SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Bejić

POPLOČAVANJE RAVNINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Matija Kazalicki

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Onima koji pročitaju.

Sadržaj

Uvod

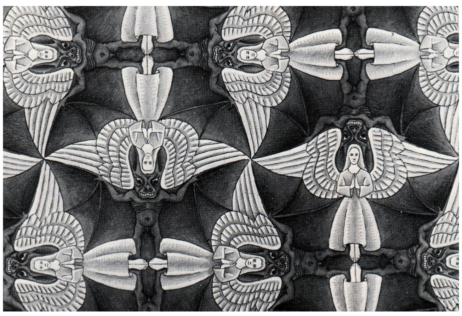
Čovjek je od davnina u gradnji koristio razno kamenje za pokrivanje podova i zidova svojih građevina. Birajući oblike i boje kamenja kako bi napravio lijep dizajn možemo reći da je popločavao u smislu kako tu riječ danas shvaćamo. Umjetnost popločavanja tako potječe još iz rane povijesti civilizacije. Uzorci, odnosno dizajn u kojem se ponavlja neki motiv na više ili manje sustavan način, nastali su na sličan način. Njihova je povijest vjerojatno starija i od povijesti popločavanja. Svaka je ljudska civilizacija popločavala i izrađivala uzorke u nekom obliku i različite kulture su naglašavale različite aspekte popločavanja i uzoraka. Primjer su Rimljani i drugi narodi Mediterana koji su uglavnom prikazivali ljude i scene iz prirode u zamršenim mozaicima. S druge strane, Mauri i Arapi su korištenjem nekoliko oblika i boja pločica stvarali složeni geometrijski dizajn. Poznati primjeri mogu se vidjeti u palači Alhambri u Španjolskoj, a posebno impresivno popločavanje se može naći na mnogim muslimanskim vjerskim zgradama.

Kroz povijest, bez obzira na vrstu popločavanja, njezina umjetnost i tehnologija uvijek su privlačili majstore, inventivne praktičare i velikodušne pokrovitelje. Artefakti svih kultura obiluju uzorcima koji često iznenađuju svojom zamršenosti i složenosti. Kad god je postojala potreba i želja za nekom vrstom ukrasa na tkaninama, tepihu, košarama, posuđu, oružju, zidnim tapetama i slično, koristio se neki oblik uzorka. Štoviše, sama proizvodnja mnogih objekata dovodi do obrazaca i uzoraka, a glavni primjeri ovdje su nam tkanje i pletenje. Stoga nije ni iznenađujuće da se slični motivi često pojavljuju u uzorcima iz široko razdvojenih vremena i mjesta. Činjenica koju malo ljudi očekuje je da je sveobuhvatna kompozicija tih uzoraka i motiva iz različitih izvora često vrlo slična. Za određene slučajeve pokazat ćemo da to nije slučajno nego rezultat temeljnog geometrijskog razmatranja.

Tijekom stoljeća korišteni su razni oblici pločica za izradu uzoraka i popločavanje. Radi estetske privlačnosti popločavanja, osim različitih oblika pločica, počele su se koristiti i različite boje pločica i oznaka. Pločice su bile izrađene od kamena, keramike ili sličnog materijala, koje su međusobno uklapali bez značajnih razmaka kako bi pokrile ravninu ili neku drugu površinu. Osim kamena i keramike, mnoge civilizacije koristile su i pločice izrađene od drveta, kartona, plastike ili lima. Popločavanje i razni materijali imaju primjenu i u suvremenom inženjerstvu. Primjerice, izrezujemo li komponente iz lima, ekonomičnije je ako se oblici mogu postaviti na način da između njih nema razmaka odnosno da popločavaju lim. S mnogih gledišta, proširenje ideja popločavanja prirodno je i korisno.

Pod pojmom popločavanje smatramo bilo koju particiju (podjelu) ravnine u područja (pločice) bez obzira na to je li ta particija realizirana (ili se može ostvariti) fizičkim objektima. Praktično, popločavanje je ograničeno, dok se u matematici generalno smatra beskonačnim. Tako na primjer milimetarski papir predstavlja popločavanje ravnine s kvadratnim pločicama. Antički umjetnici su stvarali slike i crteže koji se u tom smislu mogu smatrati popločavanjem. Najnoviji primjeri mogu se naći u radu nizozemskog umjetnika M. C. Escher (slika 0.1). U ovom općenitijem smislu postoje popločavanja u obilju svuda oko nas, ne samo što je čovjek izradio, već i u prirodi: stanice u korici luka, dizajn paukove mreže, pčelinje saće, mrlje osušenog blata itd. Navedena prirodna popločavanja često se nazivaju slučajnim popločavanjem ili slučajnim mrežama te su opsežno proučavana zbog njihove relevantnosti za primjene u znanosti i inženjerstvu. Na primjer, metalurgija i geologija (kristalna struktura u tankim pločicama materijala), biologija (raspored stanica u koži i membranama životinja i biljaka) i teorija komunikacije (poboljšanje slike i kodiranje).

Umjetnost dizajniranja popločavanja i uzoraka stara je i dobro razvijena, nasuprot tome, znanost o popločavanju i uzorcima, pod kojima podrazumijevamo proučavanje novijih matematičkim svojstava, relativno je novija i mnogi dijelovi su u potpunosti neistraženi. U prošlosti je bilo mnogo pokušaja opisivanja, sistematizacije i osmišljavanja notacija za različite tipove popločavanja i uzoraka, međutim, bez matematičke osnove, takvi pokušaji bili su neuspješni, unatoč ponekad ogromnim naporima koji su im posvećeni. Ipak neki aspekti geometrije popločavanja bili su proučavani u literaturi. Kepler je u svojoj knjizi *Harmonice Mundi* iz 1619. godine pisao o popločavanju, no njegova su istraživanja zaboravljena do ranih godina prošlog stoljeća. Nekoliko radova objavljeno je krajem devetnaestog stoljeća, stoga se iz praktičnih razloga matematička teorija popločavanja može smatrati starom nešto više od jednog stoljeća.



Slika 0.1: M. C. Escher - Angels and Devils; Izvor: [3]

Poglavlje 1

Popločavanje ravnine

1.1 Temeljni pojmovi

Prije postavljanja problema matematički, potrebno je uvesti neke pojmove koji će nam biti potrebni. Najprije definiramo što u stvari smatramo pod pojmom "popločavanje"[1]

Definicija 1.1.1. *Popločavanje $\mathcal{T}$ prebrojiva je familija zatvorenih skupova $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, ...\}$ koji prekrivaju ravninu bez praznina ili preklapanja.*

Pod ravnina podrazumijevamo Euklidsku ravninu elementarne geometrije iako se popločavanje može generalizirati i za veće dimenzije i razne geometrije. Kada kažemo bez praznina mislimo na to da je unija svih skupova čitava ravnina, familija skupova u ravnini koja nema praznina naziva se *prekrivanje*[2]. Bez preklapanja podrazumijevamo da su svaka dva skupa disjunktna, familija skupova u ravnini koja nema preklapanja naziva se *pakiranje*[3]. Eksplicitnije, popločavanje je unija skupova $T_1, T_2, ...$ (tzv. *pločice* familije $\mathcal{T}$) koja predstavlja cijelu ravninu i oni su međusobno disjunktni.

U većini slučajeva gornja definicija popločavanja je previše općenita. Uvjet prebrojivosti isključuje one familije u kojima svaki skup ima površinu nula (točke i dužine) ali nam dozvoljava popločavanje sačinjeno od različitih neobičnih oblika pločica i svojstava. Promatrat ćemo pločice koju su zatvoreni topološki diskovi. Topološki disk je bilo koji skup ograničen jednom jednostavnom zatvorenom krivuljom. Jednostavno zatvorena krivulja ima jednaku početnu i krajnju točku i nema samopresjecanja.

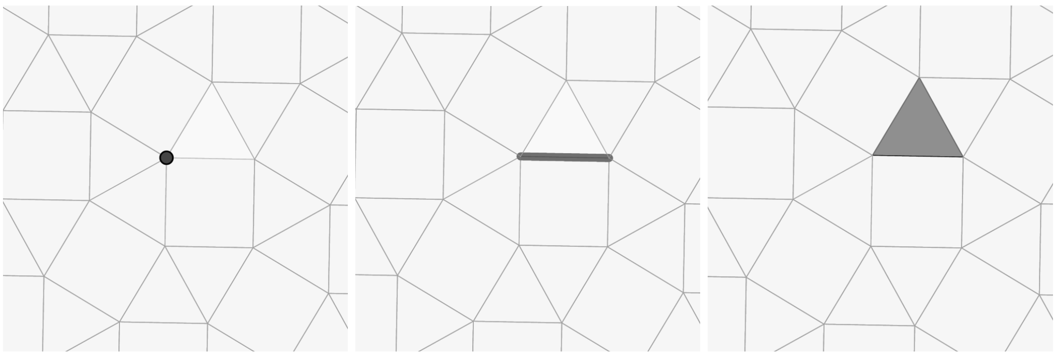
[1]U matematičkoj literaturi riječi *popločavanje, parketiranje* i *mozaik* koriste se kao sinonimi ili sa sličnim značenjem. U engleskom jeziku koristimo riječi *tessellation, paving, mosaic* i *parquetting*.

[2]engl. covering

[3]engl. packing

Osnovni elementi popločavanja

Iz definicije popločavanja slijedi da presjek bilo kojeg konačnog skupa pločica iz $\mathcal{T}$ (koje sadrži najmanje dvije različite pločice) nužno ima površinu nula. Za popločavanja koja ćemo promatrati u ovom diplomskom radu takav presjek sastoji se od skupa izoliranih točaka i lukova. Točke ćemo nazivati *čvorištima* popločavanja, a lukove *rubovima* popločavanja. Svaki rub pločice podudara se s rubovima dviju pločica koje leže sa svake strane. Rub povezuje dva čvorišta (koja nazivamo krajnje točke ruba) i svako čvorište krajnja je točka nekoliko rubova. Broj rubova kojima je jedno čvorište krajnja točka nazivamo *valencija* čvorišta i najmanje je tri. Ako je svako čvorište popločavanja $\mathcal{T}$ iste valencije j onda popločavanje $\mathcal{T}$ nazivamo *j-valentno* popločavanje. Na slici 1.1 prikazano je popločavanje kojemu je svako čvorište 5-valentno. Čvorišta, rubovi i pločice[4] elementi su svakog popločavanja. Ako su pločice topološki diskovi, tada jednostavna zatvorena krivu-



Slika 1.1: Čvorište, rub i pločica popločavanja

lja koja tvori granicu pločice, podijeljena je na više dijelova čvorištima pločica i svaki taj dio je rub popločavanja i također rub pločice. Dvije pločice su susjedne ako im je presjek neprazan (u presjeku čvorišta i rubovi). Slično, kažemo da su dva različita ruba susjedna ako imaju zajedničku krajnju točku. Kažemo da je pločica *incidentna* sa svojim rubovima i čvorištima, također i rub je incidentan sa svojim krajnjim točkama. Relacija biti incidentan je simetrična, ako je pločica incidentna sa čvorištem, onda je i to čvorište incidentno s pločicom, slično je i za druge slučajeve.

Kažemo da su dva popločavanja $\mathcal{T}_1$i $\mathcal{T}_2$ *kongruentna* ako se popločavanje $\mathcal{T}_1$ može nekom izometrijskom transformacijom dovesti do poklapanja s $\mathcal{T}_2$. Dva popločavanja su *ekvivalentna* ili *slična* ako se jedno od njih može skalirati (uvećati ili umanjiti) ravnomjerno po cijeloj ravnini tako da bude kongruentno sa drugim. Smatramo, da su dva popločavanja ekvivalentna ako postoji transformacija sličnosti ravnine koja preslikava jedno od popločavanja na drugo.

[4]engl. vertices, edges and tiles

Specijalni slučaj popločavanja je popločavanje pravilnim mnogokutima. Vrhovi i strane mnogokuta mogu se poklapati s čvorištima i rubovima pločica i u tom slučaju kažemo da je popločavanje *rub-na-rub*[5], ali i ne mora postojati poklapanje. Kažemo da su dva čvorišta sukladna ako je slijed kutova koji se u njemu sastaju isti. *Pravilno čvorište* je ono čvorište u kojem su svi kutovi mnogokuta koji se sastaju u tom čvorištu međusobno sukladni.

Popločavanje pločicama različitih oblika

Pločice mogu imati rupe, biti u više dijelova, rubovi im mogu bit ravni ili zakrivljeni, mogu biti proizvoljno velike ili male, no mi ćemo se posvetiti onima koje su topološki diskovi. Pa tako razilkujemo monoedralna, diedralna, ..., n-edralna popločavanja.

