabilan. Algoritam za određivanje Aubertinih duala opće linearne grupe dan je u [34], a kasnije je eksplicitnija formula dana u [23], dok je u [19] Jantzen dao algoritam za klasične grupe u polucijelom slučaju. Nadalje, Matić je u [27] dao eksplicitan opis Aubertinih duala strogo pozitivnih diskretnih serija simplektičke i neparne specijalne ortogonalne grupe nad nearhimedskim lokalnim poljem. Također, u [29] je Matić dao eksplicitan opis Aubertinih duala ireducibilnih reprezentacija simplektičke i neparne specijalne ortogonalne grupe nad nearhimedskim lokalnim poljem koji se pojavljuju u prvom induktivnom koraku u realizaciji diskretnih serija počevši od strogo pozitivnih reprezentacija.

5.2 Aubertin dual

Uvedimo najprije definiciju Aubertine involucije, kao i osnovna svojstva, iz [2] i [3].

Neka je G povezana reduktivna p-adska grupa nad lokalnim nearhimedskim poljem F. Fiksiramo maksimalan rascjepiv torus A_{min} od G i minimalnu paraboličku podgrupu P_{min} koja sadrži A_{min}. Nadalje, s $W = W(G/A_{min})$ označavamo Weylovu grupu od G u odnosu na A_{min}. Označimo sa Σ skup korijena od G u odnosu na fiksiranu minimalnu paraboličku podgrupu te neka Δ označava bazu od Σ, koja je određena odabirom minimalne paraboličke podgrupe P_{min}. Neka je P_Θ standardna parabolička podgrupa od G koja odgovara Θ, gdje je Θ podskup od Δ. Nadalje, neka je M_Θ standardna Levijeva podgrupa od G koja odgovara Θ.

Kao ranije, s $\mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ označavamo normaliziranu parabolički induciranu reprezentaciju od G, koja je inducirana iz σ, gdje je P parabolička podgrupa od G s Levijevim faktorom M, a σ reprezentacija od M. Također, normaliziran Jacquetov modul od σ u odnosu na standardnu paraboličku podgrupu koja ima Levijev faktor jednak M označavamo s $r_M^G(\sigma)$, gdje je σ dopustiva reprezentacija od G konačne duljine.

Teorem 5.1. *Definiramo preslikavanje na Grothendieckovoj grupi dopustivih reprezentacija konačne duljine od G s*

$$D_G = \sum_{\Theta \subseteq \Delta} (-1)^{|\Theta|} \mathrm{Ind}_{M_\Theta}^G \circ r_{M_\Theta}^G.$$

Operator D_G ima sljedeća svojstva:

(1) *D_G je involucija, to jest $D_G^2 = \mathrm{id}$.*

(2) *D_G prenosi ireducibilne reprezentacije u ireducibilne reprezentacije.*

(3) *Ako je σ ireducibilna kuspidalna reprezentacija, onda je $D_G(\sigma) = (-1)^{|\Delta|}\sigma$.*

(4) *Za standardnu Levijevu podgrupu $M = M_\Theta$ imamo*

$$r_M^G \circ D_G = Ad(w) \circ D_{w^{-1}(M)} \circ r_{w^{-1}(M)}^G,$$

gdje je w najduži element skupa $\{w \in W : w^{-1}(\Theta) > 0\}$.

(5) *Za standardnu Levijevu podgrupu* $M = M_\Theta$ *imamo*

$$D_G \circ \operatorname{Ind}_M^G = \operatorname{Ind}_M^G \circ D_M.$$

Definirajmo sada Aubertin dual:

Definicija 5.2. *Ako je σ ireducibilna reprezentacija od $SO(2n+1,F)$, onda sa $\widehat{\sigma}$ označavamo reprezentaciju $\pm D_{SO(2n+1,F)}(\sigma)$, gdje uzimamo predznak $+$ ili $-$ takav da je $\widehat{\sigma}$ pozitivan element u Grothendieckovoj grupi dopustivih reprezentacija konačne duljine od $SO(2n+1,F)$ i $\widehat{\sigma}$ zovemo* ***Aubertinim dualom*** *od σ.*

U nastavku koristimo poznatu činjenicu da za paraboličku indukciju za klasične grupe vrijedi sljedeće:

$$\widehat{\pi_1 \rtimes \pi_2} = \widehat{\pi_1} \rtimes \widehat{\pi_2}. \tag{5.1}$$

5.3 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju tri kvadratna karaktera

U ovom ćemo potpoglavlju dati opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u kojoj su sva tri karaktera kvadratna.

Najprije navodimo definiciju slabo realne reprezentacije koja će nam trebati za propozicije koje ćemo u nastavku koristiti.

Definicija 5.3. *Kažemo da je ireducibilna reprezentacija σ grupe $SO(2n+1,F)$* ***slabo realna*** *ako za svako ulaganje oblika*

$$\sigma \hookrightarrow \rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_k \rtimes \sigma',$$

gdje su $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ ireducibilne kuspidalne reprezentacije općih linearnih grupa i σ' ireducibilna kuspidalna reprezentacija grupe $SO(2n'+1,F)$, vrijedi

$$\rho_i^u \cong \widetilde{\rho_i^u},$$

za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

5.3.1 Slučaj kada se u eksponentu pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$

Najprije ćemo pronaći sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u kojoj se pojavljuju tri kvadratna karaktera koja su međusobno izomorfna, a u eksponentu se pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$.

Teorem 5.4. *Neka je* $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$*, za svaki* $i \in \{1,2,3\}$*, te neka je* $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$*. Nadalje, neka su* a_1 *i* a_2 *različiti od* $\frac{1}{2}$ *takvi da je* $0 \leq a_1 \leq a_2$ *i neka je* $a_3 = \frac{1}{2}$*. Također, neka je* St_{ζ_1} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$*. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$*.*

(ii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = a_1 + 1$ *ili* $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = 1 - a_1$*.*

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *i* $a_2 = \frac{5}{2}$*.*

(iv)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$*.*

(v)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, *ili*

$$\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1},$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(vi)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$, *ili*

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$, *pri čemu je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(vii)

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \nu^{-a_2+1}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = a_1 + 1$ *ili* $a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = 1 - a_1$.

(viii) Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{sp}^{(2)}$ *koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *i* $a_2 = \frac{5}{2}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.2}$$

dani su teoremom 4.3. Sada, koristeći [59, Proposition 1.7.] te [27] i [29], dolazimo do svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata od (5.2).

Iz prvog dijela navedene propozicije odmah vidimo da je strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{5}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $a_2 = \frac{5}{2}$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

Nadalje, iskoristimo li [27, Theorem 3.5.], zaključujemo da je Aubertin dual

$$\widehat{\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}} \cong L(\nu^{-\frac{5}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i $a_2 = \frac{5}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

Koristeći drugi dio navedene propozicije zaključujemo da su

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, zbog pretpostavke teorema, i $a_2 = \frac{3}{2}$, i

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$, ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.2). Pri tome je reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, kako je

$$\begin{aligned} L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)} \\ &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

koristeći Frobeniusov reciprocitet zaključujemo da Jacquetov modul od $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)})$ u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{a_1}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times}.$$

Sada, koristeći [27, Lemma 2.2.] možemo zaključiti da Jacquetov modul od $L(\nu^{-a_1}\widehat{\zeta_1 \rtimes} \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)})$ u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{-a_1}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times}.$$

Nadalje, iz [33, 3.1. Lemma] slijedi da je onda

$$L(\nu^{-a_1}\widehat{\zeta_1 \rtimes} \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}) \hookrightarrow \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada pak možemo zaključiti da je Aubertin dual

$$L(\nu^{-a_1}\widehat{\zeta_1 \rtimes} \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}) \cong L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

Također, jer je

$$\begin{aligned}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)} &\hookrightarrow \zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\widehat{\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}} \hookrightarrow \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Prema tome, Aubertin je dual

$$\widehat{\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}} \cong L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

Sada iz trećeg dijela navedene propozicije slijedi da je

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \nu^{-a_2+1}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_1 + 1$ ili $a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = 1 - a_1$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

Prema [36, Theorem 2.3.], inducirana je reprezentacija $\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \nu^{-a_2+1}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$ ireducibilna, pa imamo

$$\begin{aligned}L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \nu^{-a_2+1}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \nu^{-a_2+1}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \\ &\cong \delta([\nu^{a_2-1}\zeta_1, \nu^{a_2}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \\ &\hookrightarrow \nu^{a_2}\zeta_1 \times \nu^{a_2-1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{a_2}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{a_2-1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}\end{aligned}$$

te slijedi da je

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \widehat{\nu^{-a_2+1}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \hookrightarrow \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_2+1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Dakle, Aubertin je dual

$$L(\delta([\nu^{-a_2}\zeta_1, \widehat{\nu^{-a_2+1}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \cong L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_1 + 1$ ili $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = 1 - a_1$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.2).

S obzirom na pretpostavku teorema, preostale ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.2) dobijemo koristeći zadnji dio navedene propozicije i to su sljedeći subkvocijenti:

(1) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$.

(3) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

(4) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(5) $L(\nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

(6) $\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

Time je dokaz teorema gotov. □

Sljedeći teorem daje opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su točno dva kvadratna karaktera međusobno izomorfna, a u eksponentu se pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$.

Teorem 5.5. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka za $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ vrijedi $\zeta_j \cong \zeta_k \not\cong \zeta_l$. Nadalje, neka su a_1 i a_2 različiti od $\frac{1}{2}$ takvi da je $0 \leq a_1 \leq a_2$ i neka je $a_3 = \frac{1}{2}$. Također, neka je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, ili

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$\zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3},$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$ *te* $\zeta_2 \cong \zeta_3$*, ili*

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = \frac{3}{2}$ *te* $\zeta_2 \cong \zeta_3$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$*.*

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.3}$$

dani su teoremom 4.3. Prema tome, potrebno je odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Pitanje unitarnosti se, zbog [59, Proposition 1.1.], jer su točno dva kvadratna karaktera međusobno izomorfna, svodi na analogan problem u grupama $SO(5, F)$ i $SO(3, F)$ čiji unitarni duali su nam poznati. Posebno, unitarni dual od $SO(5, F)$ može se pronaći u [26].

Da bismo pronašli sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.3) koristimo [59, Proposition 1.4.] i [59, Remark 1.3.] te [27].

