

# Računanje rezonantnih modova u sustavu BEM++

---

**Dominković, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:919410>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marko Dominković

**RAČUNANJE REZONANTNIH  
MODOVA U SUSTAVU BEM++**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Luka Grubišić

Zagreb, veljače, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

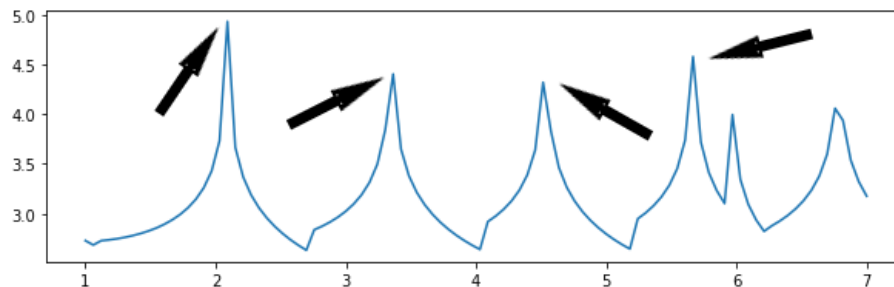
1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Operator raspršenja</b>	<b>3</b>
1.1 Akustično raspršenje . . . . .	3
1.2 Integralni operatori . . . . .	5
1.3 Rezonance i pseudospektar . . . . .	10
1.4 Dekompozicija singularnih vrijednosti (SVD) . . . . .	12
<b>2 BEM++</b>	<b>15</b>
2.1 O BEM++ . . . . .	15
2.2 Primjena BEM++ . . . . .	15
<b>3 Alogritmi za računanje rezonance</b>	<b>19</b>
3.1 Prikaz pseudospektra . . . . .	19
3.2 Računanje najmanje svojstvene vrijednosti . . . . .	19
3.3 Traženje rezonanci . . . . .	22
3.4 Ostale metode i zaključak . . . . .	28
<b>Bibliografija</b>	<b>29</b>

# Uvod

U ovom radu ćemo prikazati implementaciju metode za rješavanje problema računanja rezonantnih modova u problemu akustičkog ili elektromagnetskog raspršenja. Analiza rezonanci je posebno važna za problem opažanja objekata radarom ili ultrazvučnim detektorom. Također, problem raspršenja se općenito proučava u radiokomunikacijama vezano uz projektiranje antena. Općenito, eksperiment raspršenja je eksperimentalni temelj kvantne fizike i predstavlja problem koji je detaljno proučavan kako teoretski tako i eksperimentalno. Ključnu će ulogu predstavljati rezonantne frekvencije. Ukoliko pretpostavimo da incidentni val ima uvijek istu amplitudu, a različitu frekvenciju, onda je rezonantna frekvencija ona frekvencija za koju odbijeni val ima bitno veću amplitudu nego što je ima za njoj bliske frekvencije.



Slika 0.1: Rezonance

Za rezonantnu frekvenciju ćemo pridruženi odbijeni val nazvati rezonantnim modom. Često ćemo umjesto pojma rezonantne frekvencije govoriti samo rezonance. Iako ih prikazujemo u kompleksnoj ravnini, rezonance mogu utjecati na realne frekvencije u svojoj okolini te na ponašanje integralnih operatora koji opisuju raspršenje. Jedan od najboljih načina da prikazemo takve pojave jest korištenje pseudospektra. Nadalje, u radu ćemo prikazati numeričku metodu za računanje rezonanci i pseudospektra koja se bazira na metodi rubnih elemenata (eng. *Boundary Element Method* - BEM [3]). Prvo ćemo implementirati iterativni algoritam pomoći kojeg nalazimo najmanju singularnu vrijednost operatora.

Kompleksnu ravninu ćemo pokriti mrežom točaka u kojima ćemo računati amplitudu rezonantnog moda (računajući najmanji singularnu vrijednost integralnog operator rješenja). Na takav način ćemo dobiti jednu realnu funkciju kompleksne varijable. Njeni nivo skupovi će se nazivati pseudospektar ([9]) i bit će temelj analize čiju realizaciju korištenjem paketa `bempp` ćemo prezentirati. Navedene metode implementirat ćemo u softverskom paketu `BEM++` kroz Python sučelje. `BEM++` je idealan alat za rješavanje rubnih integralnih jednadžbi za Helmholtzove i Maxwellove probleme.

Naglasak će biti na softverskim aspektima postojećih paketa koji realiziraju metodu rubnih elemenata. Posebno, aspekti funkcionalne analize i teorije operatora koji su potrebni za razumijevanje teoretske pozadine bit će prikazani prvenstveno zbog potpunosti izlaganja u aspektu koji je relevantan za korištenje softvera.

# Poglavlje 1

## Operator raspršenja

### 1.1 Akustično raspršenje

Kod proučavanja problema akustičkog raspršenja proučavamo valnu jednadžbu

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U.$$

Ukoliko pretpostavimo da rješenje  $U$  ima oblik funkcije sa separiranom prostornom varijablom  $x$  i vremenskom varijablom  $t$  oblika  $U(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t)$ , onda se rješavanje valne jednadžbe svodi na rješavanje Helmholtzove jednadžbe, parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

gdje je  $k^2 = \omega^2/c^2$ , a  $d = 2, 3$  je dimenzija u kojoj promatramo zadaću. Ovdje  $k$  predstavlja valni broj, a  $c$  brzinu zvuka u mediju. Da pokažemo ulogu parametra  $k$ , promotrimo Helmholtzovu jednadžbu u jednoj dimenziji, tj. običnu diferencijalnu jednadžbu  $u'' + k^2 u = 0$ . Opće rješenje te jednadžbe je periodično

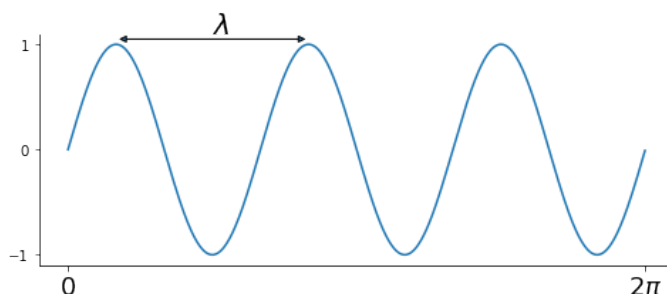
$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (1.2)$$

s periodom

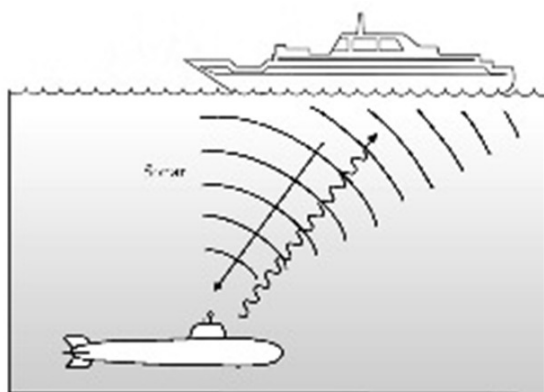
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Parametar  $\lambda$  označava valnu duljinu  $u$ , a  $k$  je broj valova u segmentu duljine  $2\pi$ . Sada možemo zapisati rješenje valne jednadžbe  $\partial^2 U(x, t)/\partial t^2 = c^2 \partial^2 U(x, t)/\partial x^2$  kao

$$U(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}.$$

Slika 1.1: Valni broj  $k = 3$ 

Akustično raspršenje općenito poistovjećujemo s pojavom odbijanja (raspršivanja) zvučnog vala od prepreke (zgrada, planina...). Primjeri u kojima nas zanimaju takva raspršenja pojavljuju se u određivanju akustičnosti prostorije, buke zrakoplova ili pak u korištenju radara i sonara.



Slika 1.2: [1]

Razmotrimo sada slučaj gdje se val rasprši od prepreke  $K$  koja se nalazi u nekom neograničenom skupu  $\Omega$ . Raspršeni val nastavlja se širiti u beskonačnost i pretpostavljamo da se sva energija vala biti apsorbirana u beskonačnosti. Taj uvjet koji  $u(x)$  treba zadovoljiti se zove Sommerfeldov uvjet radijacije

$$iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-(n-1)/2}), \quad R \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

gdje je  $R := |x|$ , norma vektora  $x$ .