Monoedralno popločavanje je popločavanje u kojem je svaka pločica popločavanja $\mathcal{T}$ kongruentna (direktno ili refleksivno) jednom fiksnom skupu T. Jednostavnije rečeno, sve su pločice iste veličine i oblika. Skup T naziva se *protopločica* od $\mathcal{T}$, odnosno protopločica T određuje popločavanje $\mathcal{T}$. Primjer monoedralnog popločavanja jednakostraničnim trokutima, kvadratima i pravilnim šesterokutima prikazano je na slici 2.1. Na prvi pogled monoedralna popločavanja (osobito ona u kojima su protopločice topološki diskovi) čine se jednostavna, skoro trivijalna s matematičkog stajališta. Međutim, problemi popločavanja monoedralnim pločicama su daleko od trivijalnog. Činjenica je da ne znamo metodu odnosno algoritam kojim bi odredili je li neki skup T protopločica monoedralnog popločavanja, uz to još ne možemo ni pretpostaviti bi li ta metoda uz konačan broj koraka uopće mogla postojati. Jedna od najneobičnijih monoedralnih popločavanja su ona u obliku spirala sa jednom ili više grana prikazana na slici 1.2. Osim ova dva primjera na slici, postoji još mnogo takvih ”spiralnih” popločavanja koja se mogu konstruirati s prikazanom protopločicom 1.2(a). Pod *diedralnim* popločavanjem $\mathcal{T}$ podrazumijevamo ono popločavanje kod kojeg je svaka pločica T_i kongruentna jednoj od dvije različite protopločice T ili T'. Primjer diedralnog popločavanja je na slici 1.1, protopločice su jednakostranični trokut i kvadrat. Na sličan način definiramo *triedralno, 4-edralno, ..., n-edralno popločavanje* kod kojeg postoji $3, 4, ..., n$ različitih protopločica.

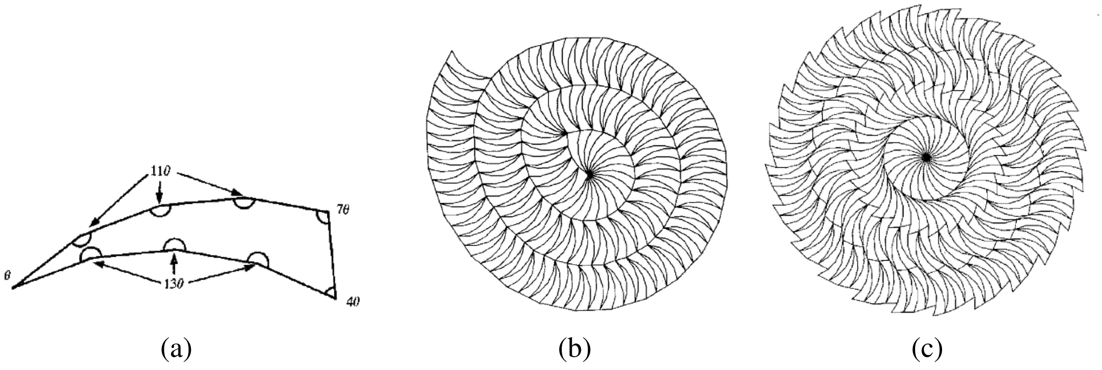
Definicija 1.1.2. *Popločavanje $\mathcal{T}$ je n-edralno ako postoji skup $\mathcal{S} = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ pločica takvih da:*

1. *svaka pločica T_i za $i = 1, ..., n$ je podudarna točno jednoj pločici iz popločavanja $\mathcal{T}$;*
2. *svaka pločica iz popločavanja $\mathcal{T}$ je podudarna najmanje jednoj pločici iz skupa $\mathcal{S}$.*

Tada za skup $\mathcal{S}$ kažemo da generira popločavanje $\mathcal{T}$.

Skup S još nazivamo i *skup protopločica* popločavanja.

[5]engl. edge-to-edge



Slika 1.2: Primjeri monoedralnih popločavanja s istom protopločicom; Izvor: [2] str. 22

1.2 Izometrija i simetrija

Mnoge važne osobine popločavanja proizlaze iz simetrije. Navest ćemo osnovne definicije i svojstva izometrija u euklidskoj ravnini E^2.

Definicija 1.2.1. *Izometrija euklidske ravnine je svaka bijekcija $f : E^2 \to E^2$ ravnine na sebe koja čuva udaljenost točaka, tj. takva da je $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ za sve točke A i B iz E^2.*

Drugim riječima, izometrija je geometrijsko preslikavanje prostora E^2 na sebe koje svaku dužinu $AB \subset E^2$ preslikava u jednaku (podudarnu) dužinu $A'B' \subset E^2$.

Teorem 1.2.2. *Neka su f i g izometrije. Vrijedi:*

1. *Inverz izometrije f, f^{-1} također je izometrija.*
2. *Kompozicija izometrija f i g, $f \circ g$, je također izometrija.*

Definicija 1.2.3. *Izometrija koja svaku točku prostora E^2 preslikava u nju samu naziva se identiteta, $id(A) = A$ za svaku točku A iz E^2.*

Definicija 1.2.4. *Kažemo da je izometrija involutorna ako je $f \circ f = id$ i $f \neq id$*

Involutorna izometrija je sama sebi inverz.

Definicija 1.2.5. *Figura je svaki podskup od E^2.*

Za figuru F iz Euklidske ravnine E^2 kažemo da je *fiksna figura* izometrije f ako je f preslikava u nju samu, tj. ako je $f(F) = F$.

Svojstva izometrija u odnosu na fiksnu figuru:

Teorem 1.2.6. *Neka je f izometrija.*

1. *Sjecište, ako postoji, dvaju različitih fiksnih pravaca od f je fiksna točka od f.*
2. *Spojnica dvaju fiksnih točaka od f je fiksni pravac od f.*
3. *Ako je f involutorna izometrija, onda kroz točku koja nije fiksna za f prolazi točno jedan fiksni pravac za f.*

Definicija 1.2.7. *[Osna simetrija] Involutorna izometrija kojoj su sve točke pravca a fiksne zove se osna simetrija s obzirom na pravac a, u oznaci s_a.*

Teorem 1.2.8. *Svaka izometrija ravnine E^2 može se prikazati u obliku kompozicije najviše tri osne simetrije.*

Definicija 1.2.9. *[Translacija] Izometrija koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo translacija ako su osi simetrije a i b paralelni pravci.*

Definicija 1.2.10. *[Rotacija] Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo rotacija ako osi simetrije a i b nisu paralelni pravci.*

Definicija 1.2.11. *[Centralna simetrija] Centralna simetrija je rotacija $s_a \circ s_b$ za koju su osi simetrije a i b okomiti pravci.*

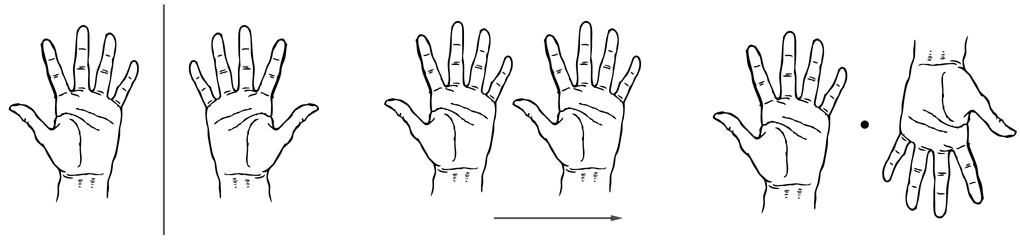
Definicija 1.2.12. *[Klizna simetrija] Izometrija koja se može prikazati u obliku kompozicije $s_c \circ s_b \circ s_a$, gdje je pravac c okomit na pravce a i b zove se klizna simetrija.*

Teorem 1.2.13. *Neka je $Iz(F) = \{f \in Iz(E^2) : f(F) = F\}$, gdje je F figura Euklidske ravnine E^2. Tada je $(Iz(F), \circ)$ grupa simetrija figure F.*

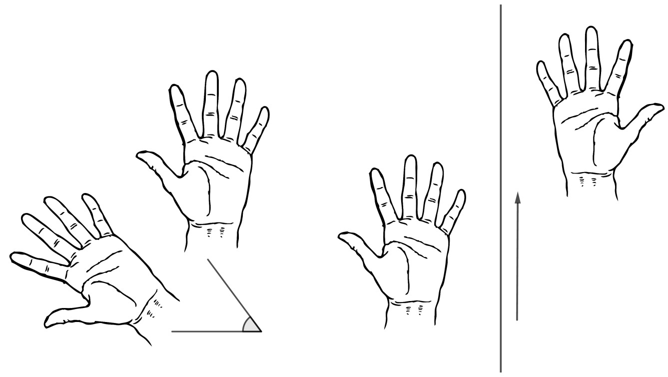
U slučaju popločavanja $\mathcal{T}$ za izometriju f kažemo da je simetrija od $\mathcal{T}$ ako ona preslikava svaku pločicu iz $\mathcal{T}$ na pločicu u $\mathcal{T}$. Tako za proizvoljno popločavanje $\mathcal{T}$ uopćavamo gore navedenu notaciju i pišemo $S(\mathcal{T})$ za grupu simetrija od $\mathcal{T}$. Moguće je da se $S(\mathcal{T})$ sastoji samo od identitete ili može imati mnogo simetrija.

1.3 Klasifikacija popločavanja

Popločavanje ravnine možemo klasificirati s obzirom na izometrijske transformacije i grupe simetrija. Ako popločavanje osim identitete posjeduje još neku simetriju, nazivamo ga *simetrično popločavanje*. Ako njegova grupa simetrije sadrži translacijsku simetriju, takvo popločavanje nazivamo *periodičnim*. Dakle postoji vektor, koji je različit od nulvektora, takav da pomakom popločavanja za taj vektor dobivamo popločavanje koje se ne razlikuje



(a) Osna simetrija (b) Translacija (c) Centralna simetrija



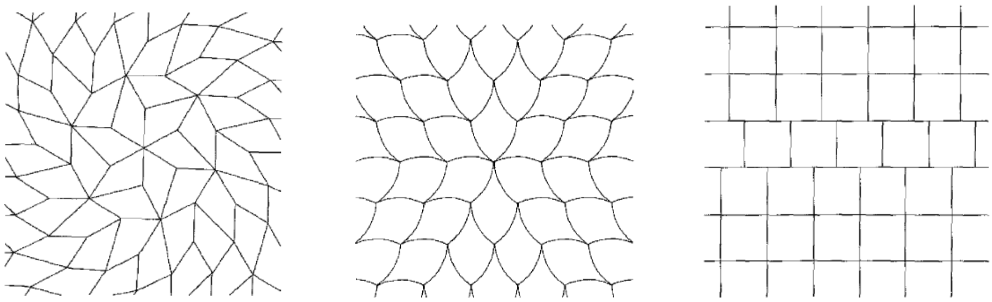
(d) Rotacija (e) Klizna simetrija

Slika 1.3: Izometrije

od polaznog. Podrazumijeva se da se translacijska simetrija pojavljuje u onoliko nezavisnih smjerova kolika je dimenzija prostora, što znači da u ravnini imamo translacijsku simetriju u dva neparalelna smjera, a u prostoru u tri nekomplanarna smjera. Primjer periodičnog popločavanja prikazano je na slici 1.1. Tri primjera simetričnog popločavanja koja nisu periodična prikazana su na slici 1.4. Primjer na slici 1.4(a) je popločavanje čija grupa simetrija uključuje rotacije oko fiksne točke koju možemo zvati *centar* popločavanja, grupa simetrija popločavanja na slici 1.4(b) sadrži simetrije rotacije i osne simetrije, dok u trećem primjeru, na slici 1.4(c) vidimo popločavanje čija je grupa simetrija beskonačna i uključuje translacije paralelne fiksnom smjeru.

