Atraktori beskonačno dimenzionalnih disipativnih sustava

Muštović, Doris

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Doris Muštović

ATRAKTORI BESKONAČNO DIMENZIONALNIH DISIPATIVNIH SUSTAVA

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, srpanj 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik
2. ____ , član
3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ___________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________________
2. ______________________________________
3. ______________________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija disipativnih dinamičkih sustava sve je zastupljenija u proučavanju ponašanja rješenja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje predstavljaju matematičke modele za procese iz stvarnih sustava (biologija, kemija, fizika, ...), a čija stanja su općenito karakterizirana beskonačnim brojem parametara. Intenzivan interes znanstvenika za beskonačno dimenzionalne disipativne sustave potaknuli su pokušaji pronalaska adekvatnih matematičkih modela za objašnjenje turbulencija u tekućinama preko pojma čudnog atraktora. Do danas je vidljiv značajan napredak u proučavanju dinamike beskonačno dimenzionalnih disipativnih sustava i samim time ponuđene su strategije pomoću kojih je pronalazak odgovora i rješenja problema uvelike olakšan.

Cilj ovog rada je upoznati se s osnovnim pojmovima poput dinamičkog sustava, orbite i atraktora, pokazati primjerima česte oblike disipativnih sustava i obraditi neke rezultate važne za primjenu u rješavanju spomenutih problema, kao što je, primjerice, Princip redukcije.

Poglavlje 1

Uvod u dinamičke sustave

U ovom i sljedećem poglavlju uvest ćemo osnovne pojmove za daljnje razumijevanje i pomoću primjera predstaviti neke dinamičke sustave. Prema I.D. Chueshovu [1], u nastavku navodimo bitne definicije i korisne tehničke rezultate.

Definicija 1.1.
Dinamički sustav *je uređeni par* (X, S_t) *koji se sastoji od potpunog metričkog prostora* X *i familije* S_t *neprekidnih preslikavanja prostora* X *u samoga sebe i ima sljedeća svojstva:*

$$S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau \ , \qquad t, \tau \in \mathbb{T}_+ \ , \qquad S_0 = I \ ,$$

gdje je $\mathbb{T}_+$ *ili skup* $\mathbb{R}_+$ *nenegativnih realnih brojeva ili skup* $\mathbb{Z}_+$ *nenegativnih cijelih brojeva.*

Napomena 1.2.
Ukoliko je $\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+$*, pretpostavljamo da je* $y(t) = S_t y$ *neprekidna funkcija u ovisnosti o* t *za bilo koji* $y \in X$*. U tom slučaju* X *zovemo faznim prostorom, familiju* S_t *polugrupom, a parametar* $t \in \mathbb{T}_+$ *ima ulogu vremena. Tada* (X, S_t) *nazivamo dinamičkim sustavom sa neprekidnim vremenom. Ukoliko je* $\mathbb{T}_+ = \mathbb{Z}_+$*, onda dinamički sustav zovemo diskretnim sustavom (ili sustav sa diskretnim vremenom).*

Primjer 1.3.
Neka je $f(x)$ neprekidno diferencijabilna funkcija sa svojstvom $xf(x) \geq -C(1 + x^2)$, gdje je C neka konstanta. Promotrimo Cauchyjev problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x}(t) = -f\big(x(t)\big), \quad t > 0, \ x(0) = x_0. \qquad (\star)$$

Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ problem $(\star)$ ima jedinstveno rješenje i određuje dinamički sustav u $\mathbb{R}$.

S_t je dan formulom $S_t x_0 = x(t)$, gdje je $x(t)$ rješenje problema $(\star)$. Jednadžbe tipa $(\star)$ često se koriste u modeliranju ekoloških procesa. Na primjer, ukoliko uzmemo $f(x) = \alpha \cdot x(x-1),\ \alpha > 0,$ onda dobivamo jednadžbu koja opisuje rast neke populacije.

Primjer 1.4. (Bernoullijev pomak)

Neka je $X = \Sigma_2$ skup nizova $x = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ koji se sastoje od nula i jedinica. Pretvorimo taj skup u metrički prostor definirajući udaljenost formulom

$$d(x, y) = \inf\{2^{-n} :\ x_i = y_i\,,\ \ |i| < n\}.$$

Neka je S operator pomaka na X, tj. preslikavanje koje transformira niz $x = \{x_i\}$ u element $y = \{y_i\}$, gdje je $y_i = x_{i+1}$. Kao rezultat dobivamo dinamički sustav (X, S^n) koji je često korišten za opisivanje kompliciranih ponašanja u nekim realnim sustavima (biologija, kemija, fizika...).

Poglavlje 2

Orbite i invarijantni skupovi

Definicija 2.1.

Neka je (X, S_t) *dinamički sustav s neprekidnim ili diskretnim vremenom. Njegovu* **orbitu** *(ili trajektoriju) definiramo kao skup*

$$\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\} \ ,$$

gdje je $u(t)$ *neprekidna funkcija s vrijednostima u* X *takva da vrijedi* $S_\tau u(t) = u(t + \tau)$, *za svaki* $\tau \in \mathbb{T}_+$ *i* $t \in \mathbb{T}$.

Definicija 2.2.

Pozitivnu poluorbitu *definiramo kao skup* $\gamma^+ = \{u(t) : t \geq 0\}$ *gdje neprekidna funkcija* $u(t)$ *na* $\mathbb{T}_+$ *zadovoljava svojstvo* $S_\tau u(t) = u(t + \tau)$ *za svaki* $\tau > 0,\ t \geq 0$.

Analogno, **negativnu poluorbitu** *definiramo kao skup* $\gamma^- = \{u(t) : t \leq 0\}$ *gdje neprekidna funkcija* $u(t)$ *na* $\mathbb{T}_-$ *zadovoljava svojstvo* $S_\tau u(t) = u(t + \tau)$ *za svaki* $\tau > 0,\ t \leq 0,\ \tau + t \leq 0$.

Napomena 2.3.

Očito je da svaka pozitivna poluorbita γ^+ *ima oblik* $\gamma^+ = \{S_t v : t \geq 0\}$, *odnosno, jedinstveno je određena svojim početnim stanjem* v. *Kako bismo naglasili tu činjenicu, često pišemo* $\gamma^+ = \gamma^+(v)$.

Definicija 2.4.

Orbita $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *zove se* **periodička orbita** *ako postoji* $T \in \mathbb{T}_+, T > 0$ *takav da vrijedi* $u(t + T) = u(t)$. *Najmanji broj* $T > 0$ *koji zadovoljava prethodno svojstvo naziva se* **periodom** *orbite. Element* $u_0 \in X$ *je* **fiksna točka** *dinamičkog sustava* (X, S_t) *ako je* $S_t u_0 = u_0$ *za svaki* $t \geq 0$.

Definicija 2.5.

Za podskup Y faznog prostora X kažemo da je:

i) **pozitivno invarijantan** *ako je* $S_t Y \subseteq Y$ *za svaki* $t \geq 0$

ii) **negativno invarijantan** *ako je* $S_t Y \supseteq Y$ *za svaki* $t \geq 0$

iii) **invarijantan** *ako je* $S_t Y = Y$ *za svaki* $t \geq 0$.

Napomena 2.6.

Najjednostavniji primjeri invarijantnih skupova su orbite i poluorbite.

Primjer 2.7.

Za bilo koji podskup A faznog prostora X definiramo skupove

$\gamma^+(A) = \bigcup_{t\geq 0} S_t(A) \equiv \bigcup_{t\geq 0}\{v = S_t u : u \in A\}$ i

$\gamma^-(A) = \bigcup_{t\geq 0} S_t^{-1}(A) = \bigcup_{t\geq 0}\{v : S_t v \in A\}$.

Skup $\gamma^+(A)$ je pozitivno invarijantan, a ako je operator S_t invertibilan za neki $t > 0$, onda je skup $\gamma^-(A)$ negativno invarijantan.

Napomena 2.8.

Još neki važni primjeri invarijantnih skupova povezani su s pojmovima ω-graničnih i α-graničnih skupova koji igraju ključnu ulogu u proučavanju ponašanja dinamičkih sustava.

