Permutacijski i randomizacijski testovi

Jurčević, Stipe

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Stipe Jurčević

PERMUTACIJSKI I RANDOMIZACIJSKI TESTOVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mom mentoru, prof.dr.sc. Bojanu Basraku, na korisnim savjetima i strpljenju tijekom izrade ovog rada. Posebna hvala mojoj obitelji na podršci tijekom studiranja.

Sadržaj

Uvod

Permutacijski testovi su vrsta neparametarskih testova u kojima se distribucija testne statistike procjenjuje permutacijama opaženog uzorka. Danas im se upotreba značajno proširila zahvaljujući dostupnosti brzih računala. Permutacijski testovi nude jednostavniji i robusniji način testiranja hipoteza budući da je njihova provedba moguća uz manje pretpostavki o distribuciji uzorka u odnosu na većinu parametarskih testova. Primjerice, konstruirat ćemo permutacijski test za testiranje jednakosti očekivanja dva uzorka čija je pogreška prve vrste jednaka razini značajnosti α kada oba uzorka imaju istu razdiobu. Randomizacijski testovi su općenitiji i zasnivaju se na izračunu testne statistike na raznim slučajnim transformacijama podataka. Permutacijski test se kao izraz ustalio u literaturi pa ćemo ga često upotrebljavati čak i kada ne koristimo permutacije nego neku drugu grupu transformacija.

U prvom poglavlju definiramo osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti i matematičke statistike koje ćemo koristiti u nastavku. U drugom poglavlju proučavamo teorijska svojstva permutacijskih testova. Dokazat ćemo da je permutacijski test koji koristi cijelu grupu permutacija egzaktan uz određene uvjete tj. pogreška prve vrste mu je jednaka razini značajnosti α. Budući da je kardinalitet cijele grupe permutacija najčešće jako velik, proučavat ćemo permutacijske testove koji koriste ograničen broj permutacija bez da izgube svojstvo egzaktnosti. Neki od načina na koji to možemo učiniti je koristeći podgrupu grupe permutacija, skupove ekvivalentnih transformacija kao i slučajne permutacije generirane iz grupe permutacija. Također, proučavat ćemo i razne načine izračuna permutacijskih p-vrijednosti. U trećem poglavlju provodimo simulacije permutacijskih testova u R-u. Na raznim primjerima ćemo usporediti pogrešku prve vrste i snagu permutacijskog testa s klasičnim t-testom.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju ćemo definirati osnovne pojmove iz matematičke statistike te iskazati neke rezultate koje ćemo koristiti u ostalim poglavljima.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ proizvoljan izmjeriv prostor i neka je dan izmjeriv prostor $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$ za neki $k \geq 1$.

Definicija 1.0.1. *Slučajna varijabla* $(k = 1)$ *ili slučajni vektor* $(k > 1)$ *je izmjerivo preslikavanje* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$ *odnosno preslikavanje za koje vrijedi*

$$X^{-1}(\langle -\infty, x]) \in \mathcal{F}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^k.$$

Pritom za $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k, k \geq 2$ *imamo* $\langle -\infty, x] := \langle -\infty, x_1] \times \ldots \times \langle -\infty, x_k]$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnostni prostor.

Definicija 1.0.2. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *s.v. definiran na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Inducirani vjerojatnost* $\mathbb{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, 1]$ *definiranu s*

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

zovemo zakonom razdiobe od X.

Definicija 1.0.3. *Neka je X s.v. sa zakonom razdiobe* $\mathbb{P}_X$. *Funkciju* $F = F_X : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ *definiranu s*

$$F_X(x) := \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]), \; x \in \mathbb{R}^k,$$

zovemo funkcija distribucije od X.

Svojstva funkcije distribucije slučajne varijable X:

1. neprekidna je zdesna, $F_X(x+) = F_X(x)$;
2. neopadajuća je
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2 \Rightarrow \langle -\infty, x_1] \subseteq \langle -\infty, x_2] \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2);$$
3. $F_X(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ F_X(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$

Svaku funkciju $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja ima navedena tri svojstva zovemo vjerojatnosna funkcija distribucije.

Definicija 1.0.4. *Kažemo da je X neprekidna slučajna varijabla ukoliko je njena funkcija distribucije F_X apsoultno neprekidna, tj. ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ takva da*
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) d\lambda(y).$$
Funkciju f zovemo funkcija gustoće od X.

Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vrijedi $X = X^+ - X^-$, pri čemu je
$$X^+ = max\{X, 0\} \geq 0,\ X^- = max\{-X, 0\} \geq 0.$$
Navedena jednakost nam koristi za definiranje matematičkog očekivanja.

Definicija 1.0.5. *Kažemo da slučajna varijabla $X = X^+ - X^-$ ima matematičko očekivanje ukoliko je konačan barem jedan od integrala*
$$\mathbb{E}X^+ := \int_\Omega X^+ \, d\mathbb{P},\ EX^- := \int_\Omega X^- d\,\mathbb{P}.$$

U tom je slučaju matematičko očekivanje od X, u oznaci $\mathbb{E}X$ jednako
$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^- \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Pomoću alata iz teorije mjere može se pokazati da vrijedi
$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x \, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x).$$

Definicija 1.0.6. *Neka $\mathbb{E}X$ postoji (tj. konačno je). Tada $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^r]$ zovemo r-ti centralni moment od X. Varijanca od X u oznaci* $\operatorname{Var} X$ *jest drugi centralni moment od X odnosno*
$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2].$$

Nakon što smo definirali osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti koji se koriste u narednim poglavljima, navest ćemo i ključne pojmove iz matematičke statistike.

Definicija 1.0.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $\mathcal{P}$ množina vjerojatnosnih mjera na tom prostoru. Tada se uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ zove statistička struktura. Ako je $\mathcal{P}$ jednočlana množina, tada je statistička struktura vjerojatnosni prostor.*

Na ovako definiranoj statističkoj strukturi uvodimo pojmove n-dimenzionalnog slučajnog uzorka i statistike.

Definicija 1.0.8. *n-dimenzionalni slučajni uzorak na statističkoj strukturi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ je niz $X_1, \ldots, X_n$ slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F})$ koje su nezavisne i jednakodistribuirane u odnosu na svaku vjerojatnost $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$.*

Definicija 1.0.9. *Statistika na statističkoj strukturi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ je slučajna varijabla $T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ takva da postoji $n \in \mathbb{N}$ i n-dimenzionalni slučajni uzorak $(X_1, \ldots, X_n)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ te izmjerivo preslikavanje $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ takvo da je $T = t(X_1, \ldots, X_n)$.*

Definicija 1.0.10. *Procjenitelj od $\tau(\theta)$ je statistika $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ u $\mathbb{R}^k$. Procjenitelj $T = t(X)$ za $\tau(\theta) \in \mathbb{R}$ je nepristran za $\tau(\theta)$ ako vrijedi*

$$\mathbb{E}_\theta[T] = \tau(\theta),\ \theta \in \Theta.$$

Procjenitelj koji nije nepristran zovemo pristran procjenitelj za $\tau(\theta)$.

Budući da ćemo se u narednim poglavljima pretežito baviti testiranjem statističkih hipoteza, definiramo osnovne pojmove. Želimo testirati hipoteze

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \in \Theta_0 \\ H_1 &: \theta \in \Theta_1, \end{aligned}$$

pri čemu je $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

Definicija 1.0.11. *Statistički test je funkcija*

$$\tau : \mathbb{R}^n \to [0, 1].$$

Interpretacija $\tau(x)$ je sljedeća: kritično područje $C := \tau^{-1}(1)$ je skup svih vrijednosti $x \in \mathbb{R}^n$ takvih da ćemo za realizaciju x uzorka sigurno odbaciti H_0 u korist H_1 (kritično područje), dok je $\tau^{-1}(0)$ skup svih opaženih vrijednosti x za koje sigurno nećemo odbaciti H_0 u korist H_1. Ako je $\tau(x) \in \langle 0, 1 \rangle$, tada je $\tau(x)$ vjerojatnost odbacivanja H_0 u korist H_1.

Ovakvim testiranjem mogu nastati dvije vrste pogrešaka. Pogreška prve vrste nastaje kada smo odbacili nultu H_0 u korist alternativne hipoteze H_1, a hipoteza H_0 je istinita. Pogreška druge vrste nastaje kada ne odbacimo H_0 u korist H_1, a hipoteza H_1 je istinita.

	odbacujemo H_0	ne odbacujemo H_0
H_0 istinita	pogreška prve vrste	$\checkmark$
H_1 istinita	$\checkmark$	pogreška druge vrste

Tablica 1.1: Pogreške prve i druge vrste

Neka je $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni uzorak iz modela $\mathcal{P} = \{f(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$.

Definicija 1.0.12. *Vjerojatnost pogreške prve vrste dana je s* $\gamma_\tau(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} \in C)$, $\theta \in \Theta_0$. *Vjerojatnost pogreške druge vrste iznosi* $\gamma_\tau(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} \notin C)$, $\theta \in \Theta_1$, *a snaga testa* τ $\gamma_\tau(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\mathbb{X} \in C)$, $\theta \in \Theta_1$. *Broj* $\alpha_\tau := \sup_{\theta \in \Theta_0} \gamma_\tau(\theta)$ *zovemo značajnost testa* τ.

Kod testiranja statističkih hipoteza važan je i pojam p-vrijednosti. To je vjerojatnost da testna statistika T poprimi ekstremnije vrijednosti od opažene vrijednosti testne statistike t. Ako provodimo dvostrani test, tada p-vrijednost iznosi $p = \mathbb{P}(|T| \geq |t| \,|\, H_0)$.

Budući da ćemo obrađivati permutacijske testove i njihove primjene u statistici, definirajmo pojam permutacije.

Definicija 1.0.13. *Permutacije skupa od n elemenata su bijekcije skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *u samog sebe. Zapisujemo ih tradicionalno na sljedeći način*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ukupno ih ima $n!$. Skup svih permutacija skupa od n elemenata označavamo sa S_n. Jedna od ključnih pretpostavki kod permutacijskih testova je svojstvo grupe koje zadovoljava struktura $(S_n, \circ)$, pri čemu $\circ$ označava kompoziciju preslikavanja.

Poglavlje 2

Opravdanost permutacijskih testova

Počet ćemo s primjerom korištenja permutacijskih testova za testiranje statističkih hipoteza, kako bismo stekli osnovnu ideju za njihovu konstrukciju i primjenu. [4]

Primjer 2.0.1. *Želimo istražiti utjecaj vitamina D na rast određene vrste biljaka. Stoga pretpostavimo da biljke rastu u jednakim uvjetima te da su sve biljke na početku iste visine. Također pretpostavimo da imamo 20 biljaka od kojih smo prvih 10 tretirali vitaminom D a preostalih nisu dobile nikakav tretman. Zabilježimo visine biljaka prvi dan te ih usporedimo s visinama nakon mjesec dana. Ukoliko je visina većine biljaka koje su tretirane vitaminom D veća od visine biljaka koje nisu imale nikakav tretman, slutimo da vrsta vitamina utječe na visinu biljaka. Htjeli bismo problem zapisati jezikom statistike, odnosno definirati test za testiranje hipoteza o utjecaju vrste vitamina pomoću kojeg bismo donijeli zaključak.*

Jedan od načina je da provedemo permutacijski test. Definiramo vektor $X = (X_1, \ldots, X_{20})$ visina pojedinih biljaka nakon mjesec dana, pri čemu su slučajne varijable $X_1, \ldots, X_{10}$ visine biljaka tretiranih vitaminom D. Definirajmo testnu statistiku

$$T(X) = \sum_{i=1}^{10} X_i - \sum_{i=11}^{20} X_i.$$

Testiramo nultu hipotezu H_0 da vrsta vitamina ne utječe na rast biljaka. Ako je H_0 istinita tada su $X_1, \ldots, X_{20}$ nezavisne i jednakodistribuirane slučajne varijable. Zbog toga ćemo napraviti 20! permutacija vektora $X = (X_1, \ldots, X_{20})$ te za svaku permutaciju izračunati vrijednost testne statistike $T(X)$. Zatim napravimo niz rastućih vrijednosti testnih statistika

$$T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(20!)}(X).$$

Intuitivno, ako vrsta vitamina utječe na visinu biljaka, tada bi vrijednost opažene testne statistike trebala biti veća od većine vrijednosti testnih statistika koje smo dobili permutacijama niza $X_1, \ldots, X_{20}$.