Iz prvog dijela prethodno navedene propozicije i navedene napomene zaključujemo da su ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.3) sljedeći:

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, zbog pretpostavke teorema, i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, i

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$. Pri tome je reprezentacija $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, analogno kao u dokazu prethodnog teorema, zaključujemo da su

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, i

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{3}{2}$ te $\zeta_2 \cong \zeta_3$, ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.3).

Sada, koristeći drugi dio ranije navedene propozicije i navedenu napomenu, dobijemo preostale ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.3) i to su sljedeći subkvocijenti:

(1) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3})$, ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$.

(3) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

(4) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(5) $L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3})$, ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$.

(6) $\zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}$, ako je $a_1 = a_2 = 0$.

Time završavamo dokaz teorema. □

Na kraju navodimo teorem koji nam daje opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su svi kvadratni karakteri međusobno neizomorfni, a u eksponentu se pojavljuje točno jedna $\frac{1}{2}$.

Teorem 5.6. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka je $\zeta_1 \not\cong \zeta_2 \not\cong \zeta_3$. Nadalje, neka su $a_1, a_2 \neq \frac{1}{2}$ takvi da je $0 \leq a_1 \leq a_2$ i neka je $a_3 = \frac{1}{2}$. Također, neka je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 < \frac{1}{2}$, *ili*

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, *ili*

$$\zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3},$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.4}$$

dani su teoremom 4.3 i treba odrediti koji su od njih unitarizabilni.

Jer su sva tri kvadratna karaktera međusobno neizomorfna, pitanje unitarnosti se, zbog [59, Proposition 1.1.], svodi na analogan problem u grupi $SO(3, F)$. Prema tome, koristeći [59, Remark 1.3.] zaključujemo da su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.4) u kojima su eksponenti a_1 i a_2 veći ili jednaki od 0, a manji od $\frac{1}{2}$, zbog pretpostavke teorema, unitarizabilni i time je dokaz teorema gotov. □

5.3.2 Slučaj kada se u eksponentima pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$

U nastavku pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj se pojavljuju tri kvadratna karaktera koja su međusobno izomorfna, dok se u eksponentima pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$.

Teorem 5.7. *Neka je* $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, *za svaki* $i \in \{1, 2, 3\}$, *i neka je* $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$. *Nadalje, neka je* $a_1 \geq 0$ *i* $a_1 \neq \frac{1}{2}$ *te neka je* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$. *Također, neka je* St_{ζ_1} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$. *Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, *ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{3}{2}$ *i* $a_1 \neq \frac{1}{2}$*, gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$*, pri čemu* τ_2 *nije podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

(v)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$.

(vi)

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$.

(vii) Dvije međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije, σ_1 *i* σ_2*, od*

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

koje su diskretne serije, ako je $a_1 = \frac{3}{2}$.

(viii)

$$\zeta_1 \rtimes \tau_1 \quad i \quad \zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_1 = 0$*, gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$*, pri čemu* τ_2 *nije podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.5}$$

dani su teoremom 4.4. Do svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata od (5.5) dolazimo koristeći [59, Proposition 1.7.] te [27], [29] i [36].

Zbog pretpostavke teorema, prvi dio prethodno navedene propozicije nam ne daje ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.5), a koristeći drugi dio, zaključujemo da je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5).

Treći dio navedene propozicije daje nam ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5) koji je jednak

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$.

Nadalje, koristeći četvrti dio ranije navedene propozicije zaključujemo da su ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.5) sljedeći:

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{3}{2}$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$, i

$$\zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_1 = 0$. Pri tome je τ_2 jedinstvena ireducibilna temperirana podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Sada, koristeći peti dio ranije navedene propozicije zaključujemo da su dvije međusobno neizomorfne ireducibilne podreprezentacije, σ_1 i σ_2, od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

koje su diskretne serije, ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.5). Također, i

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, ireducibilan je unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5).

Konačno, zadnji dio dane propozicije daje nam sljedeće ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.5):

(1) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

(3) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = 0$.

(4) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, ako je $a_1 = 0$.

(5) $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1)$ i $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(6) $\zeta_1 \rtimes \tau_1$ i $\zeta_1 \rtimes \tau_2$, ako je $a_1 = 0$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Preostalo je još odrediti sljedeće Aubertine duale:

(i) Aubertine duale svih ireducibilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)},$$

a to su, prema [36, Theorem 5.1.], $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})$, pri čemu je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, i diskretna serija $\sigma_1 \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja je jedina zajednička ireducibilna podreprezentacija induciranih reprezentacija $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ i $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(ii) Aubertine duale svih ireducibilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije

$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1},$$

a to su $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$, $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$, $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})$, pri čemu je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, i diskretna serija $\sigma_1 \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja je jedina zajednička ireducibilna podreprezentacija induciranih reprezentacija $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ i $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(iii) Aubertine duale svih ireducibilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

gdje je τ_2 ireducibilna temperirana podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$. To su $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$, ako je $0 < a_1 < \frac{3}{2}$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$, i $\zeta_1 \rtimes \tau_2$, ako je $a_1 = 0$; u slučaju kada je $a_1 = \frac{3}{2}$, diskretna serija $\sigma_2 \hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2$, dok su Aubertini duali ostalih mogućih subkvocijenata određeni u drugim slučajevima.

(iv) Aubertine duale svih ireducibilnih subkvocijenata od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

a to su diskretne serije $\sigma_1, \sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$ i $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$.

Koristeći [36, Theorem 2.1.] zaključujemo da je

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} = \sigma_1 + \sigma_2 + L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

u odgovarajućoj Grothendieckovoj grupi, gdje su $\sigma_1, \sigma_2 \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$ diskretne serije.

Odredimo najprije Aubertine duale $\widehat{\sigma_1}$ i $\widehat{\sigma_2}$. Iz teorema 3.3 znamo da je

$$\sigma_i \hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_i,$$

za $i = 1, 2$, gdje je, u odgovarajućoj Grothendieckovoj grupi,

$$\tau_1 \oplus \tau_2 = \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}.$$

Neka je $\tau_1 \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$. Tada je

$$\sigma_1 \hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada, računajući odgovarajuće Jacquetove module, dobijemo da

$$\mu^*(\sigma_1) \geq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \otimes 1_{F^\times},$$

pa, koristeći [29, Theorem 5.2.], zaključujemo da je Aubertin dual

$$\widehat{\sigma_1} \cong L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije

(5.5). Nadalje, s obzirom da

$$\mu^*(\sigma_2) \not\geq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \otimes 1_{F^\times},$$

koristeći [29, Theorem 5.2.], zaključujemo da je Aubertin dual

$$\widehat{\sigma_2} \cong L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5).

Preostalo je još odrediti Aubertin dual $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$. Kako je

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

slijedi da je

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1}]) \rtimes 1_{F^\times}) \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada, računajući $\mu^*(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$ dobijemo da su $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \tau_1$ i $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \tau_2$ jedini ireducibilni konstituenti oblika $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi$ koje $\mu^*(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$ sadrži, a koji se pojavljuju s multiplicitetom jedan. Kako

$$\mu^*(\sigma_i) \geq \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \tau_i,$$

slijedi da

$$\mu^*(L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})) \not\geq \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi.$$

Koristeći [27, Lemma 2.2.], možemo zaključiti da

$$\mu^*(L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})) \not\geq \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi'.$$

Osim toga, s obzirom da

$$\mu^*(\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) \not\geq \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi,$$

zaključujemo da

$$\mu^*(L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})) \not\geq \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi'.$$

Nadalje, Aubertin dual reprezentacije $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$ se može prikazati kao jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau,$$

gdje je
$$\delta_i = \delta([\nu^{-x_i}\zeta_1, \nu^{y_i}\zeta_1]),$$
za $i = 1, 2, \ldots, k$, takva da je
$$e(\delta_i) \leq e(\delta_{i+1}) < 0,$$
za $i = 1, 2, \ldots, k-1$, a τ odgovarajuća temperirana reprezentacija. Sada pak možemo zaključiti da je $y_i = -\frac{1}{2}$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, te da je $y_i \neq -\frac{3}{2}$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Iz toga slijedi da je $1 \leq k \leq 2$.

Ukoliko je $k = 2$, koristeći potpoglavlje 4.1 i lemu 4.1, možemo zaključiti da je
$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1$$
te da je
$$\tau \cong 1_{F^\times}.$$
Prema tome, imamo
$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$
čime smo došli do kontradikcije.

Ako je pak $k = 1$, onda, koristeći potpoglavlje 4.1, zaključujemo da je
$$\delta_1 \in \{\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1])\}.$$
Ukoliko je
$$\delta_1 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1,$$
zaključujemo da je tada $\tau \cong \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od
$$\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$
i imamo
$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)} \\ &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

$$\cong \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

čime smo opet došli do kontradikcije. Prema tome, zaključujemo da je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1])$$

te da je tada

$$\tau \cong \mathrm{St}_{\zeta_1}.$$

Dakle, imamo

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}.$$

Sada možemo zaključiti da je Aubertin dual

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) \cong L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}), \tag{5.6}$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5).

Također, koristeći teorem 5.1, zaključujemo da je Aubertin dual

$$L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\widehat{\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \cong L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5).

Nadalje, iz opisa diskretnih serija možemo zaključiti da inducirana reprezentacija

$$\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

gdje je τ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$, sadrži $L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$ i diskretnu seriju $\sigma_2 \hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2$. Jedina preostala reprezentacija koju dana inducirana reprezentacija može sadržavati je $L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times})$, čiji Aubertin dual znamo. Prema tome, preostalo je još odrediti Aubertin dual $L(\widehat{\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes} \tau_2)$. Zbog (5.1), imamo

$$\begin{aligned} L(\widehat{\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes} \tau_2) &\hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}. \end{aligned}$$

Računajući odgovarajuće Jacquetove module, možemo zaključiti da $\mu^*(\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$ sadrži $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \tau_2$ te da je to jedini ireducibilni konstituent oblika $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi$, koji je multipliciteta jedan. Nadalje, kako je $\sigma_2 \hookrightarrow \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2$, slijedi da

$$\mu^*(\sigma_2) \geq \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \tau_2.$$

Prema tome,

$$\mu^*(L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2))$$

ne sadrži ireducibilan konstituent oblika $\nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi$, što, analogno kao ranije, implicira da

$$\mu^*(L(\widehat{\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes} \tau_2))$$

ne sadrži $\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \otimes \pi'$. Dakle, $L(\widehat{\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes} \tau_2)$ se može prikazati kao jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_k \rtimes \tau,$$

gdje je

$$\delta_i = \delta([\nu^{-x_i}\zeta_1, \nu^{y_i}\zeta_1]),$$

za $i = 1, 2, \ldots, k$, takva da je

$$e(\delta_i) \leq e(\delta_{i+1}) < 0,$$

za $i = 1, 2, \ldots, k-1$, a τ odgovarajuća temperirana reprezentacija. Nadalje, možemo zaključiti da je $y_i \neq -\frac{3}{2}$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, te da je $y_i = -\frac{1}{2}$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Iz toga slijedi da je $1 \leq k \leq 2$.