Definicija 2.9.

Neka je $A \subset X$. Tada je **ω-granični skup** *za A definiran sa*

$$\omega(A) = \bigcap_{s\geq 0}\left[\bigcup_{t\geq s} S_t(A)\right]_X ,$$

gdje je $S_t(A) = \{v = S_t u : u \in A\}$.

Također, definiramo **α-granični skup** *za A sa*

$$\alpha(A) = \bigcap_{s\geq 0}\left[\bigcup_{t\geq s} S_t^{-1}(A)\right]_X ,$$

gdje je $S_t^{-1}(A) = \{v : S_t v \in A\}$.

Lema 2.10.

Da bi element y *pripadao* ω*-graničnom skupu* $\omega(A)$ *nužno je i dovoljno da postoje niz elemenata* $\{y_n\} \subset A$ *i niz brojeva* t_n *koji teži prema beskonačnosti, takvi da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} d\left(S_{t_n} y_n, y\right) = 0,$$

gdje je $d(x, y)$ *udaljenost elemenata* x *i* y *u prostoru X.*

Dokaz.

Pretpostavimo da nizovi iz iskaza postoje. Tada je očito da za bilo koji $\tau > 0$ postoji $n_0 \geq 0$ takav da vrijedi

$$S_{t_n} y_n \in \bigcup_{t\geq\tau} S_t(A), \quad n \geq n_0 .$$

To povlači

$$y = \lim_{n\to\infty} S_{t_n} y_n \in \left[\bigcup_{t\geq\tau} S_t(A)\right]_X ,$$

za svaki $\tau > 0$. Dakle, element y pripada presjeku ovih skupova, tj. $y \in \omega(A)$.

Obrnuto, ako $y \in \omega(A)$, onda za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y \in \left[\bigcup_{t\geq n} S_t(A)\right]_X .$$

Dakle, za proizvoljni n postoji element z_n takav da je

$$z_n \in \bigcup_{t\geq n} S_t(A) , \qquad d(y, z_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Sada je očito da je $z_n = S_{t_n} y_n$, $y_n \in A$, $t_n \geq n$. Time je lema dokazana. □

<u>Napomena 2.11.</u>

Uočimo da nam prethodna lema daje dobar prikaz ω-graničnog skupa, ali nam ne garantira njegovu nepraznost.

Poglavlje 3

Definicija atraktora

Postoji nekoliko definicija atraktora, no dat ćemo onu najprikladniju u terminima beskonačno dimenzionalnih sustava, prema I.D. Chueshovu [1], preko pojma globalnog atraktora.

<u>Definicija 3.1.</u>

Omeđen i zatvoren skup $A_1 \subset X$ *je* **globalni atraktor** *za dinamički sustav* (X, S_t) *ako:*

1) A_1 *je invarijantan skup, tj.* $S_t A_1 = A_1$ *za svaki* $t > 0$;

2) za svaki omeđeni skup B *iz* X *vrijedi* $\lim_{t \to \infty} \sup\{\mathrm{dist}(S_t y, A_1) : y \in B\} = 0$.

<u>Napomena 3.2.</u>

Prisjetimo se da je udaljenost elementa z *i skupa* A *definirana jednakošću:*

$$\mathrm{dist}(z, A) = \inf\{d(z, y) : y \in A\},$$

gdje je $d(z, y)$ *udaljenost elemenata* z *i* y *u* X.

Pojam slabog globalnog atraktora koristan je u proučavanju dinamičkih sustava generiranih parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, stoga navodimo i sljedeću definiciju.

<u>Definicija 3.3.</u>

Neka je X *potpun, linearan metrički prostor. Slabo omeđen, zatvoren skup* A_2 *je* **slabi globalni atraktor** *ako je invarijantan* $(S_t A_2 = A_2, t > 0)$ *i ako za svaku slabu okolinu* $\mathcal{O}$ *skupa* A_2 *i za svaki omeđeni skup* $B \subset X$ *postoji* $t_0 = t_0(\mathcal{O}, B)$ *tako da je* $S_t B \subset \mathcal{O}$ *za* $t \geq t_0$.

Napomena 3.4.

Otvoreni skup u slaboj topologiji na prostoru X može biti opisan kao konačan presjek i sljedeća proizvoljna unija skupova oblika $U_{l,c} = \{x \in X : l(x) < c\}$, gdje je c realan broj, a l je neprekidan linearni funkcional na X.

Napomena 3.5.

Jasno je da se koncepti globalnih i slabo globalnih atraktora podudaraju u slučaju konačne dimenzionalnosti. Općenito, globalni atraktor A je ujedno i slabi globalni atraktor, ukoliko je A slabo zatvoren skup.

Definicija 3.6.

Ako globalni atraktor A_1 postoji, onda je u njemu sadržan **minimalni globalni atraktor** *A_3 kojeg definiramo kao najmanji zatvoren, pozitivno invarijantan skup koji zadovoljava svojstvo*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_t y, A_3) = 0, \qquad \forall y \in X\,.$$

Napomena 3.7.

Po definiciji minimalnost znači da ne postoji pravi podskup od A_3 sa svojstvom navedenim u prethodnoj definiciji.

U daljnjem razmatranju pokazat ćemo kako je općenito $A_3 \neq A_1$. Prema tome, u nekim slučajevima neka od stanja koja su zanemariva iz pogleda frekvencija njihovih prikaza moći će biti „uklonjena“ iz A_3, npr. stanja poput apsolutno nestabilnih fiksnih točaka. Sljedeće dvije definicije uzimaju u obzir tu činjenicu, no, nažalost, one zahtijevaju dodatne pretpostavke na svojstva faznog prostora. Slijedom toga, najčešće su korištene u slučajevima konačno dimenzionalnih dinamičkih sustava.

Definicija 3.8.

Neka je μ Borelova mjera na faznom prostoru X dinamičkog sustava (X, S_t) takva da je $\mu(X) < \infty$. Omeđeni skup A_4 u X naziva se **Milnorovim atraktorom** *(s obzirom na mjeru μ) za (X, S_t) ako je A_4 minimalni zatvoreni invarijantni skup sa svojstvom*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_t y, A_4) = 0,$$

za gotovo svaki $y \in X$ *s obzirom na mjeru* μ. *Milnorov atraktor također često nazivamo i vjerojatnosnim globalno minimalnim atraktorom.*

Na kraju ovog poglavlja upoznajmo se još s pojmom globalno minimalnog atraktora predloženog od strane poznatog ruskog matematičara Yulija Ilyashenka.

Definicija 3.9.

Neka je U *otvoren skup u* X *i neka je* $X_U(x)$ *njegova karakteristična funkcija:*

$$X_U(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in U \\ 0\,, & x \notin U \end{cases}.$$

Definirajmo formulom prosječno vrijeme $\tau(x, U)$ *koje poluorbita* $\gamma^+(x)$ *provede u skupu* U *nakon što izađe iz* x*:*

$$\tau(x, U) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T X_U(S_t x) dt\,.$$

Kažemo da je skup U **zanemariv** *s obzirom na mjeru* μ *ako vrijedi*

$$M(U) \equiv \mu\{x : \tau(x, U) > 0\} = 0\,.$$

Komplement A_5 *maksimalnom zanemarivom otvorenom skupu nazivamo* **Ilyashenkovim atraktorom** *(s obzirom na mjeru* μ*).*

Napomena 3.10.

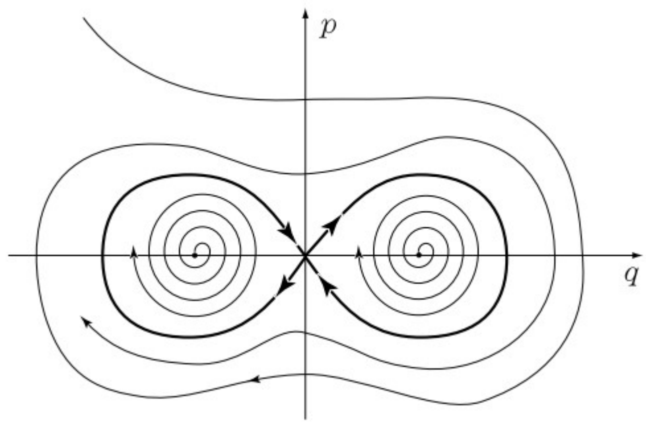
Bitno je spomenuti da atraktore A_4 *i* A_5 *koristimo u slučajevima gdje imamo Borelovu mjeru danu na faznom prostoru; npr. ako je dan zatvoreni izmjerivi skup* X *u* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *i* μ *je Lebesgueova mjera.*

Primjer 3.11.

