

# IFS fraktali

---

**Marušić, Martina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:331237>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Martina Marušić

# **IFS fraktali**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Matija Kazalicki

Zagreb, veljača 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Definicija fraktala</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Iterirani funkcijski sustavi</b>	<b>6</b>
3.1	Deterministički algoritam . . . . .	11
3.2	Kolaž teorem . . . . .	13
3.3	Adresiranje točaka fraktala . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Dinamički sustavi</b>	<b>20</b>
4.1	Topološka konjugacija . . . . .	23
4.2	Shadowing teorem . . . . .	26
4.3	Kaotična dinamika fraktala . . . . .	29
4.4	Web dijagram . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Iterirani funkcijski sustavi s vjerojatnostima</b>	<b>34</b>
5.1	Slučajni iteracijski algoritam . . . . .	38
5.2	Eltonov teorem . . . . .	43
5.3	Veza između IFS i IFSP . . . . .	44
<b>A</b>	<b>Prvi dodatak</b>	<b>45</b>
<b>B</b>	<b>Drugi dodatak</b>	<b>46</b>
	<b>Literatura</b>	<b>47</b>
	<b>Sažetak</b>	<b>48</b>
	<b>Summary</b>	<b>49</b>
	<b>Životopis</b>	<b>50</b>

# 1 Uvod

U dugom razdoblju naše prošlosti matematičari su se fokusirali na probleme na koje su se mogle primijeniti metode standardnog računanja. Postojala je tendencija da se skupovi i funkcije koji nisu dovoljno pravilni i glatki ignoriraju i označavaju kao 'devijantni' te nezanimljivi za proučavanje. Smatralo se da su to iznimke na koje nije moguće primijeniti klasičnu teoriju.

U posljednje vrijeme počelo se napuštati takav stav. Znanstvenici su shvatili da su mnoge strukture u prirodi prekompleksne da bi se mogle opisati klasičnom, Euklidskom geometrijom, te su počeli pridavati pozornost oblicima od kojih su prije bježali i proučavati morfologiju 'amorfnog'.

Jedan od njih, Benoit B. Mandelbrot, posebno se istaknuo te je razvio novu, 'geometriju prirode' koju je implementirao u mnoga područja znanosti [Mandelbrot, 1982]. Ona opisuje mnoge nepravilne i fragmentirane oblike oko nas uvođenjem nove klase objekata koji su dobili ime - *fraktali* (od latinske riječi "fractus" što znači "nepravilan, slomljen").

Od tada, fraktalima su se bavile mnogi znanstvenici u svojim knjigama: Lauwerier [1991], Briggs [1992], Barnsley [1993], Falconer [2004], Devaney [2008] i znanstvenim radovima: Hutchinson [1981], Myjak and Szarek [2003], Gelfreich [2013], Vass [2014].

Ovaj rad je primarno inspiriran knjigom *Fractals everywhere* Michael F. Barnsleya.

## 2 Definicija fraktala

Ne postoji formalna definicija koja objedinjuje sve fraktale, nego ih opisujemo preko svojstava koje oni (najčešće) posjeduju.

Kažemo da je fraktal skup  $F$  koji ima (neka od) sljedećih svojstava:

- (i)  $F$  ima finu strukturu, t.j. detaljan je na proizvoljno maloj skali.
- (ii)  $F$  je previše nepravilan da bi bio opisan klasičnom geometrijom.
- (iii)  $F$  ima veću fraktalnu dimenziju od topološke.
- (iv)  $F$  ima neki oblik prave ili stohastičke samosličnosti.

U ovom radu baviti ćemo se pravim samosličnim fraktalima koji su atraktori, odnosno fiksne točke iteriranih funkcijskih sustava (IFS).



Slika 1: IFS fraktal (formula u Prvom dodatku)

### 3 Iterirani funkcijski sustavi

Definirajmo prvo prostor na kojemu se fraktali nalaze.

**Definicija 1.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  potpun metrički prostor.*

*Tada  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  označava prostor kompaktnih nepraznih podskupova od  $X$ .*

**Hausdorffova metrika** između točaka  $A$  i  $B$  u  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  definira se kao

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

gdje je  $d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ ,

te  $d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}$ ,  $\forall x \in \mathbf{X}, B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

Metrički prostor  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  je prostor na kojem fraktali žive.

Bilo koji podskup od  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  je fraktal u najopćenitijem smislu.

Bitno svojstvo prostora fraktala je njegova potpunost:

**Teorem 2.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  potpun metrički prostor. Tada je i  $(\mathcal{H}(\mathbf{X}), h)$  potpun metrički prostor.*

Uvedimo sada jednu posebnu vrstu transformacije:

**Definicija 3.** *Transformacija  $w : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  je **kontrakcija** ako postoji konstanta  $0 \leq s < 1$  takva da vrijedi*

$$d(w(x), w(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

*Konstantu  $s$  nazivamo kontrakcijski faktor za  $w$ .*

Sljedeći teorem, poznat i kao Banachov teorem o fiksnoj točki, ključan nam je za dokaz nekih kasnijih rezultata:

**Teorem 4.** *Neka je  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  kontrakcija na potpunom metričkom prostoru  $(\mathbf{X}, d)$ . Tada  $f$  posjeduje jedinstvenu fiksnu točku  $x_f \in \mathbf{X}$ . Štoviše, za svaki  $x \in \mathbf{X}$ , niz  $\{f^{\circ n}(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  konvergira u  $x_f$ .*

*Dokaz.* Neka su  $k, n \in \mathbb{N}$  takvi da je  $k < n$ . Tada slijedi:

$$\begin{aligned} d(f^{\circ k}, f^{\circ n}) &\leq d(f^{\circ k}, f^{\circ(k+1)}) + d(f^{\circ(k+1)}, f^{\circ(k+2)}) + \dots + d(f^{\circ(n-1)}, f^{\circ n}) \\ &\leq s^k \cdot d(x, f(x)) + s^{k+1} \cdot d(x, f(x)) + \dots + s^{n-1} \cdot d(x, f(x)) \\ &= s^k \sum_{i=0}^{n-k-1} s^i \cdot d(x, f(x)) \\ &\leq s^k \sum_{i=0}^{\infty} s^i \cdot d(x, f(x)) \\ &= s^k \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Za proizvoljni  $\epsilon > 0$  odaberimo  $N \in \mathbb{N}$  dovoljno velik da vrijedi:

$$s^N < \frac{\epsilon(1-s)}{d(x, f(x))}.$$

Tada za  $k, n > N$  vrijedi:

$$d(f^{\circ k}, f^{\circ n}) < \frac{\epsilon(1-s)}{d(x, f(x))} \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x)) = \epsilon,$$

dakle niz  $\{f^{\circ n}(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  je Cauchyev.

Zbog potpunosti od  $(\mathbf{X}, d)$  slijedi da niz konvergira u  $x_f \in \mathbf{X}$ .

Pokažimo da je  $x_f$  zaista fiksna točka od  $f$ :

$$f(x_f) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(x) = x_f.$$

Pretpostavimo sada da su  $x_f, y_f$  dvije različite fiksne točke. Tada iz:

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s \cdot d(x_f, y_f)$$

zbog  $s < 1$  slijedi da mora biti  $d(x_f, y_f) = 0$ , tj.  $x_f = y_f$ . □



Sada smo napokon spremni za definiciju iteriranih funkcijskih sustava:

**Definicija 5.** *Iterirani funkcijski sustav ili IFS*  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$

*sastoji se od potpunog metričkog prostora*  $(\mathbf{X}, d)$  *i konačnog skupa kontrakcija*

*$w_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  s kontrakcijskim faktorom  $s_n$ , za  $n = 1, 2, \dots, N$ .*

*Kontrakcijski faktor IFS-a je  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .*

Sljedeći teorem je ključan za iterirane funkcijske sustave i daje definiciju determinističkog fraktala kao atraktora tog IFS-a:

**Teorem 6.** *Neka je*  $\{\mathbf{X}; w_1, \dots, w_N\}$  *IFS s kontrakcijskim faktorom*  $s$ . *Tada je transformacija*  $W : \mathcal{H}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{X})$  *definirana kao:*

$$W(B) = \cup_{n=1}^N w_n(B), \text{ za sve } B \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$$

*kontrakcija s kontrakcijskim faktorom*  $s$  *čija jedinstvena fiksna točka*  $A = W(A)$  *zadovoljava*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B), \text{ za sve } B \in \mathcal{H}(\mathbf{X}).$$

*Dokaz.* Za  $B, C \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$  vrijedi:

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(\cup_{n=1}^N w_n(B), \cup_{n=1}^N w_n(C)) \\ &\leq \max_{1 \leq n \leq N} h(w_n(B), w_n(C)) \\ &\leq (\max_{1 \leq n \leq N} s_n) \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

Dakle,  $W$  je kontrakcija, a egzistencija i jedinstvenost fiksne točke slijede iz Banachovog teorema o fiksnoj točki (Teorem 4). □

Ova jedinstvena fiksna točka, odnosno invarijantni skup  $A \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ , je **atraktor iteriranog funkcijskog sustava**, tj. "deterministički fraktal".

Promotrimo sada neke od najpoznatijih primjera fraktala koji su atraktori iteriranih funkcijskih sustava:

**Primjer 1.** *Klasični Cantorov skup  $C$  je podskup intervala  $[0, 1]$  dobiven uzastopnim brisanjem srednje trećine intervala. Dakle, konstruiramo padajući niz skupova  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  gdje je*

$$I_0 = [0, 1],$$

$$I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

$$I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

$$I_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1],$$

...

$$I_n = I_{n-1} \text{ bez srednje trećine svakog intervala}$$

...