Ako prepreka, od koje se val odbije, nije jednostavnog oblika (npr. kugla), problem



raspršenja je teško riješiti analitičkim pristupom. Stoga smo primorani koristiti neke od numeričkih metoda. Prije nego što prezentiramo numeričke metode i njihovu realizaciju u python modulu `bempp`. Iskažimo neke definicije, definirajmo oznake koje ćemo koristiti kroz cijeli rad:

- $K \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , je kompaktan povezan skup koji će modelirati prepreku
- $\Gamma := \partial K$  je rub skupa  $K$ . Pretpostavit ćemo da se rub može opisati kao graf Lipschitzove funkcije, ili ponekad funkcije klase  $C^2$ , ako je dodatna regularnost potrebna u svrhu olakšavanja računa.
- $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus K$

## 1.2 Integralni operatori

U ovom odjeljku opisujemo operatore koje se pojavljuju u primjenama integralnih jednadžbi na rubnim problemima koje uključuju i Helmholtzove jednadžbe. Sustav `bempp` zapravo pruža efikasan okvir za računanje djelovanja ovih operatora na danu po dijelovima konstantnu funkciju i točno to je razina na kojoj ćemo prezentirati ove rezultate. Iskažimo prvo Greenov treći identitet koji daje reprezentaciju rješenja Helmholtzove jednadžbe korištenjem fundamentalnog rješenja sustava. Fundamentalno rješenje sustava je harmonijska funkcija koji rješava sustav uz impulsnu pobudu i ne zadovoljava nužno rubne uvjete. Koncept fundamentalnog rješenja poopćava pojam Greenove funkcije. Ovdje nećemo dokazivati ovaj teorem, već ćemo samo naglasiti način na koji se ova formula reprezentacije rješenja realizira u sustavu `bempp`.

**Definicija 1.2.1.** Skup  $L^2(\Gamma)$  je skup svih kvadratno integrabilnih funkcija  $f : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ , tj. funkcija koje zadovoljavaju

$$\int_{\Gamma} |f(x)|^2 dx < \infty$$

**Teorem 1.2.2.** Neka je u rješnje Helmholtzove jednadžbe,

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad u \Omega.$$

Tada vrijedi

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial E_k(x, y)}{\partial n(y)} u(y) - E_k(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right) dS(y) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in K \end{cases} \quad (1.4)$$

gdje je

$$E_k(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (1.5)$$

fundamentalno rješenje trodimenzionalne Helmholtzove jednadžbe.

**Napomena 1.2.3.** Za dvodimenzionalni prostor, fundamentalno rješenje Helmholtzove jednadžbe glasi

$$E_k(x, y) = \frac{iH_0^{(1)}(k|x-y|)}{4} \quad (1.6)$$

gdje je  $H_0^{(1)}$  Hankelova funkcija prve vrste reda 0. Općenito, Hankelovu funkciju prve vrste možemo prikazati kao integral

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\infty \frac{e^{(z/2)(t-1/t)}}{t^{n+1}} dt$$

Formulu (1.4) iz teorema 1.2.2 zovemo Greenov prikaz rješenja. Koristit ćemo je kasnije kad uvedemo pojam integralnih operatora za rješavanje Dirichletovih i Neumannovih problema za Helmholtzovu jednadžbu.

U nastavku ćemo izvesti pandan formuli (1.2) u  $\mathbb{R}^2$  slučaju. U tu svrhu koristit ćemo objekte koji se nazivaju Helmholtzovi potencijalni operatori. Prikazat ćemo ih u nastavku zbog potpunosti, ali njihovo korištenje nećemo opravdavati već ćemo se referirati na literaturu [4], [8]. Nas će konkretno zanimati integralni operatori koji preslikavaju, odnosno proširuju funkcije  $f \in L^2(\Gamma)$  definirane na rubu u funkcije  $L^2(\Omega)$  [5].

Pod vanjski Dirichletov rubni problem podrazumijevamo zadaću koja se sastoji od Helmholtzove jednadžbe (1.1), Sommerfeldovog uvjeta radijacije (1.3) i Dirichletovog rubnog uvjeta

$$u|_\Gamma = g \quad (1.7)$$

gdje je  $g \in L^2(\Gamma)$ .

Analogno i za vanjski Neumannov rubni problem, zadaća je zadana sa (1.1), (1.3) i

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = f. \quad (1.8)$$

Unutarnji Dirichletov i Neumannov problem zadan je Helmholtzovom jednadžbom

$$-\Delta u - k^2 u = 0, \quad u \in K \quad (1.9)$$

sa Dirichletovim rubnim uvjetom (1.7), odnosno Neumannovim (1.8).

Definirajmo redom Helmholtzove potencijalne operatore, jednoslojni  $S_k$  i dvoslojni  $D_k$ ,

$$S_k \sigma(x) := \int_\Gamma E_k(x, y) \sigma(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad (1.10)$$

$$D_k \phi(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k(x, y)}{\partial n(y)} \phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad (1.11)$$

gdje je  $\sigma = u|_{\Gamma}^{ext}$ , a  $\phi = \partial_n u|_{\Gamma}^{ext}$ . Po [4] obje funkcije, (1.10) i (1.11), su rješenja Helmholtzove jednadžbe (1.1) u  $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ ; štoviše, zadovoljavaju uvjet radijacije (1.3). Istaknimo da BEM++ daje mogućnost brzog računanja djelovanja ovih operatora na danu po dijelovima konstantnu funkciju iz  $L^2(\Gamma)$ .

#### Definicija 1.2.4.

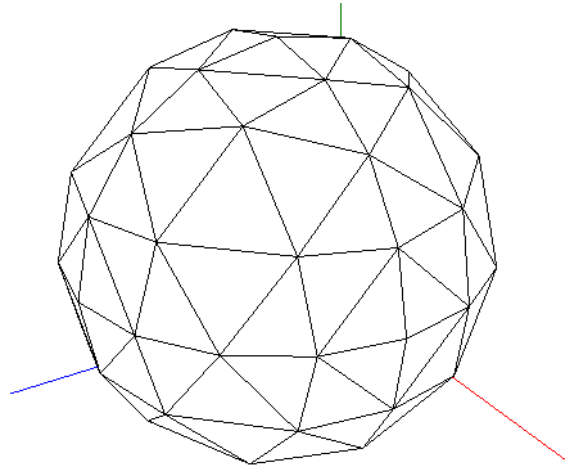
Sa  $H^1(\Omega)$  označavamo skup kvadratno integrabilnih funkcija na  $\Omega$  čija je prva derivacija kvadratno integrabilna na  $\Omega$ .

$H^{1/2}(\Gamma)$  predstavlja skup funkcija koji su restrikcija funkcija iz  $H^1(\Omega)$  na skupu  $\Gamma$ .

$H^{-1/2}(\Gamma)$  je skup linearnih funkcionala na  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

**Napomena 1.2.5.** Operatori  $S_k : H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto H_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  i  $D_k : H^{1/2}(\Gamma) \mapsto H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$ ,  $d = 2, 3$  su definirani na Soboljevskim prostorima [2]. Cilj ovog rada nije analiza operatora i funkcija definiranih na tim prostorima. U nastavku ćemo uvesti i rubne integralne operatore koji su izvedeni iz (1.10) i (1.11). Svi ti operatori restringirani na skup po dijelovima polinomijalnih funkcija, su implementirani u BEM++ [3] i kao takve ih koristimo u poglavlju 3

Diskretizirajmo sada  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  na  $T_n$ ,  $T_n = \bigcup_l \tau_l$ , gdje su  $\tau_l$  trokuti u  $\mathbb{R}^3$  koji opisuju  $\Gamma$ . Za primjer pokažimo diskretizaciju kugle (slika 1.3).



Slika 1.3: Kugla opisana trokutima

Definirajmo sada funkcije  $\phi_i$  nad  $T_n$  na sljedeći način

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

gdje  $x_j$  predstavlja vrh trokuta  $\tau_l$ . Skup  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  predstavlja bazu za prostor po dijelovima konstantnih funkcija definiranih triangulacijom  $T_n$ . Ako je  $A$  rubni integralni operator, definirajmo matricu sa  $A_{ij} = \langle \phi_i, A\phi_j \rangle$ , gdje su  $\phi_i, \phi_j \in \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ .

Ako je  $u$  rješenje Helmholtzove jednadžbe (1.1) na  $\Omega$  koje zadovoljava Sommerfeldov uvjeti radijacije, onda za vanjski problem Greenov prikaz rješenja glasi

$$u(x) = D_k\phi(x) - S_k\sigma(x) \quad x \in \Omega. \quad (1.12)$$

Rješenje za unutrašnji problem ima sljedeći prikaz:

$$u(x) = -D_k\phi(x) + S_k\sigma(x) \quad x \in K. \quad (1.13)$$

**Teorem 1.2.6.** *Neka je  $f \in L^\infty(\Gamma)$ . Onda je  $S_k f$  neprekidna i uniformno ograničena na  $\mathbb{R}^3$ .*

**Teorem 1.2.7.** *Neka je  $f \in C^0(\Gamma)$ . Onda se funkcija  $D_k$  može neprekidno proširiti sa  $\Omega$  na  $\bar{\Omega}$  i sa  $K \setminus \Gamma$  na  $K$*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (D_k f)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k(x_0, y)}{\partial n(y)} f(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} f(x_0), \quad x_0 \in \Gamma \quad (1.14)$$