Da bismo testirali H_0 uz nivo značajnosti 0.1 napravimo sljedeće: odbacimo H_0 ako je $T(X) > T^{(0.9\cdot 20!)}(X)$. Dokazat ćemo da općenito vrijedi $\mathbb{P}(T(X) > T^{(0.9\cdot 20!)}(X)) \leq 0.1$. Štoviše, konstruirat ćemo test koji je egzaktan uz uvjet istinosti H_0 odnosno ima vjerojatnost pogreške prve vrste točno α.

Ovaj primjer daje osnovnu ideju korištenja permutacijskih testova. Jedina pretpostavka uz uvjet istinosti H_0 je da su slučajne varijable $X_1, \dots, X_{20}$ nezavisne i jednakodistribuirane. Činjenica da za provedbu testa ne treba puno pretpostavki je prednost u odnosu na ostale testove (ne)parametarske statistike. Da bismo proveli klasični t-test o jednakosti očekivanja trebala bi nam pretpostavka da slučajne varijable dolaze iz normalne razdiobe. Tada bi se moglo dogoditi da test odbaci nultu hipotezu samo zbog pogrešne pretpostavke o normalnosti podataka.

Da bismo proveli ovaj permutacijski test, treba izračunati 20! vrijednosti testnih statistika, po jednu za svaku od permutacija, što bi bio velik broj. Cilj nam je istražiti uz koje uvjete ćemo dobiti egzaktan test (pogreška prve vrste je jednaka zadanom nivou značajnosti) te način na koji reducirati broj izračuna testnih statistika bez da izgubimo svojstvo egzaktnosti.

2.1 Konstrukcija permutacijskog testa

Iskazat ćemo općenitu definiciju permutacijskog testa i pokazati da pogreška prve vrste iznosi α uz H_0. [4] Dva su ključna uvjeta za konstrukciju permutacijskog testa: randomizacijska hipoteza i svojstvo grupe. Za početak prisjetimo se definicije grupe.

Definicija 2.1.1. *Neprazan skup $G = (G, \cdot)$, gdje je $\cdot : G \times G \to G$ binarna operacija, zove se grupa ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. *$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, za svaki $x, y, z \in G$ (asocijativnost),*

2. *postoji $e \in G$ takav da $e \cdot x = x \cdot e$, za svaki $x \in G$ (neutralni element),*

3. *za svaki $x \in G$, postoji jedinstveni $x^{-1} \in G$ takav da $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ (inverzni element).*

Neka je X slučajni uzorak s vrijednostima u prostoru $\mathcal{X}$ i G konačan skup transformacija $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ takav da je G grupa obzirom na operaciju kompozicije. Svojstvo grupe je fundamentalno budući da vrijedi $G = Gg$ odnosno skup G je invarijantan na permutacije u G. Dokažimo to svojstvo grupe u sljedećoj lemi.

Lema 2.1.2. *Neka je $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ grupa i neka je $g \in G$. Definiramo $Gg = \{g_1 g, \dots, g_n g\}$. Tada vrijedi $G = Gg$.*

Dokaz. Zbog zatvorenosti od G vrijedi $Gg^{-1} \subseteq G$. Stoga je $G = (Gg^{-1})g \subseteq Gg$. Obratna inkluzija $Gg \subseteq G$ slijedi direktno iz svojstva zatvorenosti grupe. □

Druga fundamentalna pretpostavka za konstrukciju permutacijskog testa je randomizacijska hipoteza.

Definicija 2.1.3 (Randomizacijska hipoteza)**.** *Kažemo da je randomizacijska hipoteza zadovoljena ako je nulta hipoteza H_0 takva da je distribucija od X invarijantna na transformacije u G, tj. za svaki $g \in G$ vrijedi*

$$X \overset{d}{=} gX.$$

Teorem 2.1.4. *Neka je X slučajni uzorak iz bilo koje distribucije i G konačan skup transformacija $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ takav da je G grupa obzirom na operaciju kompozicije preslikavanja. Neka je H_0 nulta hipoteza uz koju vrijedi randomizacijska hipoteza. Označimo sa $M = \#G$ kardinalitet od G i $T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(M)}(X)$ rastući niz testnih statistika $T(gX)$, $\forall\ g \in G$. Fiksiramo nivo značajnosti $\alpha \in (0, 1)$ i definiramo $k = M - \lfloor M\alpha \rfloor$. Također definiramo:*

$$\begin{aligned} M^{+}(X) &= \#\{g \in G : T(gX) > T^{(k)}(X)\}, \\ M^{0}(X) &= \#\{g \in G : T(gX) = T^{(k)}(X)\}, \\ a(X) &= \frac{M\alpha - M^{+}(X)}{M^{0}(X)}. \end{aligned}$$

Permutacijski test ϕ definiramo na sljedeći način

$$\phi(X) = \mathbb{1}_{\{T(X)>T^{(k)}(X)\}} + a(X)\mathbb{1}_{\{T(X)=T^{(k)}(X)\}}.$$

Vrijedi $0 \leq \phi \leq 1$. Odbacimo H_0 kada je $\phi = 1$ te ju odbacimo uz vjerojatnost $a(X)$ kada je $\phi(X) = a(X)$ odnosno u graničnom slučaju $T(X) = T^{(k)}(X)$. Dakle, odbacimo nultu hipotezu uz vjerojatnost ϕ. Tada vrijedi $\mathbb{P}(\text{ odbacimo } H_0 \,|\, H_0\,) = \mathbb{E}\phi = \alpha$.

Dokaz. Zbog randomizacijske hipoteze i svojstva grupe iz leme 2.1.2 za svaki $g \in G$ vrijedi:

$$(T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(M)}(X)) = (T^{(1)}(gX) \leq \ldots \leq T^{(M)}(gX)).$$

Stoga je i $T^{(k)}(X) = T^{(k)}(gX)$, $M^{(0)}(X) = M^{(0)}(gX)$, $M^{(+)}(X) = M^{(+)}(gX)$ i $a(X) = a(gX)$. Vrijedi,

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} \phi(gX) &= \sum_{g\in G} \mathbb{1}_{\{T(gX)>T^{(k)}(gX)\}} + a(gX)\mathbb{1}_{\{T(gX)=T^{(k)}(gX)\}} \\ &= \sum_{g\in G} \mathbb{1}_{\{T(gX)>T^{(k)}(X)\}} + a(X)\mathbb{1}_{\{T(gX)=T^{(k)}(X).\}} \end{aligned}$$

Po konstrukciji testa u iskazu teorema vrijedi

$$M^{(+)}(X) + a(X)M^{(0)}(X) = M\alpha.$$

Uz H_0, zbog randomizacijske hipoteze, za svaki $g \in G$ vrijedi

$$(T(X), T^{(k)}(X), a(X)) \stackrel{d}{=} (T(gX), T^{(k)}(gX), a(gX))$$

i posljedično $\phi(X) \stackrel{d}{=} \phi(gX)$ odnosno $\mathbb{E}\phi(X) = \mathbb{E}\phi(gX)$. Zbog toga, uz H_0 vrijedi:

$$\mathbb{E}\sum_{g\in G}\phi(gX) = \sum_{g\in G}\mathbb{E}\phi(gX) = \sum_{g\in G}\mathbb{E}\phi(X) = M\mathbb{E}\phi(X) = M\alpha$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog linearnosti matematičkog očekivanja, druga zbog randomizacijske hipoteze, dok iz posljednje jednadžbe dijeljenjem s M slijedi $\mathbb{E}\phi(X) = \alpha$ što smo i htjeli dokazati. □

Napomena 2.1.5. *Vrijedi* $M^{(+)}(X) \leq \lfloor M\alpha \rfloor \leq M\alpha$ *odnosno* $a(X) = \frac{M\alpha - M^{(+)}(X)}{M^{(0)}(X)} \geq 0$. *Također je* $M^{(0)}(X) + M^{(+)}(X) = M - (M - \lfloor M\alpha \rfloor) + 1 = \lfloor M\alpha \rfloor + 1 \geq M\alpha$, *odakle slijedi* $a(X) = \frac{M\alpha - M^{(+)}(X)}{M^{(0)}(X)} \leq 1$. *Vrijedi dakle* $0 \leq a(X) \leq 1$ *odnosno* $0 \leq \phi(X) \leq 1$.

Napomena 2.1.6. *Da smo definirali nerandomizacijski test* $\phi(X) = \mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k)}(X)\}}$, *primjetimo da bismo dobili konzervativan test odnosno* $\mathbb{P}(\text{ odbacimo } H_0 \,|\, H_0\,) \leq \alpha$ *kao u primjeru 2.0.1. Ako je očekivanje* $\#\{g \in G : T(gX) = T^{(k)}(X)\}$ *malo, tada će pogreška prve vrste biti blizu* α. *Prednost permutacijskog testa definiranog u teoremu je da je uvijek egzaktan.*

Napomena 2.1.7. *Ako je* $M^{(+)}(X) = M\alpha$ *tada je* $a(X) = 0$ *pa je* $\phi(X) = \mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k)}(X)\}}$. *Međutim,* $M^{(+)}(X) = M\alpha$ *vrijedi samo ako je* $M\alpha \in \mathbb{N}$ *i* $T^{(k+1)}(X) > T^{(k)}(X)$. *U tom je slučaju i nerandomizacijski test egzaktan.*

Navedimo nekoliko primjera u kojima možemo primijeniti teorem 2.1.4. [2] Pokazat ćemo da grupu ne moraju nužno činiti permutacije, nego mogu biti i neke druge transformacije.

