Logističko preslikavanje

Jambrešić, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:307354

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Jambrešić

LOGISTIČKO PRESLIKAVANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **4**

1 Analiza ponašanja iteracija logističkog preslikavanja u ovisnosti o parametru μ i početnom uvjetu x_0 **5**

2 Grafička analiza iteracija za razne vrijednosti parametra μ **9**
2.1 SageMath 9
2.2 Prikaz iteracija funkcije 9
2.2.1 Osam gomilišta niza vrijednosti iteracija 14
2.2.2 Četiri gomilišta niza vrijednosti iteracija 15
2.2.3 Dva gomilišta niza vrijednosti iteracija 16
2.2.4 Limes niza vrijednosti iteracija 18
2.2.4.1 Limes niza iteracija u ovisnosti o parametru $\mu < 3$ . . . 20
2.2.5 Više od osam gomilišta niza vrijednosti iteracija 22

3 Teorija diskretnih dinamičkih sustava na primjeru logističkog preslikavanja **27**
3.1 Osnovni pojmovi i primjena na kvadratnu familiju 27
3.2 Bifurkacijski dijagram za kvadratnu familiju 42
3.2.1 Udvostručenje broja periodičkih točaka 48

4 Zaključak **51**

Bibliografija **53**

Uvod

Uzmimo u obzir vrlo jednostavan model broja jedinki neke vrste u danoj generaciji (prema [1]). Pretpostavimo da se populacija mijenja proporcionalno broju jedinki u prethodnoj generaciji. Neka je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji prirodni broj i neka je $\mu > 0$ konstanta proporcionalnosti. Tada broj jedinki u n-toj generaciji možemo prikazati rekurzijom

$$P_n = \mu P_{n-1},$$

gdje je P_0 početni broj jedinki u populaciji.

Prikažimo broj jedinki populacije pomoću početnog broja jedinki P_0 za nekoliko vrijednosti broja n. Imamo:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \mu P_0 = \mu^1 P_0, \\
P_2 &= \mu P_1 = \mu\left(\mu P_0\right) = \mu^2 P_0, \\
P_3 &= \mu P_2 = \mu\left(\mu^2 P_0\right) = \mu^3 P_0, \\
P_4 &= \mu P_3 = \mu\left(\mu^3 P_0\right) = \mu^4 P_0, \ldots
\end{aligned}$$

Po istom principu, broj jedinki vrste u n-toj generaciji možemo prikazati pomoću početnog broja jedinki P_0:

$$P_n = \mu P_{n-1} = \mu^n P_0.$$

Dakle, broj jedinki u n-toj generaciji ovisi samo o početnom broju jedinki i konstanti proporcionalnosti.

Pogledajmo sada ponašanje populacije s obzirom na konstantu proporcionalnosti μ:

1. Ako je $\mu > 1$, onda $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^n P_0 = +\infty$.
2. Ako je $\mu \in \langle 0, 1\rangle$, onda $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^n P_0 = 0$.

Primijetimo da za broj jedinki u populaciji postoje dva scenarija - ili će ona rasti u beskonačnost (u slučaju da je $\mu > 1$) ili će sve jedinke nestati (u slučaju da je $\mu \in \langle 0, 1\rangle$).

Lako je zaključiti da je ovaj model nepotpun, jer nije realistično očekivati da vrsta može doživjeti samo dvije sudbine. Štoviše, sam scenarij da broj jedinki raste u beskonačnost nije realističan. Naime, on ne uzima u obzir da je za očuvanje vrste također potrebno osigurati određene životne uvjete (poput hrane ili staništa), što je nemoguće za populaciju koja raste u beskonačnost.
Stoga je potrebno u jednadžbu uvesti takozvani *limitirajući faktor*. Svrha uvođenja tog faktora je da dobijemo model u kojem će vrijediti sljedeće: ako u nekom trenutku t broj jedinki $P(t)$ dostigne limitirajući faktor L, tada broj jedinki počinje padati, ako pak vrijedi $P(t) < L$, tada broj jedinki u populaciji dalje raste. Takav model možemo prikazati diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu P(t)(L - P(t)), \quad t > 0,$$

s početnim uvjetom $P(0) = P_0$, koji predstavlja broj jedinki u populaciji u trenutku $t = 0$. Ovdje je $\mu > 0$ konstanta proporcionalnosti (prema [1]).

Time smo izbjegli da su nam jedina dva scenarija izumiranje ili rast u beskonačnost. Sada sudbinu populacije možemo razdvojiti na tri slučaja:

1. Ako u nekom trenutku t_0 broj jedinki u generaciji $P(t_0)$ dostigne limitirajući faktor L, tada je $L - P(t_0) = 0$. Dakle, $\frac{dP(t_0)}{dt} = 0$, pa će funkcija P biti konstantna, iz čega slijedi da broj jedinki ostaje isti.

2. Ako u nekom trenutku t_0 vrijedi $P(t_0) > L$, tada je $L - P(t_0) < 0$. Dakle, $\frac{dP(t_0)}{dt} < 0$, pa će funkcija P padati, iz čega slijedi da broj se broj jedinki u trenutku t_0 smanjuje.

3. Ako u nekom trenutku t_0 vrijedi $P(t_0) < L$, tada je $L - P(t_0) > 0$. Dakle, $\frac{dP(t_0)}{dt} > 0$, pa će funkcija P rasti, iz čega slijedi da se broj jedinki u trenutku t_0 povećava.

Koristimo li definiciju derivacije funkcije te aproksimaciju derivacije pomoću diferencije unaprijed, navedeni model poprima sljedeći oblik:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \mu P(t)(L - P(t)).$$

Nadalje, uzmemo li da je $h = 1$, imamo:

$$P(t+1) - P(t) = \mu P(t)(L - P(t)).$$

Još želimo model koji će prikazivati broj jedinki u nekoj generaciji u diskretnim trenucima $n \in \mathbb{N}$, a ne u trenutku t. Stoga ćemo koristiti diskretizaciju $t \mapsto n \in \mathbb{N}$. Koristeći oznaku $P(n) = P_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, gdje je P_0 početni broj jedinki, dobivamo sljedeći model:

$$P_{n+1} - P_n = \mu P_n(L - P_n).$$

Daljnjim sređivanjem dobivamo ekvivalentne tvrdnje:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \mu P_n(L - P_n) + P_n, \\
P_{n+1} &= \mu P_n(L - P_n) + P_n \cdot \mu \cdot \frac{1}{\mu}, \\
P_{n+1} &= \mu P_n \left(L - P_n + \frac{1}{\mu} \right), \\
P_{n+1} &= \mu P_n \left(\left(L + \frac{1}{\mu} \right) - P_n \right).
\end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $L_1 = L + \frac{1}{\mu}$. Sada imamo:

$$P_{n+1} = \mu P_n \left(L_1 - P_n \right).$$

Ta rekurzivna jednadžba predstavlja iteracije funkcije $f(x) = \mu x(1 - x)$, počevši od početne točke $x = P_0$, gdje je $P_n = f^{\circ n}(P_0)$.

Funkcija ovog oblika naziva se još i logistička funkcija ili logističko preslikavanje. Tu ćemo funkciju proučavati u daljnjem tijeku rada. Napomenimo još da ćemo gledati samo slučajeve kad je $\mu > 0$. Odabrat ćemo početnu vrijednost x_0 te konstantu proporcionalnost μ te izračunati sljedeći niz vrijednosti logističke funkcije:

$$\begin{aligned}
&f(x_0), \\
&f(f(x_0)), \\
&f(f(f(x_0))), \ldots
\end{aligned}$$

U radu ćemo proučavati kako se asimptotsko ponašanje niza iteracija logističkog (kvadratnog) preslikavanja $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ mijenja s obzirom na promjenu parametra μ i s obzirom na izbor početne točke x_0.

Najprije ćemo u Poglavlju 1 odrediti *zanimljive* intervale parametra μ i početne točke x_0. Spomenut ćemo da za vrijednosti parametra $\mu > 4$ niz vrijednosti iteracija konvergira u $-\infty$ za gotovo sve početne točke (osim skupa mjere 0). Na tom malom skupu ponašanje je *kaotično*, ali to nećemo analizirati u radu. Pokazat ćemo da za vrijednosti parametra $\mu \in \langle 0, 4]$ i za početnu točku x_0 u intervalima $\langle -\infty, 0]$ ili $[1, +\infty\rangle$, iteracije ili konvergiraju u 0, ili u pozitivnu ili negativnu beskonačnost, ili je niz stacionaran. Nama zanimljivi intervali su, dakle, samo $\mu \in \langle 0, 4]$ i $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$. Nadalje ćemo spomenuti da za $\mu > 4$ niz vrijednosti iteracija konvergira u $-\infty$ za gotovo sve točke (osim skupa mjere 0). Na tom *malom* skupu je ponašanje kaotično, ali to nećemo analizirati u radu. Zanimljivi intervali su $\mu \in \langle 0, 4]$ i $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$.

Nadalje, u Poglavlju 2 ćemo grafički ilustrirati *pojavu udvostručenja perioda*. Naime, za $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ i $\mu \in \langle 0, 3\rangle$ niz vrijednosti iteracija konvergira, a kad parametar μ raste od vrijednosti 3 prema vrijednosti 4, broj gomilišta niza iteracija se udvostručuje u nekim diskretnim vrijednostima parametra. Ako vrijednosti parametra povećavamo, iteracije se počinju gomilati na sve veći broj točaka, što sugerira sve kaotičnije ponašanje orbita, da bi konačno za parametre $\mu > 4$ došlo do pojave kaosa (što nećemo obrađivati).

U Poglavlju 3 ćemo definirati neke osnovne pojmove iz teorije jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sustava, npr. pojmove *asimptotski stabilne i nestabilne fiksne, odnosno periodičke točke* i pojam *bifurkacije*. Nadalje ćemo navedenu teoriju primijeniti na kvadratnu familiju i pokazati neke tvrdnje koje smo naslutili grafički.

Poglavlje 1

Analiza ponašanja iteracija logističkog preslikavanja u ovisnosti o parametru μ i početnom uvjetu x_0

Promatramo parametarsku familiju preslikavanja

$$f_\mu(x) = \mu x(1-x), \quad \mu > 0. \tag{1.1}$$

Cilj rada je analizirati asimptotsko ponašanje iteracija funkcije $f_\mu^n(x_0)$, za razne vrijednosti parametra $\mu > 0$ i početne točke $x_0 \in \mathbb{R}$.

Odredimo sada intervale vrijednosti x_0 i μ koji nam nisu zanimljivi za asimptotsko ponašanje niza iteracija, dakle u kojima vrijedi da niz vrijednosti iteracija funkcije teži u 0 ili pozitivnu ili negativnu beskonačnost.

Primijetimo da je f_μ iz (1.1) za $\mu > 0$ kvadratna funkcija s negativnim parametrom uz vodeći koeficijent. Nultočke funkcije f su točke 0 i 1, a graf funkcije f je parabola okrenuta otvorom prema dolje. Još izračunajmo točke u kojima graf funkcije f siječe pravac $y = x$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

$$\begin{aligned} \mu x(1-x) &= x, \\ \mu x(1-x) - x &= 0, \\ x(\mu - \mu x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Sada je očito da je jedno rješenje jednadžbe $x = 0$, a drugo rješenje je rješenje linearne jednadžbe $\mu - \mu x - 1 = 0$ koje je jednako $x = \frac{\mu-1}{\mu}$. Dakle, graf funkcije f siječe pravac $y = x$ u točkama $x = 0$ i $x = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Razlikujemo sljedeće slučajeve s obzirom na vrijednost parametra μ:

1. Ako je $0 < \mu < 1$, tada je točka $x = \frac{\mu-1}{\mu}$ strogo manja od 0.

   a) Promotrimo slučaj kad je $x_0 < \frac{\mu-1}{\mu}$.
   Pokažimo najprije da za svaki $x < \frac{\mu-1}{\mu}$ vrijedi $f(x) < x$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

$$\begin{aligned} f(x) &< x, \\ -\mu x^2 + \mu x &< x, \\ -\mu x^2 + \mu x - x &< 0, \\ x(-\mu x + \mu - 1) &< 0. \end{aligned}$$

   Kako je $x < 0$, posljednja relacija je ekvivalentna $-\mu x + \mu - 1 > 0$ što je ekvivalentno $x < \frac{\mu-1}{\mu}$. Kako ovo vrijedi prema pretpostavci slučaja, time smo dokazali tvrdnju. Dakle, vrijedi:

$$\begin{aligned} x_0 &> f(x_0) = x_1, \\ x_1 &> f(x_1) = x_2, \ldots \end{aligned}$$

   Dakle, niz iteracija $x_{n+1} = f(x_n)$, za $n \in \mathbb{N}_0$, je padajući. Nadalje, pretpostavimo da niz iteracija konvergira i da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -\mu x_n^2 + \mu x_n \quad / \lim_{n\to\infty}, \\ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}(-\mu x_n^2 + \mu x_n), \\ L &= -\mu L^2 + \mu L. \end{aligned}$$

   Dakle, jedini kandidati za limes niza su $L = 0$ i $L = \frac{\mu-1}{\mu}$. No, kako je niz vrijednosti iteracija padajući i sve vrijednosti su strogo manje od $\frac{\mu-1}{\mu} < 0$, to nije moguće. Dakle, za $x_0 < \frac{\mu-1}{\mu}$, niz vrijednosti iteracija funkcije teži u $-\infty$ (strogo je padajuć i nema limes, pa nije ograničen odozdo).

   b) Promotrimo slučaj kad je $\frac{\mu-1}{\mu} < x_0 < 0$.
   Analogno prethodnom slučaju možemo zaključiti da za svaki $x < \frac{\mu-1}{\mu}$ vrijedi $f(x) > x$. Dakle, niz iteracija $x_{n+1} = f(x_n)$, za $n \in \mathbb{N}_0$, je strogo rastući.
   Kako je funkcija f strogo rastuća na intervalu $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, vrijedi:

$$f(x) < f(0) = 0, \quad \forall x < 0.$$

Naime, vrijedi $f'(x) = \mu(1-2x)$. Kako je $\mu > 0$ i $1-2x > 0$ za negativne vrijednosti x, vrijedi $f'(x) > 0$, $\forall x \in \langle -\infty, 0\rangle$, pa je funkcija f strogo rastuća na tom intervalu.

Dakle, niz vrijednosti iteracija funkcije je ograničen odozgo s 0. Pošto je niz vrijednosti iteracija funkcije strogo rastući i ograničen, onda je on konvergentan. Nadalje, kako znamo da je niz x_n konvergentan, pretpostavimo da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Jedini kandidati za limes niza su $L = 0$ i $L = \frac{\mu-1}{\mu}$, što smo pokazali u slučaju 1.a). No, pošto je niz vrijednosti iteracija strogo rastući vrijedi $x_n > \frac{\mu-1}{\mu}$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Dakle, $\frac{\mu-1}{\mu}$ ne može biti limes tog niza, pa vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

c) Promotrimo slučaj kad je $x_0 = \frac{\mu-1}{\mu}$.
Vrijedi:

$$f(x_0) = \frac{\mu-1}{\mu} = x_0,$$
$$f^2(x_0) = f(x_0) = x_0, \ldots$$

Induktivno, možemo pokazati $f^n(x_0) = \frac{\mu-1}{\mu} = x_0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijednosti svih iteracija bit će jednake x_0, tj. niz vrijednosti iteracija funkcije je stacionaran.

d) Promotrimo slučaj kad je $x_0 > 1$.
Kako je funkcija f negativna na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, vrijedi $f(x_0) < 0$. Niz svih sljedećih iteracija upada u jedan od slučajeva koje smo opisali gore. Dakle, ili niz vrijednosti iteracija funkcije teži u 0 ili u $-\infty$ ili je fiksan.

2. Ako je $1 \leq \mu \leq 4$ tada je $\frac{\mu-1}{\mu} \geq 0$. Sada, analogno slučajevima 1.a) i 1.c) možemo pokazati da niz vrijednosti iteracija funkcije f teži u $-\infty$ za $x_0 < 0$ ili $x_0 > 1$.