Promotrimo kvazi-Hamiltonov sustav jednadžbi u $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} - \mu H \frac{\partial H}{\partial q}\,, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \mu H \frac{\partial H}{\partial p}\,, \end{cases} \tag{1}$$

gdje je $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + q^4 - q^2$ i μ je pozitivan broj. Lako se provjeri da fazni prikaz dinamičkog sustava generiranog jednadžbama iz (1) ima formu prikazanu na *Slici 1.*



Slika 1: Fazni prikaz sustava (1)

Separator odvaja domene fazne ravnine s različitim ponašanjem orbita. Separator je dan jednadžbom $H(p,q) = 0$. Točke oblika (p,q) unutar separatora okarakterizirane su sa $H(p,q) < 0$. Prema tome, imamo:

$$A_1 = A_2 = \{(p,q) : H(p,q) \leq 0\},$$

$$A_3 = \left\{(p,q) : H(p,q) = 0\right\} \cup \left\{(p,q) : \frac{\partial}{\partial p}H(p,q) = \frac{\partial}{\partial q}H(p,q) = 0\right\},$$

$$A_4 = \{(p,q) : \ H(p,q) = 0\}.$$

Konačno, jednostavnim izračunom dobivamo $A_5 = \{0,0\}$, odnosno, Ilyashenkov atraktor sadrži samo jednu točku.

Prema tome, vrijedi: $A_1 = A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5$.

<u>Napomena 3.12.</u>

Globalni atraktor može postojati samo pod dodatnim uvjetima što se tiče ponašanja orbita sustava u beskonačnosti. Glavni uvjet s kojim ćemo se upoznati u sljedećem poglavlju biti će disipativnost.

Poglavlje 4

Disipativnost i asimptotska kompaktnost

S točke gledišta fizičara, disipativni sustavi su prvenstveno povezani s ireverzibilnim procesima. Oni predstavljaju široku i važnu klasu dinamičkih sustava kojima se intenzivno bave moderne prirodne znanosti. Ove sustave (za razliku od konzervativnih sustava) karakterizira postojanje istaknutog smjera vremena kao i alokacije i rasipanja energije. Matematički govoreći, ova svojstva ponašanja orbita povezana su s postojanjem omeđenog apsorbirajućeg skupa u faznom prostoru sustava (I.D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, ACTA, 2002. [1], M. Starčević, *Dinamički sustavi*, Matematički odjel, PMF, Zagreb, 2017. [4]).

Definicija 4.1.

Za skup $B_0 \subset X$ *kažemo da je* **apsorbirajući** *za dinamički sustav* (X, S_t) *ako za svaki omeđeni skup* B *u* X *postoji* $t_0 = t_0(B)$ *takav da je* $S_t(B) \subset B_0$ *za svaki* $t \geq t_0$. *Za dinamički sustav* (X, S_t) *kažemo da je* **disipativan** *ako sadrži omeđen apsorbirajući skup.*

Napomena 4.2.

U slučaju kada je fazni prostor X *disipativnog sustava* (X, S_t) *Banachov prostor, kuglu oblika* $\{x \in X : \|x\|_X \leq R\}$ *možemo uzeti za apsorbirajući skup, a* R *tada nazivamo radijusom disipativnosti.*

Teorem 4.3.

Neka je fazni prostor neprekidnog dinamičkog sustava (X, S_t) *Banachov prostor. Pretpostavimo da vrijedi:*

a) postoji neprekidna funkcija $U(x)$ *na* X *za koju vrijedi*

$$\varphi_1(\|x\|) \leq U(x) \leq \varphi_2(\|x\|)\,, \qquad (1)$$

gdje su $\varphi_j(r)$ *neprekidne funkcije na* $\mathbb{R}_+$ *i* $\varphi_1(r) \to +\infty$ *kad* $r \to \infty$*;*

b) postoje derivacija $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(S_t y)$ *za* $t \geq 0$ *i pozitivni brojevi* α *i* ρ *takvi da vrijedi*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(S_t y) \leq -\alpha \quad \text{za} \quad \|S_t y\| > \rho\,. \tag{2}$$

Tada je dinamički sustav (X, S_t) *disipativan.*

Dokaz.

Odaberimo $R_0 \geq \rho$ takvog da je $\varphi_1(r) > 0$ za $r \geq R_0$.
Neka je $l = \sup\{\varphi_2(r) : r \leq 1 + R_0\}$ i neka je $R_1 > R_0 + 1$ takav da je $\varphi_1(r) > l$ za $r > R_1$. Pokažimo da vrijedi

$$\|S_t y\| \leq R_1 \text{ za } t \geq 0 \quad \text{i} \quad \|y\| \leq R_0. \tag{3}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da za neki $y \in X$ za kojeg je $\|y\| \leq R_0$ postoji vrijeme $\bar{t} > 0$ sa svojstvom $\|S_{\bar{t}} y\| > R_1$. Tada neprekidnost od $S_t y$ povlači da postoji $0 < t_0 < \bar{t}$ takav da vrijedi $\rho < \left\|S_{t_0} y\right\| \leq R_0 + 1$.

Prema tome, sada (2) povlači: $U(S_t y) \leq U\left(S_{t_0} y\right), \quad t \geq t_0,$ uz uvjet da $\|S_t y\| > \rho$.

Slijedi da je $U(S_t y) \leq l\,,$ za svaki $t \geq t_0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Pretpostavimo sada da je B proizvoljan omeđen skup u X koji ne leži unutar kugle radijusa R_0. Tada (2) povlači da je

$$U(S_t y) \leq U(y) - \alpha t \leq l_B - \alpha t\,, \quad y \in B, \tag{4}$$

uz uvjet da $\|S_t y\| > \rho$. Imamo: $l_B = \sup\{U(x) : x \in B\}$.

Neka je sada $y \in B$. Ako za vrijeme $t^* < \frac{l_b - l}{\alpha}$ poluorbita $S_t y$ ulazi u kuglu radijusa ρ, onda po (3) imamo $\|S_t y\| \leq R_1$ za svaki $t \geq t^*$. S druge strane, iz (4) slijedi da je

$$\varphi_1(\|S_t y\|) \leq U(S_t y) \leq l \text{ za } t \geq \frac{l_B - l}{\alpha},$$

odnosno, $\|S_t y\| \leq R_1$ za $t \geq \frac{l_B - l}{\alpha}$. Prema tome, imamo

$$S_t B \subset \{x : \|x\| \leq R_1\}\,, t \geq \frac{l_B - l}{\alpha},$$

što zajedno sa (3) povlači da je kugla radijusa R_1 apsorbirajući skup za dinamički sustav (X, S_t). Time je teorem dokazan. □

Definicija 4.4.

Neka je X zatvoreni podskup Banachovog prostora. Za dinamički sustav (X, S_t) kažemo da je **asimptotski kompaktan** *ako za bilo koji $t > 0$ polugrupu S_t možemo zapisati kao*

$$S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}, \qquad (5)$$

gdje preslikavanja $S_t^{(1)}$ i $S_t^{(2)}$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:

a) za bilo koji omeđeni skup B u X vrijedi

$$r_B(t) = \sup_{y \in B} \left\| S_t^{(1)} y \right\|_X \to 0, \quad t \to +\infty\,;$$

b) za bilo koji omeđeni skup skup B u X postoji t_0 takav da je skup

$$\left[\gamma_{t_0}^{(2)}(B)\right] = \left[\bigcup_{t \geq t_0} S_t^{(2)}(B)\right] \qquad (6)$$

kompaktan u X, gdje je $[\gamma]$ zatvarač skupa γ.