Primjer 2.1.8. *Definiramo produkt dva vektora po koordinatama takav da za svaki* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi*

$$xy = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n).$$

Neka je dan vektor $X = (X_1, \ldots, X_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$. *Ako je nulta hipoteza istinita neka su* X_i *nezavisne i jednakodistribuirane slučajne varijable simetrične oko nule. Definiramo testnu statistiku*

$$T(X) = \sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{i=m+1}^{2m} X_i.$$

Dan je skup $R = \{(y_1, \ldots, y_{2m}) : \; y_i \in \{-1, 1\},\; 1 \leq i \leq 2m\}$. *Očito je R grupa uz operaciju produkta po koordinatama. Pokažimo da su zadovoljeni uvjeti teorema 2.1.4.*

Neka je uz oznaku $M = \#R$ dan niz rastućih vrijednosti testnih statistika $\{T(rX) : r \in R\}$ s $T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(M)}(X)$. Definiramo:

$$\begin{aligned} k &= M - \lfloor M\alpha \rfloor \\ M^{+}(X) &= \#\{r \in R : T(rX) > T^{(k)}(X)\}, \\ M^{0}(X) &= \#\{r \in R : T(rX) = T^{(k)}(X)\}, \\ a(X) &= \frac{M\alpha - M^{+}(X)}{M^{0}(X)}. \end{aligned}$$

Neka je permutacijski test ϕ dan s:

$$\phi(X, r) = \mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k)}(X)\}} + a(X)\mathbb{1}_{\{T(X) = T^{(k)}(X)\}}.$$

Neka je dan skup $G = \{g^r : r \in R\}$ pri čemu je $g^r : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ preslikavanje $g^r(x) = rx$. Uz H_0 vrijedi $X \stackrel{d}{=} rX = g^r(X)$, za svaki $r \in R$. Vidimo da su zadovoljeni uvjeti teorema 2.1.4 te je test ϕ egzaktan.

Primjer 2.1.9 (Test s dva uzorka)**.** *Neka su $Y_1, \ldots, Y_m$ nezavisne i jednakodistribuirane (n.j.d.) slučajne varijable s distribucijom F_Y i $Z_1, \ldots, Z_n$ n.j.d. slučajne varijable nezavisne od Y_i s distribucijom F_Z. Neka je $X = (Y_1, \ldots, Y_m, Z_1, \ldots, Z_n)$. Pretpostavimo da uz H_0 vrijedi $F_Y = F_Z$. Definiramo skup G kao skup svih permutacija vektora X odnosno za neki $x = (x_1, \ldots, x_N)$ neka je $gx = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$ pri čemu je $g = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ jedna od permutacija skupa $\{1, \ldots, N\}$ uz oznaku $N = m + n$. Vrijedi $\#G = N!$. Ako vrijedi $F_Y = F_Z$ tada je $X \stackrel{d}{=} gX$.*

To je očito zbog svojstva grupe $G = Gg$ za svaki $g \in G$ iz leme 2.1.2 i pretpostavke da su slučajne varijable n.j.d. u oba uzorka. Svaka transformacija producira novi uzorak gX takav da prvih m elemenata se nalazi u uzorku Y a preostalih n elemenata u uzorku Z. Ako definiramo testnu statistiku invarijantnu na permutacije unutar Z i Y kao u primjeru 2.0.1 dobit ćemo puno istih vrijednosti testne statistike. Pokazat ćemo da je dovoljno izračunati $\binom{N}{m}$ različitih vrijednosti $T(X)$ da bi test ostao egzaktan.

Primjer 2.1.10 (Test korelacije)**.** *Neka je $X = ((Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n))$ pri čemu su (Y_i, Z_i) $i = 1, \ldots, n$ nezavisni i jednakodistribuirani slučajni vektori te neka je dana distribucija P slučajnog vektora X i marginalne distribucije P_Y i P_Z.Pretpostavimo da su uz H_0 Y_i i Z_i nezavisne odnosno $P = P_Y P_Z$. Definiramo grupu G kao skup svih transformacija $g \in G$ takvih da $g((y_1, z_1), \ldots, (y_n, z_n)) = ((y_1, z_{\sigma(1)}), \ldots, (y_n, z_{\sigma(n)}))$ pri čemu je $g = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ jedna od permutacija skupa $\{1, \ldots, N\}$. Sada je očito da je randomizacijska hipoteza zadovoljena.*

2.2 O utjecaju strukture grupe

U dokazu teorema 2.1.4 ključna je invarijantnost vektora $(T^{(1)}(X), \dots, T^{(M)}(X))$ na transformacije u G, odnosno

$$(T^{(1)}(gX), \dots, T^{(M)}(gX)) = (T^{(1)}(X), \dots, T^{(M)}(X)), \forall g \in G.$$

Ova jednakost je zadovoljena zbog svojstva grupe $G = Gg, \forall g \in G$ iz leme 2.1.2. Pokazat ćemo da je bilo koji skup transformacija koji zadovoljava svojstvo $G = Gg, \forall g \in G$ grupa.

Propozicija 2.2.1. *Neka je A neprazan skup i G skup preslikavanja $g : A \to A$. Pretpostavimo da u G postoji barem jedno surjektivno preslikavanje. Ako vrijedi $G = G \circ g, \forall g \in G$ tada je G grupa uz operaciju kompozicije preslikaanja.*

Dokaz. Neka je $g \in G$ surjektivno preslikavanje. Budući da je $G = Gg$, vrijedi $g \in Gg$. Neka je $g' \in G$ takav da je $g = g'g$. Uzmimo $y \in A$ te koristeći surjektivnost neka je $x \in A$ takav da je $g(x) = y$. Vrijedi $g'(y) = g'(g(x)) = g(x) = y$, pa je g' identiteta na A.
Za svaki $g \in G$ vrijedi $G = Gg$ pa postoji g' takav da $g'g = id$. Dakle, svaki element od G ima lijevi inverz u G pa je injektivan. Također je i surjektivan, jer inače njegov lijevi inverz ne bi bio injektivan. Dakle, svaki element iz G je bijektivan te je lijevi inverz od g ujedno i njegov desni inverz. Zaključujemo da svaki element iz G ima inverz u G.
Budući da vrijedi $G = Gg, \forall g \in G$, G je zatvorena čime smo pokazali da je G grupa. □

Želimo ispitati ponašanje testa kada G nije grupa. U tom slučaju permutacijski test kojeg smo definirali u teoremu 2.1.4 ne mora biti egzaktan. Pretpostavimo da je uz H_0 zadovoljena randomizacijska hipoteza $X \stackrel{d}{=} gX, \forall g \in G$. Ako je H_0 istinita, permutacijski test je egzaktan te je za svaku permutaciju $g \in G$, $\mathbb{P}(T(gX) > T^{(k)}(X))$ ista. Također je i distribucija vektora (gX, GX) ista za sve $g \in G$. Štoviše, zbog svojstva grupe $G = Gg$ skup GX je funkcija of gX, $GX = f(gX)$, pri čemu je $f(x) = Gx$. Za $g, g' \in G$ vrijedi

$$(gX, GX) = (gX, f(gX)) \stackrel{d}{=} (g'X, f(g'X)) = (g'X, GX).$$

Kada G nije grupa, distribucija vektora (gX, GX) nije općenito nezavisna od g pa zbog toga nije moguće kontrolirati pogrešku prve vrste.

Moramo biti oprezni ako koristimo podskup permutacijske grupe koji nije podgrupa. Primjerom ćemo pokazati da u tom slučaju ne moramo dobiti egzaktan test, štoviše vjerojatnost pogreške prve vrste će biti velika.

Primjer 2.2.2. *Dan je vektor $X = (X_1, \dots, X_6) \in \mathbb{R}^6$ takav da su X_i nezavisne i jednakodistribuirane. Neka je testna statistika dana s $T(X) = X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6$ i neka je G*

grupa svih permutacijskih preslikavanja na $\mathbb{R}^6$. Definirajmo skupove:

$$\begin{aligned}
A &= \{g \in G : T(gX) = T(X), \forall x \in \mathbb{R}^6\},\\
B &= \{(14), (25), (36), (14)(25), (25)(36), (14)(36), (14)(25)(36)\},\\
U &= \{id\} \cup \{ab : a \in A, b \in B\}.
\end{aligned}$$

Pokažimo da permutacijski test nije egzaktan.

Primijetimo da je $\#U = 3!3!7 + 1 = 253$. Ako pretpostavimo da je $x_{i+3} < x_i$ za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ tada vrijedi $T(X) > T(bX)$ za svaki $b \in B$. Također je i $T(x) > T(ux)$ za svaki $u \in U \setminus \{id\}$. Budući da je $\mathbb{P}(x_{i+3} < x_i) = \frac{1}{8}$ vrijedi $\mathbb{P}(T(x) > T(ux)) \geq \frac{1}{8}$ za svaki $u \in U$. Neka je permutacijski test definiran kao u teoremu 2.1.4 uz $\alpha = \frac{1}{253}$. Tada je

$$\mathbb{P}(\text{odbacimo } H_0 \,|\, H_0) = \mathbb{P}(T(X) > T(uX), \forall u \in U \setminus id) \geq \frac{1}{8}$$

te je očito da permutacijski test ne može biti egzaktan.

Da bismo generalizirali primjer uzmimo slučajni vektor $X = (X_1, \ldots, X_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 3$, takav da su svi X_i n.j.d. Neka je $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=n+1}^{2n} X_i$ i definirajmo skup $U \in G$ takav da je $\#U \geq n!n!$. Pretpostavimo da $x_{i+n} < x_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ povlači da je $T(x) > T(ux), \forall u \in U \setminus id$. Neka je $\alpha_n = \frac{1}{n!n!}$. Ako koristimo samo permutacije iz U vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{odbacimo } H_0 \,|\, H_0) &= \mathbb{P}(T(X) > T(uX), \forall u \in U \setminus id)\\
&\geq \mathbb{P}(x_{i+n} < x_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\})\\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Vrijedi dakle

$$\frac{\mathbb{P}(\text{odbacimo } H_0 \,|\, H_0)}{\alpha_n} \geq \frac{n!n!}{2^n} \to \infty \text{ kada } n \to \infty.$$

Zaključujemo da permutacijski test može dati preveliku pogrešku prve vrste kada koristimo skup permutacija koji nije grupa. Međutim, neki drugi test može dati pogrešku prve vrste znatno manju od α.

2.3 Redukcija broja transformacija

Pretpostavimo da želimo primijeniti permutacijski test na niz opaženih vrijednosti $X_1, \ldots, X_n$. Broj permutacija koje trebamo napraviti iznosi $n!$ što je najčešće prevelik broj. Htjeli bismo taj broj reducirati bez da izgubimo svojstvo egzaktnosti. To možemo učiniti na nekoliko načina:

1. Ako uzmemo podgrupu $S \subseteq G$ test je i dalje egzaktan jer je S grupa a broj permutacija će se znatno smanjiti.

2. Možemo koristiti neki drugi skup transformacija koji čini grupu kao u primjeru 2.1.8. Ukupan broj transformacija u tom primjeru iznosi 2^{2m} što je znatno manje od $(2m)!$, ukupnog broja svih permutacija u G.

3. Još jedan način reduciranja broja permutacija je korištenjem skupova ekvivalentnih transformacija. Za dvije transformacije kažemo da su ekvivaletne ako daju istu vrijednost testne statistike. U primjeru 2.0.1 trebamo napraviti 20! permutacija ako koristemo sve permutacije iz grupe G međutim pokazat ćemo da je za egzaktan test dovoljno napraviti $\binom{20}{10}$ transformacija budući da ekvivaletne tranformacije daju istu vrijednost testne statistike.

4. Slučajnim transformacijama iz grupe G uz dodanu jediničnu transformaciju.

U svakom od nabrojanih načina permutacijski test ostaje egzaktan međutim podgrupu treba izabrati pažljivo budući da o njoj ovisi pogreška druge vrste. Želimo maksimizirati vjerojatnost da opažena vrijednost testne statistike bude veća od $\alpha \cdot 100\%$ najviših vrijednosti $T(X)$ ako H_0 nije istinita. Slutimo da treba odabrati transformacije koje neće biti slične početnoj transformaciji(identiteti) jer u suprotnom se povećava vjerojatnost pogreške druge vrste.