3. Ako je $\mu > 4$ te $x_0 < 0$ ili $x_0 > 1$, tada, analogno slučajevima 1.a) i 1.c) možemo pokazati da niz vrijednosti iteracija funkcije f teži u $-\infty$. Preostaje nam pogledati slučaj kad je $0 < x_0 < 1$.

   a) Ako je x_0 takav da vrijedi $f(x_0) > 1$, tada je $f^2(x_0) < 0$, jer je funkcija f negativna i strogo padajuća na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$. Time smo upali u domenu opisanu u slučaju 1.a), pa niz vrijednosti iteracija funkcije teži u $-\infty$.
   Da bismo taj interval odredili preciznije, izračunajmo najprije točke u kojima vrijedi $f(x) = 1$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

$$\mu x(1-x) = 1,$$
$$\mu x^2 - \mu x + 1 = 0.$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $x_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$.
Dakle, za $x_0 \in I_0$, gdje je $I_0 = \left\langle \frac{\mu - \sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}, \frac{\mu + \sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu} \right\rangle$, niz vrijednosti iteracija funkcije teži u $-\infty$.

b) Očito je $[0,1] \setminus I_0$ unija dva disjunktna segmenta, označimo ih I_{00} i I_{01}. Za početnu točke iz intervala I_0, vrijednosti iteracija nakon prve izađu iz intervala $[0,1]$, a zatim teže u $-\infty$ (što je pokazano u 3.). Može se pokazati ([1], poglavlje 1.5) da unutar svakog od intervala I_{00} i I_{01} postoji jedan interval takav da funkcija f preslikava početne točke iz tih intervala u interval I_0. Zatim će, nakon druge iteracije, te početne točke izaći iz intervala $[0,1]$. Postupak se nastavlja, tako da u limesu dobivamo skup mjere 0 *Cantorovog tipa* takav da iteracije njegovih početnih točaka zauvijek ostaju u njemu. Za sve ostale točke iz intervala $[0,1]$ iteracije nakon konačnog broja izađu iz $[0,1]$, dakle, teže u $-\infty$. Za početne točke iz Cantorovog skupa dinamika je kaotična unutar Cantorovog skupa, što nećemo analizirati u radu (prema [1]).

4. Pogledajmo još slučaj kad je $x_0 = 0$ ili $x_0 = 1$. Za svaki $\mu > 0$ vrijedi $f^n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Dakle, vrijednosti svih iteracija funkcije f će biti 0, tj. niz vrijednosti iteracija funkcije je stacionaran, pa nam taj slučaj nije zanimljiv.
S druge strane, imamo $f(1) = 0$, pa vrijedi $f^n(1) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dakle, vrijednosti svih iteracija nakon prve će biti 0, pa nam ni taj slučaj nije zanimljiv.

Dakle, $0 < x_0 < 1$ i $\mu \in \langle 0, 4]$ su slučajevi koji su nam zanimljivi i koje ćemo proučavati. Ostali nam nisu zanimljivi, jer niz vrijednosti iteracija funkcije teži u 0 ili u $-\infty$ ili je stacionaran.

Poglavlje 2

Grafička analiza iteracija za razne vrijednosti parametra μ

Cilj ovog poglavlja je grafički prikazati prethodno opisani iteracijski proces funkcije $f(x) = \mu x(1-x)$ kako bismo ga bolje razumjeli. Dakle, prikazati vrijednosti iteracije funkcije f s obzirom na vrijednost konstante proporcionalnosti μ i početnu vrijednost x_0. Računat ćemo veći broj uređenih parova $(n, f^n(x_0))$, pri čemu oznaka $f^n(x_0)$ označava kompoziciju, $f^n(x_0) = f(f(\dots(x_0))\dots)$, gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, te ih sve prikazati u jednom koordinatnom sustavu. Primijetimo još da je nulta iteracija zapravo početna vrijednost funkcije u x_0.

2.1 SageMath

Navedeni će iteracijski proces biti prikazan u koordinatnom sustavu pomoću SageMath-a. Razlog tome je što je SageMath besplatan alat te dovoljno jednostavan za korištenje kako bismo dobili željene grafove.

SageMath je matematički software otvorenog koda sagrađen pomoću mnogih paketa otvorenog koda kao što su NumPy, SciPy, matplotlib, Sympy, Maxima, GAP, FLINT, R te njima slični paketi. U suštini, to je programski jezik Python nadograđen raznim matematičkim funkcijama kako bi se dobila funkcionalnost slična onoj matematičkih software-a kao što su Mathematica ili Matlab (prema [2]).

2.2 Prikaz iteracija funkcije

Kao što je već navedeno, u ovom djelu ćemo u koordinatnom sustavu prikazati velik broj uređenih parova $(n, f^n(x_0))$ za određene početne vrijednosti x_0 i $n \in \mathbb{N}$. U tu svrhu potrebno

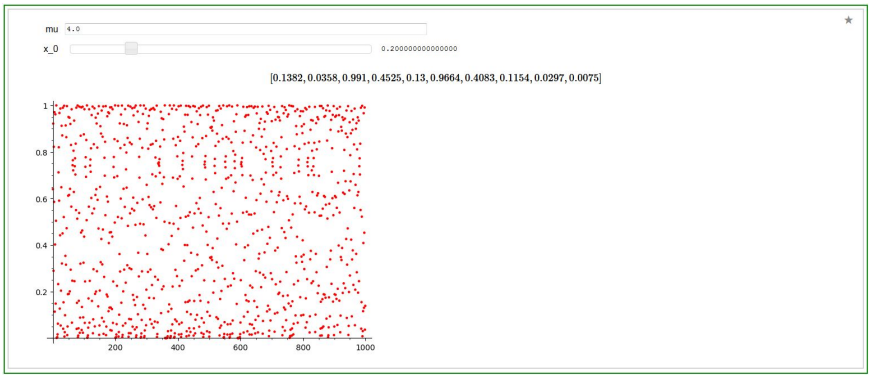
je napisati program koji će računati te vrijednosti, spremati ih te naposljetku crtati.
Važno je odabrati dovoljan broj iteracija. Uzmemo li tisuću iteracija dobit ćemo sliku na kojoj će se lako uočiti što se događa s vrijednostima, pa nema potrebe uzimati veći broj (napomenimo samo da se to lako promijeni ako se za time ukaže potreba). Također, zadnjih deset vrijednosti spremit ćemo posebno kako bismo uz sliku imali i konkretne podatke - deset vrijednosti će za početak biti dovoljno da se uoče neke pravilnosti.

Sljedeći program, napisan u SageMath-u, služi za crtanje iteracijskog procesa:

```
x_coords=[]
y_coords=[]
zadnjih10=[0]*10

for i in range(1000):
x_coords.append(i)
y_coords.append(0)


@interact
def f(mu=input_box(4.0), x_0=slider(0,1,0.01,0.2)):
        for i in range (1000):
                rez=mu*x_0*(1-x_0)
                y_coords[i]=rez
                x_0=rez


        for i in range(10):
        zadnjih10[i]=round(y_coords[999-i], 4)

        show(zadnjih10)

        r=[(x_coords[i],y_coords[i]) for i in range(1000)]
        lista=list_plot(r, color='red')
        show(lista)
```

Primijetimo najprije da smo za početnu vrijednost konstante proporcionalnosti odabrali 4.0, dok za vrijednost x_0 pomoću klizača možemo birati vrijednosti između 0 i 1 s korakom na klizaču jednakim 0.01 (za početnu smo odabrali 0.2). Kasnije ćemo vidjeti kako promjena tih vrijednosti utječe na sliku i na vrijednosti logističke funkcije nakon iteracija.

Pogledajmo sada grafički prikaz iteracija koji dobivamo nakon izvršavanja navedenog programa:

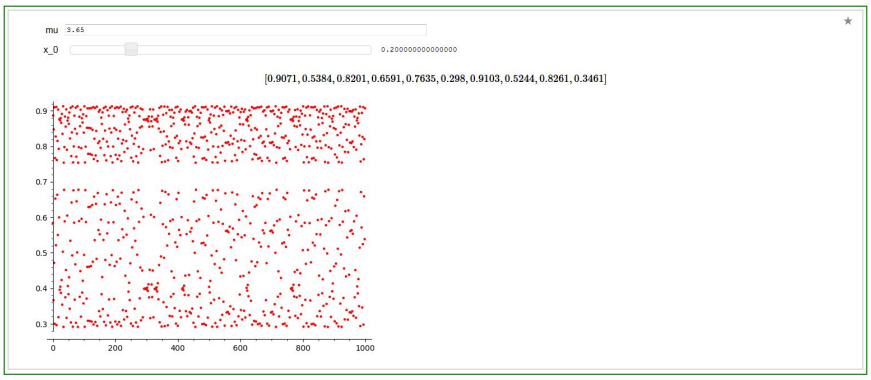


Slika 2.1: Prikaz iteracija za $\mu = 4$ i $x_0 = 0.2$.

Grafički prikaz se dobiva tako da se na os x nanosi redni broj iteracije $n \in (0, 1000)$, a na os y vrijednost n-te iteracije $f^n(x_0)$. Time smo dobili prikaz koji se sastoji od 1000 točaka koje pokazuju kako se mijenja vrijednost kroz iteracije za početnu vrijednost x_0.

Možemo primijetiti da u ovom slučaju ne postoji neki obrazac i da se vrijednosti iteracija funkcije ponašaju prilično kaotično. Također, ne možemo uočiti pravilnost u deset zadnjih dobivenih iteracija. Promjenom vrijednosti x_0 dobit ćemo vrlo slične rezultate, osim za $x_0 = 0$ ili $x_0 = 1$. U tom će slučaju sve vrijednosti iteracija biti jednake 0, a to nam nije zanimljivo.

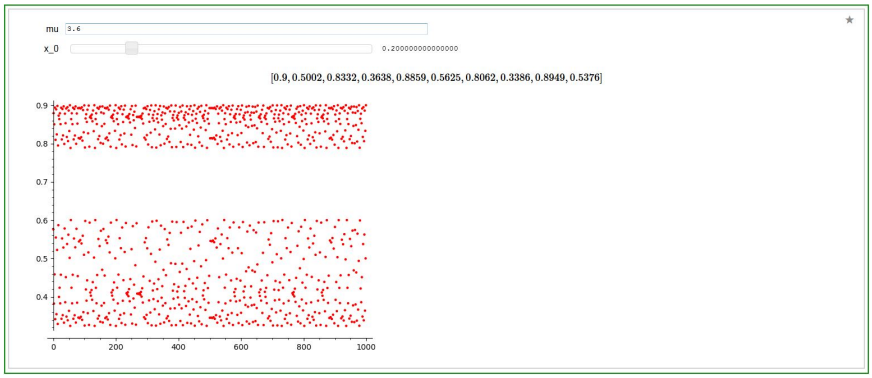
Pogledajmo sada promjene koje će se događati na grafičkom prikazu s obzirom na promjenu vrijednosti μ:



Slika 2.2: Prikaz iteracija za $\mu = 3.65$ i $x_0 = 0.2$.

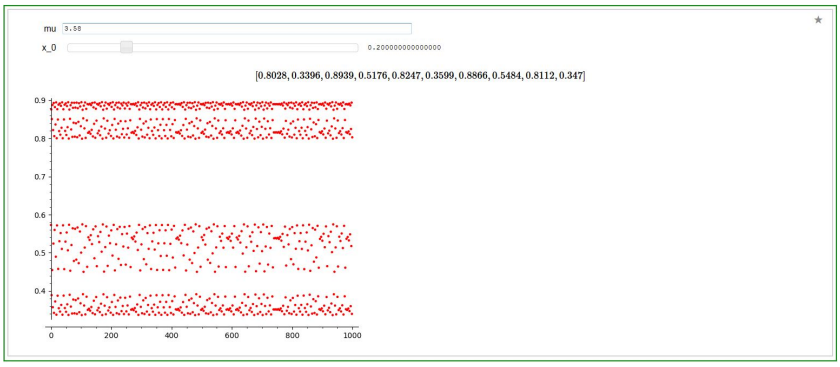
Smanjimo li vrijednost μ na 3.65, grafički prikaz koji dobivamo vrlo je sličan prethodnom. Vrijednosti iteracija funkcije i dalje se ponašaju kaotično te nema nekih pravilnosti koje bi nam omogućile da predvidimo vrijednosti sljedećih iteracija. No, u odnosu na prethodni grafički prikaz, postoji jedna vrlo uočljiva razlika. Naime, postoji praznina na vrijednosnom intervalu približno jednakom $[0.7, 0.75]$ u koji nije upala niti jedna točka. Dakle, niti jedna vrijednost iteracije od 0.-te do 1000.-te nije u intervalu približno jednakom $[0.7, 0.75]$. Kao i na prethodnom grafičkom prikazu, izbor vrijednosti x_0 nema značajni utjecaj na rezultat - grafički prikaz je i dalje kaotičan, a praznina i dalje postoji. To će biti slučaj i kod svih sljedećih grafičkih prikaza. Vrijednost x_0 ne utječe bitno na izgled grafičkog prikaza. Stoga ćemo, za sada, proučavati grafičke prikaze za istu vrijednost x_0.

Dobivena praznina razdvaja grafički prikaz na dva dijela. Želimo vidjeti što će se s njom dogoditi za ostale vrijednosti μ. Stoga ćemo vrijednosti konstante proporcionalnosti i dalje smanjivati te pratiti što se događa s vrijednostima iteracija funkcije.



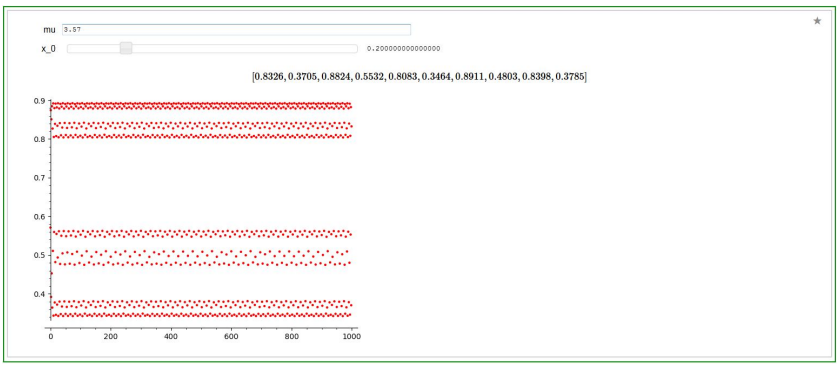
Slika 2.3: Prikaz iteracija za $\mu = 3.6$ i $x_0 = 0.2$.

U ovom smo slučaju odabrali vrijednosti $\mu = 3.6$ i $x_0 = 0.2$. Možemo primijetiti da praznina na grafičkom prikazu i dalje postoji. Štoviše, ona se povećala. I dalje su vrijednosti iteracija funkcije podijeljene u dva intervala, te je njihovo ponašanje kaotično. Ovo nije idealan rezultat, jer i dalje ne možemo ništa zaključiti o vrijednostima sljedećih iteracija, baš zbog tog kaotičnog ponašanja. No, ohrabrujuće je da možemo uočiti pravilnost u grafičkom prikazu (činjenica da se praznina povećava kako smanjujemo μ), pa se nadamo da ćemo uskoro doći i do značajnijih zaključaka. Zato dalje smanjujemo vrijednost konstante μ i uspoređujemo dobivene grafičke prikaze.



Slika 2.4: Prikaz iteracija za $\mu = 3.58$ i $x_0 = 0.2$.

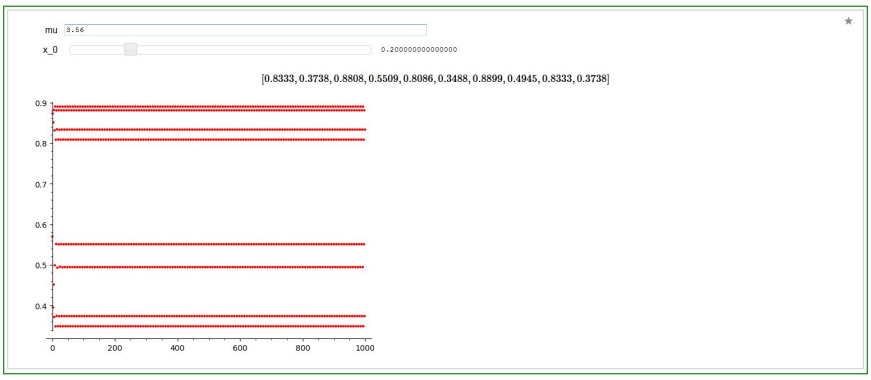
Za vrijednost $\mu = 3.58$, praznina i dalje postoji i razdvaja vrijednosti iteracija funkcije u dva intervala. Nadalje, ta je praznina veća nego za prethodnu vrijednost μ, što je bilo i očekivano. No, dobivena je jednu značajna promjenu na grafičkom prikazu, a to je da se u svakom od intervala (nastalih zbog velike praznine) pojavila nova, manja praznina. Time je svaki od dva intervala podijeljen na još dva manja intervala. No, i dalje se u svakom od tih intervala vrijednosti ponašaju kaotično.



Slika 2.5: Prikaz iteracija za $\mu = 3.57$ i $x_0 = 0.2$.