Ako je $k = 2$, onda, koristeći potpoglavlje 4.1 i lemu 4.1, možemo zaključiti da je

$$\delta_1 = \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \ \text{ i } \ \delta_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1$$

te da je

$$\tau \cong 1_{F^\times}.$$

Prema tome, imamo

$$\begin{aligned} L(\widehat{\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes} \tau_2) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

i slijedi da je

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2) \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada, kako je reprezentacija $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1$ ireducibilna, slijedi da

$$\mu^*(L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)) \geq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Međutim,
$$\mu^*(L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)) \not\geq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$$
jer
$$\mu^*(\tau_2) \not\geq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times},$$
što znamo iz teorema 3.2.

Prema tome, $k = 1$. Koristeći potpoglavlje 4.1, analogno kao ranije, zaključujemo da je
$$(\delta_1, \tau) \in \{(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]), \mathrm{St}_{\zeta_1}), (\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})\},$$
gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Tada u prvom slučaju imamo
$$\widehat{L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} \hookrightarrow \delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$$
i možemo zaključiti da je Aubertin dual $\widehat{L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} \cong L(\delta([\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1, \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$. Međutim, zbog (5.6) i teorema 5.1, zaključujemo da to nije traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5). U drugom pak slučaju imamo
$$\widehat{L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$$
i možemo zaključiti da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5) upravo Aubertin dual
$$\widehat{L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}),$$
ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$. Također, koristeći teorem 5.1, zaključujemo da je ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5) Aubertin dual
$$\widehat{L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)})} \cong L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$
ako je $a_1 = \frac{3}{2}$, gdje je reprezentacija τ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Preostalo je još odrediti Aubertin dual $\widehat{L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} = \widehat{\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2}$, ako je $0 < a_1 < \frac{3}{2}$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$, te Aubertin dual $\widehat{\zeta_1 \rtimes \tau_2}$, ako je $a_1 = 0$, gdje je τ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Zbog (5.1) i ireducibilnosti je

$$\begin{aligned}
\nu^{-a_1}\widehat{\zeta_1 \rtimes \tau_2} &\cong \nu^{a_1}\zeta_1 \rtimes L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \\
&\cong \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \\
&\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \\
&\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}.
\end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5) upravo Aubertin dual

$$\nu^{-a_1}\widehat{\zeta_1 \rtimes \tau_2} \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$. Pri tome je τ_2 jedinstvena ireducibilna podreprezentacija reprezentacije $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Konačno, zbog (5.1) je

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta_1 \rtimes \tau_2} &\hookrightarrow \zeta_1 \times L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}) \\
&\hookrightarrow \zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \\
&\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1},
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.5) Aubertin dual

$$\widehat{\zeta_1 \rtimes \tau_2} \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}),$$

ako je $a_1 = 0$, i time završavamo dokaz teorema. □

Svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su točno dva karaktera međusobno izomorfna, a u eksponentima se pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$, dani su sljedećim teoremom.

Teorem 5.8. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka za $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ vrijedi $\zeta_j \cong \zeta_k \not\cong \zeta_l$. Nadalje, neka je $a_1 \geq 0$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$, te neka je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$. Također, neka je St_{ζ_t} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_t \rtimes 1_{F^\times}$, za $t \in \{2, 3\}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i ako postoje i, j takvi da je $\zeta_i \cong \zeta_1$ i $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *te ako postoje* i, j *takvi da je* $\zeta_j \cong \zeta_1$ *i* $\zeta_j \not\cong \zeta_i$ *te* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(iv)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, za* $\{j, l\} = \{2, 3\}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = 0$*, za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(v)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$*, ili*

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(vi)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \sigma_{sp}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *i ako postoje* i, j *takvi da je* $\zeta_i \cong \zeta_1$ *i* $\{i, j\} = \{2, 3\}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(vii) Strogo pozitivna reprezentacija τ *koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{sp}^{(2)},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ *te ako postoje* i, j *takvi da je* $\zeta_j \cong \zeta_1$ *i* $\zeta_j \not\cong \zeta_i$ *te* $\{i, j\} = \{2, 3\}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(viii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ *i* $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *ili*

$$\zeta_1 \rtimes \tau_1 \quad i \quad \zeta_1 \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $\zeta_2 \cong \zeta_3$, *gdje su* τ_1 *i* τ_2 *međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od* $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.7}$$

dani su teoremom 4.4. Dakle, treba odrediti koji su među njima unitarizabilni.

S obzirom da su točno dva karaktera međusobno izomorfna, pitanje unitarnosti se, zbog [59, Proposition 1.1.], sada svodi na analogan problem u grupama $SO(5, F)$ i $SO(3, F)$ čiji unitarni duali su nam poznati. Posebno, unitarni dual od $SO(5, F)$ može se pronaći u [26].

Koristeći [59, Remark 1.3.] i [59, Proposition 1.4.] te [27], pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.7).

Koristeći prvi dio prethodno navedene propozicije i navedenu napomenu zaključujemo da su traženi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.7) sljedeći:

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i ako postoje i, j takvi da je $\zeta_i \cong \zeta_1$ i $\{i, j\} = \{2, 3\}$, i strogo pozitivna reprezentacija τ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)},$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ te ako postoje i, j takvi da je $\zeta_j \cong \zeta_1$ i $\zeta_j \not\cong \zeta_i$ te $\{i, j\} = \{2, 3\}$. Pri tome je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, analogno kao ranije zaključimo da su ireducibilni subkvocijenti

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ i ako postoje i, j takvi da je $\zeta_i \cong \zeta_1$ i $\{i, j\} = \{2, 3\}$, i

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = \frac{3}{2}$ te ako postoje i, j takvi da je $\zeta_j \cong \zeta_1$ i $\zeta_j \not\cong \zeta_i$ te $\{i, j\} = \{2, 3\}$, inducirane reprezentacije (5.7) unitarizabilni.

Preostale ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.7) dobijemo koristeći drugi dio navedene propozicije i navedenu napomenu i oni su sljedeći:

(1) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j})$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, za $\{j, l\} = \{2, 3\}$.

(3) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = 0$.

(4) $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)})$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(5) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i})$, ako je $a_1 = 0$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(6) $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_1)$ i $L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$, ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(7) $\zeta_1 \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$, ako je $a_1 = 0$ i $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(8) $\zeta_1 \rtimes \tau_1$ i $\zeta_1 \rtimes \tau_2$, ako je $a_1 = 0$ i $\zeta_2 \cong \zeta_3$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Time je dokaz teorema gotov. □

Na kraju dajemo opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su svi kvadratni karakteri međusobno neizomorfni, a u eksponentima se pojavljuju točno dvije $\frac{1}{2}$.

Teorem 5.9. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka je $\zeta_1 \not\cong \zeta_2 \not\cong \zeta_3$. Nadalje, neka je $a_1 \geq 0$ i $a_1 \neq \frac{1}{2}$, te neka je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$. Također, neka je St_{ζ_t} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_t \rtimes 1_{F^\times}$, za $t \in \{2, 3\}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_l \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_j}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, za* $\{j, l\} = \{2, 3\}$*, ili*

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \times \zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i}),$$

ako je $a_1 = 0$*, za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$*.*

(iii)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$*, ili*

$$\zeta_1 \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_1 = 0$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$*.*

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.8}$$

dani su teoremom 4.4. Dakle, potrebno je odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Kako su sva tri nekvadratna karaktera međusobno neizomorfna, pitanje unitarnosti se, zbog [59, Proposition 1.1.], svodi na analogan problem u grupi $SO(3, F)$. Prema tome, koristeći [59, Remark 1.3.] zaključujemo da su svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.8) u kojima je eksponent a_1 veći ili jednak od 0, a manji od $\frac{1}{2}$, zbog pretpostavke teorema, unitarizabilni. Time završavamo dokaz teorema. □

5.3.3 Slučaj kada su sva tri eksponenta jednaka $\frac{1}{2}$

Sada ćemo odrediti sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ kada su sva tri karaktera kvadratna, a svi eksponenti su jednaki $\frac{1}{2}$. Kao ranije, rastavljamo ih u tri slučaja u ovisnosti o broju međusobno izomorfnih kvadratnih karaktera.

Najprije promatramo slučaj kada su sva tri kvadratna karaktera koja se pojavljuju međusobno izomorfna.

Teorem 5.10. *Neka je* $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ *i* $a_i = \frac{1}{2}$*, za svaki* $i \in \{1, 2, 3\}$*. Nadalje, neka je* St_{ζ_1} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$*. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}).$$

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}.$$

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.9}$$

dani su teoremom 4.5, a sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.9) pronalazimo koristeći [59, Proposition 1.7.] te [27] i [29].

Zbog pretpostavke teorema, za pronalaženje unitarizabilnih subkvocijenata od (5.9) koristimo treći, četvrti i šesti dio prethodno navedene propozicije.

Iz trećeg dijela navedene propozicije dobijemo da je

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$$

ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.9).

Nadalje, kako je inducirana reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$ ireducibilna, ona u odgovarajućem Jacquetovom modulu sadrži

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times}.$$

Sada možemo zaključiti da je

$$\widehat{\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1])} \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$$

te da je Aubertin dual

$$\widehat{\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1])} \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1} \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$$

traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.9).