Primjer 2.3.1. *Dan je vektor $X = (X_1, \ldots, X_{80}) \in \mathbb{R}^{80}$ i skup svih permutacija G na $\mathbb{R}^{80}$. Želimo odabrati podgrupu $S \subseteq G$ koju ćemo koristiti za permutacijski test.*

Izaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{80}{k} \in \mathbb{N}$ i definirajmo

$$Z_1 = (X_1, \ldots, X_k),\ Z_2 = (X_{k+1}, \ldots, X_{2k}), \ldots,\ Z_{\frac{80}{k}} = (X_{80-k+1}, \ldots, X_{80})$$

. Definiramo $S \subseteq G$ kao skup svih permutacija oblika:

$$g(Z_1, \ldots, Z_{\frac{80}{k}}) = (Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_{\frac{80}{k}}})$$

pri čemu je $(i_1, \ldots, i_{\frac{80}{k}})$ permutacija od $(1, 2, \ldots, \frac{80}{k})$. Očito je $S \subseteq G$ grupa koja ima $\frac{80}{k}!$ elemenata što je znatno manje od $\#G = 80!$ ako je $k > 1$. Definiramo testnu statistiku

$$T(X) = \left| \sum_{i=1}^{40} X_i - \sum_{i=41}^{80} X_i \right|$$

. Za $k = 10$, definiramo podgrupu $S \subseteq G$ na način kojeg smo sad opisali. Primjetimo da neke permutacije u S daju iste vrijednosti $T(X)$. Primjerice permutacija koja mijenja samo Z_1 i Z_2 je ekvivalentna identiteti. Pokazat ćemo da je dovoljno koristiti skup $S' \subseteq S$ koji sadrži $\binom{8}{4} = 70$ permutacija umjesto skupa S koji ima 8! permutacija. Međutim, važno je primijetiti da S' nije općenito podgrupa od S.

Podgrupu smo mogli definirati i na neki drugi način. Neka je L skup generiran lijevim pomacima $f : \mathbb{R}^{80} \to \mathbb{R}^{80}$ danim s

$$f(x_1, \ldots, x_{80}) = (x_2, x_3, \ldots, x_{80}, x_1).$$

L je grupa koja sadrži 80 elemenata, malo više od $\#S' = 70$. Unatoč činjenici da grupa L ima više permutacija slutimo da L daje test slabije jakosti S' zato što su permutacije u L slične identiteti. Primjerice, $T(f(X))$, $T(f \circ f(X))$, $T(f^{-1}(X))$ su često dosta blizu $T(X)$ čime se povećava vjerojatnost pogreške druge vrste.

Razradimo malo detaljnije ideju korištenja skupova ekvivaletnih transformacija. U primjeru 2.0.1 smo imali vektor $X = (X_1, \ldots, X_{20})$ duljine 20 čije su komponente predstavljale visine biljaka. Testna statisika je $T(X) = |\sum_{i=1}^{10} X_i - \sum_{i=11}^{20} X_i|$. Kao grupu transformacija koristili smo sve permutacije na $\mathbb{R}^{20}$. Da bismo izveli permutacijski test treba izračunati $20! \approx 2.4 \cdot 10^{18}$ vrijednosti $T(gX)$ što je prevelik broj. Vidjeli smo da su mnoge permutacije ekvivalentne obzirom na vrijednost testne statistike. Bilo koja permutacija unutar skupova $X_1, \ldots, X_{10}$ ili $X_{10}, \ldots, X_{20}$ ne mijenja vrijednost od $T(X)$. U ovom primjeru dovoljno je uzeti $\binom{20}{10}$ permutacija odnosno po jednu permutaciju iz svakog od skupova ekvivalentnih transformacija. Ovime smo dobili test s istom pogreškom prve i druge vrste a broj izračuna $T(X)$ smo smanjili s 20! na $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!10!}$.
Precizirajmo ideju o ekvivalentim tranformacijama u sljedećoj lemi.

Lema 2.3.2. *Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_M\}$ grupa preslikavanja $g : A \to A$ i $T : A \to \mathbb{R}$ izmjerivo preslikavanje. Definiramo skup $H = \{h \in G : T \circ h = T\}$. Tada je H podgrupa od G i za sve $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $Hg_1 = Hg_2$ ili $Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset$.*
Neka je $R \subseteq G$ takav da sadrži točno jedan element iz skupova $Hg, g \in G$. Tada su skupovi $Hr, r \in R$ particija od G. Svaki od tih skupova ima $\#H$ elemenata te je $\#R = \frac{\#G}{\#H}$.

Dokaz. Očito je $id \in H$ i skup H je zatvoren. Neka je $h \in H$. Tada je $Th^{-1} = Thh^{-1} = T$ odnosno $h^{-1} \in H$. H je dakle grupa.

Pretpostavimo $Hg_1 \cap Hg_2 \neq \emptyset$ za $g_1, g_2 \in G$. Izaberimo $h_1, h_2 \in H$ takve da $h_1 g_1 = h_2 g_2$. Vrijedi $g_2 = h_2^{-1} h_1 g_1$ te je stoga $g_2 \subseteq Hg_1$. Analogno $g_1 \subseteq Hg_2$ odnosno $Hg_1 = Hg_2$ čime smo dokazali drugu tvrdnju leme.

Sada je očito da su skupovi $Hr, r \in R$ međusobno disjunktni. Neka je $g \in G$ i $r \in Hg$. Izaberimo $h \in H$ takav da $r = hg$. Dakle $g = h^{-1} r \in Hr$ pa je $G \subseteq \cup_{r \in R} Hr$. Dakle, skupovi $Hr, r \in R$ čine particiju od G.

Primijetimo da za $h_1, h_2 \in H$, $h_1 g = h_2 g \Rightarrow h_1 = h_2$ odnosno obratom po kontrapoziciji imamo $h_1 \neq h_2 \Rightarrow h_1 g = h_2 g$. Zaključujemo da svaki od skupova oblika Hg ima $\#H$ elemenata pa vrijedi $\#R = \frac{\#G}{\#H}$. □

Primjer 2.3.3. *Dan je vektor $X = (X_1, \ldots, X_{20})$ pri čemu su X_i n.j.d. i testna statistika $T(X) = \sum_{i=1}^{10} X_i - \sum_{i=11}^{20} X_i$. Primijetimo da je uz ovako definiran $T(X)$ skup $H = \{h \in G : T \circ h = T\}$ ustvari skup svih preslikavanja oblika $h(X) = (\sigma_1(X_1, \ldots, X_{10}), \sigma_2(X_{11}, \ldots, X_{20}))$ pri čemu su $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ permutacijska preslikavanja. Dakle, $\#H = 10!10!$. Ako svaku od varijabli $X_1, \ldots, X_{10}$ označimo s '1' a preostale varijable $X_{11}, \ldots, X_{20}$ s '2', skup H čine sve permutacije koje ne mijenjaju poredak jedinica i dvojki. Sada ćemo generalizirati ovaj primjer.*

Dan je vektor $X = (X_1, \ldots, X_{2n})$ pri čemu su X_i *n.j.d.* i testna statistika $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=n+1}^{2n} X_i$. Neka je $v_i = (i, \ldots, i)$ vektor duljine n pri čemu je $i \in \{1, 2\}$. Neka je G skup svih permutacijskih preslikavanja na $\mathbb{R}^{2n}$ i $S = \{g(v_1, v_2) : g \in G\}$ skup vektora s n jedinica i n dvojki. Za svaki $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ definiramo preslikavanje $f^s : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ takvo da za svaki $z = (z_1, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ prvih n elemenata od $f^s(z)$ su z_j za koje je $s_j = 1$.

Slutnja 2.3.4. *Neka je skup H dan s $H = \{h \in G : T \circ h = T\}$. Tada $\forall g \in G, \exists!\ s \in S$ i $h \in H$ takvi da $g = h \circ f^s$, što ćemo sada i dokazati.*

Dokaz. Očito je da $\forall g \in G$ postoje takvi r i h, pa nam preostaje pokazati jedinstvenost. Neka su $s_1, s_2 \in S$ i $h_1, h_2 \in H$ takvi da $h_1 \circ f^{s_1} = h_2 \circ f^{s_2}$.Pretpostavimo da je $s_1 \neq s_2$. Neka je $z = (z_1, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ vektor takav da $z_i \neq z_j$ za sve $1 \leq i \leq j \leq 2n$. Izaberimo $1 \leq i \leq 2n$ takav da $s_{i_1} \neq s_{i_2}$. Sada je očito da se z_i nalazi točno u jednom od vektora $h_1 \circ f^{s_1}$ i $h_2 \circ f^{s_2}$ što je kontradikcija s pretpostavkom da $h_1 \circ f^{s_1} = h_2 \circ f^{s_2}$. □

Stoga je skup $\{Hf^s : s \in S\}$ particija od G. Po lemi 2.3.2 za sve $g_1, g_2 \in G$ je $Hg_1 = Hg_2$ ili $Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset$. Dakle, za skup R možemo uzeti $\{f^s : s \in S\}$. Testna statistika $T(f^s(X))$ je suma X_i s oznakom '1' umanjen za sumu X_i s oznakom '2'.

Iskažimo teorem koji nam jamči da možemo koristiti po jednu transformaciju iz svakog od skupova ekvivalentnih transformacija. Da bismo dobili egzaktan test (iste jakosti) dovoljno je koristiti transformacije iz opisanog skupa R. Ideja dokaza je ista kao u teoremu 2.1.4 pa ga navodimo bez dokaza. Dokaz se može pogledati u [4].

Teorem 2.3.5. *Neka je X slučajni uzorak iz bilo koje distribucije, $T : A \to \mathbb{R}$ izmjeriva testna statistika i $G = \{g_1, \ldots, g_M\}$ grupa transformacija $g : A \to A$. Neka je $T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(M)}(X)$ rastući niz testnih statistika $T(gX)$, $\forall\ g \in G$. Neka je H_0 nulta hipoteza uz koju vrijedi randomizacijska hipoteza $X \stackrel{d}{=} gX, \forall g \in G$.*

Definiramo skup $H = \{h \in G : T \circ h = T\}$. Po lemi 2.3.2 H podgrupa od G i za sve $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $Hg_1 = Hg_2$ ili $Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset$.Neka je $R \subseteq G$ takav da sadrži točno jedan element iz skupova $Hg, g \in G$. Tada su skupovi $Hr, r \in R$ particija od G. Svaki od tih skupova ima $\#H$ elemenata te je $\#R = \frac{\#G}{\#H}$.

Definiramo permutacijski test kao u teoremu 2.1.4 ali koristimo samo transformacije iz R umjesto svih transformacije iz G. Neka je $T'^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T'^{(\#R)}(X)$ rastući niz testnih statistika $T(rX)$, $\forall\ r \in R$. Definiramo $k' = \#R - \lfloor \#R\alpha \rfloor$. Također definiramo:

$$M'^{+}(X) = \#\{r \in R : T(rX) > T'^{(k')}(X)\},$$
$$M'^{0}(X) = \#\{r \in R : T(rX) = T'^{(k')}(X)\},$$
$$a'(X) = \frac{\#R\alpha - M'^{+}(X)}{M'^{0}(X)}.$$

Neka je permutacijski test ϕ' dan s:

$$\phi'(X) = \mathbb{1}_{\{T(X) > T'^{(k')}(X)\}} + a'(X)\mathbb{1}_{\{T(X) = T'^{(k')}(X)\}}.$$

Odbacimo H_0 s vjerojatnošću ϕ'. Tada vrijedi $\mathbb{P}(odbacimo\, H_0 \,|\, H_0) = \alpha$.