Ako pogledamo grafički prikaz za vrijednost konstante $\mu = 3.57$, možemo primijetiti da su se pojavile nove praznine, i to u manjim intervalima koji su nastali prethodnim smanjenjem vrijednosti konstante. Također, vidljivo je da se vrijednosti više ne ponašaju toliko kaotično, ali teško je zaključiti teže li te vrijednosti nekim brojevima. Iz zadnjih deset vrijednosti to ne možemo zaključiti. Povećamo li broj zadnjih vrijednosti koje pamtimo na npr. dvadeset ili trideset i dalje ne možemo zaključiti kako se one ponašaju, ali čini se da iz kaotičnog stanja u kojem je bio grafički prikaz za vrijednost konstante $\mu = 4.0$ dobivamo ”red”, tj. neku pravilnost, kako smanjujemo njezinu vrijednost.

2.2.1 Osam gomilišta niza vrijednosti iteracija



Slika 2.6: Prikaz iteracija za $\mu = 3.56$ i $x_0 = 0.2$.

Nakon što je vrijednost konstante proporcionalnosti smanjena na $\mu = 3.56$, dobiven je vrlo značajan rezultat. Nakon manje od sto iteracija, vrijednosti funkcije su razdvojene u osam intervala. Nadalje, ponašanje vrijednosti u tim intervalima ne izgleda nimalo kaotično. Čini se da vrijednosti u svakom intervalu teže prema nekom broju. Da bismo to mogli potkrijepiti, spremali smo zadnjih deset vrijednosti u posebnu listu. Za navedene vrijednosti μ i x_0 ona glasi:

$$[0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899, 0.8333, 0.3738]$$

Možemo primijetiti da su prve dvije vrijednosti u listi jednake posljednjim dvjema vrijednostima. To potkrepljuje našu slutnju, ali ne u potpunosti. Zato moramo povećati listu. Ako spremamo posljednje trideset i dvije vrijednosti, dobivamo sljedeću listu:

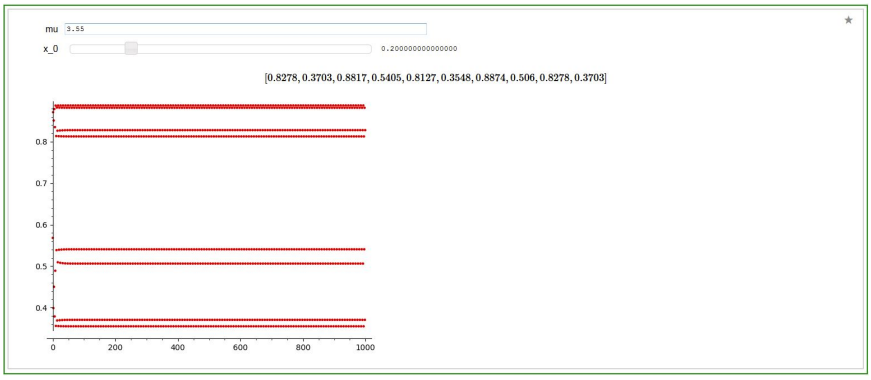
$$\begin{aligned}[&0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899,\\ &0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899,\\ &0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899,\\ &0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899]\end{aligned}$$

Primijetimo da se iste vrijednosti ponavljaju četiri puta, čime smo potkrijepili našu slutnju. Dakle, za $\mu = 3.56$, niz vrijednosti iteracija funkcije imat će sljedeća gomilišta:

$$0.8333, 0.3738, 0.5509, 0.8808, 0.5509, 0.8086, 0.3488, 0.8899$$

Ovo je vrlo značajan rezultat, jer nam omogućuje da predvidimo, štoviše, da točno odredimo koje će biti vrijednosti funkcije za sljedeće iteracije.

Smanjimo li vrijednost konstante proporcionalnosti na $\mu = 3.55$ dobivamo sljedeći grafički prikaz:



Slika 2.7: Prikaz iteracija za $\mu = 3.55$ i $x_0 = 0.2$.

I za ovu vrijednost konstante μ niz vrijednosti iteracija funkcije ima osam gomilišta. No, lako je vidjeti da se razlika među parovima susjednih gomilišta smanjila. Možemo naslutiti da će se ona još smanjivati kako smanjujemo vrijednost konstante proporcionalnosti. Ako je smanjimo dovoljno, slutimo da ćemo dobiti niz vrijednosti iteracija koji ima manje od osam gomilišta.

2.2.2 Četiri gomilišta niza vrijednosti iteracija

Navedenu slutnju će nam potkrijepiti grafički prikaz vrijednosti iteracija funkcije za $\mu = 3.54$:

Slika 2.8: Prikaz iteracija za $\mu = 3.54$ i $x_0 = 0.2$.

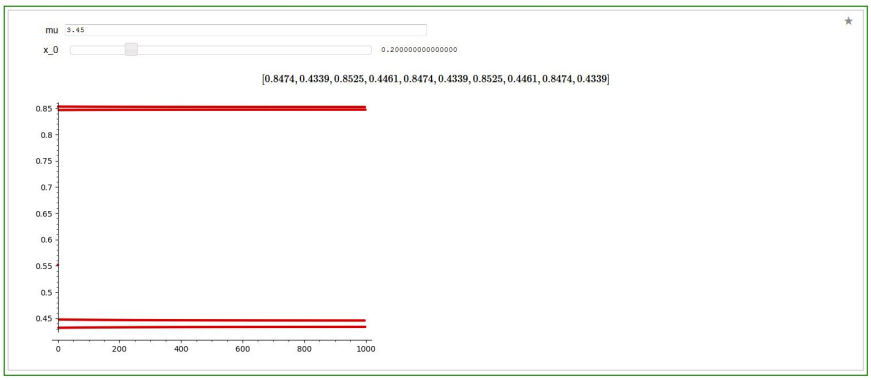
Pogledamo li još listu zadnjih deset vrijednosti, dobivamo:

$$[0.8203, 0.3648, 0.8833, 0.5218, 0.8203, 0.3648, 0.8833, 0.5218, 0.8203, 0.3648]$$

Primijetimo da se vrijednosti $5218, 0.8203, 0.3648, 0.8833$ ponavljaju, što dodatno potkrepljuje našu slutnju. Ovo je također vrlo značajan rezultat, jer opet možemo odrediti koje će biti vrijednosti sljedećih iteracija.
Dakle, za $\mu = 3.54$, imat ćemo četiri gomilišta: $0.8203, 0.3648, 0.8833, 0.5218$.

Smanjujemo li i dalje vrijednosti konstante μ, tendencija da se razlika među parovima susjednih gomilišta smanjuje nastavit će se i dalje, pa se nadamo da ćemo za dovoljno smanjenje konstante μ dobiti niz vrijednosti itracija koji ima manje od četiri gomilišta.

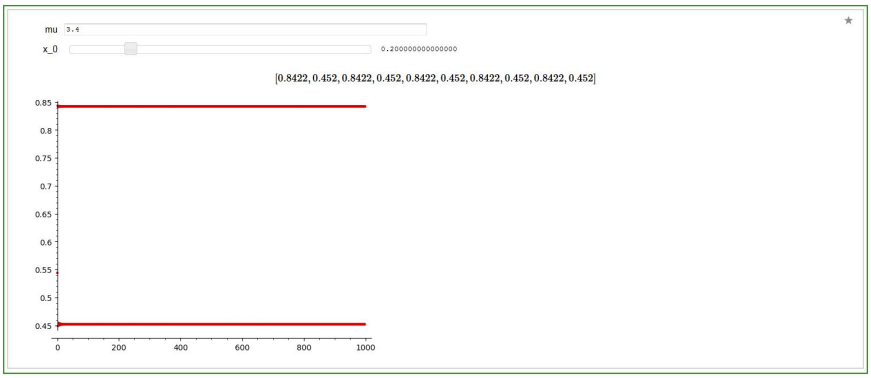
Za $\mu = 3.45$ to će biti jasno vidljivo:



Slika 2.9: Prikaz iteracija za $\mu = 3.45$ i $x_0 = 0.2$.

2.2.3 Dva gomilišta niza vrijednosti iteracija

Nadalje, možemo naslutiti da će, smanjimo li konstantu proporcionalnosti dovoljno, niz vrijednosti iteracija funkcije imati dva gomilišta. To ćemo i potkrijepiti grafičkim prikazom vrijednosti funkcije za $\mu = 3.4$.

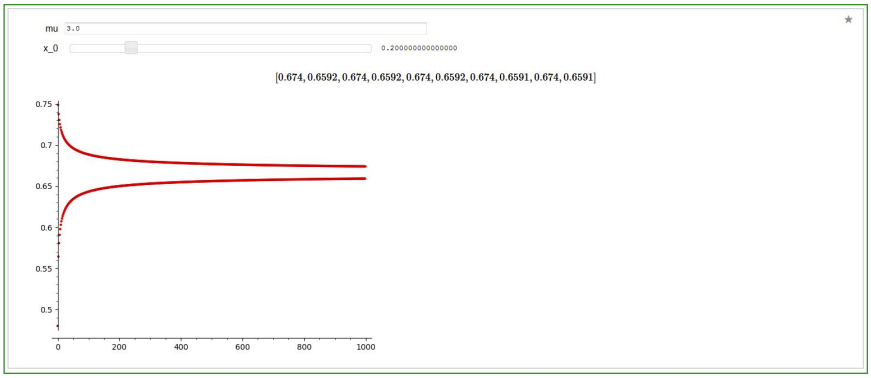


Slika 2.10: Prikaz iteracija za $\mu = 3.4$ i $x_0 = 0.2$.

Tu činjenicu dodatno potvrđuje lista posljednjih deset vrijednosti, u kojoj možemo vidjeti da se vrijednosti 0.452 i 0.8422 ponavljaju:

$$[0.8422, 0.452, 0.8422, 0.452, 0.8422, 0.452, 0.8422, 0.452, 0.8422, 0.452]$$

Do sad smo imali slučajeve da niz vrijednosti iteracija funkcije ima osam, četiri i dva gomilišta. Naslućujemo da ćemo dodatnim smanjivanjem dobiti grafički prikaz na kojem vrijednosti iteracija teže prema jednom broju.

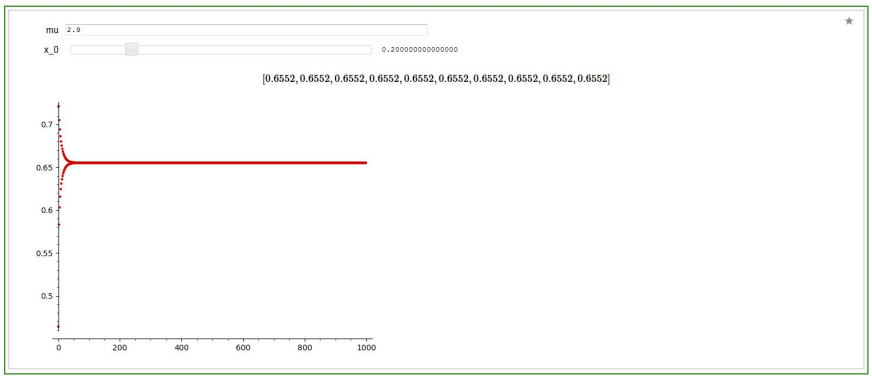


Slika 2.11: Prikaz iteracija za $\mu = 3.0$ i $x_0 = 0.2$.

Kad stavimo $\mu = 3.0$, dobivam grafički prikaz koji pokazuje da niz vrijednosti iteracija funkcije i dalje ima dva gomilišta. No, razlika između ta dva broja se smanjila, što je bilo očekivano, jer ta je tendencija postojala i za veće vrijednosti konstante μ.

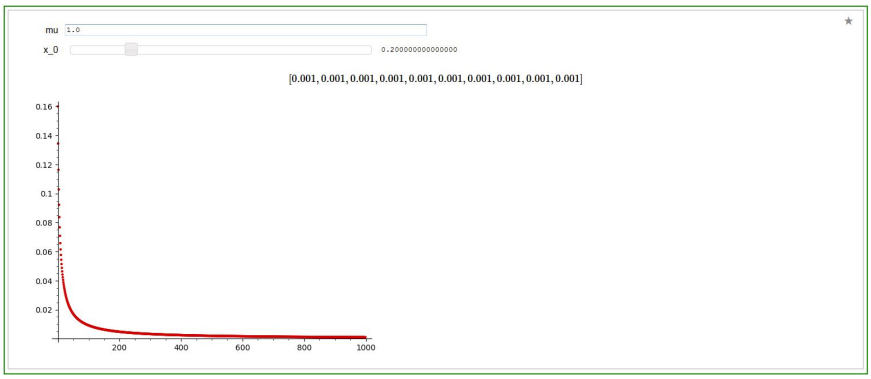
2.2.4 Limes niza vrijednosti iteracija

Dodatnim smanjenjem vrijednosti konstante na 2.9 dobit ćemo upravo slučaj da vrijednosti iteracija funkcije teže prema jednom broju (i to 0.652 u ovom konkretnom slučaju).
Važno je napomenuti da 2.9 nije najveća vrijednost u kojoj će vrijediti da vrijednosti iteracija funkcije teže prema jednom broju, već je potrebno smanjiti konstantu μ ispod vrijednosti 3.0.



Slika 2.12: Prikaz iteracija za $\mu = 2.9$ i $x_0 = 0.2$.

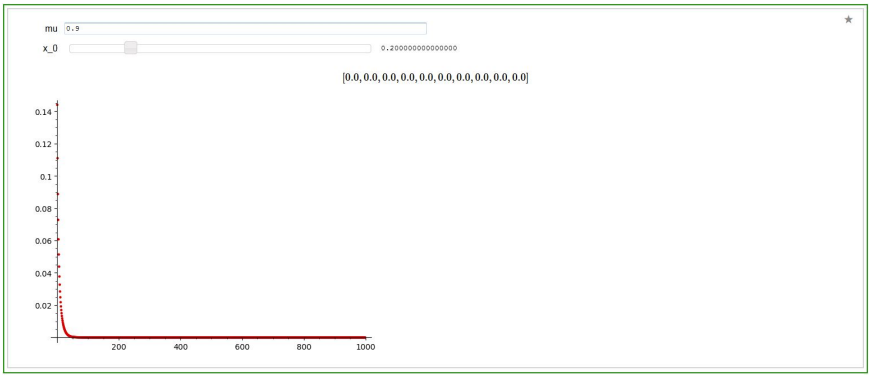
Sličan rezultat dobiti ćemo i za sve vrijednosti konstante proporcionalnosti μ u intervalu $[1, 2.9\rangle$.



Slika 2.13: Prikaz iteracija za $\mu = 1.0$ i $x_0 = 0.2$.

Nadalje, smanjimo li vrijednost konstante proporcionalnosti dovoljno ispod 1.0 dobit ćemo slučaj kada niz vrijednosti iteracija funkcije teži prema jednom broju, i to broju 0.

Prikažimo grafički vrijednosti funkcije za $\mu = 0.9$:



Slika 2.14: Prikaz iteracija za $\mu = 0.9$ i $x_0 = 0.2$.

Pokažimo sada matematički gore uočenu tvrdnju:

Propozicija 1. *Neka je $\mu \in \langle 0, 1\rangle$ i neka je funkcija f zadana s $f(x) = \mu x(1 - x)$. Tada za svaki $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0.$$

Dokaz. Kako je $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, vrijedi $1 - x_0 < 1$, pa imamo:

$$f(x_0) = \mu x_0(1 - x_0) < \mu \cdot 1 \cdot 1 = \mu$$

Nadalje, kako je $0 < f(x_0) < \mu < 1$, vrijedi:

$$f(f(x_0)) = \mu f(x_0)(1 - f(x_0)) < \mu \cdot \mu \cdot 1 = \mu^2$$

Induktivno dobivamo:

$$0 < f^n(x_0) < \mu^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 2.$$

Kako je vrijednost konstante μ pozitivna i manja od 1, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^n = 0$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$$

. $\square$

2.2.4.1 Limes niza iteracija u ovisnosti o parametru $\mu < 3$

Proučavamo detaljnije parametre $1 < \mu < 3$ za koje vrijednosti iteracija teže prema jednom broju. Točnije, kako se mijenja taj broj s obzirom na promjenu vrijednosti konstante μ. Uzet ćemo grafove za $\mu = 2.9$, $\mu = 2.0$, $\mu = 1.5$ i $\mu = 1.0$ te ih usporediti (u svim ćemo slučajevima za početnu vrijednost uzeti $x_0 = 0.5$.