Koristeći četvrti dio navedene propozicije zaključujemo da je ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.9) jednak

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2),$$

gdje je τ_2 jedinstvena ireducibilna temperirana podreprezentacija od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$, koja nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Nadalje, koristeći [38, Lemma 6.2.] možemo zaključiti da je inducirana reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2$ ireducibilna. Ako se navedena inducirana reprezentacija reducira, onda, prema [38, Lemma 6.2.], sadrži temperiranu reprezentaciju $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$, koja je ireducibilna. Prema tome, navedena inducirana reprezentacija u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times}.$$

Međutim, to nije moguće jer reprezentacija τ_2 nije podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$. Sada, zbog ireducibilnosti inducirane reprezentacije, imamo

$$\begin{aligned}\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2 &\cong \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2 \\ &\hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\widehat{\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Prema tome,

$$\widehat{\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \pi,$$

gdje je $\pi \leq \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$, odnosno ili je $\pi \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$ ili je $\pi \cong \mathrm{St}_{\zeta_1}$. Ukoliko je $\pi \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, imamo

$$\widehat{\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

a onda je

$$\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2 \hookrightarrow \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Tada reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2$ u svom Jacquetovom modulu u odnosu na odgovarajuću paraboličku podgrupu sadrži

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \otimes 1_{F^\times},$$

što nije moguće. Prema tome, zaključujemo da je

$$\widehat{\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2} \hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}.$$

Sada možemo zaključiti da je Aubertin dual

$$\widehat{L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)} \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$$

traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.9).

Preostale ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.9) dobijemo iz zadnjeg dijela navedene propozicije i oni su sljedeći:

(1) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$.

(2) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1})$.

(3) $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_1)$ i $L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \rtimes \tau_2)$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(4) $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_1}$.

Time je dokaz teorema gotov. □

Nakon toga, pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u kojoj su točno dva kvadratna karaktera međusobno izomorfna.

Teorem 5.11. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ i $a_i = \frac{1}{2}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, te neka za $\{j,k,l\} = \{1,2,3\}$ vrijedi $\zeta_j \cong \zeta_k \not\cong \zeta_l$. Nadalje, neka je St_{ζ_i} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes 1_{F^\times}$, za $i \in \{1,2,3\}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)
$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)
$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_l}),$$

za $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$.

(iii)
$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

ako je $\zeta_j \not\cong \zeta_l$, za $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$, gdje je $\sigma_{sp}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)
$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_1) \quad i \quad L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \tau_2),$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$, za $\{i,j,l\} = \{1,2,3\}$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(v) Dvije međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od

$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j]) \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_i},$$

ako je $\zeta_j \cong \zeta_l$ *i* $\zeta_j \not\cong \zeta_i$*, za* $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.10}$$

dani su teoremom 4.5. Potrebno je još odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Jer su točno dva kvadratna karaktera međusobno izomorfna, pitanje unitarnosti se, zbog [59, Proposition 1.1.], svodi na analogan problem u grupama $SO(5, F)$ i $SO(3, F)$ čiji unitarni duali su nam poznati. Posebno, unitarni dual od $SO(5, F)$ može se pronaći u [26].

Da bismo pronašli sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.10) koristimo [59, Proposition 1.4.] i [59, Remark 1.3.]. Međutim, s obzirom da su svi eksponenti a_1, a_2 i a_3 jednaki $\frac{1}{2}$, sve tražene subkvocijente dobijemo iz drugog dijela navedene propozicije i navedene napomene, te je time dokaz teorema gotov. □

Na kraju, potrebno je još odrediti sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su svi kvadratni karakteri međusobno neizomorfni.

Teorem 5.12. *Neka je* $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$ *i* $a_i = \frac{1}{2}$*, za svaki* $i \in \{1, 2, 3\}$*, te neka je* $\zeta_1 \not\cong \zeta_2 \not\cong \zeta_3$*. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}).$$

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_j \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_l}),$$

za $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$*, gdje je reprezentacija* St_{ζ_l} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_i \rtimes \sigma_{sp}^{(1)}),$$

za $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(1)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_j \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_l \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv) *Strogo pozitivna reprezentacija $\sigma_{sp}^{(2)}$ koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od*

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_1 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.11}$$

dani su teoremom 4.5.

Zbog [59, Proposition 1.1.], pitanje unitarnosti se svodi na analogan problem grupe $SO(3,F)$. Prema tome, sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.11) pronalazimo koristeći [59, Remark 1.3.] i time je dokaz teorema gotov. □

5.3.4 Slučaj kada se u eksponentima ne pojavljuje niti jedna $\frac{1}{2}$

Preostalo je još odrediti sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije od $SO(7,F)$ kada su sva tri karaktera kvadratna, a u eksponentima se ne pojavljuje niti jedna $\frac{1}{2}$.

Najprije ćemo odrediti sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u slučaju kada su sva tri kvadratna karaktera međusobno izomorfna.

Teorem 5.13. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, te neka je $\zeta_1 \cong \zeta_2 \cong \zeta_3$. Nadalje, neka je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ i $a_i \neq \frac{1}{2}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = 0$ i $0 < a_3 < \frac{1}{2}$, ili

$$\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = a_1 + 1$ *i* $a_3 = -a_2 + 2$ *te* $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

(iii)

$$L(\nu^{-1}\zeta_1 \times \nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$.

(iv)

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \nu^{-a_3+2}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = a_1 + 1$ *i* $a_3 = -a_2 + 2$ *te* $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

(v)

$$\delta([\nu^{-1}\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_1 \times \nu^{a_3}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.12}$$

dani su teoremom 4.6. Nadalje, koristeći [59, Proposition 1.7.] te [27] i [29], pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.12).

S obzirom da su eksponenti a_1, a_2 i a_3 različiti od $\frac{1}{2}$, koristimo samo peti i šesti dio prethodno navedene propozicije.

Koristeći peti dio, zaključujemo da su

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \nu^{-a_3+2}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_3 = a_1 + 1$ i $a_3 = -a_2 + 2$ te $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, i

$$\delta([\nu^{-1}\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$, ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.12).

Sada, s obzirom da je

$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \nu^{-a_3+2}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \nu^{-a_3+2}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \delta([\nu^{a_3-2}\zeta_1, \nu^{a_3}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu^{a_3}\zeta_1 \times \nu^{a_3-1}\zeta_1 \times \nu^{a_3-2}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{a_3}\zeta_1 \times \nu^{a_3-1}\zeta_1 \times \nu^{-a_3+2}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

možemo zaključiti da je

$$L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \widehat{\nu^{-a_3+2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) \hookrightarrow \nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_3+1}\zeta_1 \times \nu^{a_3-2}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Prema tome, zaključujemo da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.12) upravo Aubertin dual

$$\begin{aligned} L(\delta([\nu^{-a_3}\zeta_1, \widehat{\nu^{-a_3+2}}\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times}) &\cong L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_3+1}\zeta_1 \times \nu^{a_3-2}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}) \\ &\cong L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}), \end{aligned}$$

ako je $a_3 = a_1 + 1$ i $a_3 = -a_2 + 2$ te $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} \delta([\nu^{-1}\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} &\hookrightarrow \delta([\zeta_1, \nu\zeta_1]) \times \nu^{-1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \delta([\zeta_1, \nu\zeta_1]) \times \nu\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu\zeta_1 \times \delta([\zeta_1, \nu\zeta_1]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\hookrightarrow \nu\zeta_1 \times \nu\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

pa možemo zaključiti da je

$$\delta([\nu^{-1}\widehat{\zeta_1, \nu\zeta_1}]) \rtimes 1_{F^\times} \hookrightarrow \nu^{-1}\zeta_1 \times \nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}.$$

Sada zaključujemo da je Aubertin dual

$$\delta([\nu^{-1}\widehat{\zeta_1, \nu\zeta_1}]) \rtimes 1_{F^\times} \cong L(\nu^{-1}\zeta_1 \times \nu^{-1}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.12).

Na kraju, koristeći posljednji dio ranije navedene propozicije zaključujemo da su sljedeći ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.12) unitarizabilni:

(1) $L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \nu^{-a_2}\zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$.

(3) $L(\nu^{-a_3}\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times})$, ako je $a_1 = a_2 = 0$ i $0 < a_3 < \frac{1}{2}$.

(4) $\zeta_1 \times \zeta_1 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}$, ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Time završavamo dokaz teorema. □

Na kraju, odredimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u slučaju kada su točno dva kvadratna karaktera međusobno izomorfna i u slučaju kada su sva tri kvadratna karaktera međusobno neizomorfna.

Teorem 5.14. *Neka je $\zeta_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\zeta_i^2 \cong 1_{F^\times}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$. Neka za $\{j,k,l\} = \{1,2,3\}$ vrijedi $\zeta_j \cong \zeta_k \ncong \zeta_l$ ili neka je $\zeta_1 \ncong \zeta_2 \ncong \zeta_3$. Nadalje, neka je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, te neka je $a_i \neq \frac{1}{2}$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)
$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \nu^{-a_1}\zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$
ako je $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$.

(ii)
$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \zeta_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$
ako je $a_1 = 0$ i $0 < a_2 \leq a_3 < \frac{1}{2}$.

(iii)
$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_1 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$
ako je $a_1 = a_2 = 0$ i $0 < a_3 < \frac{1}{2}$.

(iv)
$$\zeta_1 \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$
ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta_1 \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.13}$$

dani su teoremom 4.6.

Ako su točno dva među kvadratnim karakterima ζ_1, ζ_2 i ζ_3 međusobno izomorfna, onda se, zbog [59, Proposition 1.1.], pitanje unitarnosti svodi na analogan problem u grupama $SO(5,F)$ i $SO(3,F)$ čije unitarne duale znamo. Posebno, unitarni dual od $SO(5,F)$ može se pronaći u [26].

Sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.13) u tom slučaju dobijemo koristeći [59, Remark 1.3.] i [59, Proposition 1.4.], i to koristeći drugi dio prethodno navedene propozicije i navedenu napomenu, jer niti jedan eksponent u (5.13) nije jednak $\frac{1}{2}$.

Nadalje, ako su pak sva tri kvadratna karaktera ζ_1, ζ_2 i ζ_3 međusobno neizomorfna, onda se, zbog [59, Proposition 1.1.], pitanje unitarnosti svodi na analogan problem u grupi $SO(3,F)$. Prema tome, tada sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.13) dobijemo koristeći [59, Remark 1.3.].

U oba su slučaja ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije (5.13) jednaki i time završavamo dokaz teorema. □

5.4 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju dva kvadratna karaktera

Opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su točno dva karaktera kvadratna dan je u ovom potpoglavlju.

Iskažimo najprije teorem [56, Theorem 4.2] za neparnu specijalnu ortogonalnu grupu $SO(2n + 1, F)$ kojeg u nastavku koristimo.

Teorem 5.15. *Neka je π ireducibilna reprezentacija grupe $SO(2n + 1, F)$.*

(i) Pretpostavimo da je reprezentacija π unitarizabilna. Tada postoje ireducibilna unitarizabilna reprezentacija θ opće linearne grupe i slabo realna ireducibilna unitarizabilna reprezentacija π' grupe $SO(2n' + 1, F)$, za neki $n' \leq n$, takve da je $\pi \cong \theta \rtimes \pi'$.