Preostalo nam je pokazati da se može konstruirati egzaktan test čak i ako koristimo slučajne (random) permutacije iz grupe G. [3] Definirajmo vektor G' slučajnih permutacija iz G.

Definicija 2.3.6. *Neka je dan vektor $G' = (id, g_2, \ldots, g_\omega)$, pri čemu je id identiteta na G a $g_2, \ldots, g_\omega$ slučajni elementi iz G. Označimo s $g_1 = id$. Permutacije odabiremo na slučajan način sa zamjenom (istu permutaciju možemo odabrati više puta) ili bez zamjene. Ako generiramo $g_2, \ldots, g_\omega$ bez zamjene pretpostavljamo da su permutacije uniformne na $G \setminus \{id\}$ a ako ih generiramo sa zamjenom pretpostavljamo da su uniformne na G.*

Dokazat ćemo da permutacijski test sa slučajnim permutacijama ima razinu značajnosti najviše α ako dodamo identitetu (jedinično preslikavanje).

Teorem 2.3.7. *Neka je dan vektor G' kao u definciji 2.3.6. Neka je $T^{(1)}(X, G') \leq \ldots T^{(\omega)}(X, G')$ rastući niz testnih statistika $T(g_jX), 1 \leq j \leq \omega$. Uzmimo $\alpha \in (0, 1)$ i $k' = \omega - \lfloor \omega\alpha \rfloor$. Odbacimo H_0 ako je $T(X, G') > T^{(k')}(X, G')$. Tada vrijedi $\mathbb{P}(odbacimo\, H_0 \,|\, H_0) \leq \alpha$.*

Dokaz. Budući da je G grupa, može se pokazati da $G' g_j^{-1}$ i G' imaju istu distribuciju za sve $1 \leq j \leq \omega$ ako zanemarimo poredak elemenata u G'. Neka je j uniformna na $\{1, \ldots, \omega\}$ uz oznaku $h = g_j$. Uz uvjet H_0 vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(X) > T^{(k')}(X, G')) &= \mathbb{P}(T(X) > T^{(k')}(X, G' h^{-1})) \\ &= \mathbb{P}(T(hX) > T^{(k')}(hX, G' h^{-1})).\end{aligned}$$

Zbog $G' h^{-1}(hX) = G'(h^{-1} hX)$ gornja jednakost iznosi

$$\mathbb{P}(T(hX) > T^{(k')}(h^{-1} hX, G')) = \mathbb{P}(T(hX) > T^{(k')}(X, G')).$$

Zbog pretpostavke da su permutacije uniformne vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\frac{1}{\omega}\#\{1 \leq j \leq \omega : T^{(j)}(X, G') > T^{(k')}(X, G')\}] &\leq \mathbb{E}[\frac{1}{\omega}(\omega - (\omega - \lfloor \omega\alpha \rfloor))] \\ &= \mathbb{E}[\frac{\lfloor \omega\alpha \rfloor}{\omega}] \\ &\leq \alpha.\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(T(X) > T^{(k')}(X, G')) \leq \alpha$. □

Permutacijski test sa slučajnim permutacijama iz prethodnog teorema ne mora biti egzaktan obzirom da vrijednosti testnih statistika mogu biti iste. Granični slučaj ćemo riješiti slično kao u prethodnim teoremima, te uz tu korekciju dobiti egzaktan test.

Teorem 2.3.8. *Neka vrijede pretpostavke kao u teoremu 2.3.7. Definiramo*

$$\begin{aligned}M^+(X, G') &= \#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_j X) > T^{(k')}(X, G')\}, \\ M^0(X, G') &= \#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_j X) = T^{(k')}(X, G')\}, \\ a(X, G') &= \frac{\omega\alpha - M^+(X, G')}{M^0(X, G')}.\end{aligned}$$

Neka je permutacijski test ϕ dan s:

$$\phi(X, G') = \mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k')}(X, G')\}} + a(X, G')\mathbb{1}_{\{T(X) = T^{(k')}(X, G')\}}.$$

Odbacimo H_0 s vjerojatnošću ϕ. Tada vrijedi $\mathbb{P}($odbacimo $H_0 \mid H_0) = \mathbb{E}[\phi(X, G')] = \alpha$.

Dokaz. Iz definicije permutacijskog testa vrijedi

$$\mathbb{P}(\text{odbacimo } H_0 \mid H_0) = \mathbb{E}[\phi(X, G')] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k')}(X, G')\}} + a(X, G')\mathbb{1}_{\{T(X) = T^{(k')}(X, G')\}}].$$

Neka je $M^+ = M^+(X, G')$ i $M^0 = M^0(X, G')$. Neka je j uniformna na $\{1, \ldots, \omega\}$ uz oznaku $h = g_j$. Analogno kao u teoremu 2.3.7 gornja jednakost iznosi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(X, G')] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(hX) > T^{(k')}(X,G')\}} + a(X, G')\mathbb{1}_{\{T(hX) = T^{(k')}(X,G')\}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(hX) > T^{(k')}(X,G')\}}] + \mathbb{E}[a(X, G')\mathbb{1}_{\{T(hX) = T^{(k')}(X,G')\}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T(hX) > T^{(k')}(X,G')\}}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[a(X, G')\mathbb{1}_{\{T(hX) = T^{(k')}(X,G')\}}] \,|\, H^0, H^+] \\
&= \frac{M^+}{\omega} + \mathbb{E}[\frac{\omega\alpha - M^+}{M^0} \frac{M^0}{\omega}] \\
&= \frac{M^+}{\omega} + \alpha - \frac{M^+}{\omega} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

□

Napomena 2.3.9. *Primijetimo da nerandomizacijski test $\phi(X, G') = \mathbb{1}_{\{T(X) > T^{(k')}(X,G')\}}$ u jednom slučaju može biti egzaktan. Neka je $\{G_1, \ldots, G_m\}$ particija skupa G i neka su $h_1 \in G_1, \ldots, h_m \in G_m$. Generirajmo niz $g_2, \ldots, g_\omega$ iz skupa $\{h_1, \ldots, h_m\}$ bez zamjene. Tada su sve vrijednosti $T(g_1X), \ldots, T(g_\omega X)$ različite. Ako odaberemo nivo značajnosti α iz skupa $\{\frac{0}{\omega}, \frac{1}{\omega}, \ldots, \frac{\omega-1}{\omega}\}$ tada je test egzaktan jer je $\#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_jX) > T^{(k')}\} = \alpha\omega$ pa je $\mathbb{E}\phi = \frac{\lfloor\omega\alpha\rfloor}{\omega} = \frac{\omega\alpha}{\omega} = \alpha$.*

Permutacijski test sa slučajnim permutacijama se često miješa s Monte Carlo testom. Međutim, pokazat ćemo da ipak postoje razlike.

U osnovnom Monte Carlo testu, nulta hipoteza H_0 podrazumijeva da uzorak X dolazi iz neke specifične distribucije. Stoga, Monte Carlo uzorci se generiraju iz nulte distribucije dok se slučajne permutacije generiraju iz permutacijske distribucije. Međutim, Monte Carlo test također može biti egzaktan dodamo li identitetu *id*. Generirajmo nezavisne uzorke $X_2, \ldots, X_\omega$ iz nulte distribucije od X. Pretpostavimo da su $T(X), T(X_2), \ldots, T(X_\omega)$ neprekidne. Uz oznaku $X_1 = X$ neka je

$$B' = \#\{1 \leq j \leq \omega : T(X_j) \geq T(X)\},$$

i neka je b' opažena vrijednost od B'. Poslije ćemo dokazati da je B' uniformna na skupu $\{1, \ldots, \omega\}$ kada je H_0 istinita. Monte Carlo test odbaciva nultu hipotezu kada je $T(X) > T^{(k')}(X)$ gdje je $k' = \omega - \lfloor\omega\alpha\rfloor$ i $T^{(1)}(X) \leq \ldots \leq T^{(\omega)}(X)$ rastući niz testnih statistika $T(X_j)$. Ekvivalentno, test odbaciva nultu hipotezu kada je Monte Carlo p-vrijednost

$$p_{mc} = \mathbb{P}(B' \leq b'|H_0) = \frac{b'}{\omega} \leq \alpha,$$

pri čemu je b' opažena vrijednost od B'.

Egzaktan permutacijski test sa slučajnim permutacijama smo konstruirali. Generirali smo niz slučajnih permutacija $g_2, \ldots, g_\omega$ iz G uz oznaku $g_1 = id \in G$. Za razliku od Monte Carlo uzoraka $X_1, \ldots, X_\omega$ permutacije $g_1X, \ldots, g_\omega X$ nisu nezavisne kada je H_0 istinita. Međutim, permutacije $g_1X, \ldots, g_\omega X$ su nezavisne i jednakodistribuirane uvjetno na skupu $\{gX : g \in G\}$ pri čemu smo pokazali da G mora biti grupa.

2.4 Permutacijske p-vrijednosti

Permutacijske p-vrijednosti dobijemo računanjem vrijednosti testnih statistika na permutacijama podataka. Za početak ćemo proučiti permutacijske p-vrijednosti obzirom na cijelu grupu permutacija G, a poslije obzirom na ograničeni broj slučajnih permutacija iz G. [1]

Važno je uočiti kako uz uvjet H_0 jedinstvena distribucija od $T(X)$ najčešće ne postoji, budući da H_0 obično ne određuje jedinstvenu distribuciju podataka. Zato ćemo promatrati testnu statistiku

$$D = \#\{g \in G : T(gX) \geq T(X)\},$$

koja za razliku od $T(X)$ ima jedinstvenu distribuciju kada je H_0 istinita. Ako je opažena vrijednost ove testne statistike d, imamo

$$\mathbb{P}(D \leq d) = \mathbb{P}(T(X) > T^{(\#G-d)}) = \frac{d}{\#G}.$$

Ovo je vrijednost koju najčešće smatramo permutacijskom p-vrijednosti. Međutim, i kod ove statistike moramo biti oprezni jer ako radimo s podacima koji dolaze iz diskretne razdiobe često nećemo imati jedinstvenu distribuciju od D uz H_0.

U praksi je često nezahvalno računati p-vrijednost baziranu na cijeloj permutacijskoj grupi obzirom na veliku kardinalnost grupe. Ovome se problemu može doskočiti pomoću slučajnih permutacija na dva načina. Prvi način je računanje egzaktnih p-vrijednosti pomoću slučajnih permutacija, a drugi način je procjena p-vrijednosti $p = \frac{D}{\#G}$ koju ćemo prvo analizirati.