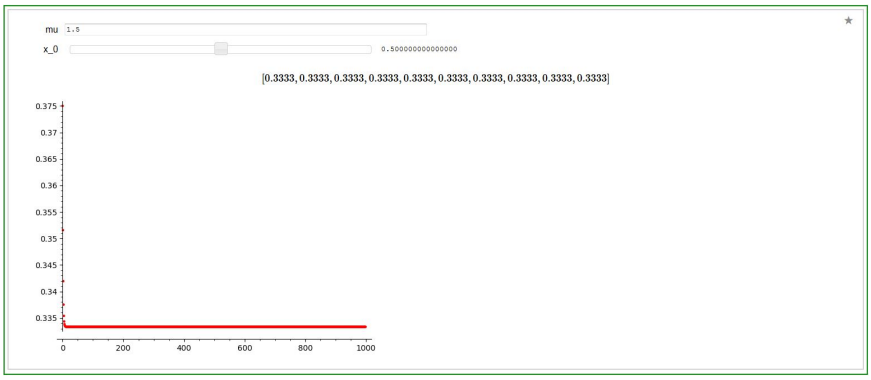
Za vrijednost konstante proporcionalnosti $\mu = 2.9$ vrijednosti iteracija funkcije teže prema broju 0.6552.

Slika 2.15: Prikaz iteracija za $\mu = 2.9$ i $x_0 = 0.5$.

Za vrijednost konstante proporcionalnosti $\mu = 2.9$ vrijednosti iteracija funkcije teže prema broju 0.5.

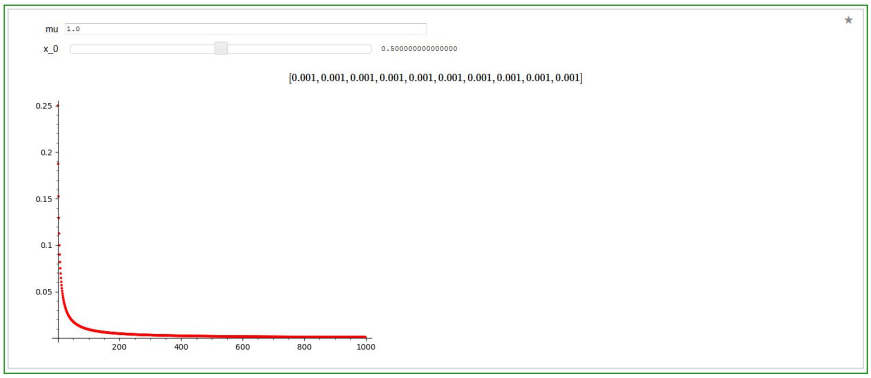
Slika 2.16: Prikaz iteracija za $\mu = 2.0$ i $x_0 = 0.5$.

Za vrijednost konstante proporcionalnosti $\mu = 1.5$ vrijednosti iteracija funkcije teže prema broju 0.3333.



Slika 2.17: Prikaz iteracija za $\mu = 1.5$ i $x_0 = 0.5$.

Za vrijednost konstante proporcionalnosti $\mu = 1.0$ vrijednosti iteracija funkcije teže prema broju 0.001.

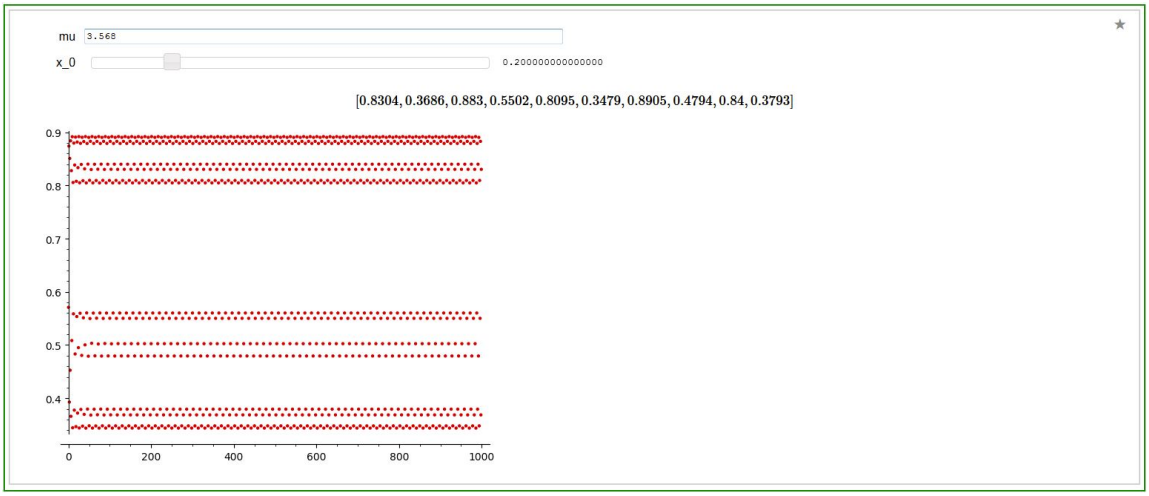


Slika 2.18: Prikaz iteracija za $\mu = 1.0$ i $x_0 = 0.5$.

Dakle, vrijednost brojeva prema kojima teže vrijednosti iteracija funkcije se smanjuju kako se smanjuje konstanta μ. Dakle, za $1 < \mu < 3$ niz iteracija teži prema limesu koji postaje sve bliži 0, kad μ pada prema 1.

2.2.5 Više od osam gomilišta niza vrijednosti iteracija

Kako smo dosad imali slučajeve da niz vrijednosti iteracija funkcije ima osam, četiri ili dva gomilišta, ili pak teži jednom broju, logično je zapitati se je li moguće naći vrijednost konstante μ da niz vrijednosti ima šesnaest gomilišta. Za razliku od smanjivanja parametra μ i upolavljanja broja gomilišta, očekujemo udvostručenje broja gomilišta kad parametar μ povećavamo. Dakle, uzmemo μ veći od 3.56, za koji smo u Potpoglavlju 2.2.1 pokazali da ima 8 gomilišta. Uzmemo li $\mu = 3.568$ dobivamo grafički prikaz koji ukazuje na to da je tako nešto moguće.



Slika 2.19: Prikaz iteracija za $\mu = 3.568$ i $x_0 = 0.2$.

No, grafički prikaz nam nije dovoljan da potvrdimo slutnju, jer nije moguće iščitati vrijednosti dovoljno precizno kako bismo zaključili da niz vrijednosti iteracija funkcije stvarno ima šesnaest gomilišta. Također, ni zadnjih deset vrijednosti nije dovoljno za takav zaključak. Stoga ćemo spremati zadnje trideset i dvije vrijednosti, među kojima želimo šesnaest koje se ponavljaju. Lista zadnje trideset i dvije vrijednosti je sljedeća:

$$\begin{aligned}[&0.8791, 0.5602, 0.8049, 0.3438, 0.892, 0.5025, 0.8304, 0.3686,\\ &0.883, 0.5502, 0.8095, 0.3479, 0.8905, 0.4794, 0.84, 0.3793,\\ &0.8791, 0.5602, 0.8049, 0.3438, 0.892, 0.5025, 0.8304, 0.3686,\\ &0.883, 0.5502, 0.8095, 0.3479, 0.8905, 0.4794, 0.84, 0.3793]\end{aligned}$$

Dakle, šesnaest vrijednosti se ponavlja, što upućuje na to da niz vrijednosti iteracija funkcije ima šesnaest gomilišta. Dosad smo naslutili da je broj gomilišta niza iteracija oblika

2^n, te smo našli primjere vrijednosti parametra μ za koje je $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
Sad nas zanima hoće li to vrijediti za $n = 5, 6, \ldots$
No, u ovim nam slučajevima grafički prikaz neće biti od koristi pa ćemo program za crtanje grafičkog prikaza zapravo koristiti samo kako bismo dobili listu 2^{n+1} vrijednosti te provjerili ponavlja li se njih 2^n.

Za $\mu = 3.5695$ i $x_0 = 0.2$ imamo sljedeće vrijednosti:

$$
\begin{aligned}
[&0.8319, 0.3699, 0.8826, 0.5523, 0.8086, 0.3468, 0.8909, 0.4799,\\
&0.8399, 0.3788, 0.8793, 0.5605, 0.8049, 0.3435, 0.8921, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3658, 0.8841, 0.5482, 0.8105, 0.3486, 0.8903, 0.476,\\
&0.8415, 0.3807, 0.8786, 0.5621, 0.8042, 0.3428, 0.8924, 0.4991,\\
&0.8319, 0.3699, 0.8826, 0.5523, 0.8086, 0.3468, 0.8909, 0.4799,\\
&0.8399, 0.3788, 0.8793, 0.5605, 0.8049, 0.3435, 0.8921, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3658, 0.8841, 0.5482, 0.8105, 0.3486, 0.8903, 0.476,\\
&0.8415, 0.3807, 0.8786, 0.5621, 0.8042, 0.3428, 0.8924, 0.4991,\\
&0.8319, 0.3699, 0.8826, 0.5523, 0.8086, 0.3468, 0.8909, 0.4799,\\
&0.8399, 0.3788, 0.8793, 0.5605, 0.8049, 0.3435, 0.8921, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3658, 0.8841, 0.5482, 0.8105, 0.3486, 0.8903, 0.476,\\
&0.8415, 0.3807, 0.8786, 0.5621, 0.8042, 0.3428, 0.8924, 0.4991,\\
&0.8319, 0.3699, 0.8826, 0.5523, 0.8086, 0.3468, 0.8909, 0.4799,\\
&0.8399, 0.3788, 0.8793, 0.5605, 0.8049, 0.3435, 0.8921, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3658, 0.8841, 0.5482, 0.8105, 0.3486, 0.8903, 0.476,\\
&0.8415, 0.3807, 0.8786, 0.5621, 0.8042, 0.3428, 0.8924, 0.4991]
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo trideset i dvije vrijednosti koje se ponavljaju, pa pravilo vrijedi i za $n = 5$.

Nadalje, za $\mu = 3.5698$ imamo šezdeset i četiri vrijednosti koje se ponavljaju, pa pravilo vrijedi i za $n = 6$:

$$\begin{aligned}
&[0.8316, 0.3694, 0.8828, 0.552, 0.8088, 0.3469, 0.8909, 0.4793,\\
&0.8402, 0.379, 0.8792, 0.5608, 0.8048, 0.3433, 0.8922, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3658, 0.8841, 0.5483, 0.8105, 0.3485, 0.8904, 0.4758,\\
&0.8416, 0.3807, 0.8786, 0.5622, 0.8042, 0.3427, 0.8924, 0.497,\\
&0.8328, 0.3707, 0.8823, 0.5534, 0.8082, 0.3464, 0.8911, 0.4807,\\
&0.8396, 0.3784, 0.8795, 0.5603, 0.805, 0.3435, 0.8921, 0.5094,\\
&0.8276, 0.3652, 0.8843, 0.5477, 0.8108, 0.3487, 0.8903, 0.4753,\\
&0.8418, 0.3809, 0.8785, 0.5624, 0.8041, 0.3426, 0.8924, 0.5]
\end{aligned}$$

Za $\mu = 0.5699$ dobit ćemo da niz vrijednosti iteracija funkcije sa sto dvadeset i osam gomilišta:

$$\begin{aligned}
&[0.8312, 0.369, 0.8829, 0.5517, 0.809, 0.3471, 0.8909, 0.4788,\\
&0.8404, 0.3792, 0.8792, 0.561, 0.8047, 0.3432, 0.8923, 0.5078,\\
&0.8282, 0.3659, 0.8841, 0.5485, 0.8104, 0.3484, 0.8904, 0.4759,\\
&0.8416, 0.3806, 0.8787, 0.5622, 0.8042, 0.3427, 0.8924, 0.4964,\\
&0.8331, 0.371, 0.8822, 0.5537, 0.8081, 0.3462, 0.8912, 0.4809,\\
&0.8395, 0.3782, 0.8795, 0.5602, 0.8051, 0.3435, 0.8921, 0.5098,\\
&0.8274, 0.365, 0.8844, 0.5476, 0.8108, 0.3488, 0.8903, 0.4751,\\
&0.8419, 0.381, 0.8785, 0.5625, 0.804, 0.3426, 0.8925, 0.5003,\\
&0.8314, 0.3692, 0.8828, 0.552, 0.8088, 0.3469, 0.8909, 0.4791,\\
&0.8403, 0.3791, 0.8792, 0.5609, 0.8047, 0.3432, 0.8922, 0.5081,\\
&0.8281, 0.3657, 0.8841, 0.5484, 0.8105, 0.3484, 0.8904, 0.4758,\\
&0.8417, 0.3807, 0.8786, 0.5623, 0.8041, 0.3427, 0.8924, 0.4967,\\
&0.833, 0.3709, 0.8822, 0.5536, 0.8081, 0.3463, 0.8912, 0.4808,\\
&0.8396, 0.3783, 0.8795, 0.5603, 0.8051, 0.3435, 0.8921, 0.5097,\\
&0.8275, 0.365, 0.8844, 0.5476, 0.8108, 0.3487, 0.8903, 0.4751,\\
&0.8419, 0.381, 0.8785, 0.5625, 0.804, 0.3426, 0.8925, 0.5009]
\end{aligned}$$

Daljnja pretpostavka je da je moguće naći vrijednosti konstante μ za $n = 8, 9, \ldots$ tako da postoji 2^n gomilišta niza vrijednosti iteracija funkcije. No, time se trenutno nećemo baviti, već ćemo pojavu pojasniti u Potpoglavlju 3.2.1.

U ovom smo poglavlju, dakle, dokazali da za $\mu \in \langle 0, 1\rangle$ i početnu točku u intervalu $\langle 0, 1\rangle$ niz iteracija konvergira u 0. Za $1 < \mu < 3$ niz iteracija također konvergira, i to k sve većoj vrijednosti kako povećavamo μ. No, kako dalje povećavamo parametar μ prema broju 4, broj gomilišta se udvostručuje u diskretnim vrijednostima parametra. To ćemo još ilustrirati na bifurkacijskim dijagramima u Potpoglavlju 3.2.

Važna napomena: Primijetimo da nam se u našim primjerima, prilikom ispisa nekog broja iteracija prije 1000.-te na nekoliko decimala, čini da se vrijednosti ponavljaju. U stvarnosti se općenito za neku početnu iteraciju radi samo u konvergenciji podnizova niza iteracija u navedeni broj gomilišta. Naime, kad gomilištima nakon većeg broja iteracija priđemo dovoljno blizu, zbog grešaka zaokruživanja više ne možemo razlikovati točke. Moguće je i da, umjesto konvergencije nekom gomilištu u stvarnosti, kod računanja velikog broja iteracija u računalu u nekom konačnom trenutku iteracije i upadnu u to gomilište i počnu se ponavljati zbog grešaka prikaza u računalu.

Poglavlje 3

Teorija diskretnih dinamičkih sustava na primjeru logističkog preslikavanja

U ovom ćemo poglavlju definirati osnovne pojmove vezane uz diskretne dinamičke sustave te ih potkrijepiti na primjeru logističke familije funkcija $f(x) = \mu x(1-x),\ \mu > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Za zanimljive parametre $\mu \in \langle 0, 4]$ i početne točke $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, neke pojave koje smo grafički uočili u Poglavlju 2 objasnit ćemo teoretski.

3.1 Osnovni pojmovi i primjena na kvadratnu familiju

Definicija 1. *Neka je $E \subseteq \mathbb{R}^n$ i $n \in \mathbb{N}$. Uređeni par (E, f), gdje je $f : E \to E$ neprekidna funkcija ili funkcija klase C^r, $r \geq 1$, nazivamo diskretnim dinamičkim sustavom na E.*

Zapisujemo ga pomoću diferencijske jednadžbe

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

gdje je $x_0 \in E$ zadana početna točka. Primijetimo da je $x_n := f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

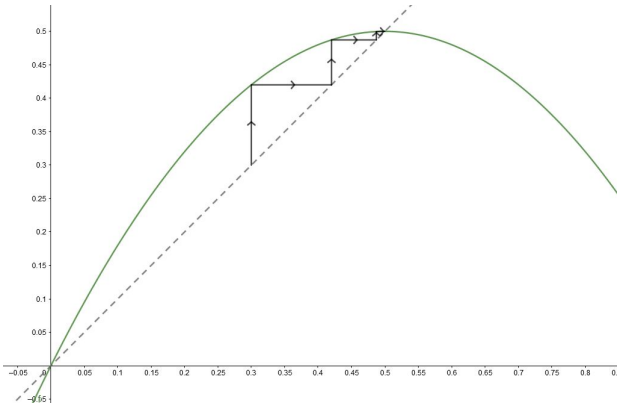
Definicija 2. *(Prema [1]) Orbita diskretnog dinamičkog sustava $x_{n+1} = f(x_n)$ s početnom točkom x_0 je skup*

$$O_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dakle, orbita dinamičkog sustava na primjeru naše logističke funkcije je zapravo skup vrijednosti iteracija funkcije za određenu početnu vrijednost x_0. Naravno, taj će nam skup ovisiti ne samo o odabiru početne vrijednosti, već i o odabiru parametra μ.