Uvodimo i rubne integralne operatore :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k\sigma(x_0) &:= \int_{\Gamma} E_k(x_0, y)\sigma(y)ds(y) \\ \mathcal{K}_k\phi(x_0) &:= \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k(x_0, y)}{\partial n(y)}\phi(y)ds(y) \\ \mathcal{K}'_k\phi(x_0) &:= \int_{\Gamma} \frac{\partial E_k(x_0, y)}{\partial n(x_0)}\sigma(y)ds(y) \\ \mathcal{T}_k\phi(x_0) &:= - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 E_k(x_0, y)}{\partial n(x_0)\partial n(y)}\phi(y)ds(y) \end{aligned}$$

gdje je  $x_0 \in \Gamma$ . Operatori  $\mathcal{V}_k$ ,  $\mathcal{K}_k$ ,  $\mathcal{K}'_k$  i  $\mathcal{T}_k$  su redom poznati kao Helmholtzovi jednoslojni, dvoslojni, adjungirani dvoslojni i hipersingularni rubni integralni operatori [5]. Ako uzmemo limes na rub  $\Gamma$  za (1.12) i za njegovu derivaciju u smjeru normale  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , dobivamo sljedeći sustav

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{K}_k + \frac{1}{2}\mathcal{I} & -\mathcal{V}_k \\ -\mathcal{T}_k & -(\mathcal{K}'_k - \frac{1}{2}\mathcal{I}) \end{bmatrix}}_{= A_k} \begin{bmatrix} \phi \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Operator  $A_k$  poznat je kao Calderónov projektor za vanjsku domenu  $\Omega$ . Vanjski Dirichletov rubni problem se može riješiti s jednom od sljedećih rubnih integralnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k \sigma &= f_1 \\ (\mathcal{K}'_k + \frac{1}{2}\mathcal{I})\sigma &= f_2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

gdje su  $f_1 := (\mathcal{K}_k - 0.5\mathcal{I})\phi$  i  $f_2 := -\mathcal{T}_k\phi$ , dok se vanjski Neumannov rubni problem može riješiti s jednom od sljedećih jednadžbi

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_k - \frac{1}{2}\mathcal{I})\phi &= g_1 \\ \mathcal{V}_k \phi &= g_2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

sa  $g_1 := \mathcal{V}_k \sigma$  i  $g_2 = -(\mathcal{K}'_k + 0.5\mathcal{I})\sigma$

Istu stvar napravimo i za (1.13) pa dobijemo

$$\begin{bmatrix} -(\mathcal{K}_k - \frac{1}{2}\mathcal{I}) & \mathcal{V}_k \\ \mathcal{T}_k & \mathcal{K}'_k + \frac{1}{2}\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

gdje je operator iz (1.18) Calderónov projektor za unutarnji domenu  $K$ . Iz toga slijedi da se unutarnji Dirichletov problem može riješiti sa jednom od sljedećih rubnih integralnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k \sigma &= f_3 \\ (\mathcal{K}'_k - \frac{1}{2}\mathcal{I})\sigma &= f_4 \end{aligned} \quad (1.19)$$

za koje vrijedi  $f_3 := (\mathcal{K}_k + 0.5\mathcal{I})\phi$ , a unutarnji Neumannov problem se može riješiti s jednom od

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_k + \frac{1}{2}\mathcal{I})\phi &= g_3 \\ \mathcal{V}_k \phi &= g_4 \end{aligned} \quad (1.20)$$

sa  $g_3 := -\mathcal{V}_k \sigma$  i  $g_4 = -(\mathcal{K}'_k - 0.5\mathcal{I})\sigma$

Sve navedene jednadžbe mogu se zapisati kao

$$A\phi = g \quad (1.21)$$

gdje je  $A$  linearni rubni integralni operator,  $g$  je poznat, a  $\phi$  je traženo rješenje. Operator  $A$  ima oblik  $A = I + C$ , gdje je  $I$  operator identiteta, a  $C$  kompaktni. Takvi operatori se zovu Fredholmovi operatori[6]. Singularne vrijednosti kompaktnog operatora teže prema nuli pa će u ovom slučaju za operator  $A$  težiti prema 1. Nas će zanimati po modulu najmanja singularna vrijednost, a on će biti konačne višestrukosti zbog toga što je operator Fredholmov.

Jedna od načina za rješavanje (1.21) je Galerkinova metoda. Prije nego opišemo metodu karakterizirajmo pojam kompaktnog operatora.

**Teorem 1.2.8.** *Operator  $A$  je kompaktni ako je limes niza operatora konačnog ranga  $P_n$ .*

Metoda rubnih elemenata se temelji na odabiru konačno dimenzionalnog prostora  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$  te traženju aproksimacijskog rješenja  $\phi_n \in \mathcal{H}_n$  koje zadovoljava

$$\langle A\phi_n, h_n \rangle = \langle g, h_n \rangle, \quad \forall h_n \in \mathcal{H}_n \quad (1.22)$$

Osnovna pretpostavka u promatranju Galerkinove metode jest ta da je operator  $A$  injektivan i da ima oblik  $A = B + C$ , gdje je  $C : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$  kompaktni, a za  $B : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$  i za neki  $\alpha > 0$  vrijedi

$$|\langle Bf, f \rangle| \geq \alpha \|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.23)$$

I ovaj operator je Fredholmov, budući da se može pokazati da postoji Hilbertov prostor u kojem ima oblik  $I+C$ , vidi [6]

**Teorem 1.2.9.** [4] *Pretpostavimo da je linearni operator  $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$  takav da postoje kompaktni operator  $C$  i ograničen operator  $B$  koji zadovoljava (1.23) takvi da je  $A = C + B$ . Pretpostavimo još da je  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz konačno dimenzionalnih potprostora  $\mathcal{H}_n$  koji konvergira prema  $\mathcal{H}$  tako da vrijedi*

$$\inf_{\psi_n \in \mathcal{H}_n} \|f - \psi_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

za svaki  $f \in \mathcal{H}$ . Tada postoje  $n_0 \in \mathbb{N}$  i  $c > 0$  takvi da za  $n \geq n_0$  (1.22) ima točno jedno rješenje  $g_n \in \mathcal{H}_n$  koje zadovoljava

$$\|f - g_n\|_{\mathcal{H}} \leq c \inf_{\psi_n \in \mathcal{H}_n} \|f - \psi_n\|_{\mathcal{H}} \quad (1.24)$$

### 1.3 Rezonance i pseudospektar

Za dani vanjski Dirichletov problem, koji zadovoljava Helmholtzovu jednadžbu(1.1), Sommerfeldov uvjet radijacije (1.3) i Dirichletov rubni uvjet

$$u = \phi, \quad \text{na } \Gamma$$

moguće je dokazati da postoji jedinstveno rješenje  $u$  za svaki valni broj  $k$ ,  $\text{Im } k \geq 0$ . Zato možemo definirati operator  $A_k$  koji preslikava  $\phi$  u rješenje  $u$

$$u = A_k \phi \quad (1.25)$$

za svaki  $\phi \in L^2(\Gamma)$ . Takav operator je jedinstven. Ako je  $k \in \mathbb{R}$  rezonanca, onda postoji netrivialno rješenje  $f \in \mathcal{H} := L^2(\Gamma)$  koje zadovoljava jednadžbu

$$A_k f = 0$$

gdje je  $A_k$  rubni integralni operator. Takav  $f$  postoji samo ako je operator  $A_k$  singularan za neke valne brojeve  $k$ . Drugim riječima, ako je  $k$  rezonanca, onda postoji  $u \in C^\infty(\Omega)$  koja zadovoljava jednadžbu (1.1) i homogen Dirichletov rubni uvjet te vrijedi

$$u = D_k g_1 + S_k g_2 \quad \text{na } \Omega$$

za neke  $g_i \in L^2(\Gamma)$ .

Ispostavlja se da se rezonance nalaze na negativnoj strani imaginarne osi te, štoviše, da ih ima beskonačno mnogo [6]. Ono što s može pokazati je da postoji veza operatora  $B_k$  i rubnih integralnih operatora  $\mathcal{V}_k, \mathcal{D}_k, \mathcal{D}'_k$  i  $\mathcal{T}_k$ . Za unutarnji Neumannov problem operator je definiran kao

$$B_k = D_k(\mathcal{K}_k + 0.5I)^{-1}$$

U tom slučaju, rezonance se mogu odrediti ako promatramo ovisnost operatora  $(\mathcal{K}_k + 0.5I)$  o broju  $k$ .