Pretpostavimo da su slučajne permutacije uniformne na G te ih generiramo sa ili bez zamjene. Ako podaci dolaze iz neprekidne razdiobe, tada je p uniformno distribuirana na $(0, 1)$ kada je H_0 istinita. Ako je poznata p-vrijednost p, nultu hipotezu odbacujemo kada je $p \leq \alpha$. Drugim riječima, $\mathbb{P}(p \leq \alpha \,|\, H_0) = \alpha$. Generiramo ω slučajnih permutacija iz grupe G. Procijenjena p-vrijednost iznosi $\hat{p} = \frac{B}{\omega}$, gdje je $B = \#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_jX) \geq T(X)\}$. Očito je $B = \omega\hat{p}$ binomna slučajna varijabla $B \sim B(\omega, p)$. $\hat{p}$ je nepristran procjenitelj od p jer je

$$\mathbb{E}[\hat{p}] = \mathbb{E}[\frac{B}{\omega}] = \frac{1}{\omega}\mathbb{E}[B] = \frac{1}{\omega}\omega p = p.$$

Štoviše, obično vrijedi i $\lim_{\omega\to\infty} \hat{p} = p$. Dokazat ćemo da ako umjesto permutacijske p-vrijednosti p koristimo njen nepristran procjenitelj, ne moramo dobiti egzaktan test.

Općenito vrijedi

$$\mathbb{P}(\hat{p} \leq \alpha) = \int_0^1 \mathbb{P}(\hat{p} \leq \alpha \,|\, p)\, dp.$$

Pokažimo da je $\hat{p}$ uniformno distribuirana na skupu $\left\{0, \frac{1}{\omega}, \ldots, 1\right\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\hat{p} = \frac{b}{\omega}) &= \int_0^1 \mathbb{P}(\hat{p} = \frac{b}{\omega} \,|\, p) \\
&= \int_0^1 \binom{\omega}{b} p^b (1-p)^{m-b} dp \\
&= \frac{1}{\omega + 1},
\end{aligned}$$

za sve $b = 0, 1, \ldots, \omega$. Gornji integral se riješi metodom parcijalne integracije. Ako umjesto p-vrijednosti p, koristimo nepristran procjenitelj $\hat{p}$ dobijemo pogrešku prve vrste

$$\mathbb{P}(\hat{p} \leq \alpha) = \frac{\lfloor \omega\alpha \rfloor + 1}{\omega + 1}.$$

Ovaj izraz može biti veći ili manji od razine značajnosti α što znači da test ne mora biti egzaktan. Za sve vrijednosti α blizu 0 vrijedi $\mathbb{P}(\hat{p} \leq \alpha) > \alpha$ dok za α blizu 1 vrijedi $\mathbb{P}(\hat{p} \leq \alpha) < \alpha$. Budući da je najčešće $\alpha \leq 0.05$ dobijemo antikonzervativan test za sve praktične vrijednosti ω i α. Pogreška prve vrste je uvijek veća od α kada je $\alpha = \frac{i}{\omega}$ za neki cijeli broj i ili ako je $\alpha < \frac{1}{\omega+1}$. Zapravo, pogreška prve vrste nikada nije manja od $\frac{1}{\omega+1}$ bez obzira koliko α bio malen. Zamijenimo li p-vrijednost p nepristranim procjeniteljem $\hat{p}$ izgubimo svojstvo egzaktnosti testa, te nam se poveća pogreška prve vrste. Da bismo dobili egzaktan test, morat ćemo koristiti pozitivno pristran procjenitelj.

Pokažimo kako dobiti egzaktne p-vrijednosti pomoću slučajnih permutacija generiranih bez zamjene. Neka je $G_1, \ldots, G_\omega$ particija grupe G za koju vrijedi $id \in G_1$, $\#G_1 = \ldots = \#G_\omega$ te $T(gX) = T(g'X)$ ako i samo ako su g i g' iz istog skupa G_i. Neka je $B = \#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_j X) \geq T(X)\}$. Generiramo ω slučajnih permutacija iz različitih skupova $G_i \setminus \{G_1\}$ bez zamjene. Egzaktna p-vrijednost iznosi

$$p_u = \mathbb{P}(B \leq b) = \frac{b+1}{\omega + 1},$$

pri čemu je b broj testnih statistika t većih ili jednakih od opažene vrijednosti t_{obs}. Međutim, ovaj pristup se u praksi pokazao kao zahtjevan kombinatorni problem te se rijetko koristi.

Najčešći način izračuna egzaktne p-vrijednosti u praksi je generiranjem slučajnih permutacija sa zamjenom. Generirajmo niz slučajnih permutacija $g_1, \ldots, g_\omega$ koje su nezavisne i uniformne na G. Vidimo da je moguće da se ista permutacija (pa tako i originalna) pojavi više puta. Neka je ponovno $B = \#\{1 \leq j \leq \omega : T(g_j X) \geq T(X)\}$. Želimo naći egzaktnu

p-vrijednost $p_e = \mathbb{P}(B \leq b)$ za $b = 0, 1, \dots, \omega$. Neka je B_t ukupan broj mogućih različitih testnih statistika većih od t_{obs}, te označimo $p_t = \frac{B_t+1}{\omega_t+1}$. Iako je p_t idelana p-vrijednost u ovom slučaju nam je nepoznata jer permutacije generiramo sa zamjenom. B_t je uniformno distribuirana na skupu $\{0, \dots, \omega_t\}$ ako je H_0 istinita. Tada je uvjetno na $B_t = b_t$, B binomna slučajna varijabla $B \sim B(\omega, p_t)$. Stoga je

$$\begin{aligned} p_e &= \sum_{b_t=0}^{m_t} \mathbb{P}(B \leq b | B_t = b_t) \mathbb{P}(B_t = b_t | H_0) \\ &= \frac{1}{\omega_t + 1} \sum_{b_t=0}^{\omega_t} F(b; \omega, p_t), \end{aligned}$$

pri čemu je F kumulativna funkcija distribucije binomne slučajne varijable B. Gornja jednakost nam daje formulu za izračun egzaktne p-vrijednosti, ali sumiranje može biti nepraktično jer je ω_t najčešće velik broj. Stoga ćemo gornju sumu aproksimirati integralom

$$\begin{aligned} p_e &\approx \int_{\frac{0.5}{\omega_t+1}}^{1} F(b; \omega, p_t)\, dp_t \\ &= \int_0^1 F(b; \omega, p_t)\, dp_t - \int_0^{\frac{0.5}{\omega_t+1}} F(b; \omega, p_t)\, dp_t \\ &= \frac{b+1}{\omega+1} - \int_0^{\frac{0.5}{\omega_t+1}} F(b; \omega, p_t)\, dp_t. \end{aligned}$$

Vidimo da je $p_e < p_u = \frac{b+1}{\omega+1}$, te očito $p_e \to p_u$ kada $\omega_t \to \infty$. Ako koristimo p_u kod slučajnih permutacija s ponavljanjem dobit ćemo konzervativan test. Međutim, iskazali smo formulu za egzaktan izračun p-vrijednosti u ovome slučaju.

Broj mogućih različitih testnih statistika ω_t ovisi o veličini uzorka, ali i načinu na koji smo definirali $T(X)$ jer neke permutacije daju iste testne statistike. Uzmimo dvije grupe veličine n_1 i n_2. Ako je testna statistika jednostrana ili je $n_1 \neq n_2$ tada svaka permutacija daje različitu testnu statistiku. U tom slučaju broj različitih testnih statistika iznosi $\omega_t + 1 = \binom{n_1+n_2}{n_1}$. Primjerice, jednostrani test s $n_1 = n_2 = 5$ nam daje $\omega_t + 1 = \binom{10}{5} = 252$ različitih testnih statistika. Generiramo $\omega = 100$ slučajnih permutacija sa zamjenom. Promotrimo tablicu u kojoj smo procijenili p-vrijednosti pomoću gore opisanih tehnika.

Broj $t \geq t_{obs}$	Procijenjena $\hat{p}$-vrijednost	Egzaktna p-vrijednost	Procjena p-vrijednosti integralom	Gornja ograda p_u
0	0	0.008047755	0.008101416	0.0099
1	0.01	0.017818517	0.017829558	0.0198
2	0.02	0.027718516	0.027719402	0.0297
3	0.03	0.037619829	0.037619855	0.0396
4	0.04	0.047520825	0.047520824	0.0495
5	0.05	0.057421814	0.057421814	0.0594
6	0.06	0.067322804	0.067322804	0.0693
7	0.07	0.077223794	0.077223794	0.0792
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Pogledajmo slučaj u kojem dobijemo 0 vrijednosti testnih statistika većih ili jednakih opaženoj vrijednosti t_{obs}. Procijenjena p-vrijednost iznosi $\hat{p} = \frac{0}{100} = 0$. Očito je da p-vrijednost ne može iznositi 0 ako koristimo sve permutacije iz grupe G te je ovo još jedan razlog za izbjegavanje korištenja nepristranih procjenitelja od p. Egzaktna p-vrijednost iznosi

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{1}{\omega_t + 1} \sum_{b_t=0}^{\omega_t} \sum_{k=0}^{b} \binom{\omega}{k} p_t^k (1 - p_t)^{\omega - k} \\ &= \frac{1}{252} \sum_{b_t=0}^{252} (1 - \frac{b_t + 1}{252})^{100} \\ &= 0.008047755. \end{aligned}$$

Aproksimacija integralom nam daje procjenu

$$\begin{aligned} p_e &\approx \frac{1}{101} - \int_0^{\frac{0.5}{252}} F(0, 100, p_t)\, dp_t \\ &= 0.008101416. \end{aligned}$$

Zadnji stupac nam daje gornju ogradu $p_u = \frac{b+1}{\omega+1} = \frac{1}{101} = 0.0099$.

Iako u praksi zbog jednostavnosti gotovo uvijek generiramo slučajne permutacije sa zamjenom, može se pokazati da generiranje permutacija bez zamjene daje test veće jakosti za bilo koji broj permutacija $\omega \leq \omega_t$. Također, p_e nam garantira egzaktan test bez obzira na broj korištenih permutacija ω. Međutim, kao što intuicija nalaže, s manje permutacija ćemo dobiti test manje jakosti.

Poglavlje 3

Primjene permutacijskih testova

Cilj ovoga poglavlja je provjeriti teoretske rezultate o egzaktnosti permutacijskih testova pomoću simulacija u programskom jeziku R te pokazati njihovu primjenu u statistici. Također, ispititat ćemo snagu permutacijskog testa te navedene rezultate usporediti s klasičnim t-testom. U prethodnom poglavlju smo konstruirali permutacijski test i pokazali da je pogreška prve vrste tog testa jednaka razini značajnosti α kada oba uzorka imaju istu razdiobu. Provjerit ćemo tu tvrdnju na primjerima permutacijskog testa za testiranje jednakosti očekivanja dviju slučajnih varijabli i testu korelacije između dvije slučajne varijable. Kodovi korišteni za simuliranje permutacijskih testova se nalaze u prilogu 3.

Primjer 3.0.1. *Želimo provjeriti egzaktnost permutacijskog testa i ispitati snagu testa za testiranje jednakosti očekivanja dviju slučajnih varijabli iz normalne razdiobe. U svakoj od simulacija testiramo sljedeće hipoteze:*

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

Teorem 2.3.8 nam garantira da ćemo u slučaju kada oba uzorka generiramo iz standardne normalne razdiobe pogrešno odbaciti nultu hipotezu u $\alpha \cdot 100\%$ slučajeva. Empirijske pogreške prve vrste i snagu permutacijskog testa ćemo usporediti s klasičnim jednostranim t-testom. Opisat ćemo način na koji smo proveli permutacijski test i u tablici prikazati rezultate provedene simulacije.