(ii) Neka je D'_u podskup od D_u koji zadovoljava $D'_u \cap \widetilde{D'_u} = \emptyset$ tako da $D'_u \cup \widetilde{D'_u}$ sadrži sve $\rho \in D_u$ koje nisu samokontragradijentne. Označimo s

$$D' = \{\nu^\alpha \rho \colon \alpha \in \mathbb{R},\ \rho \in D'_u\}.$$

Tada postoje ireducibilna reprezentacija θ opće linearne grupe s kuspidalnim nosačem u D' i slabo realna ireducibilna reprezentacija π' grupe $SO(2n' + 1, F)$ takve da je

$$\pi \cong \theta \rtimes \pi'.$$

Štoviše, π određuje takve θ i π' do na ekvivalenciju. Nadalje, π je unitarizabilna ako i samo ako su obje θ i π' unitarizabilne.

Nadalje, navodimo klasifikaciju unitarnog duala opće linearne grupe, koja je dana u [48, Theorem 7.5.], a koju ćemo u nastavku koristiti. Neka je $\delta \in D_u$ i neka je $m \geq 1$. Jedinstven ireducibilan kvocijent od

$$\nu^{(m-1)/2}\delta \times \nu^{(m-1)/2-1}\delta \times \cdots \times \nu^{-(m-1)/2}\delta$$

se naziva **Speh reprezentacija**. Označimo s B_{rigid} skup svih Speh reprezentacija, s

$$B = B(F) = B_{\text{rigid}} \cup \left\{\nu^\alpha\sigma \times \nu^{-\alpha}\sigma \colon \sigma \in B_{\text{rigid}},\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}\right\}$$

i s $M(B)$ skup svih konačnih multiskupova u B. Tada, sljedeći teorem, [59, Theorem 2.9.], riješava unitarizabilnost za opće linearne grupe.

Teorem 5.16. *Preslikavanje*

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \mapsto \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_k$$

s $M(B)$ *u* $\cup_{n \geq 0} \widehat{GL(n,F)}$ *je bijekcija.*

S obzirom da u slučaju kada se uz karakter koji nije kvadratni pojavljuje eksponent veći od 0 nećemo imati unitarizabilnih subkvocijenata dane inducirane reprezentacije, što zaključujemo koristeći prethodno navedenu klasifikaciju, promatramo samo slučaj kada je eksponent uz karakter koji nije kvadratni jednak 0.

Najprije ćemo pronaći sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7,F)$ u kojoj su oba kvadratna karaktera međusobno izomorfna.

Teorem 5.17. *Neka su* $\chi, \zeta_2, \zeta_3 \in \widehat{F^\times}$ *takvi da je* $\zeta_2^2 \cong \zeta_3^2 \cong 1_{F^\times}$ *i* $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$*, te neka je* $\zeta_2 \cong \zeta_3$*. Nadalje, neka je* $a_1 = 0$ *i* $0 \leq a_2 \leq a_3$*. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 \leq a_3 \leq \frac{1}{2}$*, ili*

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_2 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 = 0$ *i* $0 < a_3 \leq \frac{1}{2}$*, ili*

$$\chi \times \zeta_2 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = \frac{3}{2}$.

(iii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}),$$

ako je $0 < a_2 \leq \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = \frac{1}{2}$*, ili*

$$\chi \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2},$$

ako je $a_2 = 0$ *i* $a_3 = \frac{1}{2}$*, gdje je* St_{ζ_2} *jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(iv)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(2)},$$

ako je $a_2 = \frac{1}{2}$ *i* $a_3 = \frac{3}{2}$*, gdje je* $\sigma_{sp}^{(2)}$ *strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od* $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(v)

$$\chi \rtimes \tau_1 \quad i \quad \chi \rtimes \tau_2,$$

ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.14}$$

dani su teoremom 4.10. Potrebno je još odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Kako imamo jedan nekvadratni karakter i dva kvadratna karaktera koja su međusobno izomorfna, zbog teorema 5.15, zaključujemo da se problem unitarnosti sada svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe i reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe nižeg ranga. Unitarni dual opće linearne grupe pronađen je u [48], a unitarni dual specijalne ortognalne grupe $SO(5, F)$ u [26].

Sada, kako je $a_1 = 0$, sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente od (5.14) dobijemo koristeći [59, Proposition 1.4.] i [27].

Koristeći prvi dio prethodno navedene propozicije zaključujemo da je

$$\chi \rtimes \sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)},$$

ako je $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{3}{2}$, gdje je $\sigma_{\mathrm{sp}}^{(2)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\delta([\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{3}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.14).

Nadalje, analogno kao ranije, možemo zaključiti da je

$$L(\nu^{-\frac{3}{2}}\zeta_2 \times \nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{3}{2}$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.14).

Preostale ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.14) sada dobijemo koristeći drugi dio navedene propozicije i oni su sljedeći:

(1) $L(\nu^{-a_3}\zeta_2 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times})$, za $0 < a_2 \leq a_3 \leq \frac{1}{2}$.

(2) $L(\nu^{-a_3}\zeta_2 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times})$, za $a_2 = 0$ i $0 < a_3 \leq \frac{1}{2}$.

(3) $L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2})$, ako je $0 < a_2 \leq \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_2} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

(4) $\chi \times \zeta_2 \times \zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$, za $a_2 = a_3 = 0$.

(5) $\chi \rtimes \tau_1$ i $\chi \rtimes \tau_2$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$, gdje su τ_1 i τ_2 međusobno neizomorfne ireducibilne temperirane podreprezentacije od $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta_2, \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2]) \rtimes 1_{F^\times}$.

(6) $\chi \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_2}$, ako je $a_2 = 0$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_2} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \rtimes 1_{F^\times}$.

Time završavamo dokaz teorema. □

U sljedećem teoremu pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj kvadratni karakteri nisu međusobno izomorfni.

Teorem 5.18. *Neka su $\chi, \zeta_2, \zeta_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta_2^2 \cong \zeta_3^2 \cong 1_{F^\times}$ i $\chi^2 \not\cong 1_{F^\times}$, te neka je $\zeta_2 \not\cong \zeta_3$. Nadalje, neka je $a_1 = 0$ i $0 \leq a_2 \leq a_3$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 \leq a_3 \leq \frac{1}{2}$, ili

$$L(\nu^{-a_3}\zeta_3 \times \zeta_2 \times \chi \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_2 = 0$ i $0 < a_3 \leq \frac{1}{2}$, ili

$$\chi \times \zeta_2 \times \zeta_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$L(\nu^{-a_2}\zeta_2 \times \chi \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3}),$$

ako je $0 < a_2 \leq \frac{1}{2}$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, ili

$$\chi \times \zeta_2 \rtimes \mathrm{St}_{\zeta_3},$$

ako je $a_2 = 0$ i $a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je St_{ζ_3} jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

(iii)

$$\chi \rtimes \sigma_{sp}^{(1)},$$

ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$, gdje je $\sigma_{sp}^{(1)}$ strogo pozitivna reprezentacija koja je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta_2 \times \nu^{\frac{1}{2}}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\chi \times \nu^{a_2}\zeta_2 \times \nu^{a_3}\zeta_3 \rtimes 1_{F^\times}, \tag{5.15}$$

dani su teoremom 4.10 i potrebno je odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Zbog teorema 5.15, jer imamo jedan nekvadratni karakter i dva međusobno neizomorfna kvadratna karaktera, zaključujemo da se problem unitarnosti sada svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe i reprezentacija neparne specijalne ortogonalne grupe nižeg ranga. Problem unitarnosti opće linearne grupe riješen je u [48], a zbog pretpostavke teorema, sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.15) pronalazimo koristeći [59, Remark 1.3.] i dokaz teorema je time gotov. □

5.5 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju jednog kvadratnog karaktera

U ovom potpoglavlju pronalazimo sve ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj je točno jedan karakter kvadratni.

U nastavku promatramo dva slučaja i to slučaj kada su nekvadratni karakteri međusobno izomorfni, o čemu govori sljedeći teorem, i slučaj kada nekvadratni karakteri nisu međusobno izomorfni.

Teorem 5.19. *Neka su $\zeta, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, $\chi_2^2 \not\cong 1_{F^\times}$, $\chi_3^2 \not\cong 1_{F^\times}$ i $\chi_2 \cong \chi_3$, te neka je $a_i \geq 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, pri čemu je $0 \leq a_2 \leq a_3$. Nadalje, neka je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$.

(ii)

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$.

(iii)

$$\chi_2 \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_2 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.16}$$

dani su teoremom 4.11, a potrebno je još odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Koristeći teorem 5.15, jer imamo kvadratni karakter i dva nekvadratna karaktera, zaključujemo da se problem unitarnosti sada svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe $GL(2, F)$ i reprezentacija specijalne ortogonalne grupe $SO(3, F)$. Prema tome, imamo

$$\pi \cong \theta \rtimes \pi',$$

gdje je θ ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_2$, a π' ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$.

Kako su oba nekvadratna karaktera međusobno izomorfna, tada je $m = 1$ i $\delta \cong \chi_2$, pa zaključujemo, pomoću teorema 5.16, da je $\theta \cong \chi_2 \times \chi_2$, za $a_2 = a_3 = 0$, jedina ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(2, F)$ koju imamo.

Nadalje, koristeći [59, Remark 1.3.], zaključujemo da je $a_1 \leq \frac{1}{2}$. Prema tome, ili je $\pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$, za $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$, ili je $\pi' \cong \mathrm{St}_\zeta$, ako je $a_1 = \frac{1}{2}$, i $\pi' \cong \zeta \rtimes 1$, za $a_1 = 0$.

Pogledamo li sve ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.16), sada odmah vidimo koji su među njima traženi unitarizabilni subkvocijenti.

Naime, kako je

$$\begin{aligned} L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \chi_2 \times \chi_2 \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \chi_2 \times \chi_2 \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}), \end{aligned}$$

zaključujemo, koristeći teorem 5.15, da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.16). Nadalje, jer je

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times} \cong \chi_2 \times \chi_2 \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, zaključujemo da je

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.16). Konačno, s obzirom je

$$\chi_2 \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je

$$\chi_2 \times \chi_2 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.16).