Definicija 4.5.

Kažemo da je dinamički sustav **kompaktan** *ako je asimptotski kompaktan i ako možemo uzeti $S_t^{(1)} \equiv 0$ u prikazu pod (5).*

Napomena 4.6.

Jasno je da je svaki konačno dimenzionalni disipativni sustav kompaktan.

Lema 4.7.

Dinamički sustav (X, S_t) je asimptotski kompaktan ako postoji kompaktan skup K takav da vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \sup\{\operatorname{dist}(S_t u, K) : u \in B\} = 0 \qquad (7)$$

za bilo koji omeđeni skup B iz X.

Dokaz.

Za neki $t > 0$ i $u \in X$ postoji element $v \equiv S_t^{(2)} u \in K$ takav da je

$$\mathrm{dist}(S_t u, K) = \left\| S_t u - S_t^{(2)} u \right\| .$$

Dakle, ako uzmemo $S_t^{(1)} u = S_t u - S_t^{(2)} u$, lako vidimo da u ovom slučaju prikaz iz (5) zadovoljava sve zahtjeve definicije asimptotske kompaktnosti. □

Napomena 4.8.

Prethodna lema igra važnu ulogu u primjenama pri dokazivanju svojstva asimptotske kompaktnosti. Štoviše, u slučajevima kad fazni prostor X dinamičkog sustava (X, S_t) nema strukturu linearnog prostora, pogodno je definirati pojam asimptotske kompaktnosti koristeći jednakost (7)*. Naime, za sustav (X, S_t) kažemo da je asimptotski kompaktan ako postoji kompakt K sa svojstvom* (7) *za bilo koji omeđeni skup B u X.*

Poglavlje 5

Teoremi o egzistenciji globalnog atraktora

U daljnjem ćemo razmatranju, zbog jednostavnosti, pretpostaviti da je fazni prostor X Banachov prostor, iako su glavni rezultati valjani i na široj klasi prostora.

Teorem 5.1.

Pretpostavimo da je dinamički sustav (X, S_t) *disipativan i asimptotski kompaktan. Neka je* B *omeđen apsorbirajući skup sustava* (X, S_t). *Tada je skup* $A = \omega(B)$ *neprazan, kompaktan skup i globalni atraktor dinamičkog sustava* (X, S_t). *Atraktor* A *je povezan skup u* X.

Napomena 5.2.

Primijetimo da Teorem 5.1. i Lema 4.7. zajedno daju sljedeći kriterij: „Disipativni dinamički sustav sadrži kompaktan globalni atraktor ako i samo ako je asimptotski kompaktan."

Dokaz prethodnog teorema bazirat će se na sljedećoj lemi:

Lema 5.2.

Neka je dinamički sustav (X, S_t) *asimptotski kompaktan. Tada je za svaki omeđeni skup* B *iz* X ω*-granični skup* $\omega(B)$ *neprazan, kompaktan, invarijantan skup.*

Dokaz.

Neka je $y_n \in B$. Tada za svaki niz $\{t_n\}$ koji teži prema beskonačnosti je skup $\left\{S_{t_n}^{(2)} y_n, \ n = 1, 2, \dots\right\}$ relativno kompaktan, odnosno, postoji niz n_k i element $y \in X$ takav da $S_{t_{n_k}}^{(2)} y_{n_k}$ teži prema y kada $k \to \infty$. Dakle, asimptotska kompaktnost daje nam

$$\left\| y - S_{t_{n_k}} y_{n_k} \right\| \leq \left\| S_{t_{n_k}}^{(1)} y_{n_k} \right\| + \left\| y - S_{t_{n_k}}^{(2)} y_{n_k} \right\| \to 0 \ \text{ kad } \ k \to \infty.$$

Prema tome, $y = \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}} y_{n_k}$. Prema Lemi 2.10. slijedi da je $\omega(B)$ neprazan skup.

Dokažimo sada invarijantnost ω-graničnog skupa. Neka je $y \in \omega(B)$. Tada, ponovno prema Lemi 2.10., postoje nizovi $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, i $\{z_n\} \subset B$ takvi da $S_{t_n} z_n \to y$. Budući da je preslikavanje S_t je neprekidno, imamo

$$S_{t+t_n} z_n = S_t \circ S_{t_n} z_n \to S_t y, \qquad n \to \infty.$$

Iz Leme 2.10. slijedi da je $S_t y \in \omega(B)$. Dakle, vrijedi $S_t \omega(B) \subset \omega(B), \quad t > 0.$

Pokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $y \in \omega(B)$. Tada postoje nizovi $\{v_n\} \subset B$ i $\{t_n : t_n \to \infty\}$ takvi da $S_{t_n} v_n \to y$. Pogledajmo niz $y_n = S_{t_n - t} v_n$, $t_n \geq t$. Asimptotska kompaktnost povlači da postoji podniz t_{n_k} i element $z \in X$ takvi da je

$$z = \lim_{k\to\infty} S^{(2)}_{t_{n_k}-t}\, y_{n_k},$$

Iz čega slijedi

$$z = \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}-t} y_{n_k}.$$

Stoga zaključujemo da je $z \in \omega(B)$. Štoviše,

$$S_t z = \lim_{k\to\infty} S_t \circ S_{t_{n_k}-t} v_{n_k} = \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}} v_{n_k} = y.$$

Dakle, $y \in S_t \omega(B)$ i time je invarijantnost skupa $\omega(B)$ dokazana.

Pokažimo još i kompaktnost skupa $\omega(B)$. Pretpostavimo da je $\{z_n\}$ niz u $\omega(B)$. Tada Lema 2.10. povlači da za proizvoljni n možemo pronaći $t_n \geq n$ i $y_n \in B$ takve da je $\left\| z_n - S_{t_n} y_n \right\| \leq \frac{1}{n}$. Kao i prije, svojstvo asimptotske kompaktnosti osigurava nam pronalazak elementa z i niza $\{n_k\}$ takvih da

$$\left\| S_{t_{n_k}} y_{n_k} - z \right\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

što sada povlači da je $z \in \omega(B)$ i $z_{n_k} \to z$, a to znači da je $\omega(B)$ zatvoren i kompaktan skup. Time je lema dokazana. □

Dokaz Teorema 5.1.

Neka je B omeđen apsorbirajući skup dinamičkog sustava. Pokažimo da je $\omega(B)$ globalni atraktor. Dovoljno je provjeriti da $\omega(B)$ uniformno privlači apsorbirajući skup B. Pretpostavimo suprotno. Tada $\sup\{\text{dist}(S_t y,\ \omega(B)) : y \in B\}$ ne teži k nuli kada $t \to \infty$. To znači da postoji $\delta > 0$ i niz $\{t_n : t_n \to \infty\}$ takvi da

$$\sup\left\{\text{dist}\left(S_{t_n} y, \omega(B)\right) : y \in B\right\} \geq 2\delta.$$

Dakle, postoji element $y_n \in B$ takav da

$$\text{dist}\left(S_{t_n} y, \omega(B)\right) \geq \delta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Kao i prije, postoji konvergentni podniz $\left\{S_{t_{n_k}} y_{n_k}\right\}$ niza $\left\{S_{t_n} y_n\right\}$, pa Lema 2.10. povlači da je $z \equiv \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}} y_{n_k} \in \omega(B)$, što je u kontradikciji sa (1). Prema tome, $\omega(B)$ je globalni atraktor. Njegova kompaktnost lako slijedi iz relacije

$$A \equiv \omega(B) = \bigcap_{\tau>0} \left[\bigcap_{t\geq\tau} S_t^{(2)} B\right].$$

Pokazat ćemo još povezanost atraktora metodom kontradikcije. Pretpostavimo da atraktor A nije povezan skup. Tada postoji par otvorenih skupova U_1 i U_2 takvih da vrijedi $U_i \cap A \neq \emptyset$, $\quad i = 1, 2$, $\quad A \subset U_1 \cup U_2$, $\quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Neka je $A^C = \text{conv}(A)$ konveksna ljuska skupa A, odnosno,

$$A^C = \left[\left\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i : v_i \in A, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \ N = 1, 2, \ldots\right\}\right].$$

Očito je da je A^C omeđen, povezan skup i da je $A^C \supset A$. Neprekidnost preslikavanja S_t povlači da je skup $S_t A^C$ također povezan. Nadalje, zbog $A = S_t A \subset S_t A^C$ vrijedi $U_i \cap S_t A^C \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Dakle, za proizvoljan $t > 0$ par U_1, U_2 ne može pokriti $S_t A^C$. Slijedi da postoji niz točaka $x_n = S_n y_n \in S_n A^C$ takvih da $x_n \notin U_1 \cup U_2$. Asimptotska kompaktnost dinamičkog sustava povlači da postoji podniz $\{n_k\}$ takav da $x_{n_k} = S_{n_k} y_{n_k}$ teži u X prema elementu y kad $k \to \infty$. Očito je da $y \notin U_1 \cup U_2$ i da je $y \in \omega(A^C)$, što je kontradikcija zbog

$\omega(A^C) \subset \omega(B) = A \subset U_1 \cup U_2$.