*Cantorov skup je definiran kao presjek tih padajućih skupova, t.j.*

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

*$C$  je atraktor IFS-a  $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$  gdje je  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$  i  $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ , što slijedi direktno iz definicije: Krećemo od početnog skupa, odnosno nulte iteracije  $I_0 = [0, 1]$ . Prvu iteraciju računamo kao  $I_1 = W([0, 1]) = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Sada je druga iteracija  $I_2 = W^{\circ 2}([0, 1]) = W([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) = w_1([0, \frac{1}{3}]) \cup w_1([\frac{2}{3}, 1]) \cup w_2([0, \frac{1}{3}]) \cup w_2([\frac{2}{3}, 1]) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ , i nastavimo dalje induktivno.*

**Primjer 2.** *Trokut Sierpinskog nastaje uzastopnim brisanjem srednjeg od 4 kongruentna trokuta nastala dijeljenjem jednakostraničnog trokuta. Dakle, kao u Primjeru 1, opet konstruirano padajući niz skupova u kojem za početni skup najčešće uzimamo jednakostranični trokut i onda u svakoj iteraciji spajamo polovišta stranica trokuta iz prethodne iteracije i brišemo tako nastale trokute.*

$I_0 =$  jednakostranični trokut,

$I_1 =$  jednakostranični trokut bez srednjeg od 4 kongruentna trokuta nastala spajanjem polovišta triju stranica,

...

$I_n =$  jednakostranični trokuti iz  $I_{n-1}$ . iteracije bez njihovih središnjih trokuta nastalih spajanjem polovišta njihovih stranica,

...

Sierpinskijev trokut je presjek tako dobivenih trokuta, t.j.

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Ako uzmemo da je naš početni jednakostranični trokut smješten u vrhovima  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  i  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , Sierpinskijev trokut je atraktor IFS-a  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$  gdje je

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \\ w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.1 Deterministički algoritam

Uvedimo prvi algoritam za generiranje IFS fraktala:

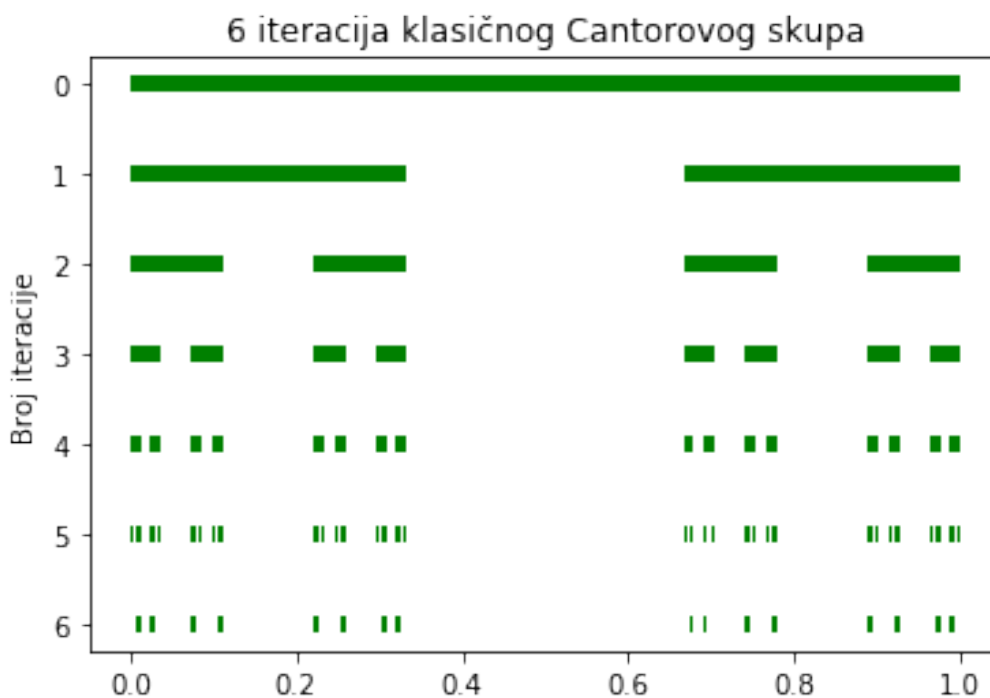
Neka je  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  iterirani funkcijski sustav.

Izaberemo kompaktni skup  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ , te računamo uzastopno

$A_n = W^{on}(A)$  po formuli

$$A_{n+1} = \cup_{j=1}^n w_j(A_n), \text{ za } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tako dobivamo niz  $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathcal{H}(\mathbf{X})$ .



Slika 2

Slika 2 prikazuje klasični Cantorov skup dobiven Python kodom:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

interval = [0,1]
broj_iteracija = 6

def cantorovo_iteriranje(interval, iteracija=0):
    # Crtanje trenutne iteracije
    plt.plot(interval, [iteracija, iteracija], color="g",
             lw=6, solid_capstyle="butt")
    if iteracija < broj_iteracija:
        # Odrediti 4 rubne tocke za sljedecu iteraciju
        rubne_tocke = np.linspace(interval[0], interval[1], 4)
        # Procesuirati prvu trecinu
        cantorovo_iteriranje(rubne_tocke[:2], iteracija+1)
        # Procesuirati zadnju trecinu
        cantorovo_iteriranje(rubne_tocke[2:], iteracija+1)

cantorovo_iteriranje(interval)