Pronašli smo sve tražene ireducibilne unitarizabilne subkvocijente i time završavamo dokaz teorema. $\square$

Preostalo je još promotriti slučaj kada nekvadratni karakteri nisu međusobno izomorfni.

Teorem 5.20. *Neka su $\zeta, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{F^\times}$ takvi da je $\zeta^2 \cong 1_{F^\times}$, $\chi_2^2 \not\cong 1_{F^\times}$, $\chi_3^2 \not\cong 1_{F^\times}$ i $\chi_2 \not\cong \chi_3$, te neka je $a_i \geq 0$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, pri čemu je $0 \leq a_2 \leq a_3$. Nadalje, neka je St_ζ jedinstvena ireducibilna podreprezentacija od $\nu^{\frac{1}{2}}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 < \frac{1}{2}$ i $a_2 \leq a_1 \leq \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(ii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(iii)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(iv)

$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$, ili

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$.

(v)
$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

ako je $a_l = \frac{1}{2}$, za svaki $l \in \{1,2,3\}$, te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$\chi_2 \times \chi_3 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$.

(vi)
$$L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ili

$$\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

(vii)
$$\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_l = \frac{1}{2}$, za svaki $l \in \{1,2,3\}$, i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.17}$$

dani su teoremom 4.11. Dakle, potrebno je još odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Koristeći teorem 5.15, jer imamo jedan kvadratni karakter i dva nekvadratna karaktera, zaključujemo da se problem unitarnosti sada svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe i reprezentacija specijalne ortogonalne grupe $SO(3,F)$. Prema tome, imamo
$$\pi \cong \theta \rtimes \pi',$$
gdje je θ ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3$, a π' ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$.

Nadalje, koristeći [59, Remark 1.3.], zaključujemo da je $a_1 \leq \frac{1}{2}$. Prema tome, ili je $\pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$, za $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$, ili je $\pi' \cong \mathrm{St}_\zeta$, za $a_1 = \frac{1}{2}$, i $\pi' \cong \zeta \rtimes 1$, za $a_1 = 0$.

Najprije, pogledamo li skup

$$\left\{\nu^{\alpha}\sigma \times \nu^{-\alpha}\sigma \colon \sigma \in B_{\text{rigid}},\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}\right\},$$

zaključujemo da je $\theta \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(2, F)$, za $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

Koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], sada možemo zaključiti da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$$

ireducibilna i unitarizabilna. Pretpostavimo da je $a_1 \geq a_2$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times},
\end{aligned}$$

a reprezentacija $\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, pa sada možemo zaključiti da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_2 < \frac{1}{2}$ i $a_3 \leq a_1 \leq \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Sada analogno u slučaju kada je $a_1 < a_2$, jer je

$$\nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times},$$

zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $0 < a_1 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Nadalje, koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], možemo zaključiti da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes \mathrm{St}_\zeta$$

ireducibilna i unitarizabilna. Tada je

$$\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes \mathrm{St}_\zeta \cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{a_2}\chi_i \rtimes \mathrm{St}_\zeta$$

$$\cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

a reprezentacija $\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, pa zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

za $a_1 = \frac{1}{2}$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Također, koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], možemo zaključiti da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}$$

ireducibilna i unitarizabilna. Tada je

$$\begin{aligned}
\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} &\cong \zeta \times \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \zeta \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times},
\end{aligned}$$

a reprezentacija $\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, pa zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17).

Promotrimo li sada skup B_{rigid}, kako imamo dva nekvadratna karaktera i jedan kvadratni karakter, zaključujemo da je $1 \leq m \leq 2$.

Ukoliko je $m = 1$, onda je $\delta \cong \chi_i$, za $i \in \{2,3\}$, ili je $\delta \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$. Koristeći teorem 5.16, sada zaključujemo da je za $m = 1$ ili $\theta \cong \chi_2 \times \chi_3$, za $a_2 = a_3 = 0$, ili $\theta \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$. Ukoliko je $m = 2$, onda je reprezentacija θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

Pogledamo li ireducibilne subkvocijente inducirane reprezentacije (5.17), sada lako odredimo preostale unitarizabilne subkvocijente.

Pronađimo sada sve unitarizabilne subkvocijente dane inducirane reprezentacije za

$m = 1$, kada je $\theta \cong \chi_2 \times \chi_3$, redom po svim mogućim π'. Naime, kako je

$$\begin{aligned} L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \chi_2 \times \chi_3 \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \chi_2 \times \chi_3 \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}), \end{aligned}$$

zaključujemo, koristeći teorem 5.15, da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Nadalje, koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong \chi_2 \times \chi_3 \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = 0$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Konačno, kako je

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \cong \chi_2 \times \chi_3 \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, zaključujemo da je

$$\zeta \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17).

Sve unitarizabilne subkvocijente dane inducirane reprezentacije za $m = 1$, kada je $\theta \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, redom po svim mogućim π', pronalazimo u nastavku. Naime, kako je

$$\begin{aligned} L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}) &\hookrightarrow \nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}), \end{aligned}$$

slijedi da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_1}\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 \leq \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17), što zaključujemo koristeći teorem 5.15. Posebno, uočimo kako je reprezentacija $\delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times}$ ireducibilna i temperirana. Također, koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes \mathrm{St}_\zeta,$$

ako je $a_l = \frac{1}{2}$, za svaki $l \in \{1,2,3\}$, i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Na kraju, s obzirom da je

$$\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, zaključujemo da je

$$\zeta \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17).

Konačno, preostalo je još odrediti sve unitarizabilne subkvocijente dane inducirane reprezentacije kada je θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji reprezentacije $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i$. Koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], možemo zaključiti da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \theta \rtimes L(\nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times})$$

ireducibilna i unitarizabilna. Neka je $a_1 < \frac{1}{2}$. Kako je

$$\begin{aligned}
\theta \rtimes \pi' &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-a_1}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times},
\end{aligned}$$

i reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, slijedi da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \nu^{-a_1}\zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). Također, analogno zaključimo da je za $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17) jednak

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\zeta \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times}).$$

Nadalje, koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], zaključujemo da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \theta \rtimes \mathrm{St}_\zeta$$

ireducibilna i unitarizabilna. Sada, s obzirom da je

$$\begin{aligned} \theta \rtimes \mathrm{St}_\zeta &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \rtimes \mathrm{St}_\zeta \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta, \end{aligned}$$

i reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, slijedi da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \rtimes \mathrm{St}_\zeta),$$

ako je $a_l = \frac{1}{2}$, za svaki $l \in \{1, 2, 3\}$, te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17). I na kraju, možemo zaključiti, koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], da je reprezentacija

$$\theta \rtimes \pi' \cong \theta \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}$$

ireducibilna i unitarizabilna. Jer je

$$\begin{aligned} \theta \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \zeta \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

i reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, slijedi da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \zeta \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.17).

Kako smo pronašli sve unitarizabilne subkvocijente dane inducirane reprezentacije, dokaz teorema je gotov. □

5.6 Ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti u slučaju kada niti jedan karakter nije kvadratni

Preostale ireducibilne unitarizabilne subkvocijente inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ pronalazimo u ovom potpoglavlju, a to su upravo oni koje dobijemo u slučaju kada niti jedan od karaktera koji se pojavljuju u induciranoj reprezentaciji nije kvadratni.

Najprije promatramo slučaj kada su sva tri nekvadratna karaktera međusobno izomorfna.

Teorem 5.21. *Neka je* $\chi_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\chi_i \not\cong \chi_i^{-1}$*, za svaki* $i \in \{1,2,3\}$*, i neka je* $\chi_1 \cong \chi_2 \cong \chi_3$*. Nadalje, neka je* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$*. Tada je*

$$\chi_1 \times \chi_1 \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$*, jedini ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$*.*

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_1 \times \nu^{a_3}\chi_1 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.18}$$

dani su teoremom 4.12 i potrebno je odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Kako su sva tri karaktera nekvadratna, koristeći teorem 5.15, zaključujemo da se problem unitarnosti sada zapravo svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe $GL(3,F)$. Naime, kako su svi karakteri međusobno izomorfni, tada je $m = 1$ i $\delta \cong \chi_1$, pa, koristeći teorem 5.16, zaključujemo da je $\theta \cong \chi_1 \times \chi_1 \times \chi_1$, ako je $a_i = 0$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, jedina ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(3,F)$, i $\pi' \cong 1_{F^\times}$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $SO(1,F)$. Sada, koristeći teorem 5.15, možemo zaključiti da je tada jedini ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.18) upravo

$$\theta \rtimes \pi' \cong \chi_1 \times \chi_1 \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. □

Opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata grupe $SO(7,F)$ kada su točno dva među nekvadratnim karakterima međusobno izomorfna dan je sljedećim teoremom.

Teorem 5.22. *Neka je* $\chi_i \in \widehat{F^\times}$ *takav da je* $\chi_i \not\cong \chi_i^{-1}$*, za* $i \in \{1,2,3\}$*, te neka za* $\{j,k,l\} = \{1,2,3\}$ *vrijedi* $\chi_j \cong \chi_k \not\cong \chi_l$*. Nadalje, neka je* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$*. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije* $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ *sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$*, za* $\{i,j\} = \{2,3\}$*, ili*

$$L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ *i* $0 < a_2 < \frac{1}{2}$*, ako je* $a_2 = a_3$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$*, za* $\{i,j\} = \{2,3\}$*.*

(ii)

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

za $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(iii)

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ *te* $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, *za* $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(iv)

$$\delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$ *te* $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$.

(v)

$$L(\nu^{-1}\chi_1 \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ *i* $a_2 = a_3 = 1$ *te* $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.19}$$

dani su teoremom 4.12. Dakle, preostalo je odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Možemo zaključiti, koristeći teorem 5.15, da se problem unitarnosti sada zapravo svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe $GL(3, F)$, jer su sva tri karaktera nekvadratna. Prema tome, imamo

$$\pi \cong \theta \rtimes \pi',$$

gdje je θ ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3$, a $\pi' \cong 1_{F^\times}$.

Pogledamo li skup $\left\{\nu^{\alpha}\sigma \times \nu^{-\alpha}\sigma \colon \sigma \in B_{\text{rigid}},\ 0 < \alpha < \frac{1}{2}\right\}$, ranije smo zaključili da je reprezentacija $\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(2, F)$, za $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$. Sada, uz ireducibilnu unitarizabilnu reprezentaciju grupe $GL(1, F)$, koristeći teorem 5.16, zaključujemo da je $\theta \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1$, za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(3, F)$.