Time je Teorem 5.1. dokazan. □

Teorem 5.3.

Neka disipativni dinamički sustav (X, S_t) *sadrži kompaktan globalni atraktor* A. *Neka je* B *omeđeni apsorbirajući skup za* (X, S_t). *Tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{\operatorname{dist}(a, S_t B) : a \in A\} = 0. \qquad (2)$$

Dokaz.

Pretpostavimo da jednakost (2) ne vrijedi. Tada postoje nizovi $\{a_n\} \subset A$ i $\{t_n : t_n \to \infty\}$ takvi da je

$$\operatorname{dist}\left(a_n, S_{t_n} B\right) \geq \delta \quad \text{za neki} \quad \delta > 0. \qquad (3)$$

Kompaktnost skupa A omogućuje nam da pretpostavimo da $\{a_n\}$ konergira prema elementu $a \in A$. Prema tome,

$$a = \lim_{m\to\infty} S_{\tau_m} y_m, \quad \{y_m\} \subset B,$$

Gdje je $\{\tau_m\}$ niz takav da $\tau_m \to \infty$. Uzmimo podniz $\{m_n\}$ takav da vrijedi $\tau_{m_n} \geq t_n + t_B$, za svaki $n = 1, 2, \ldots$. Ovdje je t_B izabran tako da je $S_t B \subset B$ za svaki $t \geq t_B$.

Neka je $z_n = S_{\tau_{m_n} - t_n} y_{m_n}$. Sada je očito da je $\{z_n\} \subset B$ i vrijedi

$$a = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_{m_n}} y_{m_n} = \lim_{n\to\infty} S_{t_n} z_n.$$

Nejednakost (3) povlači da vrijedi

$$\operatorname{dist}\left(a_n, S_{t_n} z_n\right) \geq \operatorname{dist}\left(a_n, S_{t_n} B\right) \geq \delta,$$

što je u kontradikciji s jednakošću (2), pa je time teorem dokazan. □

Napomena 5.4.

Za karakterizaciju konvergencije orbita prema globalnom atraktoru prikladno je koristiti Hausdorffovu metriku definiranu na podskupovima faznog prostora:

$$\rho(C, D) = \max\{h(C, D); \quad h(D, c)\}, \qquad (4)$$

gdje su $C, D \in X$ *i*

$$h(C, D) = \sup\{\mathrm{dist}(c, D) : c \in C\}. \qquad (5)$$

Korolar 5.5.

Neka je (X, S_t) *asimptotski kompaktan disipativni sustav. Tada njegov globalni atraktor* A *ima svojstvo* $\lim_{t\to\infty} \rho(S_t B, A) = 0$ *za neki omeđeni apsorbirajući skup* B *sustava* (X, S_t).

Napomena 5.6.

Prethodni korolar zapravo govori da za neki $\varepsilon > 0$ *postoji* $t_\varepsilon > 0$ *takav da za svaki* $t > t_\varepsilon$ *skup* $S_t B$ *upada u* ε*-okolinu globalnog atraktora* A*; i obratno, atraktor* A *leži u* ε*-okolini skupa* $S_t B$*, gdje je* B *omeđeni apsorbirajući skup.*

Sljedeći teorem pokazat će nam kako u nekim slučajevima možemo ukloniti zahtjev asimptotske kompaktnosti ukoliko koristimo pojam slabog globalnog atraktora.

Teorem 5.7.

Neka je fazni prostor H *dinamičkog sustava* (H, S_t) *separabilan Hilbertov prostor. Neka je sustav* (H, S_t) *disipativan i neka je* S_t *slabo zatvoren, odnosno, za svaki* $t > 0$ *slaba konvergencija* $y_n \to y$ *i* $S_t y_n \to z$ *povlači da je* $z = S_t y$*. Tada dinamički sustav* (H, S_t) *sadrži slabi globalni atraktor.*

Dokaz. (skica)

Dokaz ovog teorema zapravo se svodi na dokaz Teorema 5.1. Slaba kompaktnost omeđenih skupova u separabilnom Hilbertovom prostoru igra glavnu ulogu umjesto asimptotske kompaktnosti.

Lema 5.8.

Neka vrijede hipoteze iz Teorema 5.7. Za $B \subset H$ *definiramo slabi* ω*-granični skup* $\omega_w(B)$ *formulom*

$$\omega_w(B) = \bigcap_{s\geq 0}\left[\bigcup_{t\geq s} S_t(B)\right]_w , \qquad (6)$$

gdje je $[Y]_w$ *slabi zatvarač skupa* Y*. Tada je, za svaki omeđeni skup* $B \subset H$*,* $\omega_w(B)$ *neprazan, slabo zatvoren, omeđen, invarijantan skup.*

Dokaz.

Disipativnost povlači da je svaki od skupova $\gamma_w^s(B) = [\bigcup_{t\geq s} S_t(B)]_w$ omeđen i stoga slabo kompaktan. Sada iz Cantorovog teorema o familiji kompaktnih skupova slijedi da je $\omega_w(B) = \bigcap_{s\geq 0} \gamma_w^s(B)$ neprazan, slabo zatvoren, omeđen skup. Pokažimo njegovu invarijantnost. Neka je $y \in \omega_w(B)$. Tada postoji niz $y_n \in \bigcup_{t\geq n} S_t(B)$ takav da slabo konvergira prema y. Svojstvo disipativnosti povlači da je skup $\{S_t y_n\}$ omeđen kad je t dovoljno velik. Prema tome, postoji podniz $y_{n_k} \to y$ i $S_t y_{n_k} \to z$ slabo. Slaba zatvorenost od S_t povlači da je $z = S_t y$. Budući da je $S_t y_{n_k} \in \gamma_w^s(B)$ za $n_k \geq s$, imamo da je $z \in \gamma_w^s(B)$ za svaki s. Dakle, $z \in \omega_w(B)$ i prema tome, $S_t \omega_w(B) \subset \omega_w(B)$. □

Dokaz teorema 5.7.

Dovoljno je pokazati je skup

$$A_\omega = \omega_w(B), \qquad (7)$$

gdje je B omeđen apsorbirajući skup sustava(H, S_t), slabi globalni atraktor tog sustava. Da bismo to pokazali, dovoljno je provjeriti da $A_\omega = \omega_w(B)$ uniformno privlači skup B u slaboj topologiji prostora H.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoje slaba okolina $\mathcal{O}$ skupa A_ω i nizovi $\{y_n\} \subset B$ i $\{t_n : t_n \to \infty\}$ takvi da $S_{t_n} y_n \notin \mathcal{O}$. Međutim, skup $\{S_{t_n} y_n\}$ je slabo kompaktan, pa postoje element $z \notin \mathcal{O}$ i podniz $\{n_k\}$ takvi da je $z = w - \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}} y_{n_k}$.