Neka je T pločica proizvoljnog popločavanja $\mathcal{T}$. Tada svaka simetrija od $\mathcal{T}$, koja preslikava T na sebe, simetrija je od T. Općenito, obrat ne vrijedi. Na primjeru slike 1.4(c), jedina simetrija od $\mathcal{T}$ koja preslikava pločicu na sebe je identiteta, dok pločica sama za sebe, pošto je kvadrat ima još 7 simetrija[6]. Moramo pažljivo razlikovati grupu simetrija pločice T, $S(T)$ i grupu simetrija od T koje su također simetrija popločavanja $\mathcal{T}$, $S(\mathcal{T}|T)$. Skraćeno, $S(\mathcal{T}|T)$ zovemo *inducirana grupa pločica* ili *stabilizator od T u $\mathcal{T}$*. Na slici 1.5(a) vidimo zanimljiv primjer kod kojeg se $S(\mathcal{T}|T)$ i $S(T)$ razlikuju. Protopločica 1.5(b)

[6]The Group of Symmetries of the Square, u bibliografiji [13]

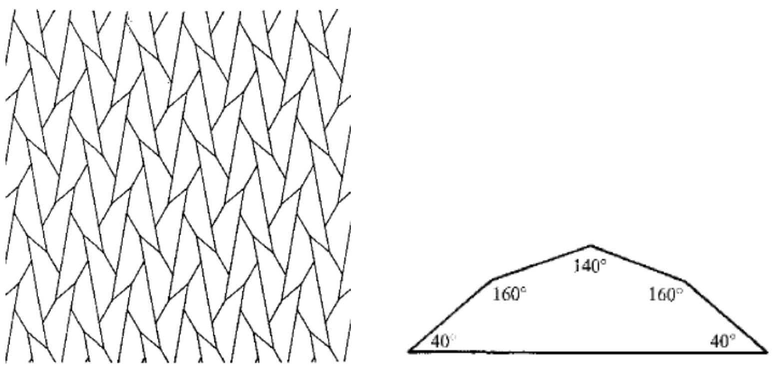


(a) (b) (c)

Slika 1.4: Monoedralna popločavanja koja su simetrična; Izvor: [2] str. 30

ima simetriju grupe reda 2 dok se inducirana grupa simetrija sastoji samo od identitete.

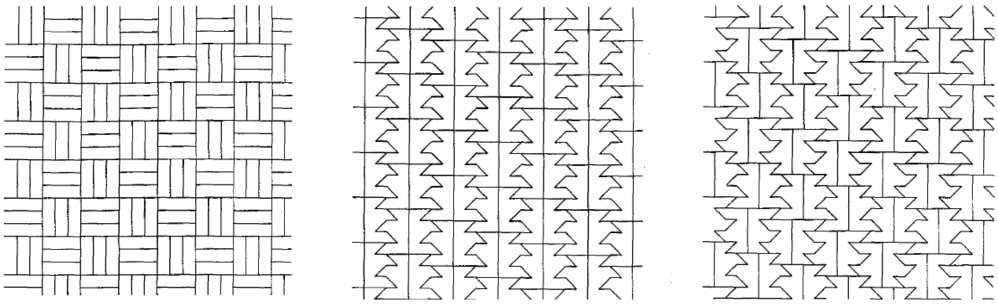
Pločice T_1 i T_2 popločavanja $\mathcal{T}$ su ekvivalentne ako grupa simetrija sadrži transformaciju koja T_1 slika na T_2. Skup svih pločica iz $\mathcal{T}$ koje su ekvivalentne sa T_1 naziva se *tranzitivna klasa* od T_1. Ako sve pločice iz $\mathcal{T}$ čine tranzitivnu klasu, kažemo da je popločavanje $\mathcal{T}$ *izoedralno* ili *tile-transitive*. Na slici 1.5 prikazano je izoedralno popločavanje i tri popločavanja na slici 2.1 također su izoedralna. Popločavanja na slikama 1.4 i 1.6 su monoedralna ali nisu izoedralna.



(a) Izoedralno popločavanje (b) Protopločica

Slika 1.5: Izvor: [2] str. 31

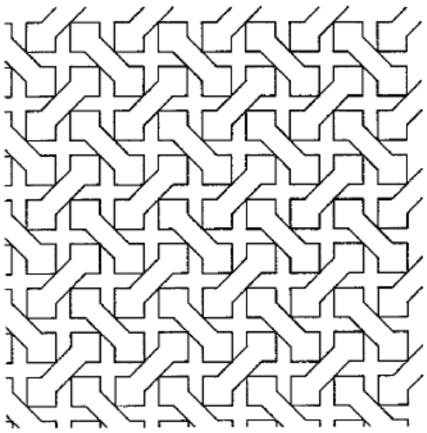
Razlika između monoedralnog i izoedralnog popločavanja čini se neznatnom ali je u stvari veoma značajna. Činjenica je da je problem pronalaženja i klasificiranja svih monoedralnih popločavanja neriješen (čak i kada su pločice koveksni poligoni), dok je izoedralna popločavanja lako opisati i klasificirati. Izoedralno popločavanje je ujedno i monedralno, no obrat ne vrijedi. Ako je $\mathcal{T}$ popločavanje s k-tranzitivnih klasa, naziva se *k-izoedralno*. Na slici 1.6 prikazana su tri monoedralna popločavanja koja su 2-izoedralna, dakle pločice ovih popločavanja formiraju dvije tranzitivne klase. Na slici 1.7 prikazano je diedralno popločavanje koje je također 2-izoedralno. Generalno, ako je popločavanje od n različitih oblika pločica, biti će n-tranzitivnih klasa. Kod popločavanja koja nisu simetrična, svaka pločica je tranzitivna klasa za sebe.



(a) (b) (c)

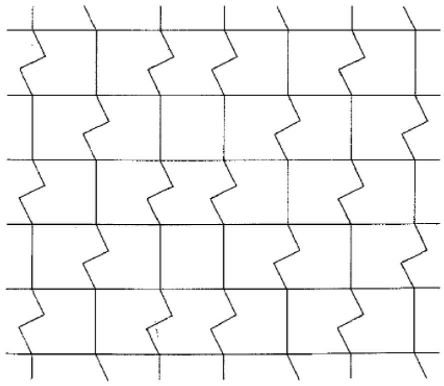
Slika 1.6: Monoedralna popločavanja koja su 2-izoedralna; Izvor: [2] str. 32

Ideja tranzitivnosti i ekvivalencije primjenjiva je i na ostale elemente popločavanja. Ako grupa simetrija $S(\mathcal{T})$ od $\mathcal{T}$ sadrži operacije koje preslikavaju svako čvorište od $\mathcal{T}$ na bilo koje drugo čvorište, kažemo da čvorišta čine jednu tranzitivnu klasu, ili da je popločavanje *izogonalno*. Primjer izogonalnog popločavanja vidimo na slici 1.7, tri popločavanja na slici 2.1 također su izogonalna. Analogno, kažemo da je popločavanje k-izogonalno ako njegova čvorišta čine k-klasa tranzitivnosti, $k \geq 1$. Popločavanja na slikama 1.5 i 1.6(a) su 2-izogonalna.



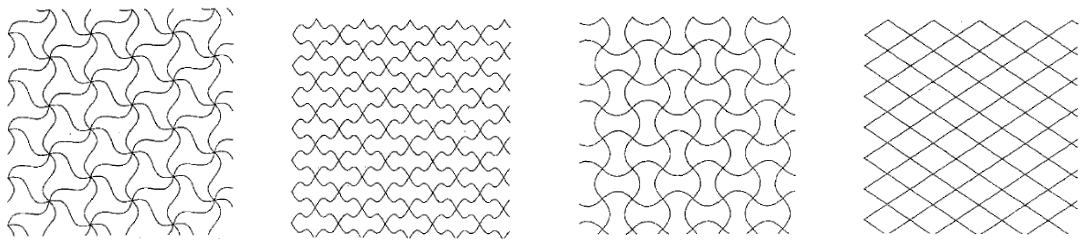
Slika 1.7: Diedralno 2-izoedralno popločavanje; Izvor: [2] str. 33

Monogonalno popločavanje je popločavanje kod kojeg svako čvorište sa svojim incidentnim rubovima, formira figure kongruentne sa bilo kojim drugim čvorištem i njemu incidentnim rubovima. Razlika između izogonalnog i monogonalnog popločavanja analogna je razlici između izoedralnog i monoedralnog popločavanja. Primjer popločavanja koje je monogonalno ali nije izogonalno je na slici 1.8.



Slika 1.8: Monogonalno popločavanje koje nije izogonalno; Izvor: [2] str. 33

Izotoksalno popločavanje je ono popločavanje kod kojeg se svaki rub može preslikati na bilo koji drugi rub simetrijom popločavanja. Popločavanja na slici 1.9 su izotoksalna.



(a) (b) (c) (d)

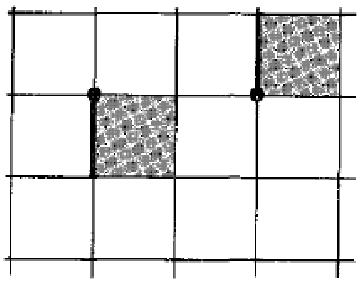
Slika 1.9: Popločavanja koja su izoedralna, izogonalna i izotoksalna; Izvor: [2] str. 34

Na slici 1.9 vidimo četiri popločavanja koja su izoedralna, izogonalna i izotoksalna, uočimo kako oni prikazuju popriličnu količinu pravilnosti. Promotrit ćemo u čemu se oni razlikuju od pravilnih popločavanja sa slike 2.1. Da bismo definirali pravilno popločavanje, koristit ćemo koncept tranzitivnosti, ali u strožem smislu. Definiramo *zastavicu*[7] popločavanja kao uređenu trojku (V, E, T)[8] koju čine čvorište V, rub E i pločica T koji su međusobno incidentni. Primjeri zastavica prikazani su na slici 1.10, na slikama su istaknute po dvije zastavice za svako popločavanje. Vidimo da ako pločica T ima n rubova i n čvorišta, tada pripada u točno $2n$ zastavica. Jer E možemo izabrati na točno n načina, a

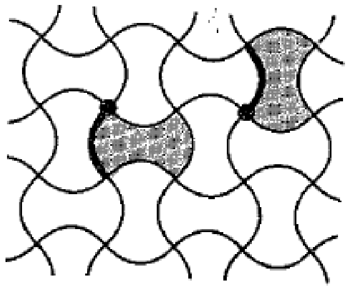
[7] engl. flag

[8] V - vertice, E - edge, T - tile

V možemo izabrati između dvije krajnje točke ruba E. Popločavanje $\mathcal{T}$ je *pravilno* ako je njegova grupa simetrija $S(\mathcal{T})$ tranzitivna na zastavicama od $\mathcal{T}$. Na slici 1.10(a) vidimo da su dvije označene zastavice ekvivalentne pod $S(\mathcal{T})$ i lako se može provjeriti da isto vrijedi i za ostale zastavice. Za drugo popločavanje, na slici 1.10(b), ne postoji simetrija koja preslikava jednu označenu zastavicu na drugu, one pripadaju različitim klasama ekvivalencije. Može se pokazati da pločice pravilnog popločavanja su nužno pravilni mnogokuti, no vidjet ćemo i da postoje popločavanja pravilnim mnogokutima koja nisu pravilna. Zapravo, postoje samo tri pravilna popločavanja i to su ona prikazana na slici 2.1.



(a)



(b)

Slika 1.10: Primjer popločavanja koja su izogonalna i izotoksalna. U svakom su označene po dvije zastavice. Popločavanje (a) je pravilno dok ono na slici (b) nije; Izvor: [2] str. 35

Popločavanje sačinjeno od više vrsta pravilnih mnogokuta nazivamo *polupravilno* popločavanje. Dalje definiramo, *neperiodična* popločavanja ravnine, to su popločavanja koja nisu periodična, ona koja nemaju ponavljajući uzorak. *Aperiodično* popločavanje je neperiodično popločavanje ravnine čije protopločice ne dopuštaju periodično popločavanje. *Kvaziperiodično* popločavanje je popločavanje koje ima lokalnu periodičnost odnosno svojstvo da se kopija ograničenog dijela popločavanja može naći ravnomjerno raspoređene na beskonačno mnogo mjesta u popločavanju.

Periodična popločavanja proučavana su još u antičko vrijeme, pitagorejci su još u VI st. pr. Kr. znali da su jedini pravilni mnogokuti kojima se može popločiti ravnina, jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni šesterokut. Neperiodična popločavanja detaljnije su proučavana tek u XX st. Otkriveno je da su neka neperiodična popločavanja u stvari jako pravilna te su zbog toga postala poznata pod nazivom kvaziperiodična popločavanja.

Poglavlje 2

Popločavanja pravilnim mnogokutima

Popločavanja pravilnim mnogokutima bila su jedan od prvih načina popločavanja kao predmet matematičkih istraživanja. Promotrit ćemo popločavanja koja su rub-na-rub (svaka stranica svake pločice je rub popločavanja i obrnuto; dakle svaka strana pločice je i strana točno jedne druge pločice).