# Obrtanje y-osi
plt.gca().invert_yaxis()
plt.show();

```

## 3.2 Kolaž teorem

U prethodnim primjerima vidjeli smo kako već mali broj kontrakcija može odrediti objekte vrlo detaljne strukture. Ta činjenica dovela je do najbitnije primjene iteriranih funkcijskih sustava - one u kompresiji podataka. Ako kompleksnu sliku možemo kodirati pomoću male količine podataka, onda se ona može efikasno spremiti i prenositi.

Htjeli bismo stoga znati koje objekte je moguće reprezentirati ili što bolje aproksimirati pomoću atraktora iteriranih funkcijskih sustava. Sljedeći teorem, poznat i kao "Kolaž teorem", daje nam ideju koliko je dobro skup aproksimiran atraktorom IFS-a:

**Teorem 7.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, \dots, N\}$  iterirani funkcijski sustav s kontrakcijskim faktorom  $s$ . Neka je  $L \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$ . Tada vrijedi*

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} \cdot h\left(L, \bigcup_{n=1}^N w_n(L)\right), \text{ za sve } L \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$$

gdje je  $h$  Hausdorffova metrika, a  $A$  atraktor IFS-a.

*Dokaz.* Koristeći nejednakost trokuta za Hausdorffovu metriku i definiciju atraktora dobivamo:

$$\begin{aligned} h(L, A) &\leq h\left(L, \bigcup_{n=1}^N w_n(L)\right) + h\left(\bigcup_{n=1}^N w_n(L), A\right) \\ &= h\left(L, \bigcup_{n=1}^N w_n(L)\right) + h\left(\bigcup_{n=1}^N w_n(L), \bigcup_{n=1}^N w_n(A)\right) \\ &\leq h\left(L, \bigcup_{n=1}^N w_n(L)\right) + s \cdot h(L, A) \end{aligned}$$

□

### 3.3 Adresiranje točkaka fraktala

Htjeli bismo svakoj točki IFS fraktala pridružiti neku adresu.

Ideja je konstruirati neprekidnu funkciju  $\phi$  sa kodnog prostora<sup>1</sup> pridruženog IFS-u na atraktor tog IFS-a.

**Definicija 8.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  iterirani funkcijski sustav. Tada je **kodni prostor pridružen tom IFS-u**  $(\Sigma, d_c)$  definiran kao kodni prostor  $\Sigma$  na  $N$  simbola  $\{1, \dots, N\}$  s metrikom  $d_c$  danom s*

$$d_c(w, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w_n - \sigma_n|}{(N+1)^n} \quad \text{za sve } w, \sigma \in \Sigma.$$

**Teorem 9.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  potpun metrički prostor.*

*Neka je  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  IFS, neka je  $A$  atraktor tog IFS-a i neka je  $(\Sigma, d_c)$  kodni prostor pridružen tom IFS-u.*

*Neka je  $\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \dots \circ w_{\sigma_n}(x)$ , za svaki  $\sigma \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ .*

*Tada  $\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$  postoji, pripada  $A$  i neovisan je o  $x \in X$ .*

Funkcija  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  definirana u Teoremu 9 je naša tražena funkcija pomoću koje ćemo definirati adrese točkaka atraktora:

**Definicija 10.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  IFS, neka je  $A$  atraktor tog IFS-a i neka je  $(\Sigma, d_c)$  kodni prostor pridružen tom IFS-u. Tada se **adresa točke**  $a \in A$  definira kao bilo koja točka skupa*

$$\phi^{-1}(A) = \{w \in \Sigma : \phi(w) = a\}.$$

---

<sup>1</sup>Kodni prostor  $\Sigma$  na  $N$  simbola je prostor čije su točke "polubeskonačne riječi" oblika  $x = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7\dots$ , gdje je svaki  $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ .

Adresiranje točaka nam pomaže i u klasifikaciji IFS-a.

Kažemo da je iterirani funkcijski sustav:

- (1) **potpuno nepovezan** ako svaka točka atraktora  $A$  posjeduje jedinstvenu adresu, t.j.,

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \emptyset, \text{ za svaki } i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ t.d. } i \neq j.$$

- (2) **dodirujući** ako nije potpuno nepovezan, ali njegov atraktor posjeduje otvoren skup  $\mathcal{O}$  takav da su zadovoljena sljedeća dva svojstva:

(i)  $w_i(\mathcal{O}) \cap w_j(\mathcal{O}) = \emptyset$ , za svaki  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  t.d.  $i \neq j$ ;

(ii)  $\bigcup_{i=1}^N w_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ .

- (3) **preklapajući** ako nije ni potpuno nepovezan ni dodirujući.

Dajemo primjer za svakog od njih:

**Primjer 3.** IFS  $\{[0, 1]; w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$  je potpuno nepovezan.

Atraktor ovog IFS-a je klasični Cantorov skup, t.j.  $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$  gdje je  $I_0 = [0, 1]$ ,  $I_n = W^{\circ n}(I_0)$  kao u Primjeru 1. Očito je  $w_i(A) \cap w_j(A) = \frac{1}{3}A \cap \{\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\} = \emptyset$ .

**Primjer 4.** IFS  $\{\mathbb{R}; w_1(x) = \frac{1}{2}x, w_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\}$  je dodirujući.

Atraktor ovog IFS-a je interval  $[0, 1]$ , jer je  $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1])$ , a zbog  $w_1(1) = w_2(0)$ , IFS nije potpuno nepovezan. Neka je  $\mathcal{O} = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ . Tada je  $w_1(\mathcal{O}) = \langle 0, \frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$ ,  $w_2(\mathcal{O}) =$



$\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$ , pa su zadovoljena svojstva:  $w_1(\mathcal{O}) \cap w_2(\mathcal{O}) = (\langle 0, \frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle) \cap (\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle) = \emptyset$  i  $w_1(\mathcal{O}) \cup w_2(\mathcal{O}) = (\langle 0, \frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle) \cup (\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle) \subset \mathcal{O}$ .

**Primjer 5.** IFS  $\{\mathbb{R}; w_1(x) = \frac{1}{2}x, w_2(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\}$  je preklapajući.

Atraktor ovog IFS-a je interval  $[0, 1]$ , jer je  $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1])$ , a s obzirom da vrijedi  $w_1([0, 1]) \cap w_2([0, 1]) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \neq \emptyset$  zaključujemo da IFS nije potpuno nepovezan. Također, očito ne postoji otvoreni podskup  $\mathcal{O}$  atraktora takav da je zadovoljeno  $w_1(\mathcal{O}) \cap w_2(\mathcal{O}) = \emptyset$  i  $w_1(\mathcal{O}) \cup w_2(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ , pa slijedi da je IFS preklapajući.

Teorem 9 nam govori da je kodni prostor na  $N$  simbola majka svim iteriranim funkcijskim sustavima s  $N$  kontrakcija; zato nam je on jako zanimljiv.

Definirajmo još jednu metriku na kodnom prostoru:

**Definicija 11.** Neka je  $\mathbf{X} = \{(x, y) : x, y \in \Sigma\}$  prostor pomaka<sup>2</sup> na  $N$  simbola. Definirajmo metriku na  $\mathbf{X}$  s

$$d((x, y), (u, v)) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - u_i}{(N+1)^i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - v_i}{(N+1)^i}\right)^2},$$

za svaki  $(x, y), (u, v) \in \mathbf{X}$ . Ova metrika se ponekad naziva i Euklidska metrika na prostoru pomaka.

---

<sup>2</sup>Prostor pomaka  $\Sigma \times \Sigma$  definiran je kao Kartezijev produkt dvaju kodnih prostora čije su točke "beskonačne riječi" oblika  $\dots y_3 y_2 y_1 . x_1 x_2 x_3 \dots$ , gdje je  $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ .

Uočimo da se u specijalnom slučaju kada je  $y = v$  Definicija 11 svodi na

$$d((x, y), (u, v)) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - u_i}{(N+1)^i}\right)^2 + 0} = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - u_i}{(N+1)^i}\right|,$$

odnosno

$$d(x, u) = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - u_i}{(N+1)^i}\right|, \quad x, u \in \Sigma$$

je metrika na  $\Sigma$ .

**Teorem 12.** *Neka je  $\Sigma$  kodni prostor na  $N$  simbola  $\{1, \dots, N\}$ . Definirajmo dvije različite metrike,  $d_1$  i  $d_2$ , na  $\Sigma$  sa:*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}, \quad d_2(x, y) = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i}\right|.$$

*Tada su  $(\Sigma, d_1)$  i  $(\Sigma, d_2)$  ekvivalentni metrički prostori.*

*Dokaz.* Promatramo slučaj  $N = 10$ .

Neka su dani  $x, y \in \Sigma$ . Iz nejednakosti trokuta slijedi da je  $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ . Stoga da bismo dokazali ekvivalenciju metričkih prostora  $(\Sigma, d_1)$  i  $(\Sigma, d_2)$ , preostaje dokazati da postoji konstanta  $C$ , nezavisna od  $x$  i  $y$ , takva da  $C \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ . U ostatku dokaza ćemo pokazati da je posljednja nejednakost zadovoljena za  $C = \frac{1}{19}$ .

Neka je  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$  prva koordinata na kojoj se  $x$  i  $y$  razlikuju. Dakle, vrijedi da je  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k \neq y_k$ .

Koristeći nejednakost trokuta, činjenicu da je  $|x_i - y_i| \in \{1, 2, \dots, 9\}$  za svaku koordinatu  $i$ , te formulu za sumu geometrijskog reda, sada slijedi:

$$\begin{aligned}
d_2(x, y) &= \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right| = \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{11^i} \right| \\
&\geq \frac{|x_k - y_k|}{11^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{11^i} \\
&\geq \frac{|x_k - y_k|}{11^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{11^i} \\
&= \frac{|x_k - y_k|}{11^k} - \frac{9}{11^k \cdot 10} \\
&= \left( |x_k - y_k| - \frac{9}{10} \right) \cdot \frac{1}{11^k} \\
&\geq \frac{1}{19} \cdot \left( |x_k - y_k| - \frac{9}{10} \right) \cdot \frac{1}{11^k} \\