No, $S_{t_{n_k}} y_{n_k} \in \gamma_w^s(B)$ za $t_{n_k} \geq s$, pa je dakle $z \in \gamma_w^s(B)$ za sve $s \geq 0$ i $z \in \omega_w(B)$, što je nemoguće. Time smo dokazali Teorem 5.7. □

Poglavlje 6

Struktura globalnog atraktora

Proučavanje strukture globalnog atraktora dinamičkog sustava važan je problem u pogledu konkretnih primjena (I.D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems* [1]). Ne postoji univerzalan pristup tom problemu; čak i u konačno dimenzionalnim slučajevima atraktor može biti vrlo komplicirane strukture. Međutim, u ovom poglavlju istaknut ćemo neke skupove koji nesumnjivo pripadaju atraktorima. Također, važno je napomenuti da svaka fiksna točka polugrupe S_t pripada atraktoru dinamičkog sustava.

Lema 6.1.

Neka je element z *sadržan u globalnom atraktoru* A *dinamičkog sustava* (X, S_t). *Tada točka* z *pripada nekoj orbiti* γ *koja cijela leži u* A.

Dokaz.

Budući da vrijedi $S_t A = A$ i $z \in A$, postoji niz $\{z_n\} \subset A$ takav da je $z_0 = z$, $S_1 z_n = z_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Stoga je za diskretno vrijeme tražena orbita $\gamma = \{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $u_n = S_n z$ za $n \geq 0$ i $u_n = z_{-n}$ za $n \leq 0$.

Za neprekidno vrijeme imamo

$$u(t) = \begin{cases} S_t z, & t \geq 0 \\ S_{t+n} z_n, & -n \leq t \leq -n+1, \ \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Sada je očito da je $u(t) \in A$ za svaki $t \in \mathbb{R}$ i $S_\tau u(t) = u(t+\tau)$ za $\tau \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Prema tome, $u(0) = z$. Dakle, tražena orbita također dolazi iz slučaja neprekidnog vremena. □

Definicija 6.2.

Neka je Y *podskup faznog prostora* X *dinamičkog sustava* (X, S_t). **Nestabilan skup** *koji izlazi iz* Y *definiran je kao skup* $\mathbb{M}_+(Y)$ *točaka* $z \in X$ *gdje za svaku od njih postoji orbita* $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\}$ *takva da je*

$$u(0) = z, \qquad \lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}(u(t), Y) = 0.$$

Lema 6.3.

Neka je (X, S_t) dinamički sustav koji sadrži globalni atraktor A i neka je $\mathcal{N}$ skup fiksnih točaka tog sustava. Tada je $\mathbb{M}_+(\mathcal{N}) \subset A$.

Dokaz.

Očito je da skup $\mathcal{N} = \{z : S_t z = z, \ t > 0\}$ leži unutar atraktora sustava i stoga je omeđen. Neka je $z \in \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$. Tada postoji orbita $\gamma_z = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\}$ takva da je $u(0) = z$ i

$$\mathrm{dist}(u(\tau), \mathcal{N}) \to 0, \ \ \tau \to -\infty.$$

Prema tome, skup $B_s = \{u(\tau) : \ \tau \leq -s\}$ je omeđen kad je $s > 0$ dovoljno velik. Dakle, skup $S_t B_s$ teži prema atraktoru sustava kad $t \to +\infty$. Budući da je $z \in S_t B_s$ za $t \geq s$, imamo da je

$$\mathrm{dist}(z, A) \leq \sup\{\mathrm{dist}(S_t y, A) : y \in B_s\} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

što povlači da je $z \in A$, čime je lema dokazana. □

Napomena 6.4.

Dakle, pokazali smo da globalni atraktor A sadrži nestabilan skup $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$. Vidjet ćemo da pod određenim uvjetima atraktor ne sadrži ništa drugo osim tog skupa.

Definicija 6.5.

Neka je Y pozitivno invarijatna skup iz polugrupe S_t : $S_t Y \subset Y, \ t > 0$. Neprekidni funkcional $\Phi(y)$ definiran na Y naziva se **Lyapunovom funkcijom** *dinamičkog sustava (X, S_t) na Y ako vrijedi:*

a) funkcija $\Phi(S_t y)$ je monotono padajuća za svaki $y \in Y$ $(t \geq 0)$

b) ako za neke $t_0 > 0$ i $y \in X$ vrijedi jednakost $\Phi(y) = \Phi(S_{t_0} y)$, onda je $y = S_t y$ za svaki $t \geq 0$, odnosno, y je fiksna točka polugrupe S_t.

Teorem 6.6.

Neka dinamički sustav (X, S_t) sadrži kompaktni atraktor A te neka Lyapunova funkcija $\Phi(y)$ postoji na A. Tada je $A = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$, gdje je $\mathcal{N}$ skup fiksnih točaka dinamičkog sustava.

Dokaz.

Neka je $y \in A$. Promotrimo orbitu γ koja prolazi kroz y (znamo da takva orbita postoji prema Lemi 6.1.). Neka je

$$\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\}; \qquad \gamma_\tau^- = \{u(t) : t \le \tau\}.$$

Kako je $\gamma_\tau^- \subset A$, zatvarač $[\gamma_\tau^-]$ je kompaktan skup u X. To povlači da je α-granični skup

$$\alpha(\gamma) = \bigcap_{\tau<0} [\gamma_\tau^-]$$

orbite γ neprazan. Lako je provjeriti da je skup $\alpha(\gamma)$ invarijantan:
$S_t \alpha(\gamma) = \alpha(\gamma)$. Pokažimo da je Lyapunova funkcija $\Phi(y)$ konstantna na $\alpha(\gamma)$. Zaista, ako je $u \in \alpha(\gamma)$, onda postoji niz $\{t_n\}$ koji teži prema $-\infty$ takav da je

$$\lim_{t_n \to -\infty} u(t_n) = u\,.$$

Stoga, imamo

$$\Phi(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi\big(u(t_n)\big)\,.$$

Prema svojstvu monotonosti funkcije $\Phi(u)$ uzduž orbite, imamo

$$\Phi(u) = \sup\big\{\Phi\big(u(\tau)\big) : \tau < 0\big\}\,.$$

Dakle, funkcija $\Phi(u)$ je konstanta na $\alpha(\gamma)$. Invarijantnost skupa $\alpha(\gamma)$ povlači da je $\Phi(S_t u) = \Phi(u),\ t > 0$ za svaki $u \in \alpha(\gamma)$. To znači da $\alpha(\gamma)$ leži u skupu fiksnih točaka $\mathcal{N}$, iz čega sada slijedi da je $\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}\big(u(t), \alpha(\gamma)\big) = 0$.
Dakle, $y \in \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$, čime je teorem dokazan. □

U nastavku ćemo navesti još jedan bitan rezultat, bez dokaza, za atraktor sustava s konačnim brojem fiksnih točaka i Lyapunovom funkcijom. Prisjetimo se prvo nekih važnih definicija.

Definicija 6.7.

Neka je S *operator u Banachovom prostoru* X*. Operator* S *je* **Frechét-diferencijabilan** *u točki* $x \in X$ *ako postoji omeđen linearni operator* $S'(x): X \to X$ *takav da vrijedi*

$$\|S(y) - S(x) - S'(x)(y - x)\| \leq \gamma(\|x - y\|)\|x - y\|$$

za svaki y *iz neke okoline oko točke* x*, gdje* $\gamma(\xi) \to 0$ *kad* $\xi \to 0$.

Kažemo da je operator S *klase* $C^{1+\alpha}$*,* $0 < \alpha < 1$*, na skupu* Y *ako je diferencijabilan u svakoj točki* $x \in Y$ *i vrijedi*

$$\|S'(x) - S'(y)\|_{L(X,X)} \leq C\|x - y\|^{\alpha}$$

za svaki y *iz neke okoline oko točke* $x \in Y$*.*

Fiksnu točku z *preslikavanja* S *nazivamo* **hiperbolnom** *točkom ako je* $S \in C^{1+\alpha}$ *u nekoj okolini oko točke* z*, spektar linearnog operatora* $S'(z)$ *ne siječe jediničnu kružnicu* $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$ *i spektralni potprostor operatora koji odgovara skupu* $\{\lambda : |\lambda| > 1\}$ *je konačno dimenzionalan.*

Teorem 6.8.