Nadalje, primijetimo da smo u prethodnom poglavlju grafički prikazivali orbite odabranih vrijednosti $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ za logističku funkciju f, s tim da smo prikazivali samo konačni broj točaka te orbite. Za neke konkretne vrijednosti parametra i početnog uvjeta, u prethodnom smo poglavlju naslutili da se orbite asimptotski ponašaju predvidivo, dok se za neke vrijednosti parametra i početnog uvjeta ponašaju kaotično i nepredvidivo.

Analizirajmo sada orbitu od $x_0 = 0.3$ za logističku funkciju $f(x) = 2x(1 - x)$ direktno pomoću grafa funkcije f. Ova analiza orbite rađena je prema Pesin, 2009 ([3]).



Slika 3.1: Prikaz orbite od $x_0 = 0.3$ za $f(x) = 2x(1 - x)$.

Najjednostavnija moguća orbita je skup koji se sastoji od jedne točke. To će se dogoditi u slučaju kad su vrijednosti svih iteracija $f^n(x_0)$, za sve $n \in \mathbb{N}$, gdje je x_0 zadana početna vrijednost, jednake upravo x_0. Stoga je potrebno uvesti pojam fiksne točke.

Definicija 3. *(Prema [1]) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Točka x_0 naziva se fiksna točka funkcije f ako vrijedi $f(x_0) = x_0$.*

Primjer 1. *Odredimo fiksne točke logističke funkcije $f(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 0$, $x \in \mathbb{R}$.*

Riješimo jednadžbu $f(x_0) = x_0$ kako bismo odredili fiksne točke. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

$$\begin{aligned} \mu x_0(1 - x_0) &= x_0 \\ \mu x_0(1 - x_0) - x_0 &= 0 \\ x_0(\mu - \mu x_0 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sada je očito da je jedno rješenje jednadžbe $x_0 = 0$, a drugo je rješenje linearne jednadžbe $\mu - \mu x_0 - 1 = 0$:

$$x_0 = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

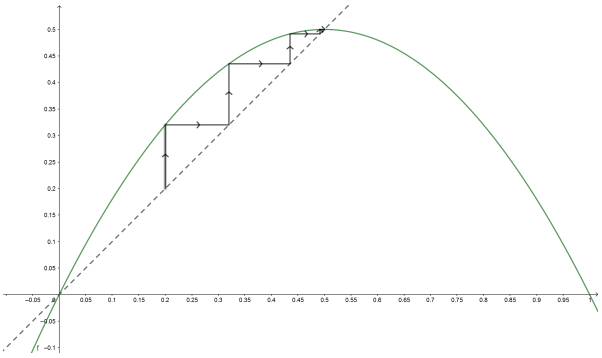
Dakle, logistička funkcija $f(x) = \mu x(1-x)$ ima točno dvije fiksne točke, 0 i $\frac{\mu-1}{\mu}$.

Primjer 2. *Funkcija $f(x) = 2x(1-x)$, sa Slike 2.1.*

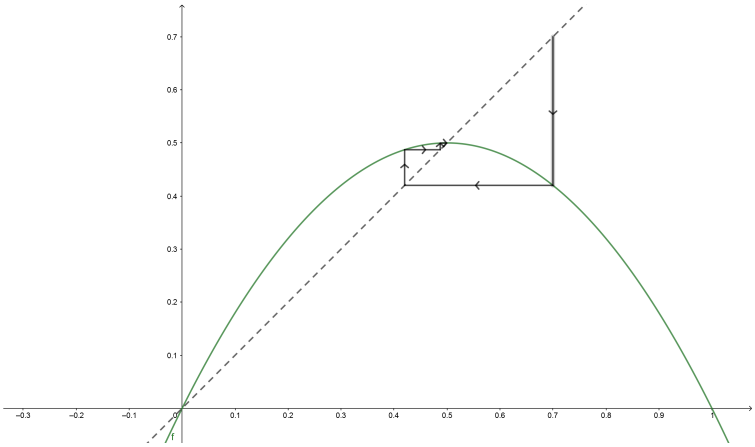
Prema Primjeru 1, fiksna točka funkcije f različita od 0 jednaka je:

$$\frac{\mu-1}{\mu} = \frac{2-1}{2} = 0.5$$

Možemo primijetiti da na Slici 2.1. vrijednosti orbite od $x_0 = 0.3$ teže upravo prema točki 0.5. Pogledajmo vrijedi li isto za neke druge vrijednosti x_0.



Slika 3.2: Prikaz orbite od $x_0 = 0.2$ za $f(x) = 2x(1-x)$.



Slika 3.3: Prikaz orbite od $x_0 = 0.7$ za $f(x) = 2x(1-x)$.

Dakle, i za $x_0 = 0.2$ i $x_0 = 0.7$, vrijednosti orbite teže u 0.5. Slutimo da, ako vrijednosti orbite teže u neku točku, to je upravo fiksna točka funkcije f različita od 0, što pokazujemo u sljedećoj propoziciju.

Propozicija 2. *Ako niz vrijednosti orbite od $x_0 \in \mathbb{R}$ dinamičkog sustava $x_{n+1} = f(x_n)$, gdje je f neprekidna funkcija, konvergira prema x_0, tj. ako vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x^*,$$

tada je $x^* \in \mathbb{R}$ fiksna točka funkcije f.

Dokaz. Pretpostavimo da niz vrijednosti orbite konvergira u $x* \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x^*.$$

Sada imamo ekvivalentne tvrdnje:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \quad / \lim_{n\to\infty}, \\ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} f(x_n), \\ x^* &= \lim_{n\to\infty} f(x_n). \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije f vrijedi:

$$\begin{aligned} x^* &= f(\lim_{n\to\infty} x_n), \\ x^* &= f(x^*). \end{aligned}$$

Dakle, točka x^* je fiksna točka funkcije f. □

Ovime smo pokazali da, ako niz vrijednosti iteracija funkcije f teži u neku točku, to je upravo fiksna točka funkcije f.

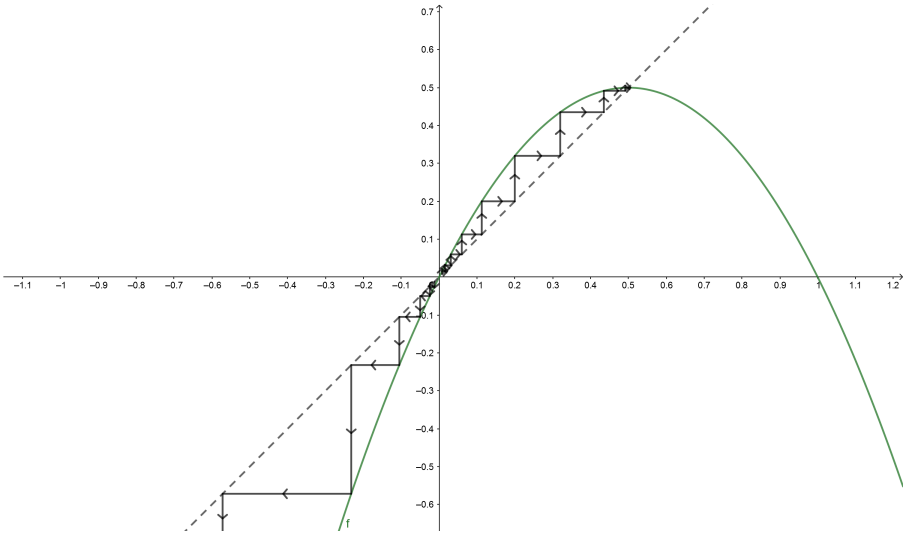
Primjer 3. *Primijetimo da smo ovakav slučaj imali u Potpoglavlju 2.2.4 na Slici 2.12 za funkciju $f(x) = 2.9x(1 - x)$. Grafički smo naslutili da niz vrijednosti iteracija funkcije $f(x) = 2.9x(1 - x)$ teži prema broju približno jednakom* 0.6552.

Prema Propoziciji 2, 0.6552 je fiksna točka funkcije f. Zaista:

$$f(0.6552) = 2.9 \cdot 0.6552 \cdot (1 - 0.6552) \approx 0.6552.$$

Promotrimo sada opet funkciju $f(x) = 2x(1 - x)$ i njezine obje fiksne točke, 0 i 0.5. Uzmimo dvije različite vrijednosti x_0 u okolini točke 0 (jednu pozitivnu, jednu negativnu) i nacrtajmo orbitu od x_0 za funkciju f.

Dobivamo sljedeću sliku:



Slika 3.4: Prikaz orbite od x_0 za $f(x) = 2x(1-x)$.

Možemo vidjeti da se ponašanje vrijednosti iteracija bitno razlikuje s obzirom na fiksnu točku. Vrijednosti iteracija funkcije *odmiču* se od točke 0, a *približavaju* točki 0.5. Stoga uvodimo pojam *privlačne i odbojne fiksne točke*.

Definicija 4. *(Prema [4]) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ fiksna točka funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je x_0 privlačna fiksna točka od f ako postoji okolina U oko x_0 takva da, za svaki $y \in U$, vrijedi da je $f^n(y) \in U$, $n \in \mathbb{N}$, te $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$.*
Kažemo da je x_0 odbojna fiksna točka od f, ako postoji okolina U oko x_0 takva da, za svaku točku $y \in U$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $f^k(y) \notin U$, za svaki $k \geq n$.

Dakle, ako je x_0 privlačna fiksna točka, tada će se iteracije kojima je početna točka u nekoj okolini od x_0 približavati upravo vrijednosti x_0. S druge strane, vrijednosti iteracija koje kreću u nekoj okolini x_0 će se udaljavati od x_0 ako je ona odbojna. Na našoj Slici 3.4 jasno je da je 0 odbojna, a 0.5 privlačna fiksna točka. U daljnjem određivanju karaktera fiksne točke pomaže nam sljedeći teorem:

Teorem 1. *(Prema [4]) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ fiksna točka funkcije f. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $|f'(x_0)| < 1$, onda je x_0 privlačna.*

2. *Ako je $|f'(x_0)| > 1$, onda je x_0 odbojna.*

Dokaz.

1. Vrijedi $|f'(x_0)| < 1$, pa postoji $k \in \mathbb{R}$, $k < 1$ takav da vrijedi $|f'(x_0)| < k$. Nadalje, kako je f' neprekidna funkcija, postoji δ takav da je $|f'(x_0)| < k$ za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sada prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ imamo:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = f'(c_x),$$
za neki c_x između x i x_0. Dakle, vrijedi:
$$|f(x) - x_0| < k|x - x_0| < |x - x_0|, \tag{3.1}$$
za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

   Ovo nam govori da će $f(x)$ biti bliže x_0 nego x. Dakle, $f(x) \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, pa (3.1) možemo primijeniti na $f(x)$ i dobivamo:
$$\left|f^2(x) - x_0\right| < k^2|x - x_0|.$$
   Induktivno, dobivamo:
$$|f^n(x) - x_0| < k^n|x - x_0|.$$
   Sada za svaku točku $y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ vrijedi $|f^n(y) - x_0| < \delta$. Dakle, vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0.$$

2. Vrijedi $|f'(x_0)| > 1$, pa postoji $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$ takav da vrijedi $|f'(x_0)| > k$. Nadalje, kako je f' neprekidna funkcija, postoji δ takav da je $|f'(x_0)| > k$ za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sada prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ imamo:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = f'(c_x),$$
za neki c_x između x i x_0. Dakle, vrijedi:
$$|f(x) - x_0| > k|x - x_0| > |x - x_0|, \tag{3.2}$$
za svaki $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ovo nam govori da će $f(x)$ biti dalje od x_0 nego x. Tada je ili $f(x)$ izvan intervala $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ili je u njemu. Ako je u intervalu, možemo primijeniti (3.2) na $f(x)$ i zaključiti sljedeće:
$$\left|f^2(x) - x_0\right| > k^2|x - x_0|.$$

Induktivnim zaključivanjem možemo dobiti

$$|f^n(x) - x_0| > k^n|x - x_0|,$$

sve dok je $f^{n-1}(x)$ u intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. No, kako vrijedi $k^n \to +\infty$, jer je $k > 1$, možemo zaključiti da u konačnom broju iteracija moramo izaći iz intervala $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, za svaki x iz tog intervala.

□

Time smo dobili jednostavan način za određivanje je li fiksna točka privlačna ili odbojna.

Primjer 4. *Odredimo jesu li fiksne točke funkcije $f(x) = \mu x(1 - x)$ privlačne ili odbojne, u ovisnosti o parametru $\mu > 0$.*

Odredimo najprije derivaciju funkcije $f(x) = \mu x(1 - x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mu x(1 - x))' \\ &= (\mu x - \mu x^2)' \\ &= (\mu - 2\mu x) \\ &= \mu(1 - 2x). \end{aligned}$$

Odredimo vrijednosti derivacije u fiksnoj točki 0:

$$f'(0) = \mu(1 - 2 \cdot 0) = \mu$$

Dakle, ako je $\mu < 1$, 0 je privlačna fiksna točka, a u slučaju $\mu > 1$, 0 je odbojna fiksna točka funkcije f.
Sada odredimo vrijednosti derivacije u fiksnoj točki $\frac{\mu-1}{\mu}$:

$$f'\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = \mu\left(1 - 2 \cdot \frac{\mu - 1}{\mu}\right) = 2 - \mu.$$

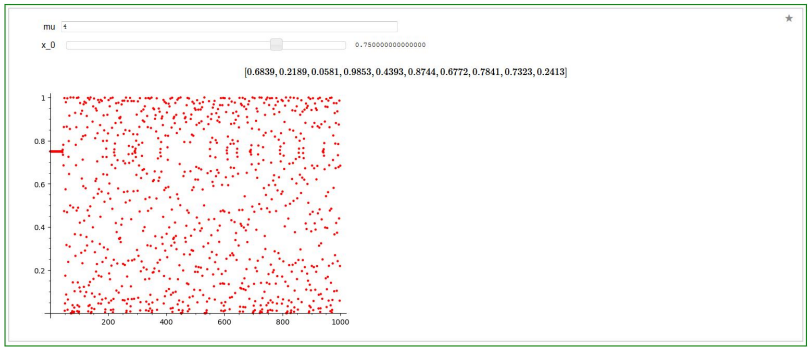
Dakle, ako je $\mu \in \langle 1, 3\rangle$, $\frac{\mu-1}{\mu}$ je privlačna fiksna točka, a u slučaju $\mu < 1$ ili $\mu > 3$, $\frac{\mu-1}{\mu}$ je odbojna fiksna točka funkcije f.

Primjer 5. *Ilustrirajmo grešku prikaza iteracija u računalu na primjeru odbojne fiksne točke iz Slike 2.1 iz Poglavlja 2.*

Prema Primjeru 1, fiksna točka funkcije $f(x) = 4x(1 - x)$ različita od 0 jednaka je:

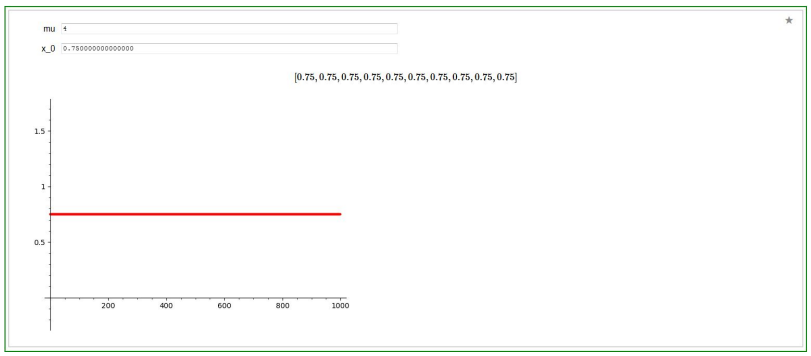
$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{4 - 1}{4} = 0.75.$$

Pogledajmo grafički prikaz koji dobivamo za $\mu = 4$ i $x_0 = 0.75$:



Slika 3.5: Prikaz iteracija za $\mu = 4$ i $x_0 = 0.75$

Ovo nije slika koju smo očekivali. Naime, kako je 0.75 fiksna točka, vrijednosti svih iteracija bi trebale biti jednake 0.75. No, grešku možemo objasniti greškom u klizaču. Naime, korak klizača nije jednak točno 0.01, pa dolazi do greške kad ga povučemo do vrijednosti 0.75. Nadalje, $f'(0.75) = -2$, pa je 0.75 odbojna fiksna točka funkcije f (prema Teoremu 1). Zato dobivamo vrijednosti iteracija koje se sve više udaljavaju od 0.75 prije nego njihovo ponašanje postaje kaotično. Promijenimo li naš program da se x_0 ne unosi pomoću klizača, nego pomoću polja za unos dobivamo očekivani rezultat:



Slika 3.6: Prikaz iteracija za $\mu = 4$ i $x_0 = 0.75$

Nadalje, promatramo slučaj kad orbita ima konačan broj točaka. Zamislimo slučaj da nakon konačnog broja iteracija dobijemo vrijednost koju smo već imali. Tada će i sljedeća iteracija imati vrijednost koju smo već imali, itd. Kad opet dođemo do vrijednosti koja se prva ponovila, opet ćemo imati cijeli ciklus ponavljanja. Stoga je potrebno uvesti pojam *periodičke točke* i *periodičke orbite*.