Simuliramo 1000 permutacijskih testova na način opisan u teoremu 2.3.8. Očito je da vrijedi randomizacijska hipoteza pa je opravdano korištenje permutacijskog testa. U svakoj od simulacija generiramo po dva uzorka. Neka je prvi generirani uzorak $X_1, \ldots, X_m \sim N(0, 1) + \mu'$, a drugi $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n} \sim N(0, 1)$, pri čemu je μ' realni broj koji predstavlja pomak jedinične normalne razdiobe. Očito je da u slučaju $\mu' = 0$ moramo dobiti približno egzaktan test. Permutacijski test simuliramo tako što generiramo 999 slučajnih permutacija (dodamo i jediničnu permutaciju) vektora $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}, X_{\sigma(m+1)}, \ldots, X_{\sigma(m+n)})$, pri čemu je $(\sigma(1), \ldots, \sigma(m), \sigma(m+1), \ldots, \sigma(m+n))$ slučajna permutacija skupa $\{1, \ldots, m+n\}$. Zatim računamo vrijednosti testnih statistika

$$T(X) = \sum_{i=1}^{m} X_{\sigma(i)} - \sum_{i=m+1}^{m+n} X_{\sigma(i)}.$$

Zatim, te vrijednosti uzlazno sortiramo i odredimo kritično područje testa. Ako je opažena vrijednost testne statistike jedinične permutacije unutar kritičnog područja odbacujemo nultu hipotezu, a ako je na rubu kritičnog područja nultu hipotezu odbacujemo uz vjerojatnost definiranu u teoremu. Očekujemo da će test odbaciti nultu hipotezu u približno $\alpha \cdot 100\%$ simulacija kada oba uzorka dolaze iz standardne normalne razdiobe. Klasični t-test provodimo tako što u svakoj simulaciji izračunamo vrijednost testne statistike i konstruiramo 95%-kvantil studentove razdiobe s n_1+n_2-1 stupnjeva slobode. Ako se vrijednost testne statistike nalazi u kritičnom području odbacivamo nultu hipotezu.

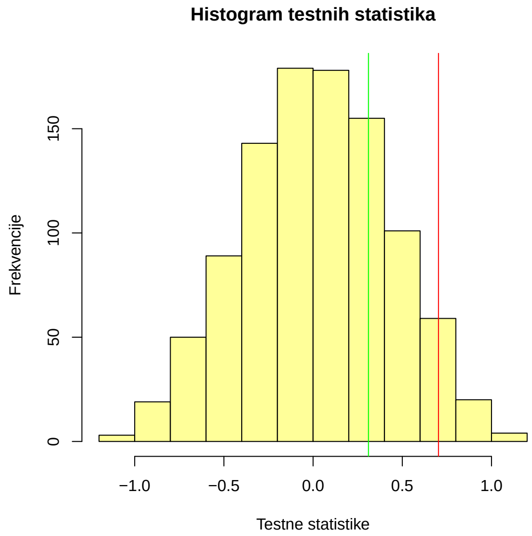
U sljedećoj tablici ćemo prikazati rezultate simulacije obzirom na različite duljine uzoraka i različite vrijednosti parametra μ'.

Duljine uzoraka	m:	5	10	11	25	
	n:	5	10	19	35	
permutacijski test		0.0474	0.048	0.045	0.056	$\mu' = 0$
t-test		0.046	0.043	0.046	0.058	
permutacijski test		0.1557	0.290	0.382	0.567	$\mu' = 0.5$
t-test		0.159	0.288	0.378	0.569	
permutacijski test		0.4176	0.679	0.809	0.981	$\mu' = 1$
t-test		0.424	0.683	0.821	0.980	
permutacijski test		0.8868	0.995	1	1	$\mu' = 2$
t-test		0.897	0.995	1	1	

Tablica 3.1: Empirijske pogreške prve vrste odnosno snaga permutacijskog i t-testa

U prvom slučaju smo generirali uzorke iz standardne normalne razdiobe. Vidimo da je pogreška prve vrste blizu razine značajnosti $\alpha = 0.05$ i za permutacijski i t-test neovisno o duljini uzoraka pa smo i empirijski provjerili tvrdnju o egzaktnosti permutacijskog testa kada uzorci dolaze iz iste razdiobe. U preostalim slučajevima možemo primijetiti da t-test očekivano ima malo veću snagu u odnosu na permutacijski test međutim vidimo da se i permutacijski test pokazao približno dobar kao i t-test u ovom slučaju.

Prikažimo histogram testnih statistika za jedan od provedenih permutacijskih testova u kojima smo oba uzorka duljine 10 generirali iz standardne normalne razdiobe.



Slika 3.1: Empirijska permutacijska distribucija testnih statistika

Vertikalni pravac crvene boje označava 95%-kvantil permutacijske distribucije, a pravac zelene boje prikaziva opaženu vrijednost testne statistike. U ovom slučaju nismo odbacili nultu hipotezu. Iz tablice vidimo da smo na 1000 ovakvih simulacija nultu hipotezu odbacili u 4.8% simulacija što je približno jednako razini značajnosti α.

Permutacijski test ne zahtijeva nužno da uzorci dolaze iz normalne razdiobe što mu daje prednost u odnosu na većinu parametarskih testova. Pokazat ćemo egzkatnost permutacijskog testa za testiranje jednakosti očekivanja dvije slučajne varijable iz Laplaceove razdiobe te usporediti snagu testa s klasičnim t-testom.

Definicija 3.0.2. *Neprekidna slučajna varijabla X ima Laplaceovu razdiobu s parametrima μ i b ako joj je funkcija gustoće dana sa*

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{b}\right\}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Matematičko očekivanje, drugi moment i varijanca slučajne varijable $X \sim Laplace(\mu, b)$ iznose:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2b} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{b}\right\} dx \\
&= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\mu} x \exp\left\{\frac{x-\mu}{b}\right\} dx + \frac{1}{2b} \int_{\mu}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x-\mu}{b}\right\} dx \\
&= \mu \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2b} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{b}\right\} dx \\
&= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\mu} x^2 \exp\left\{\frac{x-\mu}{b}\right\} dx + \frac{1}{2b} \int_{\mu}^{\infty} x^2\, exp\left\{-\frac{x-\mu}{b}\right\} \\
&= \frac{1}{2b} b(\mu^2 - 2\mu b + 2b^2) + \frac{1}{2b} b(\mu^2 + 2\mu b + 2b^2) \\
&= \mu^2 + 2b^2, \\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \mu^2 + 2b^2 - \mu^2 \\
&= 2b^2,
\end{aligned}$$

pri čemu se gornji integrali lako izračunaju primjenom metode parcijalne integracije.
Funkcija distribucije slučajne varijable $X \sim Laplace(\mu, b)$ iznosi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{x-\mu}{b}\right\}, & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{b}\right\}, & x \geq \mu \end{cases}$$

pa je inverz funkcije distribucije

$$F^{-1}(p) = \mu - b \operatorname{sgn}(p - \frac{1}{2}) \log(1 - 2|p - \frac{1}{2}|).$$

Inverzna funkcija distribucije nam daje ideju za generiranje slučajnih varijabli iz Laplaceove distribucije. Naime, ako je $X \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tada slučajna varijabla

$$Y = \mu - b \operatorname{sgn}(X) \log(1 - 2|X|))$$

ima Laplaceovu distribuciju s parametrima μ i b.

Primjer 3.0.3. *Provjerit ćemo egzaktnost permutacijskog testa za testiranje jednakosti očekivanja dviju slučajnih varijabli iz Laplaceove razdiobe. Također ćemo usporediti empirijsku snagu permutacijskog i klasičnog t-testa za različite veličine uzoraka i parametre Laplaceove razdiobe.*

Simuliramo 1000 permutacijskih testova na isti način kao u prethodnom primjeru s tim da sada generiramo uzorke iz Laplaceove distribucije. Neka je prvi generirani uzorak $X_1, \ldots, X_m \sim Laplace(0, 1) + \mu'$ a drugi $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n} \sim Laplace(0, 1)$, pri čemu je μ' pomak Laplecove razdiobe. Prikažimo u tablici rezultate simulacije za različite vrijednosti parametra μ' (parametar b je jednak 1 u svakom od slučajeva).

Duljine uzoraka	m:	5	10	11	25	
	n:	5	10	19	35	
permutacijski test		0.0494	0.056	0.045	0.056	$\mu' = 0$
t-test		0.058	0.052	0.046	0.055	
permutacijski test		0.1478	0.2015	0.278	0.406	$\mu' = 0.5$
t-test		0.134	0.200	0.282	0.411	
permutacijski test		0.3345	0.491	0.598	0.859	$\mu' = 1$
t-test		0.322	0.488	0.599	0.853	
permutacijski test		0.7151	0.925	0.967	1	$\mu' = 2$
t-test		0.713	0.924	0.965	0.999	

Tablica 3.2: Empirijske pogreške prve vrste odnosno snaga permutacijskog i t-testa

Možemo primijetiti da su simulirani permutacijski i t-test približno egzaktni odnosno pogreška prve vrste im iznosi $\alpha = 0.05$ u prvom slučaju kada uzorci dolaze iz iste razdiobe. U slučajevima kada prvi uzorak generiramo iz pomaknute Laplaceove razdiobe ($\mu' > 0$) možemo uočiti da permutacijski test daje malo veću snagu u odnosu na t-test s ponekom iznimkom.

U oba gornja primjera permutacijski i t-test su se ponašali približno jednako. Još ćemo obraditi primjer kada uzorci dolaze iz razdiobe koja nije simetrična.

Definicija 3.0.4. *Neprekidna slučajna varijabla X ima χ^2-distribuciju s n stupnjeva slobode ako joj je funkcija gustoće dana s*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

pri čemu je Γ-funkcija definirana s

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,\ x > 0.$$

Očekivanje r-tog momenta slučajne varijable $X \sim \chi^2(n)$ iznosi

$$\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty x^{r+\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \frac{2^r \Gamma(r + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

pri čemu se gornji integral riješi parcijalnom integracijom. Vrijedi dakle

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{2\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n,\\
\mathbb{E}[X^2] &= \frac{4\Gamma(2+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{4(1+\frac{n}{2})\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n^2+2n,\\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = n^2+2n-n^2 = 2n,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u gornjim jednakostima koristili poznatu činjenicu $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Primjer 3.0.5. *Provjerit ćemo egzaktnost permutacijskog testa za testiranje jednakosti očekivanja dviju slučajnih varijabli iz χ^2 distribucije s 1 stupnjem slobode te usporediti empirijske pogreške prve vrste i snagu permutacijskog i klasičnog t-testa za različite veličine uzoraka i različite vrijednosti parametra μ'.*

Kao u prethodna dva primjera simuliramo 1000 permutacijskih testova s tim da sada generiramo uzorke iz $\chi^2(1)$ razdiobe pri čemu je 1 broj stupnjeva slobode, a vidjeli smo i da je to ujedno i očekivanje ove razdiobe. Neka je prvi generirani uzorak $X_1, \ldots, X_m \sim \chi^2(1) + \mu'$ a drugi $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n} \sim \chi^2(1)$. Prikažimo u tablici rezultate simulacije za različite duljine uzoraka te različite vrijednosti parametra pomaka μ'.