Neka je X *Banachov prostor i neka je* (X, S_t) *neprekidan dinamički sustav sa svojstvima:*

1) *postoji globalni atraktor* A*;*
2) *postoji okolina* Ω *oko atraktora* A *takva da vrijedi*

$$\|S_t x - S_t y\| \leq Ce^{\alpha(t-\tau)}\|S_\tau x - S_\tau y\|$$

za svaki $t \geq \tau \geq 0$*, pod pretpostavkom da* $S_t x$ *i* $S_t y$ *pripadaju okolini* Ω *za svaki* $t \geq 0$*;*

3) *postoji Lyapunova funkcija neprekidna na* X*;*

4) skup fiksnih točaka $\mathcal{N} = \{z_1, \dots, z_N\}$ je konačan i sve su točke hiperbolne;

5) preslikavanje $(t, u) \to S_t u$ je neprekidno.

Tada za svaki kompaktan skup B iz X vrijedi ocjena

$$\sup\{\mathrm{dist}(S_t y, A) : y \in B\} \leq C_B e^{-\eta t}$$

za svaki $t \geq 0$, gdje $\eta > 0$ ne ovisi o B.

Za kraj ovog poglavlja promotrit ćemo konačno dimenzionalni primjer koji pokazuje kako Lyapunova funkcija može biti korištena pri dokazivanju egzistencije periodičke orbite u atraktoru.

Primjer 6.9.

Proučavajući Galerkinove aproksimacije u modelu kojeg je predložio E.Hopf za opis mogućih mehanizama pojava turbulencija, upotrijebit ćemo sljedeći sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} \dot{u} + \mu u + v^2 + w^2 = 0 & (1) \\ \dot{v} + \nu v - vu - \beta w = 0 & (2) \\ \dot{w} + \nu w - wu + \beta v = 0 & (3) \end{cases}$$

gdje je μ pozitivan parametar, a ν i β su realni parametri. Očito je da je Cauchyjev problem za $(1) - (3)$ rješiv, barem lokalno za bilo koji početan uvjet. Pokažimo da je dinamički sustav generiran jednadžbama $(1) - (3)$ disipativan. To će također biti dovoljno za dokaz globalne rješivosti. Uvedimo novu funkciju $u^* = u + \frac{\mu}{2} - \nu$. Tada gornji sustav poprima oblik:

$$\begin{cases} \dot{u}^* + \mu u^* + v^2 + w^2 = \mu\left(\frac{\mu}{2} - \nu\right) \\ \dot{v} + \frac{1}{2}\mu v - vu^* - \beta w = 0 \\ \dot{w} + \frac{1}{2}\mu w - wu^* + \beta v = 0 \end{cases}$$

Iz jednadžbi slijedi

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u^*|^2 + |v|^2 + |w|^2) + \mu|u^*|^2 + \frac{\mu}{2}(|v|^2 + |w|^2) = \mu\left(\frac{\mu}{2} - \nu\right)u^*.$$

Dakle, imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((|u^*|^2+|v|^2+|w|^2)\right)+\mu(|u^*|^2+|v|^2+|w|^2)\leq\mu\left(\frac{\mu}{2}-\nu\right)^2.$$

Prema tome,

$|u^*(t)|^2+|v(t)|^2+|w(t)|^2\leq$

$$\leq(|u^*(0)|^2+|v(0)|^2+|w(0)|^2)e^{-\mu t}+\left(\frac{\mu}{2}-\nu\right)^2\ (1-e^{-\mu t}).$$

Prvo, gornja nejednakost omogućava nam dokazivanje globalne rješivosti problema $(1)-(3)$ za bilo koji početni uvjet i, drugo, govori nam da je skup

$$B_0=\left\{(u,v,w):\ \left(u+\frac{\mu}{2}-\nu\right)^2+v^2+w^2\leq 1+\left(\frac{\mu}{2}-\nu\right)^2\right\}$$

apsorbirajući za dinamički sustav $(\mathbb{R}^3,S_t)$ generiran Cauchyjevim problemom za sustav $(1)-(3)$. Prema tome, Teorem 5.1. garantira nam egzistenciju globalnog atraktora A, koji je ovdje povezan, kompaktan skup u $\mathbb{R}^3$.

Primjer 6.10.

Kako bismo opisali strukturu globalnog atraktora A, uvodimo polarne koordinate

$$v(t)=r(t)\cos\varphi(t),\qquad w(t)=r(t)\sin\varphi(t)$$

u ravnini varijabli $\{v;w\}$. Jednadžbe $(1)-(3)$ iz Primjera 6.9. transformiramo u sustav

$$\begin{cases}\dot{u}+\mu u+r^2=0 & (4)\\ \dot{r}+\nu r-ur=0 & (5)\end{cases}$$

i s time da je $\varphi(t)=-\beta t+\varphi_0$. Sustav $(4),(5)$ ima stacionarnu točku $\{u=0,r=0\}$ za svaki $\mu>0$ i $\nu\in\mathbb{R}$. Ako je $\nu<0$ onda sustav $(4),(5)$ ima još jednu stacionarnu točku $\{u=\nu,r=\sqrt{-\mu\nu}\}$ koja odgovara periodičkoj orbiti originalnog problema $(1)-(3)$ iz Primjera 6.9.

Ako je $\nu > 0$, onda iz sustava $(4), (5)$ slijedi

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2 + r^2) + \min(\mu, \nu)(u^2 + r^2) \leq 0 \,.$$

Stoga, imamo

$$|u(t)|^2 + |r(t)|^2 \leq |u(0)|^2 + |r(0)|^2 e^{-2\min(\mu,\nu)t} \,.$$

Dakle, za $\nu > 0$ globalni atraktor A sustava $(\mathbb{R}^3, S_t)$ sadrži samo jednu stacionarnu točku $\{u = 0, v = 0, w = 0\}$.

Promotrimo sada slučaj kada je $\nu < 0$ ponovno na problemu $(4), (5)$. Jasno je da je pravac $r = 0$ stabilna mnogostrukost stacionarne točke $\{u = 0, r = 0\}$. Štoviše, očito je da ako vrijedi $r(t_0) > 0$, onda vrijednost $r(t)$ ostaje pozitivna za svaki $t > t_0$. Prema tome, funkcija

$$V(u, r) = \frac{1}{2}(u - \nu)^2 + \frac{1}{2}r^2 + \mu\nu \ln r \qquad (6)$$

definirana je na svim orbitama kojima početna točka ne leži na pravcu $\{r = 0\}$. Jednostavnim izračunom dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(V\big(u(t), r(t)\big)\Big) + \mu(u(t) - \nu)^2 = 0 \,; \qquad (7)$$

$$V(u, r) \geq V\big(\nu, \sqrt{-\mu\nu}\big) + \frac{1}{2}\Big(|u - \nu|^2 + \big|r - \sqrt{-\mu\nu}\big|^2\Big) ; \qquad (8)$$

stoga, $V(\nu, \sqrt{-\mu\nu}) = \frac{1}{2}\mu|\nu| \ln\left(\frac{e}{\mu|\nu|}\right)$. Jednakost (7) povlači da funkcija $V(u, r)$ ne raste duž orbita. Dakle, svaka poluorbita $\big\{\big(u(t); r(t)\big),\ t \in \mathbb{R}_+\big\}$ koja izlazi iz točke $\{u_0, r_0;\ r_0 \neq 0\}$ sustava $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, S_t)$ generirana sustavom $(4), (5)$ ima svojstvo $V\big(u(t), r(t)\big) \leq V(u_0, r_0)$ za $t \geq 0$. Također, jednakost (6) povlači da se takva orbita ne može približiti pravcu $\{r = 0\}$ na udaljenost manju od $e^{\frac{1}{\mu\nu}V(u_0, r_0)}$. Dakle, ova poluorbita teži prema $\bar{y} = \{u = \nu, r = \sqrt{-\mu\nu}\}$. Štoviše, $\bar{y}$ uniformno privlači svaki skup $B_\xi = \{y = (u, r) : V(u, r) \leq \xi\}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, odnosno, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $t_0 = t_0(\xi, \varepsilon)$ takav da je $S_t B_\xi \subset \{y :\ |y - \bar{y}| \leq \varepsilon\}$. Zaista, ukoliko to ne bi bilo istina, onda bi postojao $\varepsilon_0 > 0$, niz $t_n \to +\infty$ i $z_n \in B_\xi$ takvi da vrijedi