## Pseudospektar

Određivanje svojstvene vrijednosti ili spektra, postala je standardna procedura pri analiziranju operatora. Isto tako postavljamo si pitanje "Je li operator  $A$  singularna?". Odgovori na ta pitanja ponekad i nisu dovoljni. Ono što će nas zanimati je to da li je  $\|A^{-1}\|$  velika. Za normalni operator  $A$ , vrijednost  $\|(z - A)^{-1}\|$  će biti velika ukoliko se  $z$  nalazi blizu neke svojstvene vrijednosti operatora  $A$ . Ako  $A$  nije normalan, norma operatora  $\|(z - A)^{-1}\|$  može biti velika i onda kada se  $z$  nalazi daleko od spektra operatora  $A$ . Pseudospektar operatora  $A$  bi onda bio skup koji sadrži njegove svojstvene vrijednosti i one brojeve koji su skoro svojstvena vrijednost (nalaze se jako blizu nekoj od svojstvenih vrijednosti)

**Definicija 1.3.1.** [7] Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  i  $\epsilon > 0$  proizvoljan.  $\epsilon$  - pseudospektar  $\sigma_\epsilon(\mathbf{A})$  operatora  $\mathbf{A}$  u normi  $\|\cdot\|$  je skup definiran s izrazom

$$\sigma_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}; \|(z - \mathbf{A})^{-1}\| > \epsilon^{-1}\}.$$

Operator  $(z - \mathbf{A})^{-1}$  zovemo *rezolventom operatora*  $\mathbf{A}$ . Pseudospektar je idealan alat za proučavanje svojstva rezolvente operatora. Neka je  $A$  operator na Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}$ , a  $A^{-1}$  njegov inverz. Rezolventan skup  $\rho(A)$  je skup brojeva  $z \in \mathbb{C}$  za koje postoji ograničeni operator  $(z - A)^{-1}$ . Spektar operatora  $A$  je komplement rezolventnog skupa,  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .  $\sigma_\epsilon$  sadrži spektar operatora  $A$ . Ako vrijedi  $Af = zf$ , za neki ne-nul vektor  $f \in \mathcal{H}$ , onda je  $z$  svojstvena vrijednost od  $A$ , a  $f$  pripadni svojstveni vektor. Spektar  $\sigma(A)$  je skup svih svojstvenih vrijednosti od  $A$ , ali može biti i veći od toga. Pogledajmo sada normu  $\|(z - A)^{-1}\|$ . Njezina vrijednost se približava  $\infty$  kako se  $z$  približava spektru. Zato ćemo usvojiti sljedeću notaciju :

$$\|(z - A)^{-1}\| = \infty \quad z \in \sigma(\mathbf{A})$$

Norma rezolvente operatora  $\|(z - A)^{-1}\|$  je u tom slučaju neprekidna funkcija koja preslikava kompleksnu ravninu u skup  $\langle 0, \infty \rangle$ .

Definirajmo još i pojam adjungiranog ili dualnog operatora

**Definicija 1.3.2.** Neka je  $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Operator  $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sa svojstvom

$$\langle \mathbf{A}f, g \rangle = \langle f, \mathbf{A}^*g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

zovemo *adjungirani operator operatoru*  $\mathbf{A}$ . *Adjungirani operator je kao takav jedinstven.*

Mnoga svojstva povezuje operator  $A$  s njegovim dualom, odnosno njemu adjungiranim operatorom  $A^*$ . Prvo svojstvo je to da spektar od  $A^*$  je kompleksno konjugiran u odnosu na spektar od  $A$ . Nadalje,  $\|A\|_{\mathcal{H}} = \|A^*\|_{\mathcal{H}}$  i  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$  pa koristimo notaciju  $A^{-*}$ . Što se tiče pseudospektra,  $\sigma_\epsilon(A^*) = \overline{\sigma_\epsilon(A)}$ . Jedan od glavnih razloga zašto koristimo pseudospektar jest zbog istraživanje svojstva nenormalnosti linearnog operatora. Naime, ako je  $A$  normalan,  $\epsilon$ -*pseudospektar* operatora  $A$ ,  $\sigma_\epsilon(A)$ , je unija krugova radijusa  $\epsilon$  čija su središta svojstvene vrijednosti operatora  $A$ . S druge strane, za operatore koji nisu normalni, skup  $\sigma_\epsilon(A)$  može biti puno veći. Sam prikaz pseudospektra operatora može dosta reći o njegovoj normalnosti.

## 1.4 Dekompozicija singularnih vrijednosti (SVD)

Kako smo prije spomenuli, za računanje pseudospektra operatora  $A$  tražimo njegove najmanje singularne vrijednosti. Zato ćemo u ovom odjeljku iskazati teorem o dekompoziciji operatora na singularne vrijednosti. Potom ćemo navesti neka od svojstava, za nas, zanimljivih operatora (normalni, unitarni, simetrični...). U (1.2) smo vidjeli da se kompaktne operatore može analizirati kao limes niza operator konačnog ranga. To tu operatori koji možemo realizirati kao matrice, pa ćemo se u ovom prikazu koncentrirati na prezentaciju rezultata u matičnom slučaju.



**Teorem 1.4.1.** *Ako je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  matrica, onda postoje unitarne matrice  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}$  i  $\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  te dijagonalna matrica  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_s \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

gdje je  $s = \min\{m, n\}$  i  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s \geq 0$ , takve da je

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

Brojeve  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$  nazivamo singularnim vrijednostima matrice  $A$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_m$  lijevim singularnim vektorima, a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  desnim singularnim vektorima.

**Teorem 1.4.2.** *Neka je  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  su  $\sigma_i^2$ , a desni singularni vektori  $v_i$  su pripadni svojstveni vektori.*

*Dokaz.* Vrijedi

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^*\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{V}^*$$

što je svojstvena dekompozicija od  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  □

Rezultat ovog teorema koristit ćemo u poglavlju 3 u kojem implementiramo metodu za računanje najmanje svojstvene vrijednosti.

**Definicija 1.4.3.** *Za matricu  $\mathbf{A}$  kažemo da je normalan ako vrijedi*

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$$

Singularne vrijednosti normalnog operatora jednake su normama njegovih svojstvenih vrijednosti:  $\sigma_i = |\lambda_i|$ .

Spomenimo sada i dekompoziciju singularnih vrijednosti za sam operator  $A$

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k(\psi_i, u)\phi_i,$$

gdje su  $\psi_k$  i  $\phi_k$  lijevi odnosno desni singularni vektori, vektori stupci matrica  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$ , određeni operatorom  $A$ .  $\psi_i$  i  $\phi_i$  čine ortonormirane sustave vektora za  $\mathcal{H}$ , odnosno za  $\mathcal{H}'$ . Ukoliko pretpostavimo da vrijedi  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$ , onda ova formula reprezentira i beskonačno dimenzionalan operator. Uvjet  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$  povlači da operator mora biti kompaktan.



## Poglavlje 2

### BEM++

#### 2.1 O BEM++

[3] Bem++ je sustav za rješavanje akustičnih, elektrostatičkih i elektromagnetnih problema pomoću metode rubnih elemenata (boundary element method). Razvijen je na University College London i Papinskom katoličkom sveučilištu u Čileu. Moguće ga je koristiti kroz sučelja programskih jezika Python i C++, iako je trenutna podrška samo za Python.

#### 2.2 Primjena BEM++

Opišimo neke jednostavane primjere korištenja BEM++-a.

##### Rešetke i funkcijski prostori

Za prikaz oblika nekog tijela u BEM++ koristimo se rešetkama. Konstruirajmo jednu jednostavnu rešetku, kuglu radijusa 1.

---

```
import bempp . api
import numpy as np

grid = bempp . api . shapes . regular_sphere (3)
```

---

Dobivena kugla se sastoji od  $8 * 4^n$  elemenata, gdje je  $n$  argument funkcije koji označava stupanj uglađenosti kugle. Drugi način konstruiranja rešetke je pomoću polja vrhova i elemenata koji opisuju kako su vrhovi povezani. Sa `vertices` označimo polje svih vrhova. `evaluation_points` opisuju način na koji su vrhovi povezani.

---

```

vertices = np.array([[0,1,2,1],
                    [0,2,0,1],
                    [0,0,0,2]])

evaluation_points = np.array([[0,0,0,1],
                              [1,1,2,2],
                              [2,3,3,3]])

grid = bempp.api.grid_from_element_data(vertices,
                                       evaluation_points)

```

---

Prvi element povezuje vrhove 0, 1 i 2. Drugi povezuje 0, 1 i 3 itd. Za kompleksnije oblike, najbolje je koristiti neke od softvera (Gmsh) za konstrukciju te dobiveni .msh file učitati u BEM++. BEM++ podržava Gmsh v2.2 msh format

---

```
grid = bempp.api.import_grid('my_grid.msh')
```

---

Važnu ulogu u BEM++ imaju funkcijski prostori. Za inicijalizaciju funkcijskog prostora potrebna nam je rešetka. Drugi argument koji prima `function_space` je prostor kojim su opisani; "P" za prostor neprekidnih polinoma, te onim koji nisu neprekidni, "DP".

```
space = bempp.api.function_space(grid, "P", 1)
```

Prvi argument funkcije je rešetka. Drugi argument je tip prostora, u ovom slučaju "P" označava prostor polinoma. Zadnji argument označava stupanj polinoma. Sada možemo implementirati funkciju koja je definirana na rubu  $\Gamma$  kugle  $K$ .