&\geq \frac{1}{19} \cdot \left( \frac{|x_k - y_k|}{11^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{9}{11^i} \right) \\
&\geq \frac{1}{19} \cdot \left( \frac{|x_k - y_k|}{11^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{11^i} \right) \\
&= \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{11^i} \\
&= \frac{1}{19} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{11^i} = C \cdot d_1(x, y).
\end{aligned}$$

□

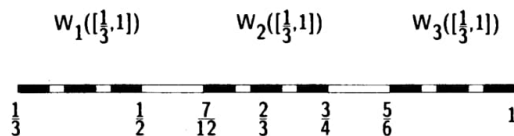
Uočimo da je u iskazu Teorema 12, metrika  $d_1$  upravo metrika  $d_c$  iz Definicije 8, dok je metrika  $d_2$  Euklidska metrika iz Definicije 11.

Iz Teorema 12 proizlazi činjenica da je kodni prostor  $\Sigma$  metrički ekvivalentan klasičnom Cantorovom skupu.

Da bismo to pokazali, definirajmo IFS:

$$\{[0, 1]; w_n(x) = \frac{1}{N+1}x + \frac{n}{N+1} : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Atraktor ovog IFS-a je Cantorov skup, npr. u slučaju  $N = 3$  atraktor je ternarni Cantorov skup prikazan na Slici 3. Adresa svake točke na atraktoru jednaka je upravo nizu znamenaka koje ju predstavljaju u bazi  $(N + 1)$ . Zauzima, krenimo od intervala  $[0,1]$  tako da prikažemo sve brojeve u tom intervalu u bazi  $(N + 1)$ . Uklonimo sve točke čiji prikaz u toj bazi ima znamenku 0 na prvom mjestu; u slučaju  $N = 3$  to eliminira interval  $[0, \frac{1}{4}]$ . U sljedećem koraku uklanjamo sve točke koje imaju znamenku 0 na drugom mjestu, i tako nastavljamo dalje. Završavamo sa svim brojevima čiji prikaz u bazi  $(N + 1)$  ne sadrži znamenku 0. Označimo ovako konstruiranu funkciju koja ide iz kodnog prostora na  $(N + 1)$  simbola u atraktor IFS-a  $A$  sa  $\phi$ . Iz Teorema 12 znamo da su metrički prostori  $(\Sigma, d_c)$  i  $(\Sigma, d)$ , gdje je  $d_c$  metrika iz Definicije 8, a  $d$  euklidska metrika iz Definicije 11, ekvivalentni. Slijedi da su i  $(\Sigma, d_c)$  i  $(A, d)$  ekvivalentni, gdje je  $d$  Euklidska metrika na atraktoru  $A$ . Transformacija koja osigurava tu ekvivalenciju je funkcija  $\phi : (\Sigma, d_c) \rightarrow (A, d)$ .



Slika 3

## 4 Dinamički sustavi

Dinamički sustavi su, zbog svog širokog spektra primjene (za modeliranje fenomena u biologiji, geografiji, ekonomiji, fizici, informatici, itd.), česti predmet istraživanja znanstvenika. Nama su zanimljivi zbog svoje veze s iteriranim funkcijskim sustavima.

**Definicija 13.** *Dinamički sustav*  $\{\mathbf{X}; f\}$  je transformacija  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  na metričkom prostoru  $(\mathbf{X}, d)$ . **Orbita točke**  $x \in \mathbf{X}$  je niz  $\{f^{on}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

Ilustrirat ćemo definiciju sljedećim primjerima:

**Primjer 6.**  $\{\Sigma; T\}$  je dinamički sustav gdje je  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  definirana kao  $T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\dots$

**Primjer 7.**  $\{[0, 1]; f\}$  je dinamički sustav gdje je  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definirana kao  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  za svaki  $\lambda \in [0, 4]$ .

**Primjer 8.**  $\{\mathbb{R}^2; w\}$  je dinamički sustav gdje je  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definirana kao  $w(x) = Ax + t$  za svaki  $A \in M_2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Primjer 9.**  $\{C[0, 1]; T\}$  je dinamički sustav gdje je  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  definirana kao  $(Tf)(x) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$ .

**Primjer 10.**  $\{\hat{\mathbb{C}}; w\}$  je<sup>3</sup> dinamički sustav gdje je  $w : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definirana kao  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  za svaki  $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{C}}$ ,  $(ad - bc) \neq 0$ .

---

<sup>3</sup>Podsjetimo se oznake za Riemannovu sferu:  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Uvodimo novi pojam za dublju analizu dinamičkih sustava. Radi jednostavnosti promatramo IFS za  $n = 2$ , odnosno dvije kontrakcije u sustavu.

**Definicija 14.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2\}$  iterirani funkcijski sustav. Neka je  $A$  atraktor tog IFS-a. Pretpostavimo da su i  $w_1 : A \rightarrow A$  i  $w_2 : A \rightarrow A$  invertibilne. Pridružena shift transformacija na  $A$  je  $S : A \rightarrow A$  definirana s*

$$S(a) = \begin{cases} w_1^{-1}(a), & \text{za } a \in w_1(A) \text{ i } a \notin w_1(A) \cap w_2(A) \\ w_2^{-1}(a), & \text{za } a \in w_2(A) \text{ i } a \notin w_1(A) \cap w_2(A) \\ w_1^{-1}(a) \text{ ili } w_2^{-1}(a), & \text{za } a \in w_1(A) \cap w_2(A). \end{cases}$$

*Dinamički sustav  $\{A; S\}$  zove se **shift dinamički sustav** pridružen IFS-u.*

Primjećujemo da je dinamika u preklapajućem dijelu IFS-a slučajne prirode, odnosno ne postoji definicija koju preferiramo.

Sada ćemo uvođenjem nove varijable pokazati da postoji potpuno deterministički sustav na prostoru više dimenzije čija projekcija na početni prostor  $\mathbf{X}$  generira "slučajnu dinamiku":

**Definicija 15.** ***Podignuti IFS** pridružen IFS-u  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2\}$  je IFS*

*$\{\mathbf{X} \times \Sigma; \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$  gdje je  $\Sigma$  kodni prostor na dva simbola  $\{1, 2\}$ , a*

$$\tilde{w}_1(x, \sigma) = (w_1(x), 1\sigma), \text{ za sve } (x, \sigma) \in \mathbf{X} \times \Sigma$$

$$\tilde{w}_2(x, \sigma) = (w_2(x), 2\sigma), \text{ za sve } (x, \sigma) \in \mathbf{X} \times \Sigma.$$

Projekcija atraktora podignutog IFS-a  $\tilde{A} \subset \mathbf{X} \times \Sigma$  na originalni prostor  $\mathbf{X}$  je atraktor  $A$  originalnog prostora, a projekcija na kodni prostor  $\Sigma$  je  $\Sigma$ .

S obzirom da je  $\Sigma$  ekvivalentnan klasičnom Cantorovom skupu koji je potpuno nepovezan, slijedi da je i  $\tilde{A}$  je potpuno nepovezan.

**Definicija 16.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2\}$  iterirani funkcijski sustav. Neka je  $A$  atraktor tog IFS-a. Pretpostavimo da su i  $w_1 : A \rightarrow A$  i  $w_2 : A \rightarrow A$  invertibilne. Neka je  $\tilde{A}$  atraktor pridruženog podignutog IFS-a. Tada je  $\{\tilde{A}; \tilde{S}\}$  **podignuti shift dinamički sustav** pridružen IFS-u gdje je*

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x, \sigma) &= (w_{\sigma_1}^{-1}(x), T(\sigma)) \quad \text{za sve } (x, \sigma) \in \tilde{A}, \\ T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots) &= \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\dots \quad \text{za sve } \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots \in \Sigma.\end{aligned}$$

**Teorem 17.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2\}$  iterirani funkcijski sustav sa invertibilnim transformacijama  $w_1$  i  $w_2$  i atraktorom  $A$ . Neka je  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  bilo koja orbita pridruženog shift dinamičkog sustava  $\{A; S\}$ . Tada postoji orbita  $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$  podignutog dinamičkog sustava  $\{\tilde{A}; \tilde{S}\}$  takva da prva komponenta od  $\tilde{x}_n$  je  $x_n$  za svaki  $n$ .*

Ovaj teorem, poznat i pod nazivom "Shadow" teorem, nam govori da bilo koja orbita  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  shift dinamičkog sustava pridruženog IFS-u je projekcija, tj. sjena orbite shift dinamičkog sustava pridruženog podignutom IFS-u.

## 4.1 Topološka konjugacija

U teoriji dinamičkih sustava zanima nas gibanje kao takvo, u dinamici, u načinu na koji se točke kreću, u postojanju periodičkih orbita, u asimptotskom ponašanju orbita, itd. Takve strukture očuvane su djelovanjem homeomorfizma, stoga uvodimo sljedeću definiciju:

**Definicija 18.** *Dinamički sustavi  $\{\mathbf{X}_1; f_1\}$  i  $\{\mathbf{X}_2; f_2\}$  su **ekvivalentni ili topološki konjugati** ako postoji homeomorfizam<sup>4</sup>  $\Theta : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$  takav da*

$$f_1(x_1) = \Theta^{-1} \circ f_2 \circ \Theta(x_1), \text{ za sve } x_1 \in \mathbf{X}_1$$

$$f_2(x_2) = \Theta \circ f_1 \circ \Theta^{-1}(x_2), \text{ za sve } x_2 \in \mathbf{X}_2.$$

Slika 4 prikazuje komutativni dijagram dvaju ekvivalentnih dinamičkih sustava  $\{\mathbf{X}_1; f_1\}$  i  $\{\mathbf{X}_2; f_2\}$ , gdje je funkcija  $h : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$  homeomorfizam.

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{\quad h \quad} & X_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_1 & & f_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_1 & \xrightarrow{\quad h \quad} & X_2
 \end{array}$$

Slika 4

---

<sup>4</sup>Homeomorfizam je bijekcija  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  koja čuva topološke strukture, tj. za svaki otvoreni  $U \subseteq X$  je  $f(U)$  otvoren u  $Y$  i za svaki otvoreni  $V \subseteq Y$  je  $f^{-1}(V)$  otvoren u  $X$ .



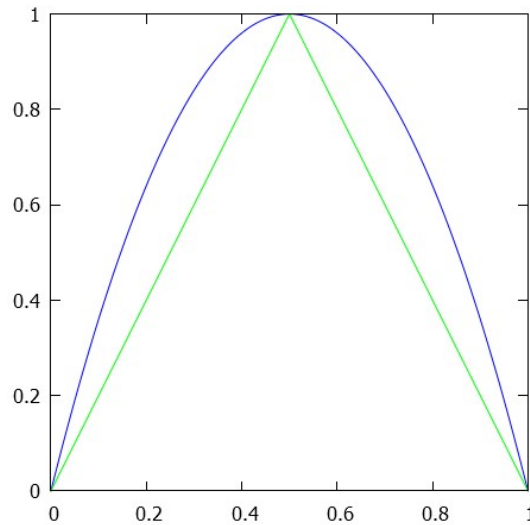
Dajemo primjere nekih ekvivalentnih dinamička sustava:

**Primjer 11.** "Tent" transformacija  $T_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definirana je kao:

$$T_c(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ c(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad c > 0.$$

Logistička transformacija  $F_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definirana je kao:

$$F_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad \lambda > 0.$$



Slika 5: Graf transformacija : tent  $T_2$  (zeleni) i logistička  $F_4$  (plavi)