Duljine uzoraka	m:	5	10	11	25	
	n:	5	10	19	35	
permutacijski test		0.0502	0.054	0.048	0.045	$\mu' = 0$
t-test		0.035	0.048	0.032	0.037	
permutacijski test		0.2424	0.267	0.266	0.426	$\mu' = 0.5$
t-test		0.193	0.255	0.248	0.421	
permutacijski test		0.4217	0.554	0.614	0.831	$\mu' = 1$
t-test		0.388	0.547	0.619	0.858	
permutacijski test		0.746	0.918	0.955	0.998	$\mu' = 2$
t-test		0.738	0.917	0.980	0.998	

Tablica 3.3: Empirijske pogreške prve vrste odnosno snaga permutacijskog i t-testa

Primijetimo da je u ovom slučaju permutacijski test pouzdaniji, jer je pogreška prve vrste jednaka razini značajnosti $\alpha = 0.05$ kada su oba uzorka iz iste razdiobe ali je i snaga testa veća za vrijednosti parametra $\mu' > 0$. Očito je permutacijski test bolja opcija kada nije ispunjena pretpostavka o normalnosti uzoraka i distribucija nije simetrična.

Jedna od važnijih primjena permutacijskih testova je za testiranje korelacije između dvije slučajne varijable. Zanima nas je li se koeficijent korelacije dvije slulčajne varijable značajno razlikuje od nule. Provjerit ćemo egzaktnost permutacijskog testa i u tom slučaju te ispitati snagu testa kada je korelacija među varijablama pozitivna.

Primjer 3.0.6. *Simulacijama ćemo testirati egzaktnost permutacijskog korelacijskog testa između slučajnih varijabli X i Y. Također ćemo usporediti snagu permutacijskog testa i klasičnog studentovog testa obzirom na različite duljine uzoraka. U svakoj simulaciji provodimo permutacijski test za testiranje hipoteza*

$$H_0 : \rho \leq 0$$
$$H_1 : \rho > 0,$$

pri čemu je ρ koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

Egzaktnost ćemo provjeriti simulirajući nizove $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ jednake duljine iz standardne normalne razdiobe. Budući da su ovako generirane slučajne varijable nezavisne (i jednakodistribuirane) one su i nekorelirane. Generirane nizove promatramo kao dvije uređene n-torke pri čemu fiksiramo n-torku $X = (X_1, \ldots, X_n)$ dok slučajne permutacije radimo unutar n-torke $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Označimo sa $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ slučajnu permutaciju skupa $\{1, \ldots, n\}$. Tada uređena n-torka $(Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(n)})$ predstavlja neku permutacija slučajnog vektora $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Za svaku od permutacija računamo vrijednost testne statistike odnosno Pearsonov koeficijent korelacije između X i Y po sljedećoj formuli

$$T(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} - n\overline{xy}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{\sigma(i)}^2 - n\overline{y}^2}}.$$

Zatim provodimo permutacijski test na isti način kao u prethodnim primjerima te bismo nultu hipotezu trebali pogrešno odbaciti u $\alpha \cdot 100\%$ slučajeva. Snagu testa ćemo procijeniti simulirajući nizove slučajnih varijabli X i Y jednake duljine s unaprijed zadanom korelacijom. Simulaciju takvih slučajnih varijabli provodimo tako da prvo generiramo dva niza slučajnih varijabli X i Y iz standardne normalne razdiobe. Označimo s $X_1 = X + aY$ i $X_2 = X - aY$ nove slučajne varijable koje su linearna kombinacija slučajnih varijabli X i Y. Koeficijent korelacije između slučajnih varijabli X_1 i X_2 iznosi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Corr}(X_1, X_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{(\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]}{\sqrt{(\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} \\
&= \frac{1 - a^2}{1 + a^2},
\end{aligned}$$

pa kod generiranja slučajnih varijabli X_1 i X_2 unaprijed zadamo koeficijent korelacije r te za realan broj a uzimamo vrijednost $(\frac{1-r}{1+r})^{\frac{1}{2}}$ pa vrijedi $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = r$.

Prikažimo u tablici rezultate simulacija obzirom na različite duljine uzoraka i različite koeficijente korelacije između slučajnih varijabli.

Duljine uzoraka	n:	5	10	20	45	80	
permutacijski test		0.0469	0.044	0.054	0.044	0.051	$\rho = 0$
korelacijski test značajnosti		0.051	0.044	0.058	0.043	0.055	
permutacijski test		0.084	0.154	0.207	0.396	0.567	$\rho = 0.2$
korelacijski test značajnosti		0.091	0.160	0.210	0.399	0.565	
permutacijski test		0.200	0.459	0.739	0.981	0.999	$\rho = 0.5$
korelacijski test značajnosti		0.224	0.465	0.745	0.980	0.999	

Tablica 3.4: Empirijske pogreške prve vrste odnosno snaga permutacijskog testa i korelacijskog testa značajnosti

Korelacijski test značajnosti provodimo tako što u svakoj simulaciji izračunamo vrijednost testne statistike

$$T = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n - 2},$$

a zatim odredimo 95% kvantil studentove razdiobe i konstruiramo kritično područje testa $[t_\alpha(n-2), +\infty\rangle$. Ako je opažena vrijednost testne statistike unutar kritičnog područja odbacimo nultu hipotezu. Permutacijski test provodimo tako što u svakoj simulaciji generiramo 999 slučajnih permutacija (uključimo dodatno i jediničnu permutaciju), sortiramo vrijednosti testnih statistika i odredimo 95%-kvantil permutacijske distribucije kao u prethodnim primjerima.

Kada oba uzorka generiramo iz standardne normalne razdiobe, pogreška prve vrste iznosi približno 5%. Permutacijski test je u tom slučaju egzaktan kako smo i očekivali, budući da su generirane slučajne varijable nezavisne pa su i nekorelirane. U slučajevima kada su generirane slučajne varijable određene korelacije permutacijski test i klasični korelacijski test značajnosti imaju približno jednaku snagu.

Prilog 1: Kodovi u R-u za simuliranje testova

Navodimo kod za simuliranje permutacijskog testa iz primjera 3.0.1 za slučaj u kojem smo simulirali dva uzorka duljine 5 iz standardne normalne razdiobe. Kodovi u ostalim primjerima su slični ovome pa ćemo za ostale primjere navesti samo ključne dijelove koji se razlikuju od navedenog.

```
alpha = 0.05
nperm = 1000
nsim = 1000
fi_perm = numeric(nsim)
fi_t_test = numeric(nsim)

for(j in 1 : nsim)
{
treatgroup = data.frame(
result = rnorm(5, mean = 0, sd = 1),
treat = "treatmant")

controlgroup = data.frame(
result = rnorm(5, mean = 0, sd = 1),
treat = "notreatmant")
wholegroup = rbind(treatgroup, controlgroup)
T_i = numeric(nperm)
T_obs = mean(treatgroup$result) - mean(controlgroup$result)
T_i[1] = T_obs

for(i in 2 : nperm){
aux = wholegroup
perm=sample(length(wholegroup$result), replace=FALSE)
aux$result = aux$result[perm]
```

```
mean_treat_perm = mean(aux[aux$treat == "treatmant", "result"])
mean_control_perm = mean(aux[aux$treat == "notreatmant", "result"])
T_i[i] = mean_treat_perm - mean_control_perm}

t_test = t.test(treatgroup$result,controlgroup$result)$statistic
if(t_test >= qt(1-alpha,8)){ fi_t_test[j]=1}

T_i = sort(T_i)
T_k = nperm-floor(alpha*nperm)
Mplus = length(which(T_i > T_i[T_k]))
Mnula = length(which(T_i == T_i[T_k]))

if ( T_obs > T_i[T_k] ) {
f=1
} else if (T_obs == T_i[T_k]){
f = (alpha*nperm-Mplus) / Mnula
} else {f = 0}

fi_perm[j] = f
}
percent_reject_perm = sum(fi_perm) / nsim
percent_reject_perm
percent_reject_t = sum(fi_t_test) / nsim
percent_reject_t
```

U drugom primjeru 3.0.3 za testiranje jednakosti očekivanja slučajnih varijabli iz Laplaceove distribucije navodimo samo dio koda za generiranje Laplaceovih slučajnih varijabli budući da je ostatak koda isti kao u prvom primjeru.

```
rlaplace=function(n,mi,b){
        X = runif ( n, -0.5, 0.5 )
        Y = mi - b * ifelse(X < 0,-1,1)*log(1-2*abs(X))
        Y}
```

Kod za generiranje slučajnih varijabli unaprijed zadane korelacije iz primjera 3.0.6.

```
rho = 0.5
a=sqrt((1-rho)/(1+rho))
x = rnorm(5,0,1)
y = rnorm(5,0,1)
X=x+a*y
Y=x-a*y
```

Bibliografija

[1] B. Phipson, G. Smith, *Permutation p-values should never be zero: calculating exact p-values when permutations are randomly drawn*, Statistical applications in genetics and molecular biology 9, članak 39, 2010.

[2] E.L. Lehmann, J.P. Romano, *Testing statistical hypothesis*, Springer, New York, 2005.

[3] J. Hemerik, J. Goeman, *Exact testing with random permutations*, TEST 27, 2018, 811-825.

[4] J. Hemerik, *Permutation tests and multiple testing*, https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/hemerik.pdf, (ožujak 2019.).

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska Knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak

Permutacijski testovi predstavljaju jednostavniji i robusniji način testiranja hipoteza, budući da su provedivi uz manje pretpostavki nego parametarski testovi.

U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti i matematičke statistike koji su korišteni u radu.

Na početku drugog poglavlja opisana je generička konstrukcija permutacijskih testova sa zadanim nivoom značajnosti koja koristi cijelu grupu permutacija i dokazana egzaktnost takvog permutacijskog testa. Zatim se ispituju uvjete uz koje je moguće reducirati broj korištenih permutacija, bez da se izgubi svojstvo egzaktnosti permutacijskog testa. Na kraju poglavlja smo proučavali razne načine izračuna permutacijskih p-vrijednosti.

U trećem poglavlju smo iznijeli rezultate simulacije permutacijskih testova u R-u. Provjerili smo egzaktnost permutacijskih testova na primjerima testiranja jednakosti očekivanja kada uzorci dolaze iz raznih razdioba. Pomoću permutacijskog testa smo testirali je li se koeficijent korelacije između dvije slučajne varijable značajno razlikuje od nule. Usporedili smo pogreške prve vrste ili snagu permutacijskog testa s klasičnim t-testom.

Summary

Permutation tests give simpler and more robust way of testing hypothesis because they require fewer assumptions in comparison with most parametric tests.

In the first chapter we introduced some basic notions from probability theory and mathematical statistics.

At the beginning of the second chapter, we described generic construction of permutation tests which use the whole permutation group, with given significance level and we proved exactness of such tests. Then we examined conditions for reducing number of permutations used with intention of not loosing exactness property. Also permutation p-values and their calculating was studied at the end of this chapter.

In the third chapter we present results of simulations of permutation tests performed in R. We checked the exactness of permutation tests on the example of testing equality of means when samples were generated from various distributions. We showed their application in testing if correlation coefficient between two random variables is significantly different from zero. In all examples, we compare type one error rate or power of permutation test with classical t-test.

Životopis

Stipe Jurčević je rođen 25.ožujka 1994. u Zagrebu. Osnovnu školu Stjepana Radića završio je Stipanićima (općina Tomislavgrad), a potom i gimnaziju Marka Marulića u Tomislavgradu. Preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisuje 2013. godine. Titulu prvostupnika matematike stječe 2016. godine kada upisuje diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.