---

```

import bempp.api
import numpy as np

def fun(x, normal, domain_index, result):
    result[0] = np.exp(1j * x[0])

grid = bempp.api.shapes.regular_sphere(5)
space = bempp.api.function_space(grid, "DP", 1)
grid_fun = bempp.api.GridFunction(space, fun=fun)

```

---

## Operatori u BEM++

Operator  $A$  u BEM++ definiramo kao

$$A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$$

preslikavanje s domene  $D$  na kodomenu  $R$ , gdje su  $D$  i  $R$  definirane na površini dane rešetke. BEM++ ne koristi s direktno rubnim operatorom  $A$ , već slabijom formulacijom. Za Windows platforme se

$$a(u, v) := \int_{\Gamma} [Au](\mathbf{y}) \overline{v(\mathbf{y})} d\mathbf{y}, \quad u \in \mathcal{D}, v \in \mathcal{V} \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathcal{V}$  dualni prostor prostora  $\mathcal{R}$ . Rubni operatori se nalaze u paketu `bempp.api.operators.boundary`. Neka je  $g(x, y)$  Greenova funkcija. Dostupni operator s obzirom na odabir Greenove funkcije su:

PDJ	Greenova funkcija	Modul
Laplace $-\Delta u = 0$	$g(x, y) = \frac{1}{4\pi x-y }$	<code>bempp.api.operators.boundary.laplace</code>
Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$	$g(x, y) = \frac{e^{ik x-y }}{4\pi x-y }$	<code>bempp.api.operators.boundary.helmholtz</code>

Helmholtzov jednoslojni  $\mathcal{V}$  i dvoslojni  $\mathcal{K}$  rubni operator implemetiramo sa funkcijama:

---

```
slp = bempp.api.operators.boundary.helmholtz.single_layer(
    space, space, space, 2)
```

```
dlp = bempp.api.operators.boundary.helmholtz.double_layer(
    space, space, space, 2)
```

---

gdje su prva tri argumenta redom domena, kodomena i dualni prostor kodomene operatora. Četvrti argument odgovara valnom broju  $k$ . Nad operatorima možemo vršiti neke od osnovnih operacija: zbrajanje, množenje skalarom i množenje operatora

---

```
scaled_operator = 1.5 * slp
sum_operator = slp + slp
squared_operator = slp * slp
```

---

## Rješavanje linearnih jednadžbi

Promotrimo sljedeći primjer

$$A\phi = f$$

gdje su  $f$  i  $\phi$  funkcije. Zadanu jednadžbu možemo zapisati u njezinoj slabijoj formulaciji:

$$\langle A\phi, v \rangle = \langle f, v \rangle$$

za sve  $v$  u dualnom prostoru. Uobičajeni način rješavanje ovakvog sustava u Bempp je sljedeći:

1. Izračunati slabu formulaciju od  $A$

$$A\_discrete = A.weak\_form()$$

2. Računanje projekcije  $f$  na dualni prostor

$$p = f.projections(A.)$$

3. Pomoću funkcije `gmres`, iz SciPy paketa, riješimo sustav

$$x, info = gmres(discrete\_op, p)$$

4. Iz rezultata  $x$  konstruirajmo funkcijsku mrežu sa

$$\phi = bempp.api.GridFunction(A.domain, coefficients=x)$$

Navedeni koraci mogu se sažmet u jedan funkcijski poziv:

---

```
from bempp.api.linalg.iterative_solvers import gmres
phi = gmres(A, f)
```

---

## Poglavlje 3

# Alogritmi za računanje rezonance

### 3.1 Prikaz pseudospektra

Za prikaz pseudospektra ograničenog integralnog operatora  $A_k$ , potrebno je naći najmanje singularne vrijednosti za  $k \in K$ ,  $K \subset \mathbb{C}$ . U odjeljku 1.4 opisali smo singularnu dekompoziciju operatora  $A$  na matrice  $U, \Sigma, V$  takve da vrijedi  $A = U\Sigma V^*$ . Programski jezik Python ima implementiranu metodu `numpy.linalg.svd` koja nalazi takvu dekompoziciju. Kako nas zanimaju samo najmanje singularne vrijednosti, imamo dojam da dolazi do nepotrebnog računanja preostalih komponenti, ta samim time se vrijeme izvršavanja nepotrebno povećava. Isto tako u obzir treba uzeti i broj operatora za koje tražimo singularnu vrijednost. Broj će ovisiti o tome koliko precizno želimo prikazati pseudospektar u nekoj kompleksnoj okolini. Zato smo primorani pristupiti neki drugim, bržim, metodama za računanje najmanje singularne vrijednosti. Jednu metodu, koja se bazira na iterativnom računanju najmanje svojstvene vrijednosti, opisujemo u sljedećem odjeljku. Naime, ona koristi rezultat teorema 1.4.2, a to je da za svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , operatora  $A^*A$ ,  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , vrijedi  $\lambda_i = \sigma_i^2$ , gdje su  $\sigma_i$  singularne vrijednosti operatora  $A$ .

### 3.2 Računanje najmanje svojstvene vrijednosti

Traženje svojstvenih vrijednosti matrice  $A \in M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , svodi se na rješavanje jednadžbe njezinog karakterističnog polinoma

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 = 0.$$

Za veliki  $n$  ovaj problem iziskuje puno vremena. Kako smo već spomenuli, nas zanimaju samo određene svojstvene vrijednosti, one s najmanjom ili najvećom apsolutnom vrijednošću. Odlučili smo se za iterativnu metodu baš zato što brzo konvergira najvećoj vrijednosti.

Nadalje, vrijedi  $(\lambda_{\min}(A))^{-1} = \lambda_{\max}(A^{-1})$  pa se računanje najmanje svojstvene vrijednosti operatora  $A$  svodi na računanje najveće njemu inverznog operatora  $A^{-1}$ . Opišimo iterativnu metodu za danu matricu  $A$ . Za početak odaberimo vektor  $b_0 \in \mathbb{R}^n$ . Definirajmo niz  $(b_n)$  na sljedeći način:

$$b_{k+1} = \frac{Ab_k}{\|Ab_k\|}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Navedeni niz će konvergirati prema svojstvenom vektoru  $x \in \mathbb{R}^n$ , čija je odgovarajuća svojstvena vrijednost  $\lambda$  najveća svojstvena vrijednost matrice  $A$ . Za računanje najmanje svojstvene vrijednosti treba najprije izračunati inverz matrice  $A$ ,  $A^{-1}$ , s pretpostavkom da je matrica  $A$  regularna. Pritom primijenimo iterativnu metodu sa  $A^{-1}$ . Naravno, time se složenost samog algoritma povećava. Druga mogućnost je rješavanje sustava

$$Ax = b \tag{3.1}$$

u svakoj iteraciji, gdje je  $A \in M_n$ , a  $b \in \mathbb{R}^n$ . Broj iteracija ovisi o izboru početnog vektora i točnosti koju želimo postići. Svojstvena vrijednost jednaka je inverzu norme svojstvenog vektora  $x$ ,  $\lambda = 1/\|x\|$ . Opišimo algoritme za računanje najmanje singularne vrijednosti matrice  $A$ .

Prvi algoritam je modificirani oblik iterativne metode:

---

**Algorithm 1: smallest\_eigenvalue**


---

**Ulaz:** Regularna kvadratna matrica  $A$  veličine  $n \times n$

**Izlaz:** Najmanja svojstvena vrijednost

```

1  $b$  = slučajni vektor ;
2  $e$  = 0.0001 (točnost);
3  $razlika$  = 1;
4  $norma$  = 0;
5 while  $razlika \geq e$  do
6   | riješi jednadžbu  $Ax = b$ ;
7   |  $razlika = |norma/\|x\| - 1|$ ;
8   |  $x = x/\|x\|$ ;
9   |  $razlika = \|b - x\|$ ;
10  |  $b = x$ ;
11 end
12 return  $1/\|x\|$ ,  $x$ 

```

---

U drugom algoritmu najprije izračunamo inverz matrice  $A$  pa potom provodimo klasični iterativni algoritam za traženje najveće svojstvene vrijednosti.



**Algorithm 2:** `smallest_eigenvalue_inverse`


---

**Ulaz:** Regularna kvadratna matrica  $A$  veličine  $n \times n$   
**Izlaz:** Najmanja svojstvena vrijednost

```

1  $b$  = slučajni vektor,  $e = 0.0001$  (točnost),  $razlika = 1$ ;
2  $A_i = A^{-1}$ ;
3  $norma = 0$ ;
4 while  $razlika \geq e$  do
5    $x = A_i b$ ;
6    $razlika = |norma / \|x\| - 1|$ ;
7    $x = x / \|x\|$ ;
8    $b = x$ ;
9 end
10 return  $1 / \|x\|$ ,  $x$ 