Broj svake vrste pravilnih mnogokuta koji okružuju čvorište određuje *klasu (grupu)* čvorišta. Kažemo da su čvorišta popločavanja *iste klase* ako su svi oni okruženi istim brojem svake vrste pravilnih mnogokuta.

Čvorište označavamo tako da kružno nabrajamo mnogokute koji se sastaju u čvorištu. Ako su kružno raspoređeni pravilni n-terokuti sa $n_1, n_2, ..., n_r$ stranica, čvorište označavamo sa $(n_1, n_2, ..., n_r)$, počevši od n-terokuta s najmanjim brojem stranica, dakle n_1 je n-terokut s najmanjim brojem stranica. Pa tako definiramo *tip čvorišta*, čvorište je tipa $n_1, n_2, ..., n_r$. Raspored nabrajanja mnogokuta može biti u smjeru kazaljke na satu ili je suprotnog smjera. Drugi zapis kojim možemo označiti čvorište je u obliku ”potencija”, odvajajući različite vrste mnogokuta točkom, ”baza potencije” je broj stranica n-terokuta, a ”eksponent” je broj koji označava koliko je takvih mnogokuta u čvorištu. Za popločavanje tipa $n_1, n_2, ..., n_r$ gdje se n_1 pojavljuje k_1 puta, n_2 pojavljuje k_2 puta, ..., n_r se pojavljuje k_r puta, druga oznaka bila bi ${n_1}^{k_1}.{n_2}^{k_2}.\cdots.{n_r}^{k_r}$. Ukoliko dva popločavanja imaju čvorišta iste klase nije neophodno da su im čvorišta istog tipa. Primjeri takvih čvorišta i popločavanja biti će spomenuti kasnije.

2.1 Pravilna popločavanja ravnine

Pronađimo sve moguće razdiobe, tj. popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima, pri čemu su svi mnogokuti i sva čvorišta sukladni.

Zbroj svih veličina kutova koji se sastaju u jednom čvorištu iznosi 360°. Znamo da je zbroj kutova u trokutu 180°, a svaki n-terokut možemo razdijeliti na $n - 2$ trokuta tako da iz jednog njegovog vrha povučemo sve dijagonale. Slijedi da zbroj kutova u svakom

n-terokutu iznosi $(n-2)\cdot 180°$. Svi su unutrašnji kutovi u pravilnom n-terokutu sukladni pa njihova veličina iznosi

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

.

Ako se u svakom čvorištu sastaje k pravilnih n-terokuta, uvjet da je zbroj kutova koji se sastaju u čvorištu jednak $360°$ možemo izraziti jednadžbom:

$$k\cdot\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360° \tag{2.1}$$

Uvjeti koji nam se dalje nameću su $k, n \in \mathbb{N}$ i jer je mnogokut s najmanjim brojem stranica trokut, slijedi $n \geq 3$. Dakle, problem pravilnog popločavanja ravnine sveli smo na rješavanje diofantske jednadžbe (2.1).

Teorem 2.1.1. *Jedina rub-na-rub monoedralna popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima su na jednakostranične trokute, kvadrate i pravilne šesterokute, i to tako da ih se u jednom čvorištu sastaje po šest, četiri, odnosno po tri.*

Dokaz. Dokaz teorema svodi se na rješavanje spomenute diofantske jednadžbe. Pomnožimo li jednadžbu s n i dijeljenjem jednadžbe s $180°$ dobivamo:

$$k\cdot(n-2) = 2n$$

Dobivenu jednakost podijelimo s $n-2$, slijedi:

$$k = \frac{2n}{n-2}$$

Malo sredimo:

$$k = \frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = \frac{2(n-2)}{n-2} + \frac{4}{n-2}$$

i na kraju dobivamo:

$$k = 2 + \frac{4}{n-2} \tag{2.2}$$

Broj k nam označava broj pravilnih n-terokuta koji se sastaju u jednom čvorištu, dakle k je prirodan broj. Iz posljednje jednakosti slijedi da onda razlomak $\frac{4}{n-2}$ mora biti prirodan broj, dakle broj $n-2$ mora biti djelitelj broja 4. Slijedi

$$(n-2) \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$$

odnosno

$$n \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$$

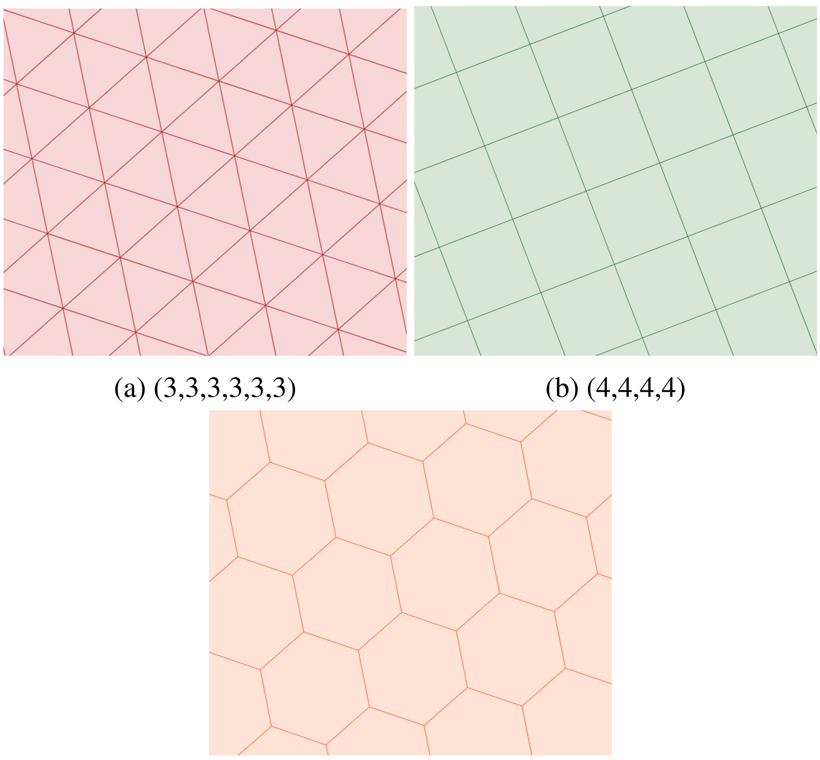
Prva tri rješenja u dobivenom skupu možemo eliminirati jer je $n \geq 3$. Ostaju tri mogućnosti: $n = 3$, $n = 4$ i $n = 5$, redom jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni šesterokut. Odgovarajuće k-ove dobit ćemo uvrštavanjem u izraz (2.2).

Za $n = 3$ dobivamo $k = 6$, popločavanje ravnine sa šest jednakostraničnih trokuta.

Za $n = 4$ dobivamo $k = 4$, popločavanje ravnine sa četiri kvadrata.

Za $n = 6$ dobivamo $k = 3$ popločavanje ravnine s tri pravilna šesterokuta. □

Čvorišta popločavanja kojima je protopločica jednakostranični trokut označavamo 3^6 ili (3,3,3,3,3,3), broj rubova koji se sastaje u svakom čvorištu je šest, stoga je svako čvorište ovog popločavanja 6-valentno, odnosno popločavanje je 6-valentno. Čvorišta popločavanja kvadratima označavamo (4,4,4,4) ili 4^4 i popločavanje je 4-valentno. Čvorišta popločavanja pravilnim šesterokutima označavamo (6,6,6) ili 6^3 i popločavanje je 3-valentno. Jedina tri rub-na-rub monoedralna popločavanja prikazana su na slici 2.1. Kao što je već spomenuto, to su jedina tri pravilna popločavanja ravnine, ona su izoedralna jer sve pločice popločavanja čine jednu tranzitivnu klasu, izogonalna su jer i čvorišta svakog popločavanja čine tranzitivnu klasu.

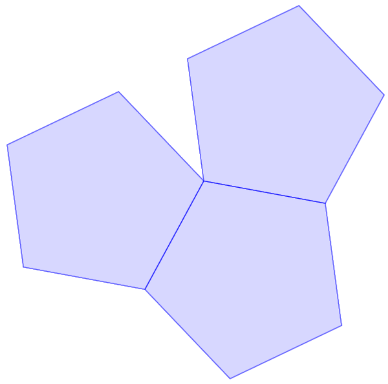


(a) (3,3,3,3,3,3) (b) (4,4,4,4)

(c) (6,6,6)

Slika 2.1: Jedina tri pravilna popločavanja ravnine

Pokazali smo da je ravninu moguće popločiti s jednakostraničnim trokutima, kvadratima i pravilnim šesterokutima, no pogledajmo zašto ju ne možemo popločiti s pravilnim peterokutima. Dokaz toga možemo prikazati ilustracijom, pa tako na slici 2.2 uočavamo da prilikom popločavanja ravnine trima pravilnim peterokutima imamo prazninu. Kada bismo tu prazninu popunili s još jednim pravilnim peterokutom došlo bi do preklapanja. Sve to nam je u kontradikciji s definicijom popločavanja ravnine.



Slika 2.2: Ilustracija nemogućnosti popločavanja ravnine pravilnim peterokutima

2.2 Polupravilna popločavanja ravnine

Promotrimo sada slučaj popločavanja ravnine s više vrsta pravilnih mnogokuta. Najprije trebamo odrediti koliko se najviše različitih pravilnih mnogokuta može sastajati u jednom čvorištu. Odgovor na to pitanje daje nam teorem:

Teorem 2.2.1. *U razdiobi ravnine na pravilne mnogokute ne može biti više od tri različite vrste pravilnih mnogokuta.*

Dokaz. Postavljamo isti uvjet kao i u prethodnom poglavlju, zbroj veličina kutova u svakom čvorištu iznosi 360°.

Zbroj veličina unutrašnjih kutova u svakom n-terokutu iznosi $(n-2)\cdot 180°$, ako s α_n označimo veličinu unutrašnjeg kuta u n-terokutu slijedi:

$$\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} \tag{2.3}$$

Promotrimo jednakostraničan trokut, kvadrat, pravilni peterokut i pravilni šesterokut. To su pravilni mnogokuti s najmanjim brojem stranica i najmanjom veličinom unutrašnjeg kuta. Uvrštavanjem $n = 3, 4, 5, 6$ u formulu (2.3) dobivamo da veličina unutrašnjeg kuta jednakostraničnog trokuta iznosi $\alpha_3 = 60^\circ$, kvadrata $\alpha_4 = 90^\circ$, pravilnog peterokuta $\alpha_5 = 108^\circ$ i pravilnog šesterokuta $\alpha_6 = 120^\circ$. Pretpostavimo da se u nekoj razdiobi ravnine u jednom čvorištu sastaju upravo ti pravilni mnogokuti. Zbroj od po jednog kuta jednakostraničnog trokuta, kvadrata, pravilnog peterokuta i pravilnog šesterokuta iznosi: $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ$, što je veće od 360°. S obzirom da su to pravilni mnogokuti s najmanjim brojem stranica i najmanjom veličinom unutarnjeg kuta, kada bismo jedan od njih zamijenili s pravilnim mnogokutom s većim brojem stranica, odnosno većom veličinom unutarnjeg kuta, suma bi bila još veća. Zaključak je da u razdiobi ravnine na pravilne mnogokute ne može biti više od tri različite vrste pravilnih mnogokuta. □

Pronađimo sve moguće razdiobe, tj. popločavanja ravnine u pravilne mnogokute, pri čemu mnogokuti mogu imati različit broj stranica, ali sve stranice i čvorišta moraju biti sukladni.

Uzmimo najprije slučaj gdje u razdiobi ravnine imamo dvije različite vrste pravilnih mnogokuta, takvo popločavanje je diedralno. Svaka pločica popločavanja kongruentna je jednoj od dvije različite protopločice. Neka se u svakom čvorištu sastaje k_1 n_1-terokuta i k_2 n_2-terokuta. Nužan uvjet je i dalje da je zbroj veličina kutova u jednom čvoristu jednak 360°. Slično kao i prije uvjet možemo zapisati u obliku diofantske jednadžbe:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} = 360^\circ \tag{2.4}$$

uz uvjet $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ i $n_1, n_2 \geq 3$.