Promotrimo li sada skup B_{rigid}, kako imamo tri nekvadratna karaktera, slijedi da je $1 \leq m \leq 3$. Ukoliko je $m = 1$, onda je $\delta \cong \chi_i$, za $i \in \{1, 2, 3\}$, ili je $\delta \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, zbog pretpostavke teorema, ili je pak $\theta \cong \delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1])$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$, ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(3, F)$. Ukoliko je pak $m = 2$, onda je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija δ reprezentacije $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i

$\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(2,F)$. Koristeći teorem 5.16, sada možemo zaključiti da su sljedeće reprezentacije ireducibilne unitarizabilne reprezentacije grupe $GL(3,F)$: $\theta \cong \chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3$, ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, zatim $\theta \cong \chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, i reprezentacija θ koja je izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1$, ako je $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$. A ukoliko je $m = 3$, onda je θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-1}\chi_1 \times \chi_1 \times \nu\chi_1$, ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$, i reprezentacija θ je ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(3,F)$.

Sada među svim ireducibilnim subkvocijentima inducirane reprezentacije (5.19), možemo pronaći unitarizabilne.

Najprije promatramo slučaj kada je $\theta \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1$. Tada je

$$\theta \rtimes \pi' \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$$

ireducibilna unitarizabilna reprezentacija, što možemo zaključiti koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.]. S obzirom da je

$$\begin{aligned}
\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times} &\cong \chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \chi_1 \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \chi_1 \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},
\end{aligned}$$

a reprezentacija $\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19).

Ako je $\theta \cong \delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1])$, onda iz

$$\delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19) upravo jednak

$$\delta([\nu^{-1}\chi_1, \nu\chi_1]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$.

Nadalje, neka je $\theta \cong \chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3$. Kako je

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19).

Kada je $\theta \cong \chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, onda iz

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19).

Neka je sada reprezentacija θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1$. Tada je reprezentacija $\theta \rtimes \pi'$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija, što zaključujemo koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.]. Tada imamo

$$\begin{aligned} \theta \rtimes \pi' &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}, \end{aligned}$$

i reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, pa zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19).

Konačno, promatramo slučaj kada je reprezentacija θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-1}\chi_1 \times \chi_1 \times \nu\chi_1$. Tada, iskoristimo li potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.], zaključujemo da je reprezentacija $\theta \rtimes \pi'$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija. Kako imamo

$$\begin{aligned} \theta \rtimes \pi' &\hookrightarrow \nu^{-1}\chi_1 \times \chi_1 \times \nu\chi_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-1}\chi_1 \times \chi_1 \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \end{aligned}$$

$$\cong \nu^{-1}\chi_1 \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$$

i reprezentacija $\nu^{-1}\chi_1 \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, sada zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-1}\chi_1 \times \nu^{-1}\chi_1^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = 1$ te $\{\chi_2, \chi_3\} = \{\chi_1, \chi_1^{-1}\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.19).

Prema tome, pronašli smo sve tražene unitarizabilne subkvocijente i time završavamo dokaz teorema. □

Na kraju, dajemo opis svih ireducibilnih unitarizabilnih subkvocijenata inducirane reprezentacije grupe $SO(7, F)$ u kojoj su sva tri nekvadratna karaktera međusobno neizomorfna.

Teorem 5.23. *Neka je $\chi_i \in \widehat{F^\times}$ takav da je $\chi_i \not\cong \chi_i^{-1}$, za $i \in \{1, 2, 3\}$, te neka je $\chi_1 \not\cong \chi_2 \not\cong \chi_3$. Nadalje, neka je $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Tada su svi ireducibilni unitarizabilni subkvocijenti inducirane reprezentacije $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times}$ sljedeći:*

(i)

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$, ili

$$L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

(ii)

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(iii)

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i, j\} = \{2, 3\}$.

Dokaz. Svi ireducibilni subkvocijenti inducirane reprezentacije

$$\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \tag{5.20}$$

dani su teoremom 4.12. Stoga, potrebno je još odrediti koji su među njima unitarizabilni.

Kako imamo tri nekvadratna karaktera, problem unitarnosti se sada svodi na problem unitarnosti reprezentacija opće linearne grupe $GL(3,F)$, što zaključujemo iz teorema 5.15. Dakle, imamo

$$\pi \cong \theta \rtimes \pi',$$

gdje je θ ireducibilan subkvocijent od $\nu^{a_1}\chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_2 \times \nu^{a_3}\chi_3$, a $\pi' \cong 1_{F^\times}$.

Potpuno analogno kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo da je reprezentacija $\theta \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1$, za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(3,F)$.

Nadalje, kako imamo tri međusobno neizomorfna nekvadratna karaktera, slijedi da je $1 \leq m \leq 2$. Ukoliko je $m = 1$, onda je $\delta \cong \chi_i$, za $i \in \{1,2,3\}$, ili je $\delta \cong \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, zbog pretpostavke teorema. Ukoliko je $m = 2$, onda je jedinstvena ireducibilna podreprezentacija δ od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, ireducibilna unitarizabilna reprezentacija grupe $GL(2,F)$. Sada zaključujemo, koristeći teorem 5.16, da su sljedeće reprezentacije ireducibilne unitarizabilne reprezentacije grupe $GL(3,F)$: $\theta \cong \chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3$, ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, zatim $\theta \cong \chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, ako je $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, i reprezentacija θ koja je izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1$, ako je $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ i $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$.

Sada možemo pronaći sve unitarizabilne subkvocijente među ireducibilnim subkvocijentima inducirane reprezentacije (5.20).

Pogledajmo najprije slučaj kada je $\theta \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1$. Tada je

$$\theta \rtimes \pi' \cong \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$$

ireducibilna unitarizabilna reprezentacija, što možemo zaključiti koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.]. Kako je

$$\begin{aligned}
\nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times} &\cong \chi_1 \times \nu^{a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \chi_1 \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{a_2}\chi_i \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \chi_1 \times \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \rtimes 1_{F^\times} \\
&\cong \nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},
\end{aligned}$$

a reprezentacija $\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, zaključujemo da je

$$\theta \rtimes \pi' \cong L(\nu^{-a_2}\chi_i \times \nu^{-a_2}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

za $a_1 = 0$ i $0 < a_2 < \frac{1}{2}$, ako je $a_2 = a_3$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.20).

Nadalje, neka je $\theta \cong \chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3$. Sada iz

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah možemo zaključiti da je traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.20) upravo

$$\chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Kada je $\theta \cong \chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i])$, onda s obzirom da je

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times} \cong \theta \rtimes \pi',$$

koristeći teorem 5.15, odmah zaključujemo da je upravo

$$\chi_1 \times \delta([\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i, \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i]) \rtimes 1_{F^\times},$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.20).

Konačno, neka je reprezentacija θ izomorfna jedinstvenoj ireducibilnoj podreprezentaciji od $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1$. Tada je reprezentacija $\theta \rtimes \pi'$ ireducibilna unitarizabilna reprezentacija, što možemo zaključiti koristeći potpoglavlje 2.9 i [59, Proposition 1.1.]. Kako je

$$\begin{aligned}\theta \rtimes \pi' &\hookrightarrow \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{\frac{1}{2}}\chi_i \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times} \\ &\cong \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times},\end{aligned}$$

i reprezentacija $\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}$ ima jedinstvenu ireducibilnu podreprezentaciju, zaključujemo da je

$$L(\nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i \times \nu^{-\frac{1}{2}}\chi_i^{-1} \times \chi_1 \rtimes 1_{F^\times}),$$

ako je $a_1 = 0$ i $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ te $\chi_i \cong \chi_j^{-1}$, za $\{i,j\} = \{2,3\}$, traženi ireducibilan unitarizabilan subkvocijent inducirane reprezentacije (5.20).

Kako smo pronašli sve tražene unitarizabilne subkvocijente, dokaz teorema je gotov. □

Zaključak

Jedan od osnovnih aspekata teorije reprezentacija u zadnjih nekoliko desetljeća problem je određivanja unitarnog duala reduktivne algebarske grupe nad lokalnim nearhimedskim poljem. U ovoj disertaciji određen je unitarni dual p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi.

Kako direktna klasifikacija unitarnog duala do sada općenito nije dala rezultate, pri traženju unitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi iskorišten je temeljni pristup za određivanje unitarnog duala koji se sastoji od dva osnovna koraka. Najprije je napravljen potpun i uniforman opis neunitarnog duala p-adske grupe $SO(7)$ s nosačem na minimalnoj paraboličkoj podgrupi, koji je zasnovan na Langlandsovoj klasifikaciji. Nakon toga identificirane su i izdvojene klase unitarizabilnih reprezentacija iz dobivenih ireducibilnih subkvocijenata.

U disertaciji je opisana i klasifikacija temperiranih reprezentacija p-adske grupe $SO(7)$, koja je korištena pri traženju unitarnog duala.

Kako se do sada ovaj pristup iskoristio za klasifikaciju unitarnog duala nekih klasičnih grupa ranga dva, prirodno se nametnulo promatranje induciranih reprezentacija klasične grupe ranga tri. Za očekivati je da će proučavanje induciranih reprezentacija grupa malog ranga pružiti dobar uvid u strukturu unitarnog duala u općem slučaju.

Bibliografija

[1] J. Arthur. *The endoscopic classification of representations.* Sv. 61. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] A.-M. Aubert. “Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d’un groupe réductif p-adique”. *Transactions of the American Mathematical Society* 347.6 (1995), str. 2179–2189.

[3] A.-M. Aubert. “Erratum: “Duality in the Grothendieck group of the category of finite-length smooth representations of a p-adic reductive group” [Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 6, 2179–2189; MR1285969 (95i:22025)]”. *Transactions of the American Mathematical Society* 348.11 (1996), str. 4687–4690.

[4] J. Bernstein. “All reductive p-adic groups are of type I”. *Funktsional’nyi Analiz i ego Prilozheniya* 8.2 (1974), str. 3–6.

[5] J. Bernstein. “P-invariant distributions on $\mathrm{GL}(N)$ and the classification of unitary representations of $\mathrm{GL}(N)$ (non-Archimedean case)”. *Lie group representations, II.* Sv. 1041. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1984, str. 50–102.

[6] J. Bernstein, P. Deligne i D. Kazhdan. “Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups”. *Journal d’Analyse Mathématique* 47.1 (1986), str. 180–192.