```

---

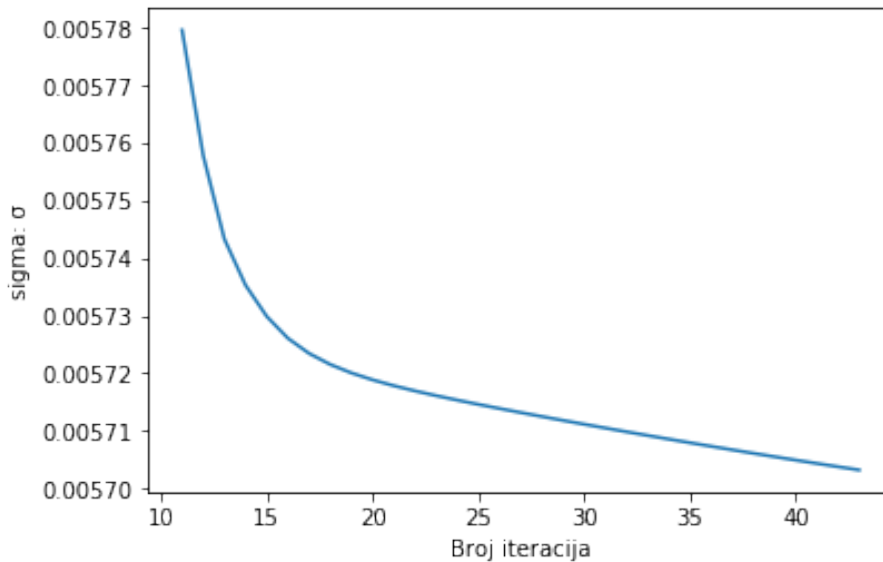
U oba slučaja gledamo relativnu grešku za kriterij zaustavljanja. Koji od navedenih algoritama je bolji? Naime, složenost rješavanja sustava  $Ax = b$ , gdje je  $A$  matrica veličine  $n \times n$ , je  $O(n^3)$ . Isto tako, računanje inverza matrice  $A$  je složenosti  $O(n^3)$ . Prednost drugog načina je ta da se inverz matrice izračuna samo jednom u odnosu na prvi algoritam, gdje se u svakoj iteraciji rješava sustav 3.1. S druge strane, zbog načina pohrane matrica u BEM++, javlja se problem memorije prilikom računanja inverza operatora u matričnom obliku. Da bi iskoristili funkciju `linalg.inv()` iz paketa Scipy potrebno je operator prikazati u matričnom obliku, što se ostvaruje pozivom funkcije `bempp.api.as_matrix()`. Usporedimo algoritme na konkretnom primjeru. Konstruirajmo kugle sa stupnjevima ugladenosti  $n = 3, 4, 5$ . Za svaku od kugle inicijalizirajmo funkcijski prostor i na njima definirajmo operatore  $A_k = 0.5I + K_k$ . Za valni broj uzmimo  $k = 5$ .

Implementacije algoritama, `smallest_eigenvalue` i `smallest_eigenvalue_inverse`, za argument uzimaju operator iz sustava BEM++, a vraćaju vrijednost najmanje svojstvene vrijednosti i broj provedenih iteracija. U tablici 3.1 prikazani su rezultati.

Tablica 3.1: Usporedba algoritama

Algorithm n	<code>smallest_eigenvalue</code>	<code>smallest_eigenvalue_inverse</code>
$3 < 512 \times 512 >$	$\lambda = 0.01244$ vrijeme =0:00:01.27	$\lambda = 0.0122$ vrijeme =0:00:01.08
$4 < 2048 \times 2048 >$	$\lambda = 0.00318$ vrijeme =0:00:08.99	$\lambda = 0.00314$ vrijeme =0:00:30.54
$5 < 8192 \times 8192 >$	$\lambda = 0.000803$ vrijeme =0:01:05.87	NaN

Slika 3.1 prikazuje brzinu konvergencije za `smallest_eigenvalue` algoritam



Slika 3.1: Konvergencija singularne vrijednosti operatora  $0.5I + K_k$ ,  $k = 5$

Mana navedenog iterativnog algoritma 1 je rješavanje sustava (3.1) u svakoj od iteracija. Broj iteracija ovisi i o izboru početnog vektora  $b$ . Mala modifikacija se može primijeniti u algoritmu 1, a to je da umjesto na slučajan način odaberemo početni vektor  $b$ , odredimo vektor koji se nalazi relativno blizu svojstvenom vektoru i pritom smanjimo broj iteracija. Nešto više o tome u sljedećem odjeljku.

### 3.3 Traženje rezonanci

Rezonance su točke u pseudospektru za koje je inverz najmanje singularne vrijednosti "jako velik". Opisali smo metodu za nalaženje najmanje svojstvene vrijednosti. Da nađemo najmanju singularnu vrijednost matricu  $A$  možemo primijeniti iterativni algoritam na operator  $A^*A$  i potom izvaditi drugi korijen iz dobivenog rezultata. Ako znamo da je operator normalan (ili pak simetričan), onda vrijedi i  $\sigma_{\min}(A) = |\lambda_{\min}(A)|$ . Opišimo algoritam za računanje pseudospektra: Ukratko, algoritam ide po kompleksnim točkama  $k$  i za svaku

**Algorithm 3:** Računanje pseudospektra

---

```

1  $x = x_0, \dots, x_n; y = y_0, \dots, y_n;$ 
2  $vec =$  slučajni vector;  $first\_vec = vec;$ 
3 for  $j \leftarrow 0$  to  $size(y)$  do
4   for  $i \leftarrow 0$  to  $size(x)$  do
5      $k_n = x_i + y_j;$ 
6      $A = A_{k_n}^* A_{k_n};$ 
7     if  $i == 0$  then
8        $vec = first\_vec;$ 
9     end
10     $Sig[i, j], vec =$  smallest_eigenvalue( $A, vec$ );
11    if  $i == 0$  then
12       $first\_vec = vec;$ 
13    end
14  end
15 end
16  $Sig[i, j] = \sqrt{Sig[i, j]}$ 

```

---

računa najmanju svojstvenu vrijednost te pripadni svojstveni vektor za operator  $A_k$ . Dodatno množenje operatora  $A_k^*$  sa  $A_k$  svakako utječe na vrijeme izvršavanja algoritma. Modifikacija, koju smo spomenuli u 3.2, jest ta da početni vektor u `smallest_eigenvalue`, osim za prvu točku, više nije odabran na slučajan način. Dodatni argument funkcije je svojstveni vektor susjedne točke  $k'$  za koju smo već pronašli svojstvenu vrijednost. Ako je susjedna točka  $k'$  jako blizu točki  $k$ , vrlo vjerojatno je razlika između  $\sigma_{\min}(A_{k'})$  i  $\sigma_{\min}(A_k)$  mala te bi svojstveni vektor za  $k'$  bio dobar izbor početnog vektora.

**Napomena 3.3.1.** Za matricu  $A$  oblika  $n \times n$ , problem singularne vrijednosti  $Av = \sigma u$  ekvivalentan je  $2n \times 2n$  problemu svojstvene vrijednosti

$$\begin{bmatrix} & A \\ A^H & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

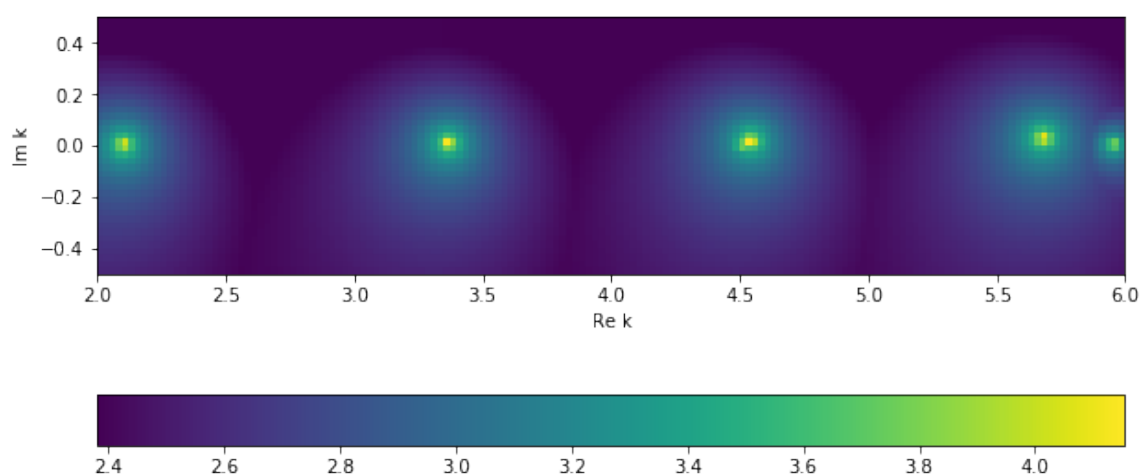
gdje je  $\sigma = |\lambda|$

Pogledajmo sada konkretan primjer:

**Primjer 3.3.2.** Prikažimo pseudospektar operatora  $A_k = 0.5I + K_k$  za kuglo radijusa 1.

Na skupu  $S = \{k \in \mathbb{C}; 2 \leq \Re(k) \leq 6, +0.5 \leq \Im(k) \leq 0.5\}$  odaberimo  $n = 6400$  točaka da prikaz pseudospektra bude što točniji. Pseudospektar 3.2 je prikazan u logaritamskoj skali, vrijeme izračunavanja iznosilo je oko 6.5h. Znači da je prosječno vrijeme

računanja najmanje singularne vrijednosti za jednu točku iznosilo  $3.65s$ , što i nije toliko sporo, koliko nam veći problem predstavlja broj točaka  $k$ . Da budemo sigurni da se rezonance nalaze u skupu  $S$  treba obuhvatiti što veći mogući segment realnih komponenti kompleksnog broja. Jer kako smo rekli, zanimaj nas one frekvencije čije su imaginarne vrijednosti oko 0. Drugo, ako pogledamo sliku 3.2, žute točke su one koje gledamo, one za koje singularna vrijednost jako mala (pseudospektar prikazuje invertirane vrijednosti). Dovodi se u pitanje velik broj točaka koje nisu interesantne (ljubičaste), te da li smo mogli izbjeći njihovo računanje.