Definicija 5. *(Prema [1]) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Točka x_0 naziva se periodička točka funkcije f ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f^n(x_0) = x_0$. Najmanji takav n naziva se temeljni period od x_0.*

Dakle, ako je x_0 periodička točka temeljnog perioda n, tada će svaka n.-ta iteracija funkcije imati istu vrijednost, x_0. Nadalje, $f(x_0)$ imat će istu vrijednost kao i $f^{n+1}(x_0)$. Naime, $f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_0)$, zbog periodičnosti točke x_0. Dakle, točka $f(x_0)$ će također biti periodična s temeljnim periodom n. Nadalje, isto će vrijediti za sve točke $f^i(x_0)$, $i = 1, \ldots, n-1$. To možemo pokazati na isti način. Možemo zaključiti da, ako funkcija f ima periodičku točku temeljnog perioda n, tada će imati barem n periodičkih točaka temeljnog perioda n. Primijetimo još da će, u slučaju da f ima periodičku točku x_0 perioda 1, to zapravo biti fiksna točka funkcije f, jer je $f(x_0) = x_0$.

Nadalje, pogledajmo koja je veza između fiksne i periodičke točke.

Propozicija 3. *Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je točka x_0 periodička točka funkcije f s temeljnim periodom n, gdje je $n \in \mathbb{N}$, tada je x_0 fiksna točka funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $g(x) := f^n(x)$.*

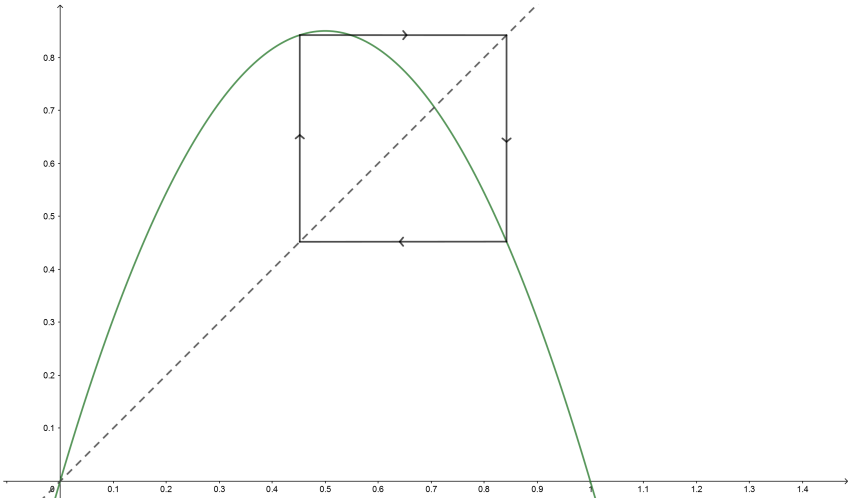
Dokaz. Pošto je x_0 periodička točka funkcije s temeljnim periodom n, po definiciji periodičke točke vrijedi $f^n(x_0) = x_0$. Sada je $g(x_0) = f^n(x_0) = x_0$. Dakle, po definiciji, x_0 je fiksna točka funkcije g. □

Definicija 6. *Neka je x^* periodička točka funkcije f s periodom $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Periodička orbita diskretnog dinamičkog sustava $x_{n+1} = f(x_n)$ s početnom točkom x^* je skup*

$$O_f(x^*) = \left\{ f^i(x^*) : i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Primjer 6. *Ilustriramo kako grafički prepoznati periodičku orbitu, tj. periodičke točke funkcije.*

Za ilustraciju uzmimo Sliku 2.10 iz Potpoglavlja 2.2.3, za koji smo grafički naslutili da ima dva gomilišta, jedno približno jednako 0.452, a drugo približno jednako 0.842. U Propoziciji 4 ispod pokazujemo da su ta dva gomilišta periodičke točke perioda 2.



Slika 3.7: Prikaz periodičke orbite od $x_0 \approx 0.452$ za $f(x) = 3.4x(1-x)$.

Propozicija 4. *Neka je $x_{n+1} = f(x_n)$ dinamički sustav. Ako za neku početnu točku i za neki $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq 1$, niz iteracija $(x_{n\cdot k_0})_n$ konvergira kad $n \to \infty$, tj. ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n\cdot k_0} = x^*,$$

tada je x^* periodička točka funkcije f perioda k_0.

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $g(x) = f^{k_0}(x)$. Tada je $g^n(x_0) = f^{nk_0}(x_0)$, za početnu vrijednost x_0, pa je, prema Propoziciji 2, točka x^* fiksna točka funkcije g. Time je i periodička točka perioda k_0 funkcije f. □

Dakle, ovime smo pokazali da, ako za neki $k_0 \in \mathbb{N}$, podniz $\left(f^{n\cdot k_0}\right)_n$ vrijednosti iteracija funkcije f ima limes, onda je to periodička točka te funkcije perioda k_0. Ako se vratimo na prethodno poglavlje, možemo zaključiti da funkcija $f(x) = \mu x(1-x)$ može imati dva, četiri, osam, šesnaest, itd. periodičkih točaka.

Primjer 7. *Funkcija $f(x) = 3.4x(1-x)$ sa Slike 2.10 iz Potpoglavlja 2.2.3 .*

U tom smo slučaju dobili niz vrijednosti iteracija funkcije koji ima dva gomilišta približno jednaka 0.8422 i 0.452. Prema Propoziciji 4, točke približno jednake 0.8422 i 0.452 su periodičke točke funkcije f temeljnog perioda 2. Zaista,

$$f(0.8422) = 3.4 \cdot 0.8422 \cdot (1 - 0.8422) \approx 0.452,$$

$$f(0.452) = 3.4 \cdot 0.452 \cdot (1 - 0.452) \approx 0.8422$$

Nadalje, slično kao i kod fiksnih točaka, definiramo *privlačne* i *odbojne* periodičke točke.

Definicija 7. *Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ periodička točka funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s temeljnim periodom $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je x_0 privlačna periodička točka od f ako postoji okolina U oko x_0 takva da, za svaki $y \in U$, vrijedi da je $f^{kn}(y) \in U$, $k \in \mathbb{N}$, te $\lim_{n\to\infty} f^{kn}(y) = x_0$.*
Kažemo da je x_0 odbojna periodička točka od f, ako postoji okolina U oko x_0 takva da, za svaku točku $y \in U$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da $f^{kn}(y) \notin \mathbb{U}$, za svaki $k \geq k_0$.

Propozicija 5. *Točka $x_0 \in \mathbb{R}$ je odbojna/privlačna periodička točka funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periodom $n \in \mathbb{N}$ ako i samo ako je x_0 odbojna/privlačna fiksna točka funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $g(x) = f^n(x)$.*

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje slijedi iz definicija fiksne i periodičke točke, te odbojne i privlačne periodičke i fiksne točke. □

Teorem 2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ periodička točka funkcije f perioda $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

1. *Ako je $|(f^n)'(x_0)| < 1$, onda je x_0 privlačna.*
2. *Ako je $|(f^n)'(x_0)| > 1$, onda je x_0 odbojna.*

Dokaz.

1. Definiramo funkciju $g(x) = f^n(x)$. Tada vrijedi $|g'(x_0)| < 1$. Prema Propoziciji 3, x_0 je fiksna točka funkcije g. Po Teoremu 1, x_0 je privlačna fiksna točka funkcije g. Po Propoziciji 5, slijedi da je x_0 privlačna periodička točka funkcije f.

Tvrdnja 2. dokazuje se analogno prvoj. □

Propozicija 6. *Neka je x_0 periodička točka C^1-funkcije f perioda $n \in \mathbb{N}$, te neka je $O^f(x_0) = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$, $f(x_{n-1}) = x_0$, periodička orbita od x_0 perioda n. Tada je*

$$|(f^n)'(x_0)| = \ldots = |(f^n)'(x_{n-1})| = |f'(x_0)| \cdots |f'(x_{n-1})|.$$

Dokaz. Koristeći formulu za derivaciju kompozicije funkcija dobivamo:

$$\left|(f^n)'(x_0)\right| = \left|f'\left(f^{n-1}(x_0)\right)\left(f^{n-1}\right)'(x_0)\right|.$$

Sada, kako je $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$ periodička orbita od x_0 perioda n, vrijedi $f^{n-1}(x_0) = x_{n-1}$. Iz te činjenice slijedi:

$$\left|(f^n)'(x_0)\right| = \left|f'(x_{n-1})\left(f^{n-1}\right)'(x_0)\right|.$$

Nadalje, induktivno dobivamo:

$$\left|(f^n)'(x_0)\right| = |f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\dots f'(x_0)|\,.$$

Primijenimo li isti postupak na $|(f^n)'(x_i)|$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, induktivno dobivamo:

$$|(f^n)'(x_i)| = |f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1})|\,, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Propozicija 6 nam zapravo govori da je jedna točka iz periodičke orbite privlačna/odbojna ako i samo ako je svaka druga točka iz periodičke orbite privlačna/odbojna.

Primjer 8. *Na Slici 2.17 iz Potpoglavlja 2.2.4.1 uočili smo da vrijednosti iteracija funkcije $f(x) = 1.5x(1-x)$ teže prema $\frac{1}{3}$, što je fiksna točka te funkcije. Odredimo je li ona privlačna ili odbojna.*

Odredimo najprije derivaciju funkcije f:

$$f'(x) = 1.5 - 3x.$$

Nadalje, odredimo vrijednost derivacije u točki $x = \frac{1}{3}$:

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1.5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.5$$

Sada je, prema Teoremu 1, točka $x = \frac{1}{3}$ privlačna fiksna točka funkcije f. Pošto je $x = \frac{1}{3}$ privlačna fiksna točka, ako odaberemo početnu točku dovoljno blizu $\frac{1}{3}$, iteracije konvergiraju prema $\frac{1}{3}$.

Slično bismo mogli pokazati i za sve vrijednosti $\mu \in \langle 1, 3\rangle$. Vrijednosti iteracija funkcije uvijek će težiti prema fiksnoj točki, za blisko odabranu početnu vrijednost, upravo zato što je ona privlačna. To nam omogućuje da pomoću programa opisanog u Poglavlju 2 i grafičkog prikaza kojeg dobivamo odredimo fiksne točke funkcije f_μ na intervalu $\mu \in \langle 1, 3\rangle$.

Objasnimo sada ilustrirano u Potpoglavlju 2.2.4.1, gdje smo uočili da se vrijednost limesa iteracija smanjuje prema 0 kad smanjujemo parametar μ logističke funkcije od 3 prema 1. Naime, u Propoziciji 2 smo dokazali da je limes iteracija fiksna točka funkcije f. S druge strane, po Primjeru 1 u ovom poglavlju, fiksna točka funkcije f različita od 0 jednaka je $\frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$. Stoga je jasno da, kad se parametar μ smanjuje od 3 prema 1, vrijednost fiksne točke pada, a kad μ teži u 1, $\lim\limits_{\mu\to 1}\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right) = 0$.

Pokažimo sada tu činjenicu matematički u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 7. *(Prema [1]) Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \mu x(1-x)$, gdje je $\mu \in \langle 1, 3\rangle$, i neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:*

1. *Funkcija f ima privlačnu fiksnu točku u $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ i odbojnu fiksnu točku u 0.*
2. *Ako je $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = p_\mu.$$

Dokaz.

1. Tvrdnju smo pokazali u Primjeru 4 u ovom poglavlju.
2. Razdvojimo slučajeve s obzirom na vrijednost konstante μ:

   a) Promotrimo najprije slučaj kad je $1 < \mu < 2$.

   Kako je p_μ privlačna fiksna točke funkcije f, prema Teoremu 1 vrijedi $|f'(p_\mu)| < 1$. Sada postoji $k \in \mathbb{R}$, $k < 1$, takav da vrijedi $|f'(p_\mu)| < k$. Nadalje, kako je f' neprekidna funkcija, postoji δ takav da je $|f'(p_\mu)| < k$ za svaki $x \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$. Sada prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$ imamo:

$$\frac{f(x) - f(p_\mu)}{x - p_\mu} = \frac{f(x) - p_\mu}{x - p_\mu} = f'(c_x),$$

   za neki c_x između x i p_μ. Dakle, vrijedi:

$$\left|f(x) - p_\mu\right| < k|x - p_\mu| < |x - p_\mu|, \tag{3.3}$$

   za svaki $x \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$.

   Ovo nam govori da će $f(x)$ biti bliže p_μ nego x. Dakle, $f(x) \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$, pa (3.3) možemo primijeniti na $f(x)$ i dobivamo:

$$\left|f^2(x) - p_\mu\right| < k|x - p_\mu|.$$

   Induktivno, dobivamo:

$$\left|f^n(x) - p_\mu\right| < k^n|x - p_\mu|, \tag{3.4}$$

   za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $x \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$.

Nadalje, $k^n \to 0$ kad $n \to +\infty$ jer je $k < 1$, pa mora vrijediti $(f^n(x) - p_\mu) \to 0$ kad $n \to +\infty$. Dakle:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p_\mu, \tag{3.5}$$

za svaki $x \in [p_\mu - \delta, p_\mu + \delta]$.

Kako je $1 < \mu < 2$, tada je $p_\mu \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$, pa tvrdnja (3.5) po gore dokazanom vrijedi za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$. Naime, δ-okolina konstruirana oko $p_\mu \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$ ne obuhvaća nužno dani $x > \frac{1}{2}$, pa ne možemo za takav x po prethodnom razmatranju zaključiti (3.5).

Pretpostavimo sada da je $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle$. Funkcija f na intervalu $[0, 1]$ postiže maksimum u točki $x = \frac{1}{2}$ te on iznosi $\frac{\mu}{4}$. Za $1 < \mu < 2$, taj maksimum je strogo manji od $\frac{1}{2}$. Dakle, $f(x) < \frac{1}{2}$ za $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle$. Dakle, nakon jedne iteracije, vrijednost će upasti u interval koji je pokriven u prvom dijelu dokaza, pa vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p_\mu,$$

za svaki $x \in \langle 0, 1\rangle$.

b) Promotrimo sada slučaj kad je $2 < \mu < 3$.

Kako je $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, vrijedi $\frac{1}{2} < p_\mu < 1$. Neka je p^* točka iz intervala $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ takva da je $f(p^*) = p_\mu$. Naime, takva točka p^* postoji jer je funkcija f neprekidna i preslikava oba intervala, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ i $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, strogo monotono u interval $\left[0, \frac{\mu}{4}\right]$. Naime, točka $x = \frac{1}{2}$ je točka strogog maksimuma, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$.
Nadalje, funkcija f je strogo rastuća na intervalu $\left[p^*, \frac{1}{2}\right]$, te vrijedi $f(p^*) = p_\mu$ i $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$. S druge strane, funkcija f je strogo padajuća na intervalu $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$, te vrijedi $f(p_\mu) = p_\mu$. Dakle, funkcija f preslikava interval $[p^*, p_\mu]$ u interval $\left[p_\mu, \frac{\mu}{4}\right]$.
Kako je $\frac{\mu}{4} > p_\mu$ za μ iz danog intervala, te je funkcija f strogo padajuća na $\left[p_\mu, \frac{\mu}{4}\right]$ i vrijedi $f\left(\frac{\mu}{4}\right) < p_\mu$, za svaki μ iz danog intervala. Kako je još $p_\mu > \frac{1}{2}$ za μ iz danog intervala, vrijedi da funkcija f preslikava interval $\left[p_\mu, \frac{\mu}{4}\right]$ u interval $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$. Dakle, funkcija f^2 preslikava interval $[p^*, p_\mu]$ u interval $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$.
Nadalje, slično se pokaže da funkcija f preslikava interval $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$ opet u interval $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$.