[7] J. Bernstein i K. Rumelhart. “Representations of p-adic groups, Lectures by Joseph Bernstein”. Lectures at Harvard University, Fall 1992. 1992.

[8] J. Bernstein i A. V. Zelevinsky. “Induced representations of reductive p-adic groups. I”. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 10.4 (1977), str. 441–472.

[9] D. Bump. *Automorphic forms and representations.* Sv. 55. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[10] W. Casselman. “The Steinberg character as a true character”. 26 (1973), str. 413–417.

[11] W. Casselman. “Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups”. preprint. 1995.

[12] W. T. Gan i L. Lomelí. “Globalization of supercuspidal representations over function fields and applications”. *Journal of the European Mathematical Society* 20.11 (2018), str. 2813–2858.

[13] D. Goldberg. “Reducibility of induced representations for Sp(2n) and SO(n)”. *American Journal of Mathematics* 116.5 (1994), str. 1101–1151.

[14] M. Hanzer. “The unitary dual of the Hermitian quaternionic group of split rank 2”. *Pacific Journal of Mathematics* 226.2 (2006), str. 353–388.

[15] M. Hanzer. “The unitarizability of the Aubert dual of strongly positive square integrable representations”. *Israel Journal of Mathematics* 169.1 (2009), str. 251–294.

[16] C. Jantzen. “Degenerate principal series for orthogonal groups”. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.* 441 (1993), str. 61–98.

[17] C. Jantzen. “Reducibility of certain representations for symplectic and odd-orthogonal groups”. *Compositio Mathematica* 104.1 (1996), str. 55–63.

[18] C. Jantzen. “On supports of induced representations for symplectic and odd-orthogonal groups”. *American Journal of Mathematics* 119.6 (1997), str. 1213–1262.

[19] C. Jantzen. “Duality for classical p-adic groups: the half-integral case”. *Representation Theory* 22 (2018), str. 160–201.

[20] C. D. Keys. “On the decomposition of reducible principal series representations of p-adic Chevalley groups”. *Pacific Journal of Mathematics* 101.2 (1982), str. 351–388.

[21] D. C. Keys. “L-indistinguishability and R-groups for quasisplit groups: unitary groups in even dimension”. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 20.1 (1987), str. 31–64.

[22] Y. Kim i I. Matić. “Discrete series of odd general spin groups”. *arXiv preprint arXiv:1706.01111* (2017).

[23] H. Knight i A. V. Zelevinsky. “Representations of quivers of type A and the multisegment duality”. *Advances in Mathematics* 117.2 (1996), str. 273–293.

[24] K. Konno. “Induced representations of $\mathrm{U}(2,2)$ over a p-adic field”. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 540 (2001), str. 167–204.

[25] E. Lapid, G. Muić i M. Tadić. “On the generic unitary dual of quasisplit classical groups”. *International Mathematics Research Notices* 26 (2004), str. 1335–1354.

[26] I. Matić. “The unitary dual of p-adic $\mathrm{SO}(5)$”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 138.2 (2010), str. 759–767.

[27] I. Matić. "Aubert duals of strongly positive discrete series and a class of unitarizable representations". *Proceedings of the American Mathematical Society* 145.8 (2017), str. 3561–3570.

[28] I. Matić. "Composition factors of a class of induced representations of classical p-adic groups". *Nagoya Mathematical Journal* 227 (2017), str. 16–48.

[29] I. Matić. "Aubert duals of discrete series: the first inductive step". *Glasnik matematički* 54.1 (2019), str. 133–178.

[30] C. Mœglin. "Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales; le cas des groupes classiques p-adiques". *Annals of Mathematics. Second Series* 151.2 (2000), str. 817–847.

[31] C. Mœglin. "Points de réductibilité pour les induites de cuspidales". *Journal of Algebra* 268.1 (2003), str. 81–117.

[32] C. Mœglin. "Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue; leur paramètre de Langlands". *Automorphic forms and related geometry: assessing the legacy of I. I. Piatetski-Shapiro*. Sv. 614. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014, str. 295–336.

[33] C. Mœglin i M. Tadić. "Construction of discrete series for classical p-adic groups". *Journal of the American Mathematical Society* 15.3 (2002), str. 715–786.

[34] C. Mœglin i J.-L. Waldspurger. "Sur l'involution de Zelevinski". *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 372 (1986), str. 136–177.

[35] G. Muić. "The unitary dual of p-adic G_2". *Duke Mathematical Journal* 90.3 (1998), str. 465–493.

[36] G. Muić. "Composition series of generalized principal series; the case of strongly positive discrete series". *Israel Journal of Mathematics* 140 (2004), str. 157–202.

[37] G. Muić. "Reducibility of generalized principal series". *Canadian Journal of Mathematics* 57.3 (2005), str. 616–647.

[38] G. Muić. "Reducibility of standard representations". *Pacific Journal of Mathematics* 222.1 (2005), str. 133–168.

[39] G. Muić i M. Tadić. "Unramified unitary duals for split classical p-adic groups; the topology and isolated representations". *On certain L-functions*. Sv. 13. Clay Mathematics Proceedings. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, str. 375–438.

[40] G. I. Olshansky. "Intertwining operators and complementary series in the class of representations of the general group of matrices over a locally compact division algebra, induced from parabolic subgroups". *Sbornik: Mathematics* 93.2 (1974), str. 218–253.

[41] P. J. Sally i M. Tadić. “Induced representations and classifications for GSp$(2, F)$ and Sp$(2, F)$”. *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série* 52 (1993), str. 75–133.

[42] G. Savin. “Lectures on representations of p-adic groups”. *Representations of real and p-adic groups.* Sv. 2. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore. Singapore University Press, Singapore, 2004, str. 19–46.

[43] F. Shahidi. “A proof of Langlands’ conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups”. *Annals of Mathematics. Second Series* 132.2 (1990), str. 273–330.

[44] F. Shahidi. “Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p-adic groups”. *Duke Mathematical Journal* 66.1 (1992), str. 1–41.

[45] A. J. Silberger. “Correction: “The Knapp-Stein dimension theorem for p-adic groups” [Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 2, 243–246; MR **58** #11245]”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 76.1 (1979), str. 169–170.

[46] A. J. Silberger. “Special representations of reductive p-adic groups are not integrable”. *Annals of Mathematics. Second Series* 111.3 (1980), str. 571–587.

[47] M. Tadić. “Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case)”. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 19.3 (1986), str. 335–382.

[48] M. Tadić. “Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case)”. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 19.3 (1986), str. 335–382.

[49] M. Tadić. “An external approach to unitary representations”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 28.2 (1993), str. 215–252.

[50] M. Tadić. “Representations of classical p-adic groups”. *Representations of Lie groups and quantum groups.* Sv. 311. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, str. 129–204.

[51] M. Tadić. “Representations of p-adic symplectic groups”. *Compositio Mathematica* 90.2 (1994), str. 123–181.

[52] M. Tadić. “Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p-adic groups”. *Journal Algebra* 177.1 (1995), str. 1–33.

[53] M. Tadić. “On reducibility of parabolic induction”. *Israel Journal of Mathematics* 107.1 (1998), str. 29–91.

[54] M. Tadić. “On classification of some classes of irreducible representations of classical groups”. *Representations of real and p-adic groups.* Sv. 2. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore. Singapore University Press, Singapore, 2004, str. 95–162.

[55] M. Tadić. “Square integrable representations of segment type (generic reducibilities)”. *Proceedings of the Postgraduate School and Conference Functional Analysis VIII* (15.–22. lipnja 2003). Ur. D. Bakić i dr. Sv. 47. Dubrovnik: University of Aarhus, Department of Mathematical Sciences, 2004, str. 168–204.

[56] M. Tadić. “On reducibility and unitarizability for classical p-adic groups, some general results”. *Canadian Journal of Mathematics* 61.2 (2009), str. 427–450.

[57] M. Tadić. “Reducibility and discrete series in the case of classical p-adic groups; an approach based on examples”. *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables.* Sv. 7. Series on Number Theory and Its Applications. World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2012, str. 254–333.

[58] M. Tadić. “On tempered and square integrable representations of classical p-adic groups”. *Science China. Mathematics* 56.11 (2013), str. 2273–2313.

[59] M. Tadić. “Unitarizability in generalized rank three for classical p-adic groups”. *arXiv preprint arXiv:1709.00630* (2017).

[60] A. Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[61] A. V. Zelevinsky. “Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$”. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 13.2 (1980), str. 165–210.

Životopis

Darija Brajković rođena je 22. lipnja 1987. u Đakovu. Osnovnu školu i opću gimnaziju A.G. Matoša pohađala je u Đakovu. Sveučilišni preddiplomski studij *Matematika* završila je 2009. godine na Odjelu za matematiku u Osijeku. Iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij *Teorijska matematika* na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je u srpnju 2011. godine, s temom diplomskog rada *Lokalna svojstva projektivnih mnogostrukosti* (mentor: akademik prof.dr.sc. Goran Muić).

Nakon diplomskog studija upisuje Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij *Matematika* na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Sudjeluje u radu *Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme*, a na doktorskom studiju položila je dva pristupna kolegija (*Algebra* te *Geometrija i topologija*), kao i tri napredna kolegija (*Invarijante reduktivnih grupa*, *Prostori sa strukturnim snopom* i *Modularne forme*).

U prosincu 2012. godine postaje asistent u naslovnom suradničkom zvanju na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, a u srpnju 2013. godine zaposlena je kao asistent na istoj instituciji.

Sudjelovala je na 8 međunarodnih konferencija, škola i workshopova. Bila je suradnik na dva znanstvenoistraživačka projekta na Sveučilištu J.J. Strossmayera voditelja izv.prof.dr.sc. Ivana Matića: *Composition series of induced representations of classical p-adic groups* i *Discrete series in generalized principal series*, te na projektu Hrvatske zaklade za znanost br. 9364: *Automorfne forme, reprezentacije i primjene* voditelja akademika prof.dr.sc. Gorana Muića. Trenutno je suradnik na projektu Hrvatske zaklade za znanost br. 3628: *Unitarne reprezentacije, automorfne i modularne forme* voditeljice prof.dr.sc. Marcele Hanzer.

Suautorica je stručnog članka *Matematički zadatci na šahovskoj ploči*, Osječki matematički list, 18 (2018).

Autorica je sveučilišnog priručnika za vježbe pod nazivom *Algebra kroz primjere* koji je izdan od strane Sveučilišta J.J. Strossmayera 2018. godine.