Dinamički sustavi  $\{[0, 1]; T_c\}$  i  $\{[0, 1]; F_\lambda\}$  su ekvivalentni za  $c = 2$  i  $\lambda = 4$ , a homeomorfizam koji to osigurava je  $k(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ , za  $x \in [0, 1]$ .

Pokažimo da je zaista  $F_4(x) = k^{-1} \circ T_2 \circ k(x)$ .

Prvi slučaj,  $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}k^{-1} \circ T_2 \circ k(x) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\right)\right)\right)^2 \\&= (\sin(2\arcsin\sqrt{x}))^2 \\&= (2\sin(\arcsin\sqrt{x})\cos(\arcsin\sqrt{x}))^2 \\&= (2\sqrt{x}\cos(\arcsin\sqrt{x}))^2 \\&= 4x(1 - \sin^2(\arcsin\sqrt{x})) \\&= 4x(1 - x) \\&= F_4(x).\end{aligned}$$

Drugi slučaj,  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ :

$$\begin{aligned}k^{-1} \circ T_2 \circ k(x) &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(-\frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{x} + 2\right)\right)\right)^2 \\&= (\sin(-2\arcsin\sqrt{x} + \pi))^2 \\&= (2\sin(-\arcsin\sqrt{x} + \frac{\pi}{2})\cos(-\arcsin\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}))^2 \\&= (2\cos(\arccos\sqrt{x})\sin(\arccos\sqrt{x}))^2 \\&= 4x(\sin(\arccos\sqrt{x}))^2 \\&= 4x(1 - \cos^2(\arccos\sqrt{x})) \\&= 4x(1 - x) \\&= F_4(x).\end{aligned}$$

## 4.2 Shadowing teorem

Za računanje orbita dinamičkih sustava znanstvenici nerijetko koriste računalne simulacije. Računala najčešće koriste samo konačnu preciznost i tako se u svakom koraku pojavljuje (mala?) greška. Greške se mogu akumulirati vrlo brzo, tako da pogrešna orbita divergira od egzaktne eksponencijalnom brzinom.

Prirodno se postavlja pitanje korisnosti modela orbite s greškom u računu. Srećom, sljedeći bitan teorem nam govori da, neovisno o broju napravljenih grešaka, postoji točna orbita koja na svakom koraku leži na maloj udaljenosti od pogrešno izračunate orbite. Drugim riječima, točna orbita kao sjena 'slijedi' pogrešno izračunatu orbitu zbog čega je teorem i dobio naziv: '*Shadowing theorem*'.

**Teorem 19.** *Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  IFS s faktorom kontrakcije  $s$ , gdje je  $0 < s < 1$ . Neka je  $A$  atraktor tog IFS-a i pretpostavimo da su sve transformacije  $w_n : A \rightarrow A$  invertibilne. Neka je  $\{A; S\}$  pridruženi shift dinamički sustav. Ako je  $\{x'_n\}_{n=0}^\infty \subset A$  aproksimativna orbita od  $S$  takva da*

$$d(x'_{n+1}, S(x'_n)) \leq \Theta \text{ za svaki } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

*gdje je konstanta  $\Theta$  takva da  $0 \leq \Theta \leq \text{diam}(A)^5$ , tada postoji egzaktna orbita  $\{x_n = S^{cn}(x_0)\}_{n=0}^\infty$  za neki  $x_0 \in A$  takva da*

$$d(x'_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{s\Theta}{1-s}, \quad \text{za sve } n = 0, 1, 2, \dots$$

---

<sup>5</sup> $\text{diam}(A) = \max\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$

*Dokaz.* Za svaki  $n = 1, 2, 3, \dots$ , neka je  $\sigma_n \in \{1, 2, \dots, N\}$  odabran takav da je niz inverza kontrakcija  $w_{\sigma_1}^{-1}, w_{\sigma_2}^{-1}, w_{\sigma_3}^{-1}, \dots$  korišten za dobivanje niza  $S(x'_0), S(x'_1), S(x'_2), \dots$ . Neka je  $\phi : \Sigma \rightarrow A$  kodni sustav pridružen IFS-u. Tada definiramo  $x_0 = \phi(\sigma_0\sigma_1\sigma_2\dots)$ . Sada uspoređujemo egzaktnu orbitu točke  $x_0$  s njenom aproksimativnom orbitom.

Neka je  $M$  veliki prirodan broj. Tada vrijedi

$$d(S(x_{M-1}), S(x'_{M-1})) \leq \text{diam}(A) < \infty.$$

Nadalje slijedi po definiciji kontrakcije  $w_{\sigma_M}$  da je:

$$d(x_{M-1}, x'_{M-1}) \leq s \cdot \text{diam}(A).$$

Sada, koristeći nejednakost trokuta i činjenicu da je  $x'_{M-1}$  aproksimativna orbita, imamo:

$$\begin{aligned} d(S(x_{M-2}), S(x'_{M-2})) &= d(x_{M-1}, S(x'_{M-2})) \\ &\leq d(x_{M-1}, x'_{M-1}) + d(x'_{M-1}, S(x'_{M-2})) \\ &\leq s \cdot \text{diam}(A) + \theta. \end{aligned}$$

Sada, analogno slijedi:

$$d(x_{M-2}, x'_{M-2}) \leq s \cdot (\theta + s \cdot \text{diam}(A)).$$

Induktivno iterirajući  $k$  puta dobivamo:

$$d(x_{M-k}, x'_{M-k}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} s^i \cdot \theta + s^k \cdot \text{diam}(A).$$

Uvođenjem supstitucije  $n := M - k$ , gornja nejednakost postaje:

$$d(x_n, x'_n) \leq \sum_{i=1}^{M-n-1} s^i \cdot \theta + s^{M-n} \cdot \text{diam}(A).$$

Uočimo da je zbog proizvoljnosti broja  $k \in \mathbb{N}$  takvog da je  $M - k > 0$ , gornja nejednakost zadovoljena za svaki prirodan broj  $n$  takav da je  $n < M$ . Sada uzimanjem limesa gornje nejednakosti kada  $M \rightarrow \infty$  dobivamo traženu nejednakost:

$$d(x_n, x'_n) \leq s \cdot \theta \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} s^i = \frac{s\Theta}{1-s}, \quad \text{za sve } n = 0, 1, 2, \dots$$

□

### 4.3 Kaotična dinamika fraktala

Proučavanje kaosa kao znanstvenog fenomena počinje negdje 1970-ih kada je Edward Lorenz razvijajući prikladni model za predviđanje vremena naišao na neobičan problem. Uočio je da mu prikupljanje veće količine podataka o varijablama kao što su brzina vjetera, tlak zraka, vlažnost i temperatura ne pomaže povećati točnost dugoročnih prognoza vremena. Shvatio je da koliko god informacija meteorolozi skupili, prognoza će ubrzo postati netočna. Zaključio je da je razlog tome što su dinamički sustavi, kao što je vrijeme, sastavljeni od toliko elemenata u interakciji da su strahovito osjetljivi i na najmanju promjenu.

S Lorenzovim otkrićem, znanstvenici su ubrzano počeli proučavati dinamičke sustave i kaotično ponašanje u njima. Postoji više pristupa ovom problemu, mi odabiremo topološki pristup i definiciju Robert L. Devaneyja:

**Definicija 20.** *Dinamički sustav  $\{\mathbf{X}; f\}$  je **kaotičan** ako:*

- (i) je osjetljiv na početne uvjete, tj. postoji  $\delta > 0$  takav da za svaki  $x \in \mathbf{X}$  i svaku kuglu  $B(x, \epsilon)$  radijusa  $\epsilon > 0$  postoje  $y \in B(x, \epsilon)$  i  $n \in \mathbb{N}$  takvi da je  $d(f^{on}(x), f^{on}(y)) > \delta$ ;
- (ii) je tranzitivan, tj. za svaka dva otvorena skupa  $U$  i  $V$  metričkog prostora  $(\mathbf{X}, d)$  postoji  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $U \cap f^{on}(V) \neq \emptyset$ ;
- (iii) je skup periodičkih točaka od  $f$  gust u  $\mathbf{X}$ , tj. za svaki otvoreni skup  $O$  postoji  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $f^{on}(x) \in O$  za neki  $x \in \mathbf{X}$ .

Dakle, kaotični sustav posjeduje 3 sastojka: nepredvidljivost, neseparabilnost i element regularnosti.

**Primjer 12.** *Dinamički sustav  $\{[0, 1]; T_2\}$  gdje je  $T_2$  "tent" transformacija na skupu  $[0, 1]$  je kaotičan. Dokažimo da posjeduje sva 3 navedena sastojka:*

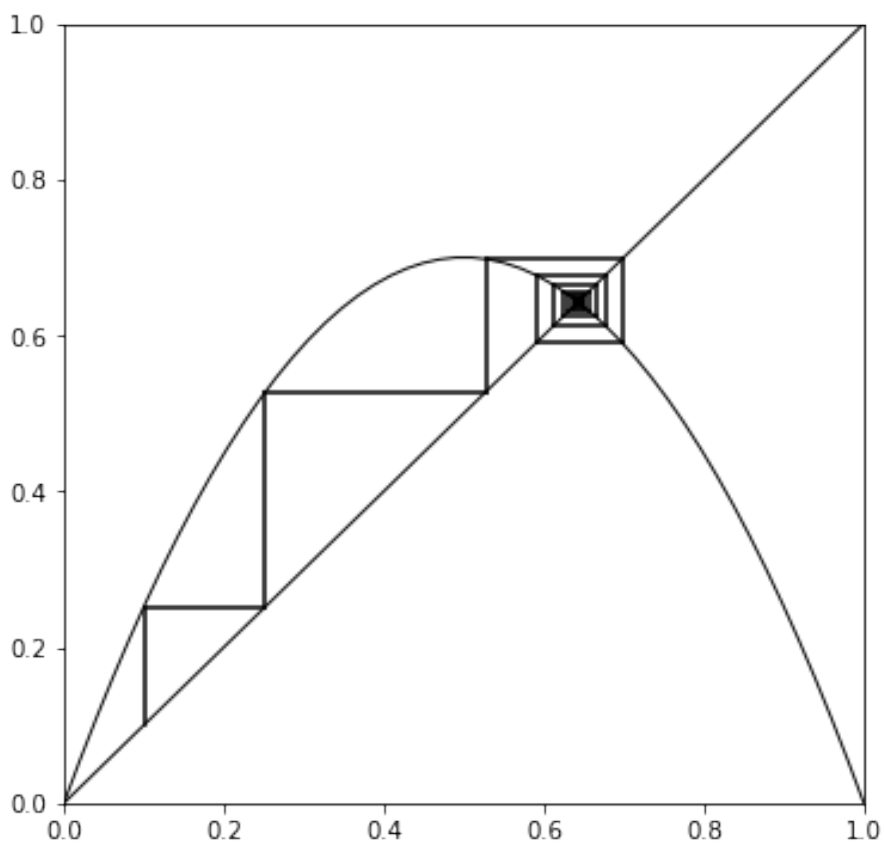
- (i) *(osjetljivost na početne uvjete) Neka je  $x_0 \in [0, 1]$ , i neka je  $U$  otvoreni interval koji sadrži  $x_0$ . Tada za dovoljno veliki  $n$ ,  $U$  sadrži interval oblika  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  za neki  $k$ . Dakle,  $T^{\circ n}$  preslikava  $U$  u  $[0, 1]$  za dovoljno veliki  $n$ . Tada sigurno postoji  $y_0 \in U$  takav da  $|T^{\circ n}(x_0) - T^{\circ n}(y_0)| \geq \frac{1}{2}$ .*
- (ii) *(tranzitivnost) Neka su  $U_1$  i  $U_2$  otvoreni podintervali od  $[0, 1]$ . Tada za dovoljno veliki  $n$ ,  $U_1$  sadrži interval oblika  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  za neki  $k$ . Dakle,  $T^{\circ n}$  preslikava  $U_1$  u  $[0, 1]$  koji sadrži  $U_2$ . Slijedi da sigurno postoji točka  $x$  takva da  $x \in T^{\circ n}(U_1) \cap U_2$ , odnosno  $T^{\circ n}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$*
- (iii) *(gustoća skupa periodičkih točaka)  $T^{\circ n}$  preslikava svaki interval  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  u  $[0, 1]$  za  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Posebno, postoji točka  $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  koja se preslika u sebe. Dakle, svaki interval sadrži fiksnu točku od  $T^{\circ n}$ , odnosno periodičnu točku od  $T$  za period  $n$ , iz čega slijedi da su periodične točke od  $T$  guste u  $[0, 1]$ .*

Topološka konjugacija čuva dinamička svojstva funkcija. Iz toga slijedi da je  $\{[0, 1]; F_4\}$  također kaotični dinamički sustav.

## 4.4 Web dijagram

Za geometrijsku reprezentaciju orbite dinamičkih sustava  $\{\mathbb{R}; f\}$  koristimo web dijagrame. Postupak konstrukcije je sljedeći:

Nacrtamo graf funkcije i pravac  $y = x$ . Krenemo od točke  $(x_0, x_0)$  i povežemo ju ravnom linijom s točkom  $(x_0, x_1 = f(x_0))$ . Ovu točku povežemo ravnom linijom s točkom  $(x_1, x_1)$ , koju potom povežemo s točkom  $(x_1, x_2 = f(x_1))$  i tako nastavimo dalje. Točke  $(x_0, x_0), (x_1, x_1), (x_2, x_2), \dots$  koje smo dobili čine orbitu naše funkcije  $f$ .



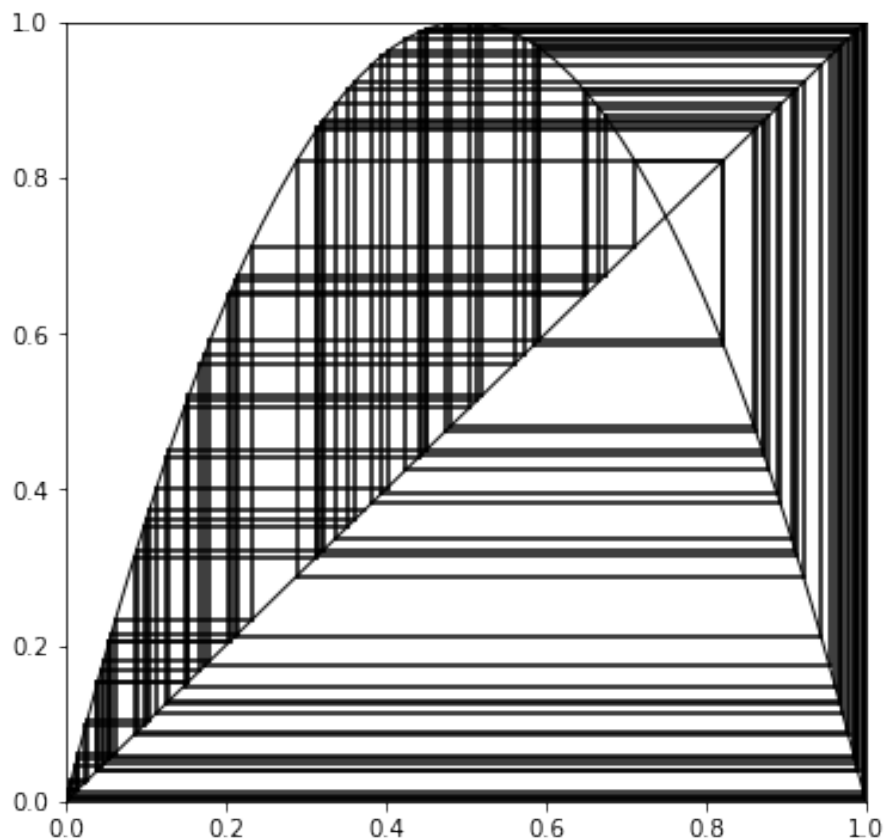
Slika 6



Na Slici 6 je web dijagram za dinamički sustav  $\{[0, 1]; f(x) = 2.8x(1-x)\}$  s početnom točkom  $x_0 = 0.1$  dobiven Python kodom:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
def f(r, x):
    return r * x * (1 - x)
x = np.linspace(0, 1)
def diagram(r, x0, n, ax):
    # crtanje funkcije i pravca y = x
    t = np.linspace(0, 1)
    ax.plot(t, f(r, t), 'k', lw=1)
    ax.plot([0, 1], [0, 1], 'k', lw=1)
    # crtanje segmenata izmedju funkcije i pravca
    x = x0
    for i in range(n):
        y = f(r, x)
        ax.plot([x, x], [x, y], 'k')
        ax.plot([x, y], [y, y], 'k')
        x = y
    ax.set_xlim(0, 1)
    ax.set_ylim(0, 1)
fig, ax1 = plt.subplots(1, 1, figsize=(6, 6), sharey = True)
diagram(2.8, 0.1, 100, ax = ax1)
```