Nadalje, za svaki x iz intervala $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$ vrijedi $f(x) > x$. Naime, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

$$\begin{aligned} f(x) &> x, \\ -\mu x^2 + \mu x &> x, \\ -\mu x^2 + \mu x - x &> 0, \\ x(-\mu x + \mu - 1) &> 0. \end{aligned}$$

Kako je $x > 0$, posljednja relacija je ekvivalentna $-\mu x + \mu - 1 > 0$, što je ekvivalentno $x < \frac{\mu-1}{\mu} = p_\mu$, što vrijedi za svaki x iz intervala $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$. Dakle, niz iteracija funkcije f je rastući za početnu točku iz intervala $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$. Nadalje, gore smo pokazali da vrijedi $f^n(x) \leq p_\mu$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i x iz intervala $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$. Dakle, niz iteracija $x_{n+1} = f(x_n)$, za $n \in \mathbb{N}_0$, je rastući i ograničen, pa je konvergentan. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -\mu x_n^2 + \mu x_n \quad / \lim_{n\to\infty}, \\ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}(-\mu x_n^2 + \mu x_n), \\ L &= -\mu L^2 + \mu L. \end{aligned}$$

Dakle, jedini kandidati za limes niza su $L = 0$ i $L = \frac{\mu-1}{\mu} = p_\mu$. No, kako je niz vrijednosti iteracija rastući i vrijedi $f^n(x) > 0$, $n \in \mathbb{N}$ za svaki x iz intervala $\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$, slučaj $L = 0$ nije moguć. Dakle, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p_\mu,$$

za svaki $x \in \left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$. Dakle, pokazali smo sada sljedeće: za $x \in [p^*, p_\mu]$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = p_\mu$.

Neka je sada $0 < x < p^*$. Sada postoji $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, takav da je $f^k(x) \in [p^*, p_\mu]$. Naime, ako je $0 < x < p^*$, znamo da je $0 < x < \frac{1}{2} - \delta$, za neki $\delta > 0$ jer je p^* strogo manje od $\frac{1}{2}$. Sada je $f(x) = \mu x(1-x) > 2x\left(\frac{1}{2} + \delta\right) = lx$, gdje je $l > 1$. Sad je $f^n(x) > l^n x$, pa nakon određenog broja koraka upadnemo u interval $[p^*, p_\mu]$. Pa vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} f^{k+n}(x) = p_\mu.$$

Za sad smo, dakle, pokazali da limes vrijedi za sve $x \in \langle 0, p_\eta \rangle$. Konačno, kako je funkcija f strogo padajuća na intervalu $[p_\mu, 1]$, maksimum na tom intervalu se postiže u točki $x = p_\mu$, a minimum u $x = 1$. Dakle, funkcija f preslikava interval $\langle p_\mu, 1 \rangle$ u interval $\langle 0, p_\mu \rangle$, pa isto vrijedi i na tom intervalu.

Kako je sada pokriven cijeli interval $\langle 0, 1\rangle$, tvrdnja vrijedi za $2 < \mu < 3$.

3. Tvrdnja vrijedi i za slučaj $\mu = 2$, no to nećemo dokazivati.

□

3.2 Bifurkacijski dijagram za kvadratnu familiju

U ovom ćemo potpoglavlju promjene koje se događaju u broju i položaju fiksnih, odnosno periodičkih točaka, za kvadratnu familiju $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ s promjenom parametra μ prikazati na jednom grafu. U Potpoglavlju 3.2.1 ćemo ih još dodatno pojasniti. Definirajmo najprije osnovne pojmove koji su nam za to potrebni.

Definicija 8. *(Prema [1]) Neka je $\mu \in \mathbb{R}$ i neka je $(f_\mu)_{\mu>0}$, $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ familija neprekidnih funkcija. Neka je $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$, $\mu > 0$, familija diskretnih dinamičkih sustava generiranih funkcijama f_μ. Bifurkacijom smatramo pojavu promjene u asimptotskom ponašanju orbita sustava s obzirom na promjenu parametra μ.*

Primijetimo da je jedan takav primjer upravo kvadratna familija $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ i promjene koje se događaju u broju i položaju fiksnih i periodičkih točaka kako mijenjamo parametar μ.

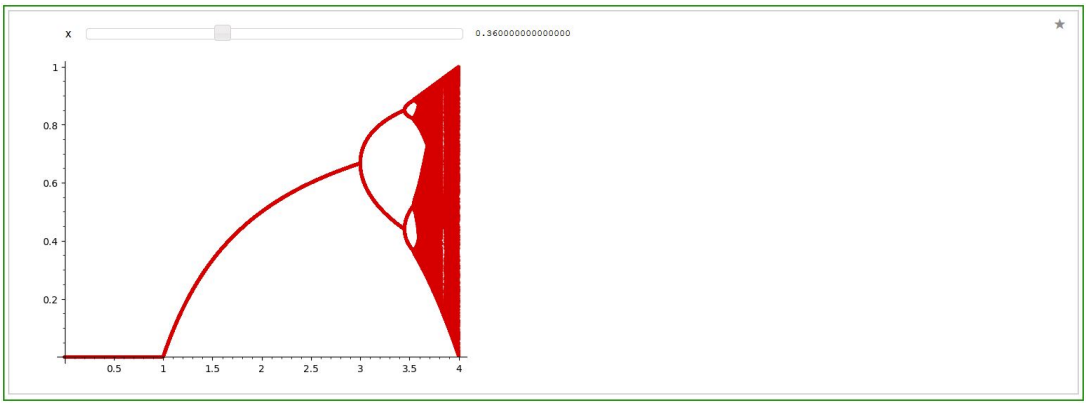
Definicija 9. *Neka je $(f_\mu)_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdje je $\mu \in \mathbb{R}$, parametarska familija funkcija. Bifurkacijskim dijagramom te familije nazivamo dijagram u kojem na horizontalnoj osi nanosimo vrijednosti parametra μ, a na vertikalnoj osi vrijednosti privlačnih fiksnih, odnosno privlačnih periodičkih točaka funkcije f_μ na koje se gomilaju iteracije početne točke x_0 za danu vrijednost parametra μ.*

Crtamo bifurkacijski dijagram za kvadratnu familiju $f(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 0$. U tome će nam pomoći program koji će crtati točke (μ, x), gdje je $\mu = 0.001k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 4000\}$, a x su brojevi kojima teže vrijednosti iteracija funkcije za dani μ (za koje smo vidjeli da predstavljaju fiksne, odnosno periodičke točke). Vrijednosti iteracija funkcije računamo kao i u prethodnom programu (također gledamo tisuću iteracija). Za svaku vrijednost parametra μ počinjemo iterirati iz iste početne točke x_0. Zadnjih sto vrijednosti spremamo u posebnu listu te pomoću te liste crtamo navedene točke. Bifurkacijski dijagram rađen je prema [1].

Program napisan u SageMath-u:

```
y_coords=[]
zadnjih100=[0]*100
x_co=[0]*399900
k=0.001
ind=0

for i in range (3999):
        for j in range (100):
                x_co[ind]=k
                ind=ind+1
        k=k+0.001

y_co=[[0]*100 for i in range (3999)]

for i in range(1000):
        y_coords.append(0)

y_coor=[0]*399900

@interact
def f(x=slider(0,1,0.01, 0.36)):
        mu=0.001
        for i in range(3999):
                iks=x
                for k in range (1000):
                        rez=mu*iks*(1-iks)
                        y_coords[k]=rez
                        iks=rez

                for k in range(100):
                        zadnjih100[k]=round(y_coords[999-k], 4)

                for k in range(100):
                        y_co[i][k]=zadnjih100[k]

                mu=mu+0.001

        k=0
        for i in range(3999):
                for j in range(100):
                        y_coor[k]=y_co[i][j]
                        k=k+1

        r=[(x_co[i],y_coor[i]) for i in range(399900)]
        lista=list_plot(r, color='red')
        show(lista)
```

Za početnu vrijednost x_0, za sve vrijednosti parametra μ, uzet ćemo 0.36. To je početna točka orbite čije asimptotsko ponašanje promatramo za razne vrijednosti parametra (ima li limes ili gomilišta i koja). Također, u programu imamo mogućnost promjene te vrijednosti, ali ona nam ne utječe bitno na konačni rezultat. Pokrenemo li navedeni program, dobivamo sljedeću sliku:



Slika 3.8: Bifurkacijski dijagram kvadratne familije $f(x) = \mu x(1 - x)$ (crtamo fiksne i periodičke točke za razne vrijednosti parametra). Početna točka je $x_0 = 0.36$.

Uzmemo li u obzir da je značenje riječi bifurkacija *razdvajanje*, naziv bifurkacijski dijagram ima smisla. Na dijagramu su vidljive vrijednosti parametra u kojima dolazi do ”razdvajanja” s jedne periodičke točke na dvije, s dvije na četiri, itd. Naime, za male vrijednosti parametra, iteracije početne točke x_0 konvergiraju prema jednoj fiksnoj točki 0, zatim, kako parametar raste prema vrijednosti 3 ta fiksna točka se povećava, pa se za još veće vrijednosti ”razdvaja” na dvije periodičke točke kojima će konvergirati svaka druga iteracija početne točke x_0, pa se u nekom trenutku svaka od njih ”razdvoji” još na dvije itd.

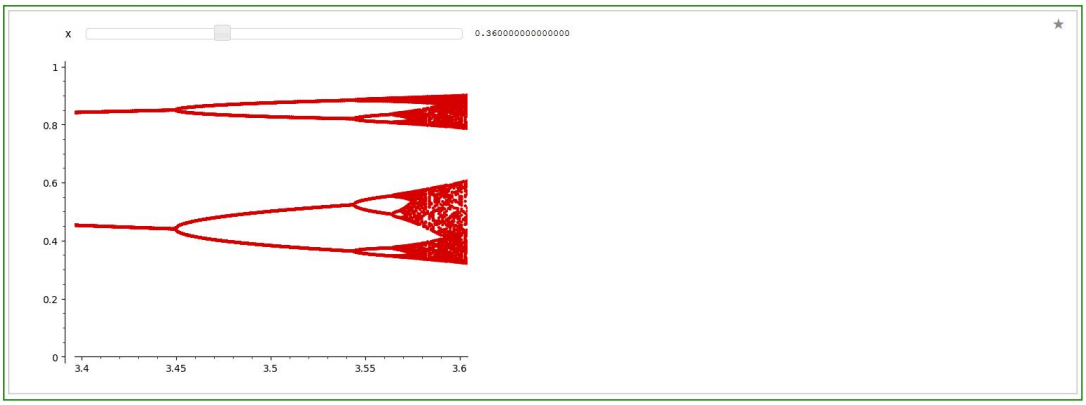
Naglasimo da na našim bifurkacijskim dijagramima ne brojimo koliko je ukupno fiksnih točaka ili periodičkih točaka funkcije f. Crtamo samo neke privlačne fiksne ili periodičke točke. Naime, mi prikazujemo *bifurkaciju samo jedne orbite s promjenom parametra*. Uzmemo orbitu s početnom točkom x_0 i za razne vrijednosti parametara gledamo kamo se asimptotski gomilaju iteracije te orbite. To su onda sigurno fiksne tj. periodičke točke, ali ne dokazujemo da nema drugih (možda su te druge odbojne pa ih tako ne dobivamo, ili se dobiju ako promijenimo početnu točku).

Prokomentirajmo sad bifurkacijski dijagram za orbitu iz točke $x_0 = 0.36$ koji smo dobili na Slici 3.8, u svjetlu dosadašnjih rezultata iz prošlih poglavlja. Primijetimo da na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ bifurkacijski dijagram prikazuje samo jednu fiksnu točku. Sjetimo se da smo

u prethodnom poglavlju pokazali da će funkcija $f = \mu x(1 - x)$ imati dvije fiksne točke, 0 i $\frac{\mu-1}{\mu}$. Ovdje je prikazana samo točka $\frac{\mu-1}{\mu}$. Naime, sjetimo se da je, prema Propoziciji 7, za $\mu \in \langle 1, 3\rangle$, 0 odbojna fiksna točka, a $\frac{\mu-1}{\mu}$ privlačna. Time možemo objasniti dobiveni dijagram, jer će se vrijednosti iteracija funkcije udaljavati od 0 i približavati prema $\frac{\mu-1}{\mu}$. S druge strane, za $\mu \in \langle 0, 1\rangle$, 0 je privlačna fiksna točka, pa iteracije konvergiraju u nju.

Nadalje, za $\mu > 3$, funkcija f će imati ili barem dvije privlačne periodičke točke ili niti jednu. Također je vidljiv interval u kojem funkcija ima barem četiri privlačne periodičke točke, no teško ga je egzaktno odrediti.

Ako prilagodimo (”zoomiramo”) navedeni program da prikazuje samo točke na intervalu $\mu \in [3.4, 3.6]$, dobivamo sljedeći dijagram:

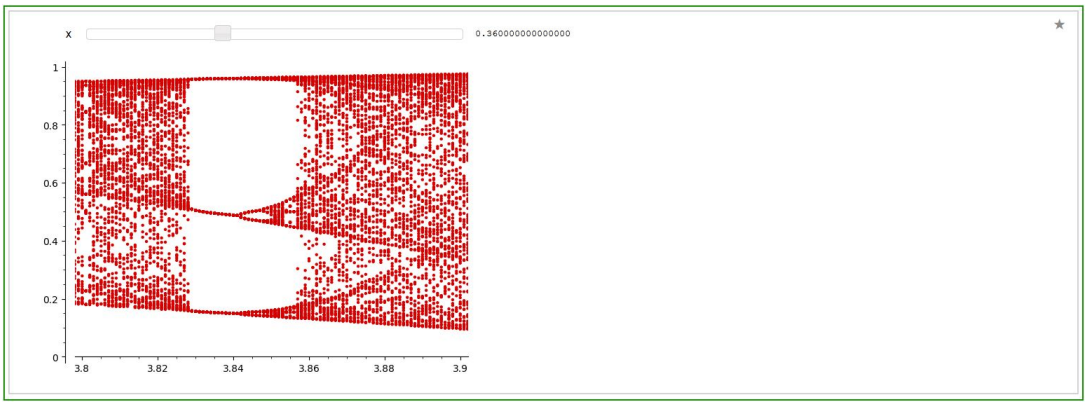


Slika 3.9: Prikaz privlačnih periodičkih točaka za $x_0 = 0.36$ i vrijednosti parametra μ iz intervala $[3.4, 3.6]$.

Ovime smo dobili jasniji prikaz vrijednosti parametra u kojima se asimptotska orbita ”razdvaja” prema četiri i dalje prema osam periodičkih točaka.

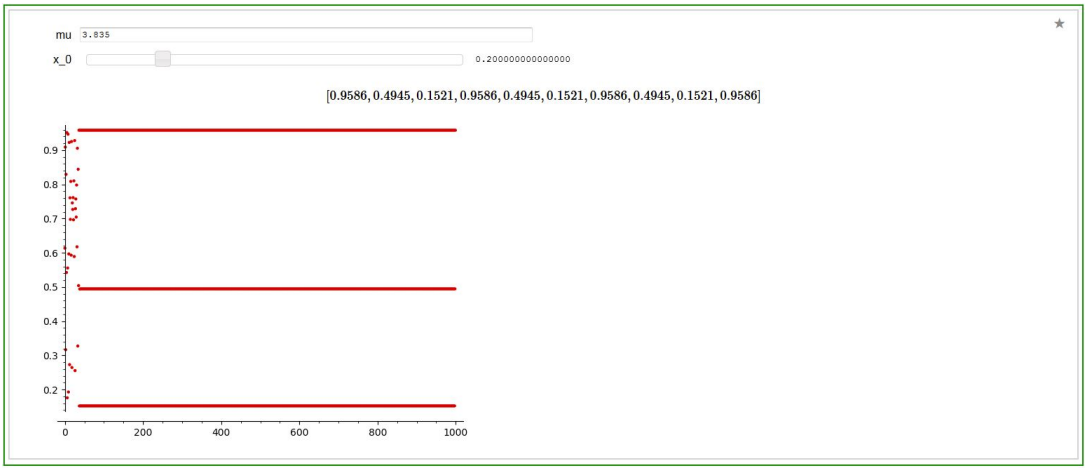
Dodatno, na prvom je dijagramu vidljivo da se pojavila ”praznina” za vrijednosti μ približno jednake 3.8, što sugerira na momentano smanjenje broja gomilišta orbite iz x_0 za vrijednost parametra približno jednakim 3.8. U tom trenutku se čini da orbita iz x_0 asimptotski teži prema nekim drugim privlačnim periodičkim točkama.