Slika 3.2: Pseudospektar operatora  $\frac{1}{2}I + K_k$  na kugli,  $n = 6400$

”Žarišne” točke u pseudospektru (3.2) su:

Tablica 3.2: Rezonance jedinične kugle

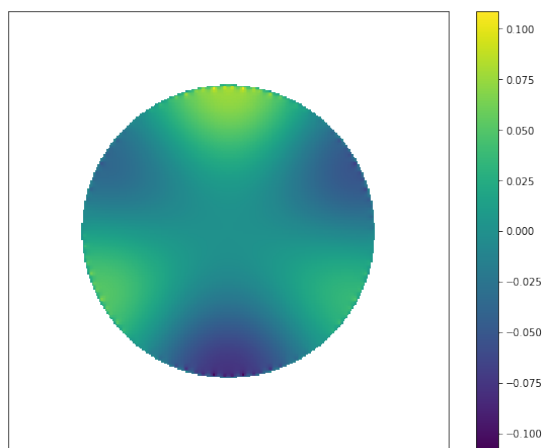
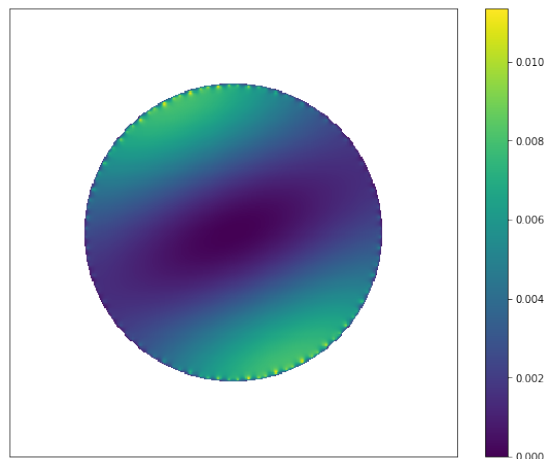
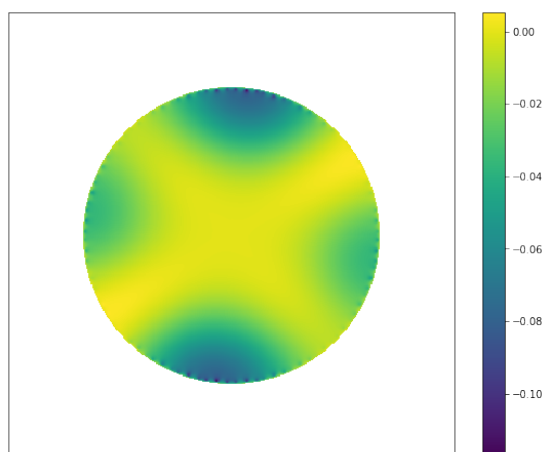
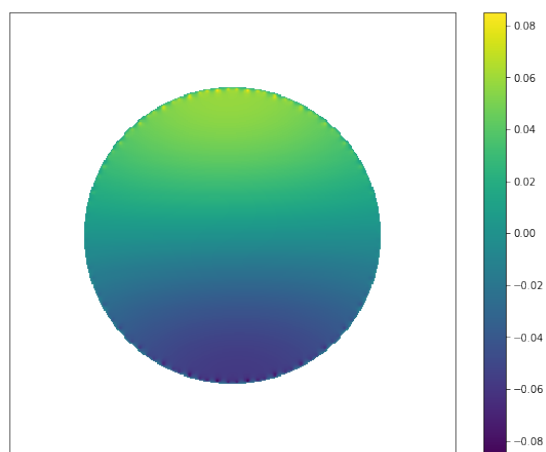
$2.101 - 0.013i$	$3.358 - 0.013i$	$4.549 - 0.013i$	$5.698 - 0.038i$	$5.978 - 0.013i$
------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

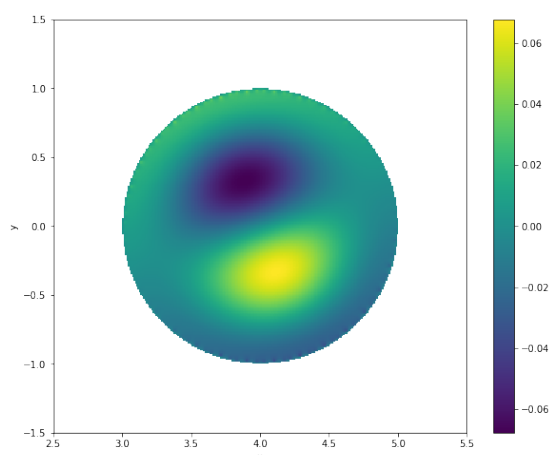
Usporedbom navedenih vrijednosti sa svojstvenim vrijednostima 3.3 iz [5], koje su dobivene analitičkim rješavanjem problema najmanje svojstvene vrijednosti za unutarnji Neumannov problem, možemo zaključiti da su nađene rezonance one prave.

Tablica 3.3: Prve 6 svojstvene vrijednosti za jediničnu kuglu iz [5]

2.08158	3.34209	4.49341	4.51401	5.64670	5.94037
---------	---------	---------	---------	---------	---------

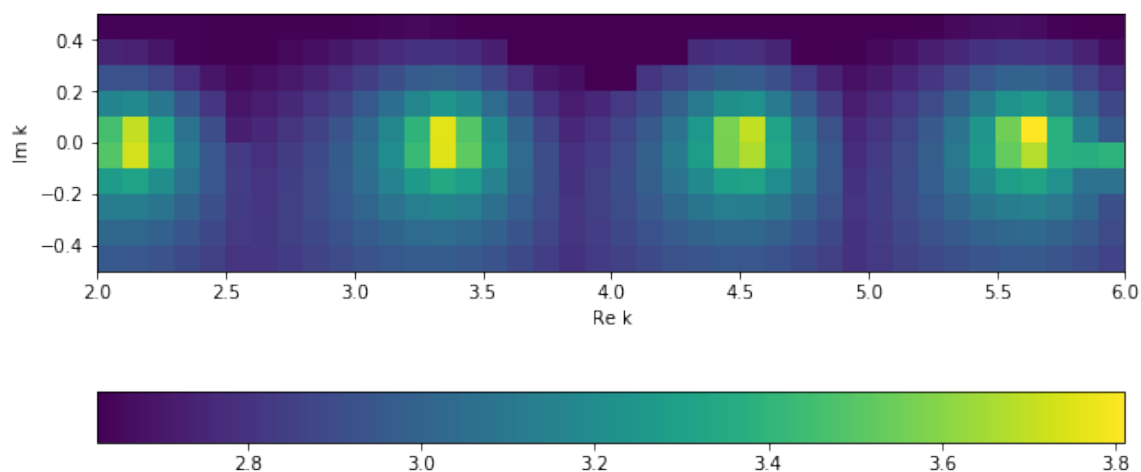
Sada možemo odrediti modove za dobivene rezonance. Slike 3.3-3.7 prikazuju rješenja  $\tilde{u}_k = D_k \tilde{\phi}_k$ , gdje  $\tilde{\phi}_k$  predstavlja svojstvenu funkciju za odgovarajuću rezonancu  $k$  koja zadovoljava  $(K_k + 0.5I)\tilde{\phi}_k = 0$ .

Slika 3.3:  $\tilde{k} = 4.549 - 0.013i$ Slika 3.4:  $\tilde{k} = 3.358 - 0.013i$ Slika 3.5:  $\tilde{k} = 5.698 - 0.038i$ Slika 3.6:  $\tilde{k} = 2.101 - 0.013i$

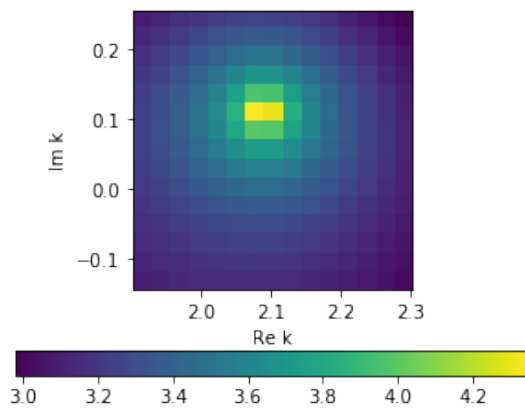
Slika 3.7:  $\tilde{k} = 5.698 - 0.038i$ 

Da izbjegnemo računanje najmanje singularne vrijednosti za što više točaka  $k$  koje nam nisu zanimljive, možemo  $S$ ,  $S \subset \mathbb{C}$ , podijeliti na manje kvadrate te u svakom od njih tražiti minimume. Postavlja se pitanje kako odrediti kvadrate te pritom biti siguran da se u jednom od njih nalazi rezonanca.