Na Slici 7 je web dijagram za dinamički sustav  $\{[0, 1]; f(x) = 4x(1 - x)\}$  s početnom točkom  $x_0 = 0.1$  dobiven analognim Python kodom:



Slika 7

Na Slici 6 vidimo da se orbita približava fiksnoj točki  $x_0 = 1 - \frac{1}{2.8}$ . Takvu fiksnu točku nazivamo *atraktivnom*.

Na Slici 7 ne uočavamo takvo ponašanje. Zapravo, slika nam ne daje nikakve korisne informacije o orbiti, osim činjenice da izgleda kao da nepredvidljivo kruži oko pravca  $x = y$ . U prethodnom poglavlju pokazali smo da je  $\{[0, 1]; 4x(1 - x)\}$  kaotični sustav, tako da ovakvo ponašanje ne čudi.

## 5 Iterirani funkcijski sustavi s vjerojatnostima

U ovom poglavlju uvodimo pojam mjere i novi tip iteriranih funkcijskih sustava - IFS s vjerojatnostima. Predstavljamo malo drugačiji pristup generiranju fraktala. Do sada je proces generiranja fraktala bio deterministički, a sada je svakoj kontrakciji u IFS-u pridružena njoj pripadajuća vjerojatnost.

Prisjetimo se prvo nekih definicija i rezultata iz teorije mjere koje su nam bitne za kasnije rezultate.

**Definicija 21.** *Neka je  $\mathbf{X}$  skup. Nepraznu familiju  $\mathcal{F}$  podskupova od  $\mathbf{X}$  zovemo  $\sigma$ -**algebra** ako vrijedi:*

$$(1) \emptyset \in \mathcal{F},$$

$$(2) A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F},$$

$$(3) A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

**Teorem 22.** *Neka je  $\mathcal{G}$  familija podskupova skupa  $\mathbf{X}$  i neka je  $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in I\}$  familija  $\sigma$ -algebri od  $\mathbf{X}$  koje sadrže  $\mathcal{G}$ . Tada je  $\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha$  najmanja  $\sigma$ -algebra koja sadrži  $\mathcal{G}$  i zovemo ju  $\sigma$ -**algebra generirana s  $\mathcal{G}$** .*

**Definicija 23.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  metrički prostor. **Borelova  $\sigma$ -algebra** na tom prostoru je  $\sigma$ -algebra generirana otvorenim podskupovima od  $\mathbf{X}$ . Elemente Borelove  $\sigma$ -algebre zovemo **Borelovi poskupovi** od  $\mathbf{X}$ .*

**Definicija 24.** Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\mathbf{X}$ . Funkciju  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  zovemo **mjera** na  $\mathcal{F}$  ako vrijedi:

$$(1) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(2) A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \text{ disjunktni, } \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \implies \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**Definicija 25.** Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  metrički prostor. Mjeru  $\mu$  na Borelovoj  $\sigma$ -algebri zovemo **Borelova mjera**. Mjera  $\mu$  je **normirana** ako vrijedi  $\mu(\mathbf{X}) = 1$ .

Definirajmo sada prostor na kojem žive fraktali generirani iteriranim funkcijskim sustavima s vjerojatnostima:

**Definicija 26.** Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  kompaktan metrički prostor.

Tada  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  označava skup normiranih Borelovih mjera na  $\mathbf{X}$ .

**Hutchinsonova metrika**  $d_H$  na  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  definira se kao:

$$d_H(\mu, \nu) = \sup\{\int_{\mathbf{X}} f d\mu - \int_{\mathbf{X}} f d\nu : f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ neprekidna, } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y), \forall x, y \in \mathbf{X}\}$$

za sve  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

Zanimljivo svojstvo ovog prostora je njegova kompaktnost:

**Teorem 27.** Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  kompaktan metrički prostor. Tada je  $(\mathcal{P}(\mathbf{X}), d_H)$  kompaktan metrički prostor.

Sada napokon možemo definirati IFS s vjerojatnostima:

**Definicija 28.** *Iterirani funkcijski sustav s vjerojatnostima ili IFSP*

$$\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

sastoji se od IFS-a  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  i uređenog skupa brojeva  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$

takvog da je  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$  i  $p_i > 0$  za  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Vjerojatnost  $p_i$  pridružena je kontrakciji  $w_i$ .

Ruski matematičar Andrey Markov uvodi jedan poseban tip operatora koji je po njemu dobio ime:

**Definicija 29.** *Markovljev operator* pridružen IFS-u je funkcija

$M : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  definirana kao:

$$M(\nu) = p_1 \cdot \nu \circ w_1^{-1} + p_2 \cdot \nu \circ w_2^{-1} + \dots + p_N \cdot \nu \circ w_N^{-1}$$

za sve  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

S obzirom da za svaku jednostavnu ili neprekidnu funkciju  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  vrijedi:

$$\int_{\mathbf{X}} f d(M(\nu)) = \sum_{i=1}^N p_i \int_{\mathbf{X}} f \circ w_i d\nu$$

uvrštanjem  $f = \mathbf{1}_A$  definiciju Markovljevog operatora možemo zapisati i u obliku:

$$M(\nu(A)) = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{X}} p_i \cdot \mathbf{1}_A \circ w_i(x) d\nu$$

za sve  $A \in \mathcal{B}, \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ .

Sada navodimo analogon Teorema 6 za IFS s vjerojatnostima:

**Teorem 30.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  kompaktan metrički prostor. Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$  IFS s vjerojatnostima i kontrakcijskim faktorom  $s$ . Neka je  $M : \mathcal{P}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X})$  njemu pridružen Markovljev operator. Tada je  $M$  kontrakcija s kontrakcijskim faktorom  $s$  i postoji jedinstvena mjera  $\mu$  takva da je*

$$M\mu = \mu.$$

*Dokaz.* Neka je  $L$  skup svih neprekidnih funkcija  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  takvih da je  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ , za svaki  $x, y \in \mathbf{X}$ .

Tada za  $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  vrijedi:

$$\begin{aligned} d_H(M(\nu), M(\mu)) &= \sup\{\int_{\mathbf{X}} f d(M(\mu)) - \int_{\mathbf{X}} f d(M(\nu)) : f \in L\} \\ &= \sup\{\int_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^N p_i \cdot f \circ w_i d\mu - \int_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^N p_i \cdot f \circ w_i d\nu : f \in L\}. \end{aligned}$$

Neka je  $\tilde{L} = \{\tilde{f} \in L : \tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^N p_i \cdot f \circ w_i, \text{ za neki } f \in L\}$ .

Tada prethodnu jednakost možemo zapisati kao:

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) = \sup\{s \int \tilde{f} d\mu - s \int \tilde{f} d\nu : \tilde{f} \in \tilde{L}\}.$$

S obzirom da je  $\tilde{L} \subset L$  slijedi:

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s \cdot d_H(\nu, \mu),$$

dakle,  $M$  je kontrakcija, a egzistencija i jedinstvenost fiksne točke slijede iz Banachovog teorema o fiksnoj točki (Teorem 4). □

Ova jedinstvena fiksna točka Markovljevog operatora  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$  zove se **invarijantna mjera IFS-a s vjerojatnostima**.

## 5.1 Slučajni iteracijski algoritam

Za generiranje IFS fraktala preko iteriranih funkcijskih sustava s vjerojatnostima koristimo sljedeći algoritam:

Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$  iterirani funkcijski sustav s vjerojatnostima, gdje je vjerojatnost  $p_i > 0$  pridružena kontrakciji  $w_i$  za  $i = 1, 2, \dots, N$  i  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ .

Izaberemo  $x_0 \in \mathbf{X}$  i nakon toga rekurzivno, nezavisno,

$$x_n \in \{w_1(x_{n-1}), w_2(x_{n-1}), \dots, w_N(x_{n-1})\}, \text{ za } n = 1, 2, 3, \dots$$

gdje je vjerojatnost događaja  $x_n = w_i(x_{n-1})$  jednaka  $p_i$ .

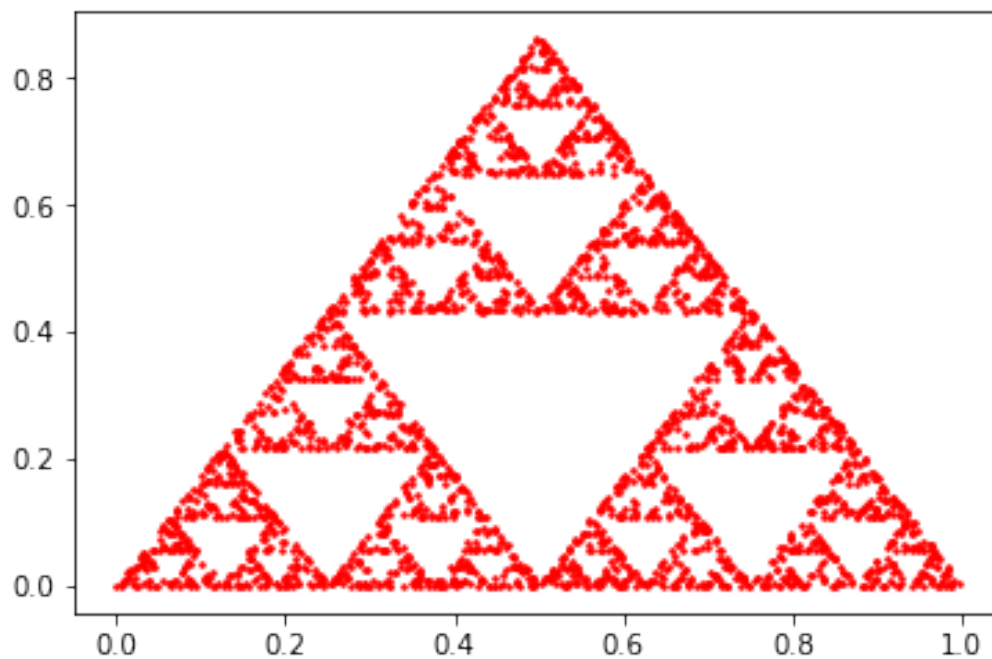
Tako dobivamo niz  $\{x_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbf{X}$ .

Da bismo ilustrirali ovaj algoritam dajemo 2 primjera koda za generiranje Sierpinskijevog trokuta pomoću IFS-a s vjerojatnostima:  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3; p_1, p_2, p_3\}$  gdje je

$$\begin{aligned}w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \\w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

U prvom slučaju uzimamo  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ ,

a u drugom  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = 0.25$ ,  $p_3 = 0.5$ .



Slika 8

Slika 8 prikazuje Sierpinskijev trokut nakon 3000 iteracija dobiven Python kodom:

```
import numpy as np
import pylab
from random import randint

def poloviste(tocka1, tocka2):
    return [(tocka1[0]+tocka2[0])/2, (tocka1[1]+tocka2[1])/2]

trenutna = [0,0] # pocetna tocka
```



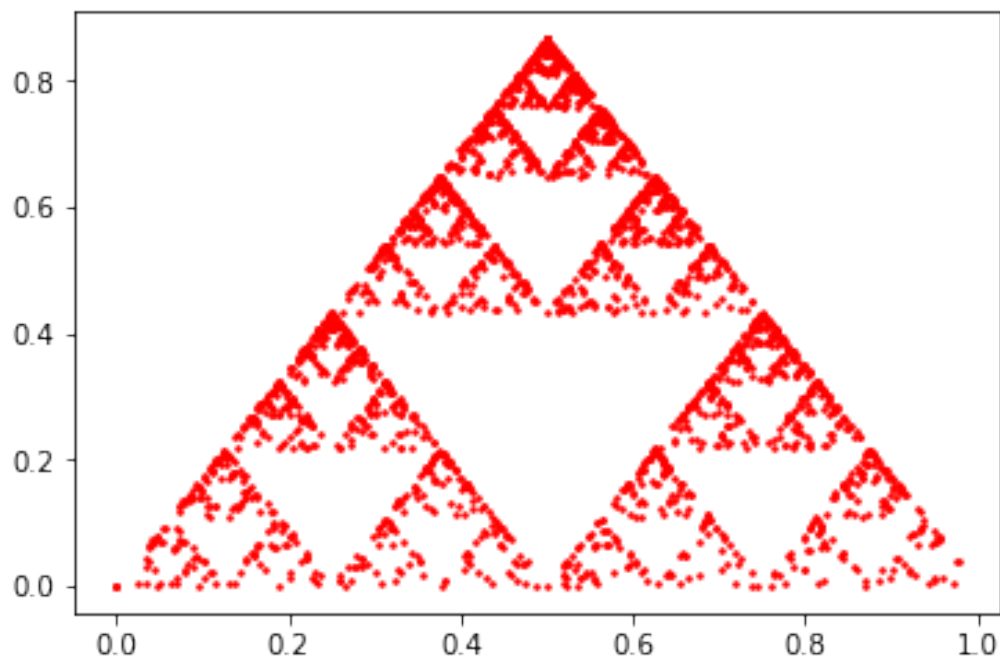
```

# vrhovi jednakostranice trokuta
A = [0,0]
B = [1,0]
C = [.5,np.sqrt(3)/2]

# crtanje 3000 tocki
for _ in range(3000):
    # biranje vrha slucajnim odabirom
    x = randint(0,2)
    # stavljanje trenutnog vrha na poloviste prethodnog i
    # slucajno odabranog
    if x == 0:
        trenutna = poloviste(trenutna, A)
    if x == 1:
        trenutna = poloviste(trenutna, B)
    if x == 2:
        trenutna = poloviste(trenutna, C)
    # crtanje nove trenutne tocke
    pylab.plot(trenutna[0],trenutna[1], 'r.', markersize=3)

pylab.show()

```



Slika 9

Slika 9 prikazuje Sierpinskijev trokut nakon 3000 iteracija dobiven Python kodom:

```
import numpy as np
import pylab
from random import randint

def poloviste(tocka1, tocka2):
    return [(tocka1[0]+tocka2[0])/2, (tocka1[1]+tocka2[1])/2]

trenutna = [0,0] # pocetna tocka
```

```

# vrhovi jednakostranicnog trokuta
A = [0,0]
B = [1,0]
C = [.5,np.sqrt(3)/2]

# crtanje 3000 tocki
for _ in range(3000):
    # biranje vrha slucajnim odabirom
    x = randint(0,3)
    # stavljanje trenutnog vrha na poloviste prethodnog i
    # slucajno odabranog
    if x == 0:
        trenutna = poloviste(trenutna, A)
    if x == 1:
        trenutna = poloviste(trenutna, B)
    if x == 2 or x == 3:
        trenutna = poloviste(trenutna, C)
    # crtanje nove trenutne tocke
    pylab.plot(trenutna[0],trenutna[1], 'r.', markersize=3)

pylab.show()

```

U prvom primjeru promatramo IFS s uniformno distribuiranim kontrakcijama, a u drugom promatramo IFS s neuniformno distribuiranim kontrakcijama ( $w_3$  se poprima s većom vjerojatnošću nego  $w_1$  ili  $w_2$ ).