Prilagodimo li sada program da prikazuje samo privlačne periodičke točke na intervalu $\mu \in [3.8, 3.9]$, dobivamo sljedeći dijagram:



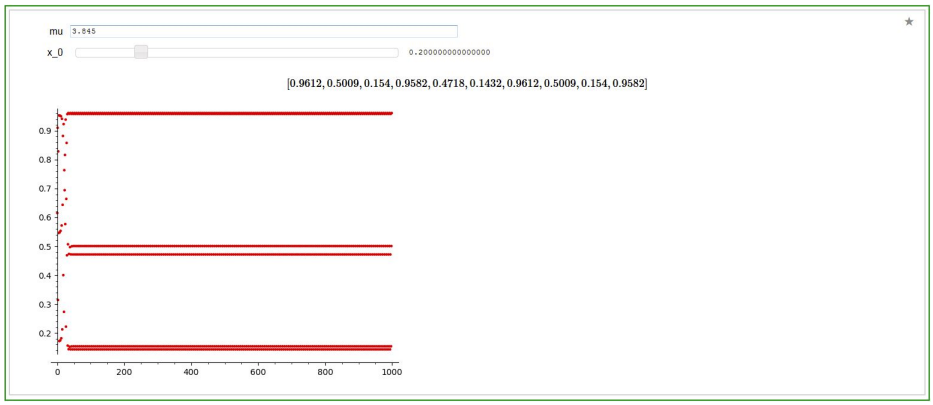
Slika 3.10: Prikaz privlačnih periodičkih točaka za $x_0 = 0.36$ i vrijednosti parametra μ iz intervala $[3.8, 3.9]$.

Čini se da postoje vrijednosti konstante μ za koje se pojavljuju nove tri privlačne periodičke točke te vrijednosti konstantne μ za koje se one opet razlože u šest privlačnih periodičkih točaka (svako gomilište trajektorije prijeđe u dva nova gomilišta, kao i prije). Slutnje ćemo provjeriti pomoću programa iz prethodnog poglavlja.



Slika 3.11: Prikaz iteracija za $\mu = 3.835$ i $x_0 = 0.2$.

Dakle, za $\mu = 3.835$, orbita iz točke $x_0 = 0.2$ se "gomila" na tri privlačne periodičke točke, s približnim vrijednostima: $0.4945, 0.1521, 0.9586$.



Slika 3.12: Prikaz iteracija za $\mu = 3.845$ i $x_0 = 0.2$.

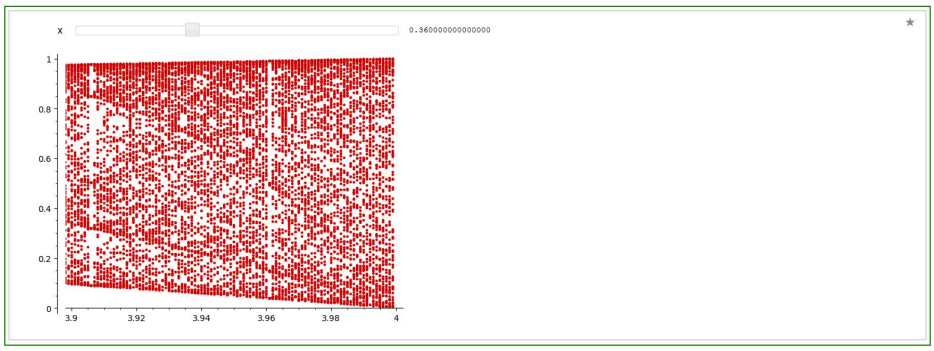
Nadalje, za $\mu = 3.845$, svaka od njih se razloži u dva gomilišta, pa nastane šest privlačnih periodičkih točaka, s približnim vrijednostima: $0.4718, 0.1432, 0.9612, 0.5009, 0.154, 0.9582$.

Za vrijednost konstante $\mu = 3.848$ tako ćemo dalje dobiti dvanaest privlačnih periodičkih točaka:

$$0.1571, 0.9573, 0.4652, 0.1407, 0.962, 0.5015, 0.1541, 0.9582, 0.4686, 0.1419, 0.9616, 0.5096$$

Slutimo da je moguće pronaći vrijednosti koje bi nam dalje dale 24 ili 48 gomilišta te orbite i time 24 ili 48 privlačnih periodičkih točaka, no za SageMath je zahtjevno analizirati dijagrame za velik broj periodičkih točaka.

Prilagodimo li navedeni program da prikazuje samo parametre u intervalu $\mu \in [3.9, 4.0]$, dobivamo još jednu zanimljivu "zoomiranu" sliku:

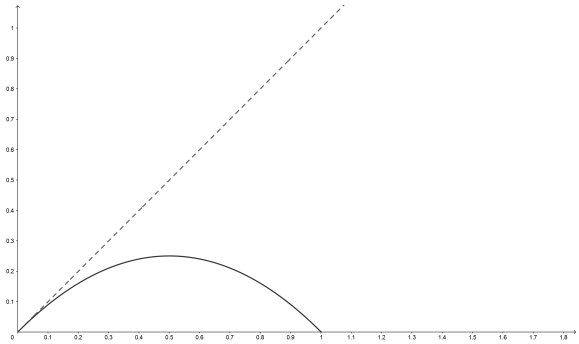


Slika 3.13: Prikaz privlačnih periodičkih točaka na intervalu $\mu \in [3.9, 4.0]$, na koje se gomilaju orbite iz početne točke $x_0 = 0.36$.

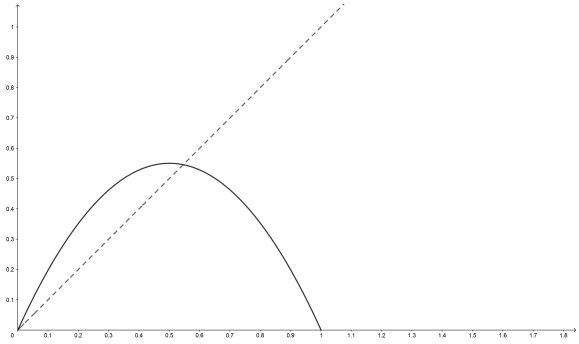
Naime, i na ovom intervalu postoje praznine koje bi se moglo dalje analizirati. No, za to je potrebno je nacrtati detaljniju sliku, sa što više točaka, a tu dolazimo do ograničenja jer su dijagrami s puno točaka zahtjevni za SageMath. Primijetimo ipak da se, povećanjem parametra μ prema $\mu = 4$, jako povećava broj periodičkih točaka na koje se gomilaju orbite iz početne točke x_0, što sugerira da se orbita počinje ponašati kaotično, tj. *ispunjavati čitavi interval*. To je u skladu s komentarom u Poglavlju 1 da za vrijednosti parametra veće od 4 za neke orbite ulazimo u područje *kaosa*.

3.2.1 Udvostručenje broja periodičkih točaka

Za kraj ćemo pomoću grafa kvadratne funkcije ilustrirati pojavu udvostručenja broja privlačnih periodičkih točaka koju smo naslutili u grafičkom primjeru u Poglavlju 2 (objašnjenje je napravljeno po uzoru na [1]). Pogledajmo najprije grafove funkcije $f(x) = \mu x(1 - x)$ za nekoliko različitih vrijednosti parametra μ:



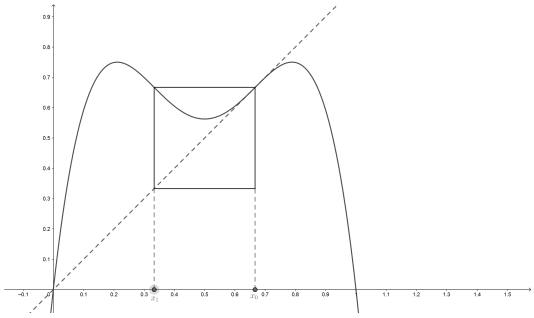
Slika 3.14: Graf funkcije f za $\mu = 1$ na intervalu $[0, 1]$.



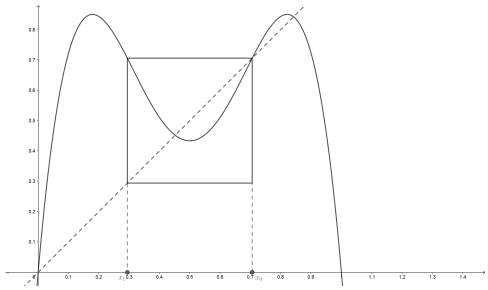
Slika 3.15: Graf funkcije f za $\mu = 2.2$ na intervalu $[0, 1]$.

Možemo vidjeti da funkcija f ima jednu fiksnu točku, jednaku 0, na intervalu $[0, 1]$, kad je $\mu \leq 1$, a dvije, 0 i različitu od 0, kad je $\mu > 1$.

Promotrimo grafove funkcije f^2 za nekoliko različitih vrijednosti μ. Pomnije ćemo proučiti graf na intervalu $[x_0, x_1]$, gdje je $x_0 \in \mathbb{R}$ privlačna fiksna točka funkcije f, a $x_1 \in \mathbb{R}$ takva da je $f(x_1) = x_0$. Primijetimo da je tada x_0 i privlačna fiksna fiksna točka funkcije f^2, te da je $f^2(x_1) = f(x_0) = x_0$:



Slika 3.16: Graf funkcije f^2 za $\mu = 3$ na intervalu $[0, 1]$.



Slika 3.17: Graf funkcije f^2 za $\mu = 3.4$ na intervalu $[0, 1]$.

Okrenemo li graf funkcije f^2 za $\mu = 3$ na intervalu $[x_0, x_1]$ dobivamo graf koji je vrlo sličan grafu funkcije f za $\mu = 1$ na intervalu $[0, 1]$. Možemo reći da grafovi imaju istu dinamiku na tim intervalima. Nadalje, ako usporedimo Slike 3.14 i 3.16, vidimo da je povećanje parametra μ s 1 na 3 rezultiralo novom privlačnom fiksnom točkom funkcije f (koju uočavamo kao privlačnu fiksnu točku od f^2). Označimo je s $x^* = x_0$. Daljnje povećanje vrijednosti parametra će u kvadratiću sa Slike 3.16 generirati istu sliku kao što je Slika 3.16, ako promatramo funkciju f^4. Tako ćemo generirati novu privlačnu fiksnu točku od f^2, koja je zapravo privlačna fiksna točka od f^4. Označimo je s x^{**}. Tako induktivno možemo razmišljati dalje.

Kako je x^* fiksna točka funkcije f^2, prema Propoziciji 5, x^* je privlačna periodička točka funkcije f perioda 2. Pošto je x^* periodička točka funkcije f perioda 2, periodička orbita $O_f(x^*)$ sastoji se od dvije vrijednosti. Prva je upravo x^*, a drugu označimo s x^{**} (vrijedi $f(x^*) = x^{**}$ i $f(x^{**}) = x^*$). Sada je, prema Propoziciji 6, x^{**} također privlačna periodička točka funkcije f. Time možemo objasniti udvostručenje broja privlačnih periodičkih točaka, s jedne na dvije, koje smo vidjeli na Slici 3.9 te naslutili u Poglavlju 2.

Nadalje, ako bismo nacrtali graf funkcije f^4 na intervalu $[0, 1]$, opet bismo mogli naći manji interval I, $I \subset [0, 1]$, na kojem graf funkcije f^4 ima istu dinamiku kao graf funkcije f na intervalu $[0, 1]$. Povećanje parametra μ bi opet rezultiralo novom privlačnom periodičkom točkom funkcije f, ovaj put perioda 4. Isto bismo mogli pokazati i za $f^8, f^{16}, \ldots$, što objašnjava udvostručenje broja privlačnih periodičkih točaka, s dvije na četiri, s četiri na osam, itd.

Nadalje, primijetimo da se pojava nove privlačne fiksne točke za funkciju f dogodila kad je parametar μ prešao vrijednost 1, a za funkciju f^2 kad je parametar μ prešao vrijednost 3. Nadalje, mogli bismo vidjeti da će se za funkciju f^4 pojava nove privlačne fiksne točke dogoditi kad vrijednost parametra prijeđe vrijednost približno jednaku 3.54. Dakle, interval vrijednosti parametra μ na kojem postoje barem četiri privlačne periodičke točke manji je od intervala na kojem postoje barem dvije privlačne periodičke točke, koji je opet manji od intervala na kojem postoji jedna privlačna fiksna točka. Tu smo pojavu također mogli uočiti na Slici 3.8.

Poglavlje 4

Zaključak

U radu smo promatrali asimptotsko ponašanje niza iteracija logističkog (kvadratnog) preslikavanja $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, te kako se ono mijenja s obzirom na promjenu parametra μ i izbor početne točke x_0.

Zaključili smo da su nam intervali $\mu \in \langle 0, 4]$ i $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ *zanimljivi*. Za vrijednosti parametra μ i početne vrijednosti x_0 izvan navedenih intervala niz vrijednosti iteracija funkcije ili teži u 0 ili teži u $-\infty$ ili je stacionaran (osim za skup mjere 0 za $\mu > 4$, gdje je ponašanje kaotično, no to nismo proučavali).

Za vrijednosti parametra μ unutar intervala $\langle 0, 1]$ niz vrijednosti iteracija funkcije teži u privlačnu fiksnu točku funkcije f jednaku 0, dok za vrijednosti unutar intervala $\langle 1, 3\rangle$ teži u privlačnu fiksnu točku funkcije f jednaku $\frac{\mu-1}{\mu}$.

Nadalje, kako vrijednost parametra μ raste od 3 prema 4, niz vrijednosti iteracija funkcije teži prema privlačnim periodičkim točkama funkcije f čiji se broj udvostručuje u nekim diskretnim vrijednostima parametra. Ako vrijednosti parametra povećavamo, niz vrijednosti iteracija funkcije teži prema sve većem broju privlačnih periodičkih točaka, što upućuje na pojavu kaosa u ponašanju orbita (kaos se pojavljuje za $\mu > 4$, što nismo obrađivali).

Bibliografija

[1] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. The Benjamin/Cmmings Publishing Co., Inc., 1986.

[2] `http://http://www.sagemath.org/`, 2019. [Online; pristupljeno 3.9.2019.].

[3] Vaughn Climenhaga and Yakov Pesin. *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2009.

[4] Justin Guo. Analysis of Chaotic Systems. `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Guo.pdf`, 2014.

Sažetak

Cilj ovog rada bio je analizirati *bifurkaciju* kvadratne familije funkcija $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 0$, tj. analizirati asimptotsko ponašanje niza iteracija vrijednosti funkcije f_μ s obzirom na promjenu vrijednosti parametra μ i izbor početne točke x_0. Željeli smo naći vrijednosti parametra za koje je moguće predvidjeti ponašanje sustava nakon velikog broja iteracija te koliko nam na to utječe izbor početne vrijednosti x_0.

U Poglavlju 2 smo naslutili promjene koje se događaju s promjenom tog parametra μ. Zatim smo u Poglavlju 3 paralelno uvodili osnovne pojmove iz teorije dinamičkih sustava i primjenjivali ih na kvadratnu familiju funkcija $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu > 0$. Time smo dokazivali tvrdnje koje smo grafički naslutili u Poglavlju 2 te pronašli vrijednosti parametara za koje je moguće predvidjeti ponašanje sustava, štoviše, točno odrediti što će se dogoditi s vrijednostima nakon velikog broja iteracija.

U Poglavlju 3 smo grafički ilustrirali bifurkaciju koja se događa s promjenom parametra μ. U određenim smo vrijednostima parametra uočili pojavu *udvostručenja perioda* te pojasnili zašto do nje dolazi. Ta pojava sugerira put prema *kaosu*.

Summary

The aim of this paper was to analyse quadratic family of functions $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, that is, the change in the asymptotic behaviour of its iterates with respect to to the parameter μ and the initial value x_0. We wanted to find the values of parameter μ for which it is possible to predict the asymptotic behaviour of the system and to investigate whether the choice of the initial value x_0 has any effect.

In Chapter 2, we predicted the changes in the asymptotic behavior of orbits with parameter changes.. In Chapter 3, we introduced basic concepts of the theory of discrete dynamical systems and applied them to the quadratic family $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$. We have mathematically proven some predictions from Chapter 2 and found the values of the parameter for which it is possible to predict the asymptotic behaviour of the system, furthermore.

In Chapter 3 we have illustrated the bifurcation that happens with the change of parameter μ. For some values of the parameter, we have noticed the *period-doubling bifurcation* and explained why it happens. This suggests a route to *chaos*.

Životopis

Ivan Jambrešić rođen je 10. svibnja 1992 druge godine u Čakovcu. Završio je Osnovnu školu Jože Horvata u Kotoribi, a zatim upisao opći smjer Gimnazije Josipa Slavenskog u Čakovcu. Nakon srednje škole upisao je Prirodoslovno-matematički fakultet gdje završava preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Zatim upisuje diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer: nastavnički, tijekom kojeg radi kao profesore matematike i informatike u IX. gimnaziji u Zagrebu te nakon toga kao kreator matematičkog sadržaja u Photomath-u.