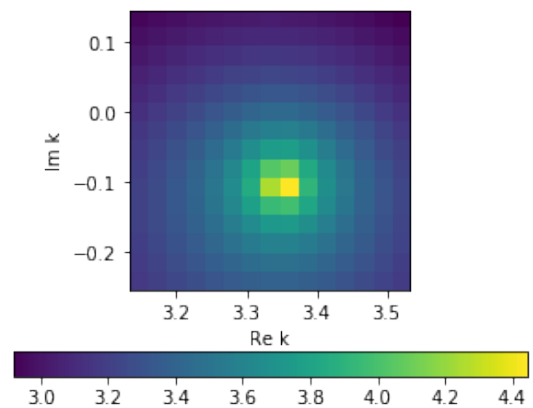
Na skupu  $S$  iz 3.3.2 odaberimo manji broj točaka,  $n = 400$ , koje su dobro raspoređene. Ovaj puta pseudospektar je "mutniji" (slika 3.8). Ono što možemo napraviti je izoštriti sliku oko lokalnih maksimuma. Najprije ga podijelimo na manje kvadrata oko lokalnih minimuma i svakom od njih ponovimo postupak računanja pseudospektra.

Slika 3.8: Pseudospektar operatora  $\frac{1}{2}I + K_k$  na kugli,  $n = 160$

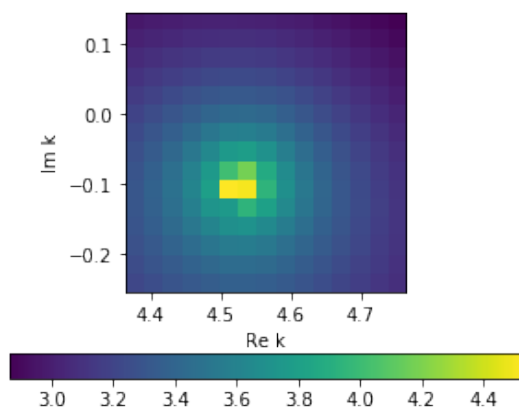
Na slikama 3.9, 3.10, 3.11 i 3.12 je precizniji prikaz pseudospektra oko rezonanci. Vrijeme izvršavanja ovakvog pristupa je znatno brži:  $\approx 45min$  za "mutni" pseudospektar, te dodatnih  $\approx 30min$  za svaki od kvadrata. Ovakav pristup ne garantira značajno ubrzanje ako se velik broj rezonanci nalazi jedna blizu drugoj, odnosno ako ne postoji optimalan način za podijeliti pseudospektar na manje kvadrate.



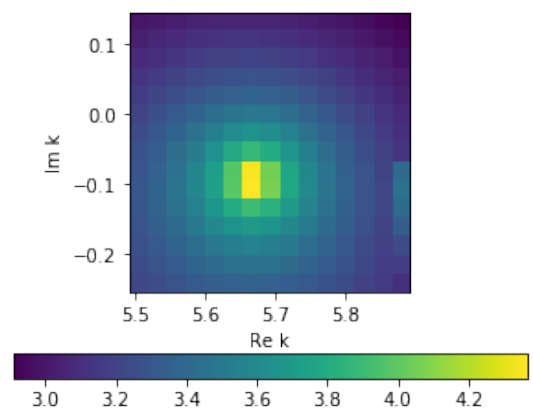
Slika 3.9:



Slika 3.10:



Slika 3.11:



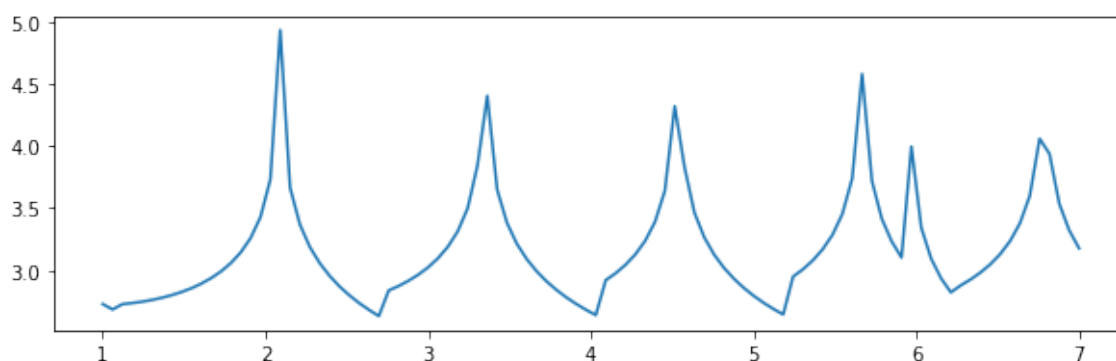
Slika 3.12:

### 3.4 Ostale metode i zaključak

U globalu, sve se metode za računanje pseudospektra temelje na iterativnom rješavanju problema najmanje svojstvene vrijednosti. Direktno računanje SVD dekompozicije (1.26), te traženje najmanje singularne vrijednosti matrice  $\Sigma$ , ne prolazi za velike matrice. U [9] opisane su metode temeljene na Schurovoj dekompoziciji operatora (matrice),  $A = UTU^*$ , gdje je  $U$  unitarna matrica, a  $T$  gornje trokutasta matrica. Tada se problem  $\sigma_{\min}(z-A)$  svodi na  $\sigma_{\min}(z-T)$ . Naravno, u ovom slučaju složenost rješavanja sustava  $Tx = b$  je  $O(n^2)$ .

#### Zaključak

BEM++ se pokazao kao dobar sustav za rješavanje problema akustičnog raspršenja. Nudi nam jednostavnu implementaciju rubnih integralnih operatora te je kao takav idealan za računanje pseudospektra i određivanje rezonanci. Naime visokodimenzionalna diskretizacija problema u  $\mathbb{R}^3$  se svodi na promatranje problema u  $\mathbb{R}^2$  za kojeg postoje efikasne implementacije integralnih operatora. U primjeru (3.3.2) tražili smo rezonance za akustično raspršenje u jediničnoj kugli. Kako su rezonance realne, dovoljno bi bilo izvršiti algoritam 3 na realnoj osi



Slika 3.13: Inverz najmanjih singularnih vrijednosti operatora  $\frac{1}{2}I + K_k$  za realne frekvencije

Mi smo trebali nešto više od samih rezonanci; trebali smo stabilnost koju nam je pseudospektar dao.



# Bibliografija

- [1] *active sonar diagram*, [https://six.designenvy.co/active\\_sonar\\_diagram.php](https://six.designenvy.co/active_sonar_diagram.php).
- [2] Robert A Adams i John JF Fournier, *Sobolev spaces*, sv. 140, Elsevier, 2003.
- [3] BEM++, <https://bempp.com/>.
- [4] Simon N Chandler-Wilde i Stephen Langdon, *Acoustic scattering: high frequency boundary element methods and unified transform methods*, arXiv preprint arXiv:1410.6137 (2014).
- [5] Jacopo Lanzoni, *Numerical computation of resonances and pseudospectra in acoustic scattering*, Disertacija, UCL (University College London), 2016.
- [6] Jouni Mäkitalo, Martti Kauranen i Saku Suuriniemi, *Modes and resonances of plasmonic scatterers*, Physical Review B **89** (2014), br. 16, 165429.
- [7] Ivica Nakić i Mihael Petrić, *Pseudospektar matrica*, Math. e **18** (2010), 0–0.
- [8] Wojciech Śmigaj, Timo Betcke, Simon Arridge, Joel Phillips i Martin Schweiger, *Solving boundary integral problems with BEM++*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) **41** (2015), br. 2, 6.
- [9] Lloyd N Trefethen, *Computation of pseudospectra*, Acta numerica **8** (1999), 247–295.



# Sažetak

U radu je opisana jedna od metoda za računanja rezonanci i pseudospektra. Bazira se na iterativnom računanju najmanje singularne vrijednosti operatora raspršenja. Implementacija algoritma je odrađena u BEM++ kroz Python sučelje. U prvom poglavlju opisana je matematička notacija akustičnog raspršenja. Definirali smo pseudospektar. Pseudospektar je idealan alat za prikazati svojstvo normalnosti operatora. Nadalje, prikazali smo neke od osnovnih metoda za korištenje BEM++: način konstruiranje rešetke, definiranje funkcija na njima i implementacija operatora raspršenja. Zadnje poglavlje obrađuje konkretan primjer; opis algoritma za traženje najmanje singularne vrijednosti, računanje pseudospektra te traženje rezonance. Na jediničnoj kugli izračunali smo rezonance i prikazali rezonantne modove.



# Summary

In this thesis is described one of methods for computing resonance and pseudospectra. It is based on iterative calculation of smallest singular value for scatter operator. Whole implementation is done in BEM++ with Python interface. First chapter describes mathematical notation of acoustic scattering. We defined pseudospectra. Pseudospectra is the ideal instrument to describe normality of operators. Further, we showed some of a basic method for BEM++ usage: grid construction, defining grid functions and implementation of scatter operators. The last chapter deals with concrete example; describing algorithm for searching the smallest singular value, calculating pseudospectra and looking for resonance. On unit sphere we have found resonances and plot resonance modes.



# Životopis

Rođen sam 03. listopada 1993. u Zagrebu. Nakon završetak osnovnoškolskog obrazovanaj u OŠ Dugave, 2008. godine upisujem XIII. gimnaziju u Zagrebu, prirodoslovnog-matematičkog usmjerenja. 2012. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Prirodoslovnom-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2016. godine završavam preddiplomski studij te iste godine upisujem diplomski studij *Računarstvo i matematika* na istoimenom fakultetu. Za vrijeme studija započeo sam studentsku praksu u firmi *AVL-AST* u Zagrebu.