Zbog razdiobe ravnine na pravilne šesterokute znamo da je najmanji broj mnogokuta koji se sastaje u jednom čvorištu tri pa je $k_1 + k_2 \geq 3$. Isto tako, najveći broj pravilnih mnogokuta koji se sastaje u jednom čvoristu je šest što slijedi iz razdiobe ravnine na jednakostranične trokute, pa je $k_1 + k_2 < 6$, jer je od njih barem jedan mnogokut koji nije trokut. Rješavamo jednadžbu (2.4) uz spomenute uvjete. Skratimo li ju sa 360° dobivamo:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2)}{2n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2)}{2n_2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$k_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1 \tag{2.5}$$

Iz uvjeta $3 \leq k_1 + k_2 < 6$ slijedi da je $k_1 + k_2 \in \{3, 4, 5\}$ odnosno $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Za brojeve k_1 i k_2 imamo sljedeće mogućnosti, koje su zbog preglednosti prikazane u tablici:

k_1	1	2	1	3	2	1	4	2	3
k_2	2	1	3	1	2	4	1	3	2

Kao i prije, do rješenja ćemo doći uvrštavanjem svih mogućnosti u jednadžbu (2.5). Razlikujemo pet slučajeva:

.

1. slučaj: $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$ ili $k_1 = 2$ i $k_2 = 1$

2. slučaj: $k_1 = 1$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = 1$

3. slučaj: $k_2 = 2$ i $k_2 = 2$

4. slučaj: $k_1 = 1$ i $k_2 = 4$ ili $k_1 = 4$ i $k_2 = 1$

5. slučaj: $k_1 = 2$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = 2$

1. slučaj

Uvrštavanjem $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$ u jednadžbu (2.5) dobivamo:

$$1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} = 1$$

Množenjem cijele jednadžbe s $2n_1n_2$ slijedi:

$$n_1n_2 - 2n_2 + 2n_1n_2 - 4n_1 = 2n_1n_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n_1(n_2 - 4) = 2n_2$$

Podijelimo posljednju jednakost s $n_2 - 4$ i dobivamo:

$$n_1 = \frac{2n_2}{n_2 - 4}$$

Sredimo izraz, oduzimanjem i dodavanjem 8 u brojniku, tako da dobijemo uvjet na n_2.

$$n_1 = \frac{2n_2}{n_2 - 4} = \frac{2n_2 - 8 + 8}{n_2 - 4} = \frac{2(n_2 - 4) + 8}{n_2 - 4}$$

Na kraju dobivamo:

$$n_1 = 2 + \frac{8}{n_2 - 4} \tag{2.6}$$

Jer je $n_1 \in \mathbb{N}$ zaključujemo da $n_2 - 4$ mora biti djelitelj broja 8. Dakle

$$n_2 - 4 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

odnosno

$$n_2 \in \{-4, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 12\}$$

Jer je $n_2 \geq 3$ preostaje nam pet mogućih vrijednosti za n_2. Uvrstimo li te vrijednosti u jednadžbu (2.6) dobivamo da je $n_1 \in \{-6, 10, 6, 4, 3\}$. Prva mogućnost za n_1 nam ne zadovoljava uvjet da je $n_1 \geq 3$ i na kraju imamo četiri slučaja:

1a. $n_1 = 10$ i $n_2 = 5$

1b. $n_1 = 6$ i $n_2 = 6$

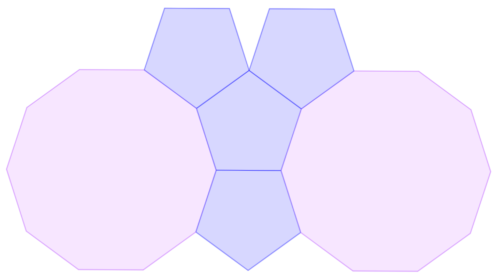
1c. $n_1 = 4$ i $n_2 = 8$

1d. $n_1 = 3$ i $n_2 = 12$

Popločimo ravninu na ova četiri načina.

1a. (5,5,10)

Popločavanje sačinjeno od dva pravilna peterokuta i pravilnog deseterokuta. Iz slike 2.3 uočavamo da ravninu ne možemo popločiti dvama pravilnim peterokutima i pravilnim deseterokutom jer se prilikom slaganja pojavljuje praznina što nam je u kontradikciji s definicijom popločavanja ravnine.



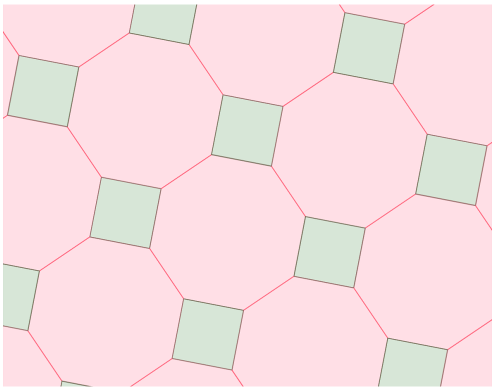
Slika 2.3: (5,5,10)

1b. (6,6,6)

Ravninu možemo popločiti sa tri pravilna šesterokuta i ovo je popločavanje pravilno, spomenuto u poglavlju 2.1 i prikazano je na slici 2.1(c).

1c. (4,8,8)

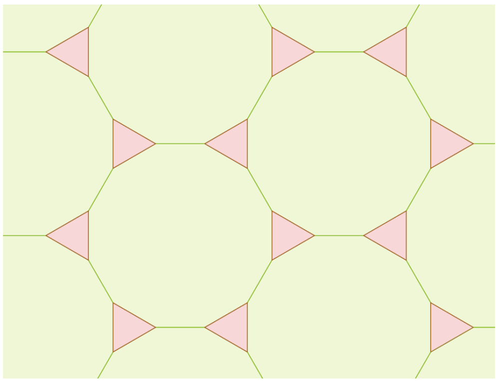
Popločavanje ravnine čije su protopločice četverokut i pravilni osmerokut. Popločavanje je moguće, nema praznina ni preklapanja. Prikazano je na slici 2.4 i označavamo ga (4,8,8) ili 4.8^2. Čvorišta popločavanja istog su tipa i 3-valentna.



Slika 2.4: (4,8,8)

1d. (3,12,12)

Protopločice su jednakostranični trokut i pravilni dvanaesterokut, popločavanje vidimo na slici 2.5. Označavamo (3,12,12) ili 3.12^2. Čvorišta su 3-valentna i istog tipa.



Slika 2.5: (3,12,12)

Jer smo koristili samo nužan uvjet, da je zbroj kutova u čvorištu jednak 360°, primjetimo da dobivena rješenja jednadžbe ne moraju biti rješenja postavljenog problema popločavanja, kao što vidimo u primjeru 1a. U prvom slučaju, za $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$ imamo, dakle, dva rješenja: (3,12,12) i (4,8,8). Oba popločavanja imaju valenciju svakog čvorišta 3, dakle ona su 3-valentna popločavanja. Za $k_1 = 2$ i $k_2 = 1$ zaključivanje bi bilo analogno.

2. slučaj

U drugom slučaju, u jednadžbu (2.5) uvrštavamo $k_1 = 1$ i $k_2 = 3$

$$1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{n_2} = 1$$

Množenjem cijele jednadžbe s $2n_1n_2$ i nakon izlučivanja n_1 slijedi:

$$n_1n_2 - 2n_2 + 3n_1n_2 - 6n_1 = 2n_1n_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n_1(n_2 - 3) = n_2$$

Podijelimo posljednju jednakost s $n_2 - 3$ i dobivamo:

$$n_1 = \frac{n_2}{n_2 - 3}$$

Sredimo izraz, oduzimanjem i dodavanjem 3 u brojniku, tako da dobijemo uvjet na n_2.

$$n_1 = \frac{n_2}{n_2 - 3} = \frac{n_2 - 3 + 3}{n_2 - 3} = \frac{(n_2 - 3) + 3}{n_2 - 3}$$

Na kraju dobivamo:

$$n_1 = 1 + \frac{3}{n_2 - 3} \tag{2.7}$$

Jer je $n_1 \in \mathbb{N}$ zaključujemo da $n_2 - 3$ mora biti djelitelj broja 3. Dakle

$$n_2 - 3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

odnosno

$$n_2 \in \{0, 2, 4, 6\}$$

Jer je $n_2 \geq 3$ preostaju nam dvije moguće vrijednosti za n_2. Za $n_2 = 4$ uvrštavanjem u jednadžbu (2.7) dobivamo $n_1 = 4$. To je popločavanje ravnine sa četiri kvadrata koje možemo vidjeti na slici 2.1(b). Za $n_2 = 6$ dobivamo da je $n_1 = 2$, ali ovaj slučaj ne zadovoljava uvjet $n_1 \geq 3$. Analogno bismo mogli zaključiti da smo za ovaj slučaj uzeli $k_1 = 3$ i $k_2 = 1$.

3. slučaj

Uvrštavamo u jednadžbu (2.5) $k_1 = 2$ i $k_2 = 2$ i dobivamo:

$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} = 1$$

Množenjem cijele jednadžbe s $n_1 n_2$ i nakon izlučivanja n_1 slijedi:

$$2n_1 n_2 - 2n_2 - 2n_1 = n_1 n_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n_1(n_2 - 2) = 2n_2$$

Podijelimo posljednju jednakost s $n_2 - 2$ i dobivamo:

$$n_1 = \frac{2n_2}{n_2 - 2}$$

Sredimo izraz, oduzimanjem i dodavanjem 4 u brojniku, tako da dobijemo uvjet na n_2.

$$n_1 = \frac{2n_2}{n_2 - 2} = \frac{2n_2 - 4 + 4}{n_2 - 2} = \frac{2(n_2 - 2) + 4}{n_2 - 2}$$

Na kraju dobivamo:

$$n_1 = 2 + \frac{4}{n_2 - 2} \tag{2.8}$$

Jer je $n_1 \in \mathbb{N}$ zaključujemo da $n_2 - 2$ mora biti djelitelj broja 4. Dakle

$$n_2 - 2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$$

odnosno

$$n_2 \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$$

Jer je $n_2 \geq 3$ preostaje nam tri mogućih vrijednosti za n_2. Uvrstimo li te vrijednosti u jednadžbu (2.8) dobivamo da je $n_1 \in \{3, 4, 6\}$. Uočimo da bismo za slučaj kada je $n_1 = 3$ i $n_2 = 6$ te slučaj kada je $n_1 = 6$ i $n_2 = 3$ dobili jednake rezultate, stoga razlikujemo sljedeća dva slučaja:

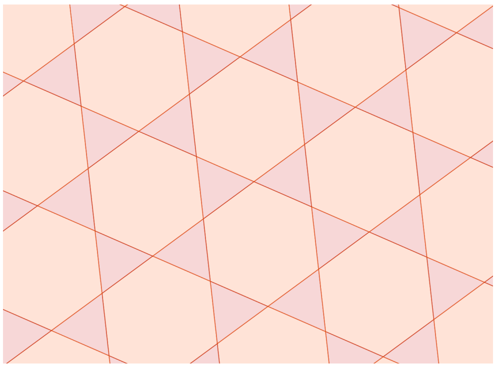
3a. $n_1 = 3$ i $n_2 = 6$

3b. $n_1 = 4$ i $n_2 = 4$

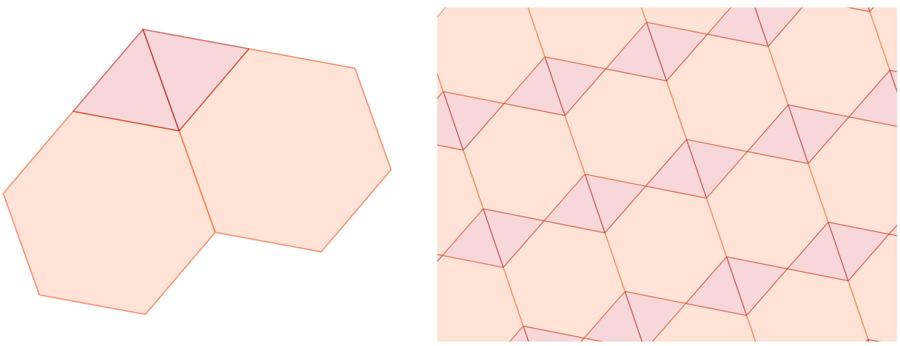
Popločimo ravninu na ova dva načina.

3a. (3,6,3,6) i (3,3,6,6)

Rješenje slučaja je popločavanje određeno protopločicama: jednakostranični trokut i pravilni šesterokut. U ovom slučaju imamo dva popločavanja iste klase čvorišta (isti broj svake vrste mnogokuta u čvorištu, dva jednakostranična trokuta i dva pravilna šesterokuta) no čvorišta im nisu istog tipa (poredak mnogokuta u svakom čvorištu jednog i drugog popločavanja se razlikuje). Mnogokute možemo rasporediti na dva načina i to tako da su kod tipa (3,6,3,6) trokuti jedan nasuprot drugoga i šesterokuti također, ili kao kod tipa (3,3,6,6) gdje su trokuti jedan pored drugoga a tako i šesterokuti. Prvi tip, (3,6,3,6) prikazan je na slici 2.6(a) i sva čvorišta ovog popločavanja su sukladna. Popločavanje možemo još označiti i kao 3.6.3.6. Drugi tip popločavanja, (3,3,6,6) prikazan je na slici 2.7(b) i čvorišta ovog popločavanja nisu sukladna, odnosno nisu istog tipa. Drugi način označavanja je $3^2.6^2$. Oba popločavanja su 4-valentna.