U oba slučaja zaustavili smo proces generiranja nakon relativno malog broja točaka (3000) kako bismo osigurali da slike ne budu prezasićene, te kako bi razlika između uniformne i neuniformne razdiobe kontrakcija bila bolje uočljiva. Promatrajući slike, uočavamo da su na Slici 8 "gustoće" točaka u svim dijelovima trokuta podjednake, dok su na Slici 9 "gustoće" točaka neravnomjerno raspoređene.

## 5.2 Eltonov teorem

Spomenute "gustoće" točaka formalizirane su sljedećim teoremom:

**Teorem 31.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  kompaktan metrički prostor. Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$  IFS s vjerojatnostima. Neka je  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  orbita IFS-a generirana slučajnim iteracijskim algoritmom, počevši od  $x_0$ . Neka je  $B$  Borelov podskup od  $\mathbf{X}$  takav da je  $\mu(\partial B) = 0$ . Neka je  $\mathcal{N}(B, n) =$  broj točaka u  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap B$  za  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tada je gotovo sigurno*

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(B, n)}{n+1}$$

za sve početne točke  $x_0$ .

Dakle, "gustoća" točaka u skupu  $B$  je proporcija iteracija u slučajnom iteracijskom algoritmu koji proizvodi točke u  $B$ .

### 5.3 Veza između IFS i IFSP

Sljedeći teorem uspostavlja vezu između invarijantnog skupa IFS-a i invarijantne mjere IFS-a s vjerojatnostima:

**Teorem 32.** *Neka je  $(\mathbf{X}, d)$  kompaktan metrički prostor. Neka je  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$  IFS s vjerojatnostima i neka je  $\mu$  pridružena invarijantna mjera. Tada vrijedi:*

$$\text{supp}(\mu)^6 = A$$

gdje je  $A$  atraktor IFS-a  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ .

*Dokaz.* Neka je  $B$  nosač mjere  $\mu$ . Tada je  $B$  neprazan kompaktan podskup od  $\mathbf{X}$ . Neka je  $A$  atraktor IFS-a. Tada je  $\{A; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$  IFS s vjerojatnostima. Označimo njegovu invarijantnu mjeru s  $\nu$ . Tada je  $\nu$  invarijantna mjera i od  $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ . Budući da je  $\mu$  jedinstvena (zbog Teorema 30), vrijedi:  $\mu = \nu$ . Slijedi da je  $B \subset A$ .

Neka je  $a \in A$  i neka je  $\mathcal{O}$  otvoreni skup koji sadrži  $a$ . Neka je  $\Sigma$  kodni prostor pridružen IFS-u i neka je  $\sigma \in \Sigma$  adresa točke  $a$ . Iz Teorema 9 slijedi da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, A) = a$ . Dakle, postoji  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $\phi(\sigma, n, A) \subset \mathcal{O}$ . Također vrijedi:  $\mu(\phi(\sigma, n, A)) \geq p_{\sigma_1} \cdot p_{\sigma_2} \cdot \dots \cdot p_{\sigma_n} > 0$ , pa je  $\mu(\mathcal{O}) > 0$ . Dakle,  $a$  je u nosaču od  $\mu$ , tj.  $a \in B$ . Slijedi da je  $A \subset B$ .  $\square$

---

<sup>6</sup> $\text{supp}(\mu)$  je oznaka za nosač mjere  $\mu$ , tj.  $\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbf{X} : \mu(B(x, \epsilon)) > 0, \forall \epsilon > 0\}$

## A Prvi dodatak

IFS fraktal na Slici 1 (stranica br. 5) je atraktor IFS-a s vjerojatnostima:

$$\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4; p_1, p_2, p_3, p_4\},$$

gdje su

$$w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

kontrakcije s vjerojatnostima

$$p_1 = 0.01,$$

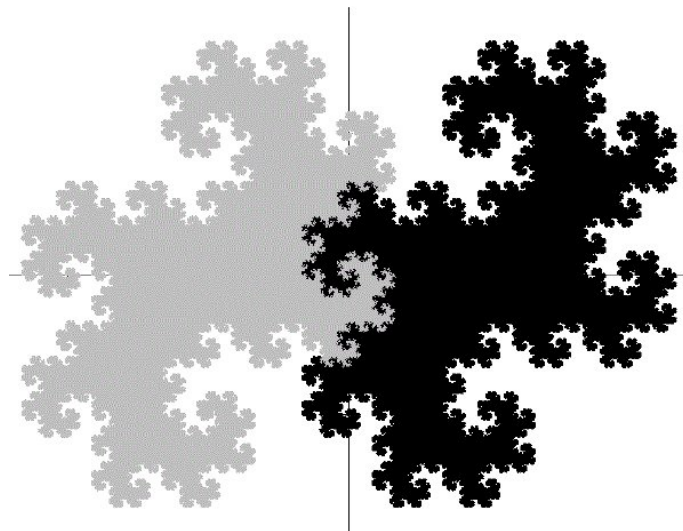
$$p_2 = 0.85,$$

$$p_3 = 0.07,$$

$$p_4 = 0.07.$$

## B Drugi dodatak

Još jedan primjer zanimljivog IFS fraktala je Davis-Knuthov zmajoliki skup ili *twin dragon* ("zmajevi blizanci"):



*Twin dragon* je atraktor IFS-a koji se sastoji od 2 affine transformacije:

$$w_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obje transformacije sastoje se od kontrakcije za  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  i rotacije za  $\frac{\pi}{4}$  te zatim translacije.

## Literatura

Michael F Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic press, 2nd edition, 1993.

John Briggs. *Fractals: The patterns of chaos: A new aesthetic of art, science, and nature*. Simon and Schuster, 1992.

Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview press, 2008.

Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2004.

Vassili Gelfreich. *MA424 Dynamical Systems Notes*. Mathematics Institute, University of Warwick, 2013.

John E Hutchinson. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5):713–747, 1981.

Hans Lauwerier. *Fractals: Endlessly repeated geometric figures*. Princeton University Press, 1991.

Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, 1982.

Józef Myjak and Tomasz Szarek. Attractors of iterated function systems and Markov operators. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2003, pages 479–502. Hindawi, 2003.

József Vass. On the geometry of ifs fractals and its applications. 2014.



## Sažetak

Vizualno kompleksni oblici s infinitezimalno finom strukturom već su neko vrijeme predmet istraživanja matematičara.

Ovaj rad bavi se posebnim tipom fraktala - IFS fraktalima koji se mogu koristiti za reprezentaciju raznih detaljnih samosličnih oblika u prirodi, kao što su oblaci, drveće, planine, obale mora, itd.

Krećemo s definicijom fraktala u najopćenitijem smislu.

Zatim prelazimo na iterirane funkcijske sustave (IFS). Definiramo ih, dajemo definiciju IFS fraktala, najvažnije primjere te algoritam za generiranje IFS fraktala. Također navodimo Kolaž teorem koji nam govori da ako želimo pronaći IFS čiji atraktor "nalikuje" danom skupu, moramo nastojati pronaći skup transformacija čija je unija, odnosno kolaž, slika danog skupa što bliže tom danom skupu.

U sljedećem poglavlju uvodimo dinamičke sustave, njihovu definiciju i neke primjere, te ih povezujemo s iteriranim funkcijskim sustavima. Dajemo algoritam za generiranje orbite dinamičkih sustava, te Shadowing teorem koji je značajan u praksi za računanje orbita dinamičkih sustava.

Na kraju obrađujemo iterirane funkcijske sustave s vjerojatnostima (IFSP). Definiramo ih, dajemo primjere fraktala generiranih IFS-om s vjerojatnostima te algoritam za njihovo generiranje. Predstavljamo Eltonov teorem koji formalizira našu intuiciju o mjeri na fraktalima. Završavamo s teoremom koji rasvjetljava vezu između IFS-a i IFSP-a.

## Summary

Visually complex shapes with infinitesimally fine structure have for some time now been a topic of research for mathematicians.

This thesis focuses on a particular type of fractals - IFS fractals which can be used to represent a variety of detailed self-similar shapes in nature, such as clouds, trees, mountains, sea shores, etc.

We begin with a definition of fractals in the most general sense.

We then move to iterated function systems (IFS). We define them, give a definition of IFS fractals, the most important examples and an algorithm for generating IFS fractals. Furthermore, we state Collage theorem which says that in order to find an IFS whose attractor 'resembles' a given set, we need to aim to find a set of transformations whose union, that is, collage, of images of the given set is as close as possible to the given set.

In the next section we introduce dynamical systems, their definition and some examples, and we connect them to iterated function systems. We give an algorithm for generating an orbit of dynamical systems, and also state the Shadowing theorem which is important in practice for calculating orbits of dynamical systems.

Lastly, we cover iterated function systems with probabilities (IFSP). We define them, give examples of fractals generated with an IFS with probabilities as well as an algorithm for generating them. We state Elton's theorem which formalizes our intuition about measure on fractals. We end the thesis with a theorem which illuminates the connection between IFS and IFSP.

## Životopis

Rođena sam u Splitu 10.3.1993. godine. U Zagrebu sam pohađala osnovnu (OŠ Malešnica) i srednju (Peta gimnazija) školu. Godine 2012. upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2015. godine na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Godine 2016. odlazim na studentsku razmjenu u Belgiju na Ghent University, s koje se vraćam sljedeće godine.