Slika 2.6: (3,6,3,6)



(a) $(3, 3, 6, 6)$ (b) $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$

Slika 2.7

3b. (4,4,4,4)

Ovaj slučaj predstavlja popločavanje ravnine kvadratima, prikazano je na slici 2.1(b) na stranici 15.

4. slučaj

U četvrtom slučaju uvrštavanjem $k_1 = 1$ i $k_2 = 4$ u jednadžbu (2.5) dobivamo:

$$1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} + 2 - \frac{4}{n_2} = 1$$

Množenjem cijele jednadžbe s $2n_1n_2$ i nakon izlučivanja n_1 slijedi:

$$n_1n_2 - 2n_2 + 4n_1n_2 - 8n_1 = 2n_1n_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n_1(3n_2 - 8) = 2n_2$$

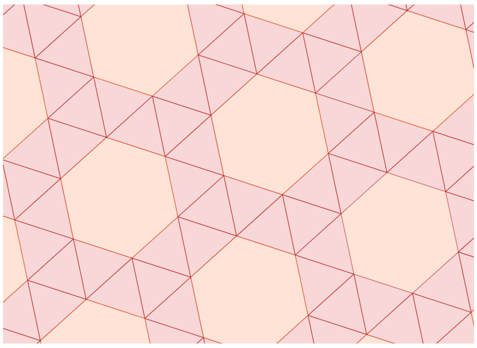
Podijelimo posljednju jednakost s $3n_2 - 8$ i dobivamo:

$$n_1 = \frac{2n_2}{3n_2 - 8}$$

Znamo da je $n_2 \geq 3$ te krenemo li uvrštavati redom mogućnosti za n_2 u posljednji izraz, uočavamo da je jedino moguće rješenje kada je $n_2 = 3$. Tada imamo:

$$n_1 = \frac{2n_2}{3n_2 - 8} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3 - 8} = 6$$

Radi se o popločavanju ravnine četirima jednakostraničnim trokutima i jednim pravilnim šesterokutom, prikazano je na slici 2.8. Ovo popločavanje označavamo (3,3,3,3,6) ili $3^4.6$. Popločavanje u kojem su sva čvorišta tipa $3^4.6$ se zapravo ostvaruje u dva oblika ekvivalentnih popločavanja. Postoji simetrija ravnine koja jedno popločavanje preslikava u drugo, a to je osna simetrija. Kažemo da su ta dva oblika jedan drugome slika u ogledalu. Popločavanje je 5-valentno jer je svako čvorište krajnja točka 5 rubova. Analogno bismo zaključili da smo uvrstili $k_1 = 4$ i $k_2 = 1$.



Slika 2.8: (3,3,3,3,6)

5. slučaj

Uvrštavamo u jednadžbu (2.5) $k_1 = 3$ i $k_2 = 2$ i dobivamo:

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)=1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{n_1}+1-\frac{2}{n_2}=1$$

Množenjem cijele jednadžbe s $2n_1n_2$ i nakon izlučivanja n_1 slijedi:

$$3n_1n_2-6n_2+2n_1n_2-4n_1=2n_1n_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$n_1(3n_2-4)=6n_2$$

Podijelimo posljednju jednakost s $3n_2-4$ i dobivamo:

$$n_1=\frac{6n_2}{3n_2-4}$$

Sredimo izraz, oduzimanjem i dodavanjem 8 u brojniku, tako da dobijemo uvjet na n_2.

$$n_1=\frac{6n_2}{3n_2-4}=\frac{6n_2-8+8}{3n_2-4}=\frac{2(3n_2-4)+8}{3n_2-4}$$

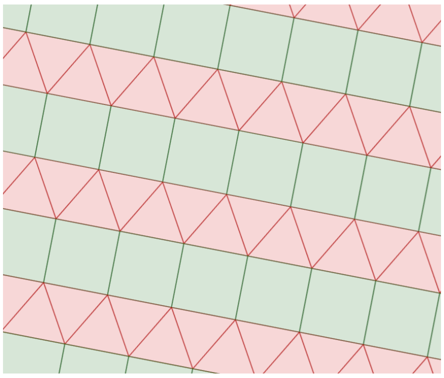
Na kraju dobivamo:

$$n_1=2+\frac{8}{3n_2-4} \tag{2.9}$$

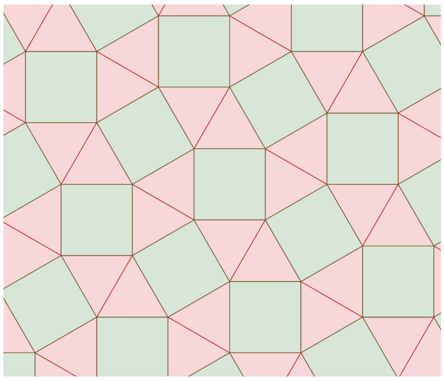
Jer je $n_1 \in \mathbb{N}$ zaključujemo da $3n_2 - 4$ mora biti djelitelj broja 8. Dakle

$$3n_2 - 4 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$3n_2 \in \{-4, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 12\}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$n_2 \in \{-\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{8}{3}, 4\}$$

Jer je $n_2 \geq 3$ preostaje nam jedna mogućnost za n_2. Uvrstimo li $n_2 = 4$ u jednadžbu (2.9) dobivamo da je $n_1 = 3$. Rješenje ovog slučaja je popločavanje čije su protopločice jednakostranični trokut i kvadrat. Međutim mnogokute možemo rasporediti na dva načina, radi se o dvama različitim popločavanjima čija su čvorištima iste klase a različitog tipa. Prvi tip označavamo (3,3,3,4,4) ili $3^3.4^2$ i prikazan je na slici 2.9(a), drugi tip označavamo (3,3,4,3,4) ili $3^2.4.3.4$ i prikazan je na slici 2.9(b). U oba popločavanja čvorišta su sukladna i 4-valentna. Analogni zaključci bili bi i da smo uzeli $k_1 = 2$ i $k_2 = 3$.



(a) (3,3,3,4,4)



(b) (3,3,4,3,4)

Slika 2.9

Iscrpili smo sve slučajeve popločavanja ravnine dvama različitim vrstama pravilnih mnogokuta. Razmotrimo slučaj popločavanja ravnine trima različitim vrstama pravilnih mnogokuta odnosno triedralna popločavanja pravilnim mnogokutima. Neka se u jednom čvorištu sastaje k_1 pravilnih n_1-terokuta, k_2 pravilnih n_2-terokuta i k_3 pravilnih n_3-terokuta. Uz uvjet da je zbroj veličina kutova oko jednog čvorista jednak 360° slijedi diofantska jednadžba:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + k_3 \cdot \frac{(n_3 - 2) \cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ \tag{2.10}$$

uz uvjet $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ i $n_1, n_2, n_3 \geq 3$. Skratimo li jednadžbu s $360°$ i nakon sređivanja dobivamo:

$$k_1 \cdot \frac{(n_1 - 2)}{2n_1} + k_2 \cdot \frac{(n_2 - 2)}{2n_2} k_3 \cdot \frac{(n_3 - 2)}{2n_3} = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$k_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}\right) + k_3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_3}\right) = 1 \tag{2.11}$$

Uvjet na k-ove dobijemo analognim zaključivanjem kao i prije, te iz $3 \leq k_1 + k_2 + k_3 < 6$ slijedi $k_1 + k_2 + k_3 \in \{3, 4, 5\}$, odnosno $k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, 3\}$. Mogućnosti za k-ove su sljedeće:

k_1	1	1	1	2	1	1	3	1	2	2
k_2	1	1	2	1	1	3	1	2	1	2
k_3	1	2	1	1	3	1	1	2	2	1

Razlikujemo četiri slučaja: .

1. slučaj: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$

2. slučaj: $k_1 = k_2 = 1$ i $k_3 = 2$ ili $k_1 = k_3 = 1$ i $k_2 = 2$ ili $k_1 = 2$ i $k_2 = k_3 = 1$

3. slučaj: $k_1 = k_2 = 1$ i $k_3 = 3$ ili $k_1 = k_3 = 1$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = k_3 = 1$

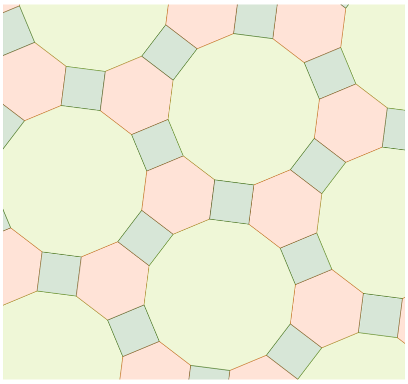
4. slučaj: $k_1 = 1$ i $k_2 = k_3 = 2$ ili $k_1 = k_3 = 2$ i $k_2 = 1$ ili $k_1 = k_2 = 2$ i $k_3 = 1$

Uvrštavanjem odgovarajućih k-ova u jednadžbu (2.11) dobivamo diofantske jednadžbe koje rješavamo analogno prethodnim.

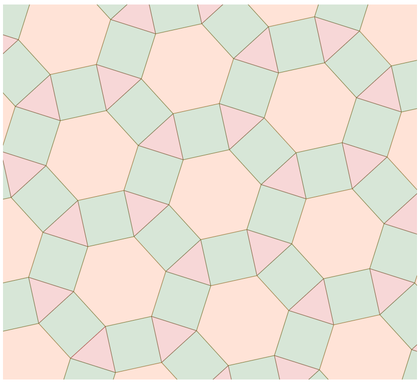
1. slučaj

U prvom slučaju dobivamo sljedeća rješenja: $(4, 6, 12)$, $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(4, 5, 20)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 10)$ i $(6, 6, 6)$. Prvo rješenje odgovara popločavanju ravnine kvadratom, pravilnim šesterokutom i pravilnim dvanaesterokutom, popločavanje je prikazano slici 2.10(a) i sva su čvorišta sukladna i 3-valentna.

Sa sljedećih pet rješenja nije moguće popločiti ravninu. Na slici 2.11 prikazane su ilustracije nemogućnosti popločavanja tim rješenjima. Uočavamo da se kod svakog od tih popločavanja prilikom slaganja mnogokuta pojavljuje praznina koju nije moguće popuniti sa mnogokutom iz klase čvorišta tako da se ne dogodi preklapanje. Ponovno, kao i kod popločavanja ravnine dvama različitim mnogokutima, dobivamo rješenja jednadžbe koja nisu rješenja postavljenog problema popločavanja. Razlog tome je što smo koristili samo nužan uvjet a to je da je zbroj kutova u čvorištu jednak $360°$. Zadnja četiri rješenja također nisu rješenja postavljenog problema jer se ne radi o trima različitim vrstama pravilnih mnogokuta. Ali primijetimo da se radi o popločavanjima ravnine koja smo spomenuli ranije, $(3, 12, 12)$ na slici 2.5, $(4, 8, 8)$ na slici 2.4, $(6, 6, 6)$ na slici 2.1 te nemogućnost popločavanja $(5, 5, 10)$ na slici 2.3.



(a) (4,6,12)



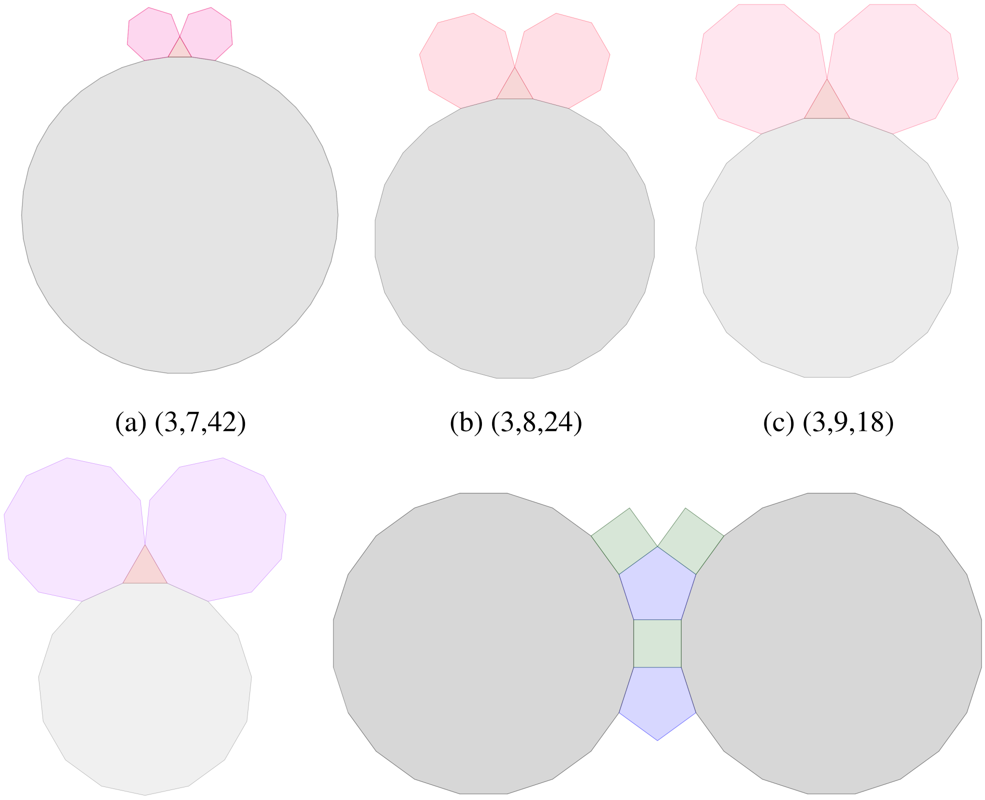
(b) (3,4,6,4)

Slika 2.10

2. slučaj

Rješenje drugog slučaja je popločavanje ravnine čije su protopločice jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni šesterokut koje možemo rasporediti na dva načina. Prva mogućnost u oznaci $(3, 4, 6, 4)$ ili 3.4.3.6 prikazana je na slici 2.10(b). Čvorišta su sukladna i 4-valentna. Druga mogućnost je popločavanje iste klase, ali se sastoji od dva tipa čvorišta. Detaljnije će biti objašnjeno kasnije. Dakle, čvorišta mu nisu sukladna i sva su 4-valentna. Popločavanje je prikazano na slici 2.12, čvorište označavamo s $(3, 4, 4, 6)$ ili $3.4^2.6$.

Ostala rješenja ovog slučaja su popločavanje protopločicama koje su jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni dvanaesterokut, postoje dvije mogućnosti rasporeda mnogokuta $(3, 3, 4, 12)$ ili $(3, 4, 3, 12)$. Ravninu je moguće popločiti na ta dva načina međutim svako popločavanje ima po dva tipa čvorišta. Popločavanje $(3, 3, 4, 12)$ prikazano je na slici 2.13 i čvorišta su mu ili 4-valentna ili 6-valentna. Drugo popločavanje, $(3, 4, 3, 12)$, prikazano je na slici 2.14 i čvorišta su mu ili 3-valentna ili 4-valentna. Detaljnije će biti pojašnjena kasnije. Analogna rješenja dobivamo i ako uzmemo da je $k_1 = k_3 = 1$ i $k_2 = 2$ ili $k_1 = 2$ i $k_2 = k_3 = 1$.



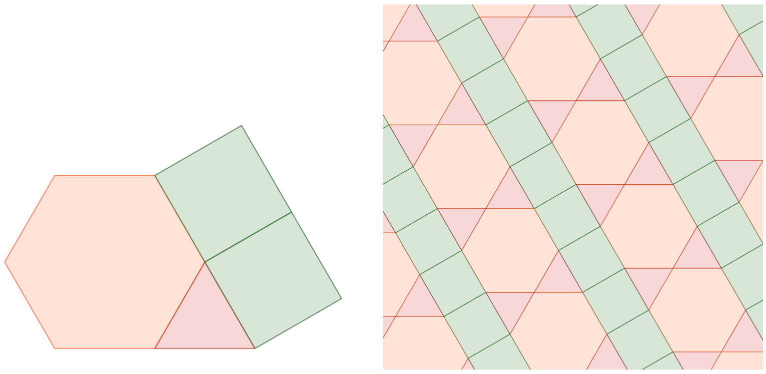
(a) (3,7,42) (b) (3,8,24) (c) (3,9,18)

(d) (3,10,15) (e) (4,5,20)

Slika 2.11

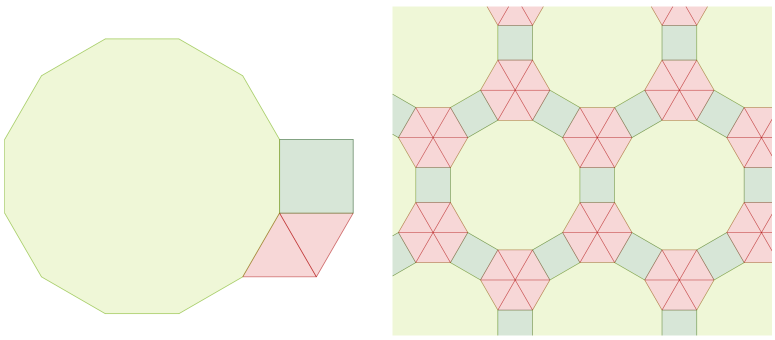
3. slučaj

U trećem slučaju dobivamo rješenja jednadžbe koja nisu rješenja postavljenog problema jer tražimo razdiobe ravnine na tri različite vrste pravilnih mnogokuta. Ali pretpostavimo li da imamo razdiobu na tri jednakostranična trokuta, jedan kvadrat i jedan pravilni peterokut. Zbroj veličina kutova navedenih mnogokuta oko jednog čvorišta iznosio bi $3 \cdot 60° + 90° + 108° = 378°$, što je veće od $360°$. Znamo da su jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni peterokut pravilni mnogokuti s najmanjom veličinom unutarnjih kutova. Zamijenimo li bilo koji od njih nekim drugim mnogokutom, zbroj veličina kutova oko čvorišta biti će još veći. Dakle, zaključak je da ovaj slučaj nema rješenja.



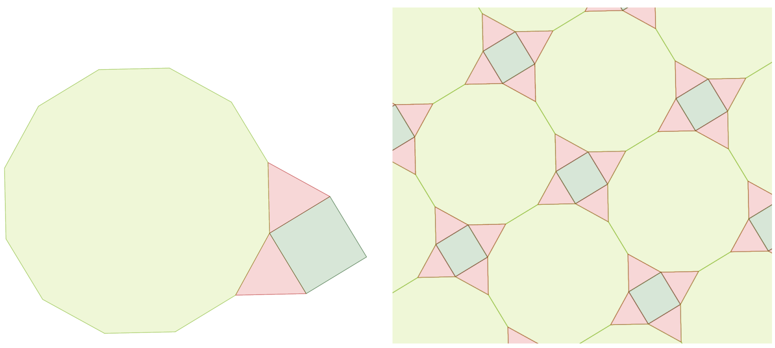
(a) $(3, 4, 4, 6)$ (b) $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$

Slika 2.12



(a) $(3, 3, 4, 12)$ (b) $(3^6; 3^2.4.12)$

Slika 2.13



(a) $(3, 4, 3, 12)$ (b) $(3.4.3.12; 3.12^2)$

Slika 2.14

4. slučaj

Analogno kao i za treći slučaj, pretpostavimo da imamo razdiobu na pravilne mnogokute s najmanjom veličinom kutova, dva jednakostranična trokuta, dva kvadrata i jedan pravilni peterokut. Zbroj veličina kutova navedenih mnogokuta iznosio bi $2 \cdot 60° + 2 \cdot 90° + 108° = 408°$. Pa tako zaključujemo da i ovaj slučaj nema rješenja.

Iscrpili smo sve mogućnosti i zaključujemo da kod popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima, bez praznina i preklapanja, postoji 17 načina izbora protopločica odnosno mnogokuta koji se sastaju u jednom čvorištu. Dakle, postoji 17 klasa čvorišta. Od tih 17 klasa, za njih četiri postoje po dvije mogućnosti slaganja mnogokuta, stoga možemo reći da postoji 21 mogućih tipova čvorišta. U tablici 2.1 prikazane su moguće klase i tipovi čvorišta rub-na-rub popločavanja.

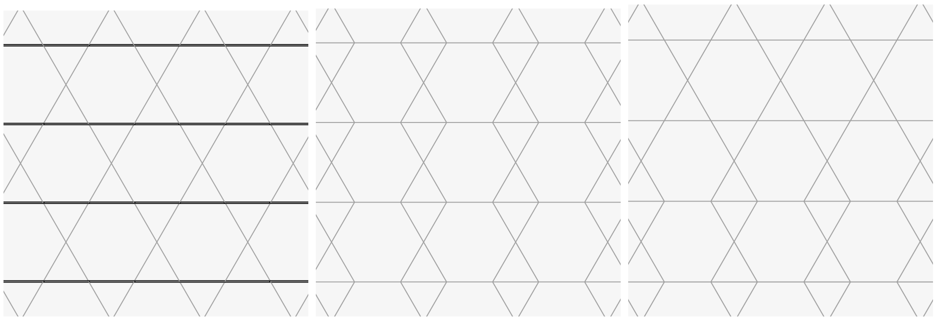
Ukoliko je tip svakog čvorišta popločavanja $a_1.b_2.c_3.\cdots$, popločavanje ćemo označavati sa $(a_1.b_2.c_3.\cdots)$ i kažemo da je popločavanje *tipa* $(a_1.b_2.c_3.\cdots)$, koristimo "potencije" radi skraćivanja naziva.

Kada bi se ograničili na popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima koja su rub-na-rub i čija su sva čvorišta iste klase a različitih tipova onda zapravo postoji beskonačno mnogo različitih popločavanja. Na primjer, popločavanje dvama jednakostraničnim trokutima i dvama pravilnim šesterokutima, prikazano na slici 2.15(a). Presiječemo li popločavanje paralelnim linijama na trake koje nezavisno jedna od druge klize dobivamo neprebrojivo beskonačno mnogo popločavanja čija su čvorišta iste klase (3.6.3.6) i $(3^2.6^2)$. Dvije mogućnosti prikazane na slikama 2.15(b) i 2.15(c). Slično je i sa popločavanjem trima jednakostraničnim trokutima i dvama kvadratima. Popločavanje možemo presiječi "cik-cak" linijama na trake, označenih na slici 2.16(a), i zamijeniti ih sa zrcalnom slikom istih. Tako dobivamo beskonačno mnogo različitih popločavanja klase $(3^2.4.3.4)$, jedan primjer je na slici 2.16(b). Na slici 2.17(a) vidimo popločavanje (3.4.6.4), označeni su diskovi koje čine pravilni šesterokuti i njemu susjedni mnogokuti. Svaki takav disk možemo rotirati za $\frac{\pi}{6}$ bez promjene klasa čvorišta, na taj način dobivamo opet beskonačno mnogo različitih popločavanja klase (3.4.6.4) i $(3.4^2.6)$. Primjer jednog takvog popločavanja vidimo na slici 2.17(b).

Zbog navedenih beskonačnih načina popločavanja ograničavamo se na popločavanja pravilnim mnogokutima čija su čvorišta istog tipa (iste valencije). U ovom slučaju, jer su svi rubovi iste duljine, popločavanja su monogonalna. Svako čvorište popločavanja sa svojim incidentnim rubovima formira figure kongruentne sa bilo kojim drugim čvorištem i njemu incidentnim rubovima. Kao što smo već naveli, postoji 21 mogućnosti za tip čvorišta. Restrikcija na čvorišta istog tipa isključuje čvorišta u tablici označena sa zvjezdicom, $(3^2.4.12)$, $(3.4.3.12)$, $(3^2.6^2)$, $(3.4^2.6)$, te zbog pojavljivanja praznina i preklapanja,

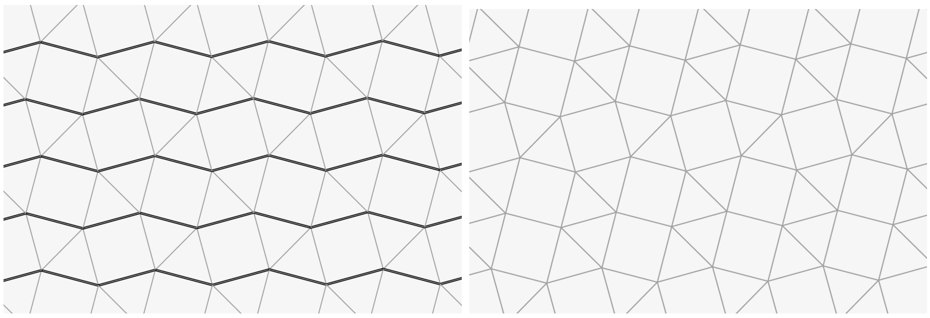
n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18	20	24	42	Tip čvorišta		Slika
broj n-terokuta koji se sastaju u čvorištu	6														3.3.3.3.3.3		2.1(a)
	4			1											3.3.3.3.6		2.8
	3	2													3.3.3.4.4		2.9(a)
															3.3.4.3.4		2.9(b)
	2	1							1						3.3.4.12	*	2.13(a)
															3.4.3.12	*	2.14(a)
	2			2											3.3.6.6	*	2.7(a)
															3.6.3.6		2.6
	1	2		1											3.4.4.6	*	2.12(a)
															3.4.6.4		2.10(b)
	1				1									1	3.7.42	**	2.11(a)
	1					1							1		3.8.24	**	2.11(b)
	1						1				1				3.9.18	**	2.11(c)
	1							1		1					3.10.15	**	2.11(d)
	1								2						3.12.12		2.5
		4													4.4.4.4		2.1(b)
		1	1									1			4.5.20	**	2.11(e)
		1		1					1						4.6.12		2.10(a)
		1				2									4.8.8		2.4
			2					1							5.5.10	**	2.3
				3											6.6.6		2.1(c)

Tablica 2.1: Klase i tipovi čvorišta rub-na-rub popločavanja pravilnim mnogokutima



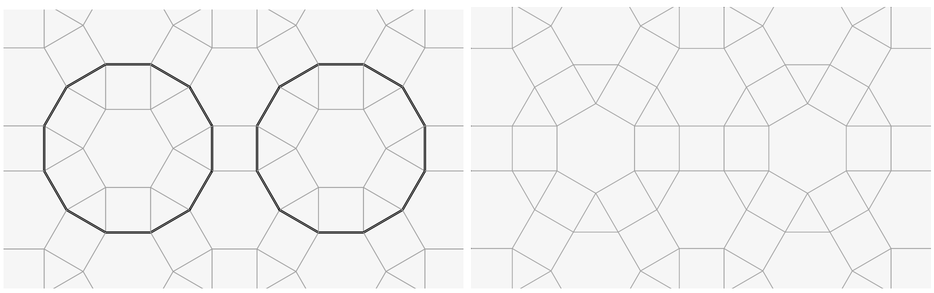
(a) (b) (c)

Slika 2.15



(a) (b)

Slika 2.16



(a) (b)

Slika 2.17

isključujemo čvorišta označena sa dvije zvjezdice, (3.7.42), (3.8.24), (3.9.18), (3.10.15), (4.5.20) i (5^2.10). Sa sveukupno njih 10, nije moguće popločiti ravninu tako da su čvorišta istog tipa. Preostaje 11 mogućih tipova čvorišta:

Teorem 2.2.2. *Postoji točno 11 različitih rub-na-rub popločavanja pravilnim mnogokutima kod kojih su sva čvorišta istog tipa. To su* (3^6), $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6.3.6)$, (3.12^2), (4^4), $(4.6.12)$, (4.8^2) *i* (6^3).

Tih 11 popločavanja ravnine nazivamo Arhimedovim popločavanjima, to su dakle popločavanja sa jednim tipom čvorišta. Generalno, može biti i više od jednog tipa čvorišta u popločavanju. Ako popločavanje ima k-tipova čvorišta, nazivamo ga k-Arhimedovo popločavanje. Jedna vrlo bitna osobina Arhimedovih popločavanja jest da su izogonalna, čvorišta popločavanja čine jednu tranzitivnu klasu, ekvivalentna su. Zbog toga ćemo ih zvati *uniformna* popločavanja. Razlog tome je što pod Arhimedova smatramo popločavanja koja su monogonalna, što je blisko tome da susjedna čvorišta izgledaju "isto", dok termin "uniformno" implicira strožu osobinu izogonalnosti (ekvivalencija čvorišta s obzirom na simetriju popločavanja).

2.3 k-uniformna popločavanja

Iz opažanja da su Arhimedova popločavanja uniformna slijedi generalizacija. Rub-na-rub popločavanje pravilnim mnogokutima nazivamo $k-uniformno$ ako njegova čvorišta formiraju točno k tranzitivnih klasa u odnosu na grupe simetrija popločavanja. Drugim riječima, popločavanje je k-unifomno ako je k-izogonalno i njegove pločice su pravilni mnogokuti. Kažemo da su uniformna popločavanja 1-uniformna. Ako su tipovi čvorišta u k klasi $a_1.b_1.c_1.\cdots; a_2.b_2.c_2.\cdots;\cdots; a_k.b_k.c_k.\cdots$ popločavanje označavamo sa simbolom $(a_1.b_1.c_1.\cdots; a_2.b_2.c_2.\cdots;\cdots; a_k.b_k.c_k.\cdots)$, upotrebom "eksponenta" radi skraćivanja naziva i donjeg indeksa kojim obilježavamo različita popločavanja u kojima se pojavljuju čvorišta istog tipa. Vrijedi sljedeći teorem kojeg ću navesti bez dokaza (iznio i dokazao matematičar Otto Krotenheerdt):

Teorem 2.3.1. *Postoji 20 različitih tipova 2-uniformnih rub-na-rub popločavanja pravilnim mnogokutima, to su:* $(3^6;3^4.6)_1$, $(3^6;3^4.6)_2$, $(3^6;3^3.4^2)_1$, $(3^6;3^3.4^2)_2$, $(3^6;3^2.4.3.4)$, $(3^6;3^2.4.12)$, $(3^6;3^2.6^2)$, $(3^4.6;3^2.6^2)$, $(3^3.4^2;3^2.4.3.4)_1$, $(3^3.4^2;3^2.4.3.4)_2$, $(3^3.4^2;3.4.6.4)$, $(3^3.4^2;4^4)_1$, $(3^3.4^2;4^4)_2$, $(3^2.4.3.4;3.4.6.4)$, $(3^2.6^2;3.6.3.6)$, $(3.4.3.12;3.12^2)$, $(3.4^2.6;3.4.6.4)$, $(3.4^2.6;3.6.3.6)_1$, $(3.4^2.6;3.6.3.6)_2$ *i* $(3.4.6.4;4.6.12)$.

Krotenheerdt je u nizu svojih radova detaljno proučavao ona k-uniformna popločavanja kod kojih se k-tranzitivnih klasa čvorišta sastoji od k različitih tipova čvorišta. Ako sa $K(k)$ označimo broj različitih Krotenheerdt-ovih popločavanja, njegovi rezultati su: $K(1) = 11$, $K(2) = 20$, $K(3) = 39$, $K(4) = 33$, $K(5) = 15$, $K(6) = 10$, $K(7) = 7$ i $K(k) = 0$ za sve $k \geq 8$. Za $k = 1$ i $k = 2$, Krotenheerdt-ova popločavanja podudaraju se sa uniformnim i 2-uniformnim, dok je za $k \geq 3$ Krotenheerdt-ov uvjet više restriktivan. Bez uvođenja

Krotenheerdt-ova uvjeta čak i za malo k, kao što je npr $k = 4$, nije poznato koliko k-uniformnih popločavanja postoji, niti je poznata asimptotska procjena broja k-uniformnih popločavanja za veliko k.

Ako je popločavanje m-Arhimedovo i n-uniformno za $m \leq n$, znači da popločavanje ima m različitih tipova čvorišta i najmanje je m-uniformno. Svaki tip čvorišta formira jednu tranzitivnu klasu. Kada je $m = n$ tada je Krotenheerdt-ovo popločavanje. Sva su Arhimedova popločavanja iz teorema 2.2.2, 1-uniformna, tako da za $k = 1$ ne postoji razlika između 1-Arhimedovih i 1-uniformnih popločavanja. Za razliku od slučaja za $k = 1$, primijetimo da iako je 20 2-uniformnih rub-na-rub popločavanja, broj 2-Arhimedovih popločavanja je beskonačan. Što je i prikazano za primjere 2-Arhimedovih popločavanja $(3^3.4^2)$ i $(3^2.4.3.4)$, $(3^2.6^2)$ i $(3.6.3.6)$ te $(3.4^2.6)$ i $(3.4.6.4)$.

Na slikama 2.7(b), 2.12(b), 2.13(b) i 2.14(b) prikazana su četiri od 20 2-uniformna popločavanja pravilnim mnogokutima, redom $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$, $(3.4^2.6; 3.6.3.6)_2$, $(3^6; 3^2.4.12)$ i $(3.4.3.12; 3.12^2)$. Dakle, svako od popločavanja sastoji se od po dva tipa čvorišta, kažemo da smo popločavanja proširili do forme ne-Arhimedovih popločavanja. Ne-Arhimedovo popločavanje je popločavanje s više od jednim tipova čvorišta.

Ograničimo li se na popločavanja koja je moguće proširiti do forme ne-Arhimedovih popločavanja, isključujemo popločavanja u tablici označena sa dvije zvjezdice i prikazanim na slikama 2.3 i 2.11, koje nije moguće proširiti do forme popločavanja, zaključujemo da postoji 21-6=15 vrsta čvorišta koja se mogu pojaviti prilikom popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima.

Bibliografija

[1] A. N. Kolmogorov, *Parketi iz pravilnih mnogokuta*, MIŠ, 10 (2001), 216-218.

[2] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

[3] M. C. Escher, *Angels and Devils*, dostupno na `http://d2jv9003bew7ag.cloudfront.net/uploads/MC-Escher-Angles-and-Devils-1941-4.jpg` (ožujak 2019.)

[4] N. Lenngren, *k-uniform tilings by regular ploygons*, dostupno na `https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:444746/FULLTEXT01.pdf`, (lipanj 2019.)

[5] S. Bilinski, *Problem parketiranja*, Matematičko-fizički list, LXVII 1 (2016-2017), 1-4.

[6] S. Dutch, *Uniform Tilings*, dostupno na `https://stevedutch.net/Symmetry/Uniftil.htm` (ožujak 2019.)

[7] S. Sruk, *Simetrično je lijepo*, MIŠ, 10 (2001), 213-215.

[8] *Konstruktivne metode u geometriji* dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf` (lipanj 2019.)

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons` (ožujak 2019.)

[10] `http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html` (ožujak 2019.)

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation` (ožujak 2019.)

[12] `https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons` (ožujak 2019.)

[13] `http://mathonline.wikidot.com/the-group-of-symmetries-of-the-square` (ožujak 2019.)

Sažetak

Još u antičko vrijeme, pitagorejci su znali da su jedini pravilni mnogokuti kojima se može popločiti ravnina, jednakostranični trokut, kvadrat i pravilni šesterokut, međutim sama matematička teorija popločavanja stara je tek nešto više od jednog stoljeća. U ovom diplomskom radu problem popločavanja zapisan je matematički i prikazana su moguća rješenja koja zadovoljavaju postavljene uvjete. Dan je uvid u tek nekoliko od mnogobrojnih primjera popločavanja Euklidske ravnine koji pokazuju ljepotu matematike i njenu sveprisutnost u svakodnevnom životu. Definirani su temeljni pojmovi i dana je klasifikacija popločavanja s obzirom na simetrije. Detaljnije su analizirana popločavanja ravnine pravilnim mnogokutima, dokazan je teorem da postoje točno tri pravilna popločavanja ravnine odnosno 11 različitih rub-na-rub popločavanja pravilnim mnogokutima kod kojih su čvorišta istog tipa.

Summary

Even in ancient times, the Pythagoreans knew that the only regular polygons capable of tessellation the plane are an equilateral triangle, squares and a regular hexagon, however, the mathematical theory of tessellation itself is just over a century old. In this master thesis the problem of tessellation is mathematically written and possible solutions that meet the set conditions are shown. Here is given an insight in just a few of the many examples of tessellation the Euclidean plane that show the beauty of mathematics and its omnipresence in everyday life. The basic concepts are defined and the classification of the tessellation is given in terms of symmetry. Tilings of the plane by regular polygons are analyzed more preicise and demonstrated by the theorem that there are exactly three regular plane tessellations. Furthermore, there are 11 different edge-to-edge tessellation of the plane by regular polygons and with the same type of vertices.

Životopis

Godine 2007. upisala sam I ekonomsku školu u Zagrebu, 2011. preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički, na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu, gdje sam i 2015. godine upisala diplomski sveučilišni studij, također Matematika, smjer: nastavnički.