$|S_{t_n} - \bar{y}| > \varepsilon_0$. Monotonost od $V(y)$ i svojstvo (8) povlače da je

$$V(S_t z_n) \geq V(S_{t_n} z_n) \geq V(\nu, \sqrt{-\mu\nu}) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2$$

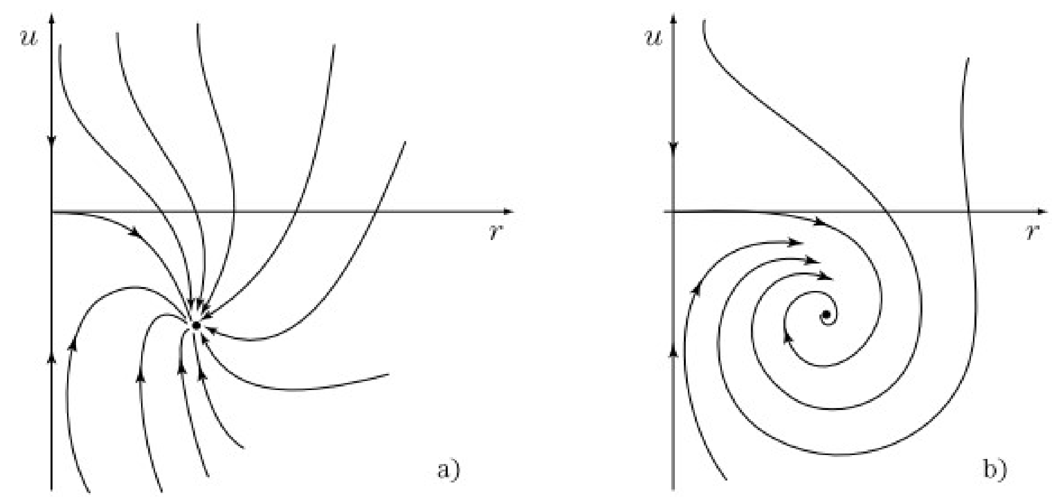
za svaki $0 \leq t \leq t_n$. Neka je z limes niza $\{z_n\}$. Tada prelaskom na limes dobivamo

$$V(S_t z) \geq V(\nu, \sqrt{-\mu\nu}) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2, \qquad t \geq 0$$

s time da $z \notin \{r = 0\}$. Stoga, zadnja je nejednakost nemoguća budući da $S_t z \to \bar{y} = \{u = \nu, r = \sqrt{-\mu\nu}\}$. Dakle,

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{\text{dist}(S_t y, \bar{y}) : y \in B_\xi\} = 0\,. \qquad (9)$$

Kvalitativno ponašanje rješenja problema $(4), (5)$ u poluravnini prikazano je na Slici 2.



Slika 2. Kvalitativno ponašanje rješenja problema $(4), (5)$:
a) $-\frac{\mu}{8} < \nu < 0$ b) $\nu < -\frac{\mu}{8}$

Neka sada $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ leži u globalnom atraktoru A sustava $(\mathbb{R}^3, S_t)$. Pretpostavimo da je $r_0 \neq 0$ i $r_0^2 = v_0^2 + w_0^2 \neq -\mu\nu$. Tada (prema Lemi 6.1.) postoji orbita $\gamma = \{y(t) = (u(t); v(t); w(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ na A takva da je $y(0) = y_0$. Lako se vidi da $y(t) \to C_\nu$, gdje je $C_\nu = \{u = \nu,\ v^2 + w^2 = -\mu\nu\}$, $\nu < 0$, stabilan ciklus sustava generiranog jednadžbama $(1) - (3)$ iz Primjera 6.9. (ideja stabilnosti: od orbita koje započinju blizu ciklusa očekujemo da se ne udaljavaju previše od ciklusa). Pokažimo da $y(t) \to 0$ kad $t \to -\infty$. Zaista, funkcija $V(u(t), r(t))$ je monotono neopadajuća kako $t \to -\infty$. Metodom kontradikcije i koristeći činjenicu da je $|y(t)|$ omeđen, lako dobivamo da vrijedi

$$\lim_{t\to-\infty} V\big(u(t), r(t)\big) = \infty$$

te stoga i

$$r(t) = (|v(t)|^2 + |w(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad \text{kad} \qquad t \to -\infty. \tag{10}$$

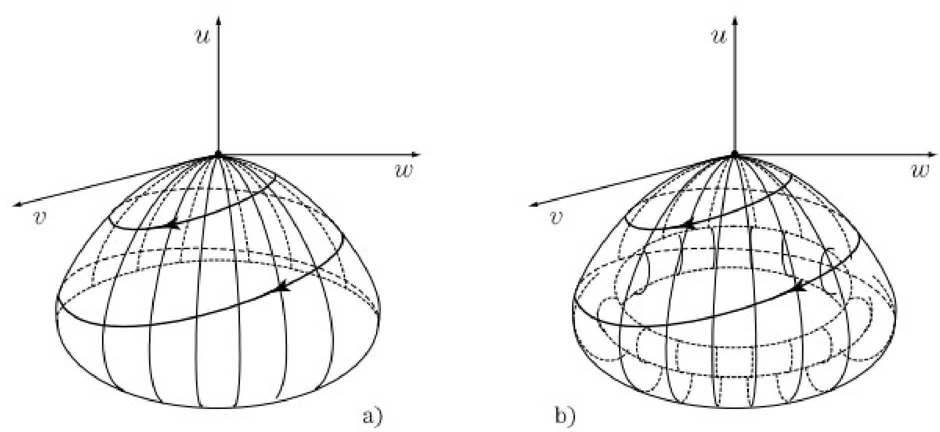
Jednakost (4) daje nam

$$u(t) = e^{-\mu(t-\tau)}u(s) - \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)}[r(\tau)]^2 d\tau\,. \tag{11}$$

Budući da je $u(s)$ omeđena za svaki $s \in \mathbb{R}$, puštanjem limesa kad $s \to -\infty$ u (11) dobivamo jednakost

$$u(t) = -\int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-\tau)}[r(\tau)]^2 d\tau\,.$$

Slijedom toga i svojstva (10) zaključujemo da $u(t) \to 0$ kad $t \to -\infty$. Stoga, $y(t) \to 0$ kad $t \to -\infty$. Dakle, za $\nu < 0$ globalni atraktor A sustava $(\mathbb{R}^3, S_t)$ podudara se s unijom nestabilne mnogostrukosti $\mathbb{M}_+(0)$ koja izlazi iz točke $\{u = 0, v = 0, w = 0\}$ i ciklusa sustava $C_\nu = \{u = \nu,\ v^2 + w^2 = -\mu\nu\}$. Atraktor A sustava generiranog jednadžbama $(1) - (3)$ iz Primjera 6.9. prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Atraktor sustava generiranog jednadžbama $(1) - (3)$ *iz Primjera 6.9.*

a) $-\frac{\mu}{8} < \nu < 0$ b) $\nu < -\frac{\mu}{8}$

Poglavlje 7

Svojstva stabilnosti atraktora i princip redukcije

U posljednjem poglavlju navest ćemo definicije stabilnosti, asimptotske stabilnosti te Poissonove stabilnosti i proučiti uvjete potrebne da bi atraktor bio stabilan. Na samom kraju navest ćemo i dokazati, prema I.D. Chueshovu [1], važan tehnički rezultat – Princip redukcije.

Definicija 7.1.

Pozitivno invarijantan skup M *u faznom prostoru dinamičkog sustava* (X, S_t) *je* **stabilan** *(u Lyapunovom smislu) u* X *ako svaka njegova okolina* $\mathcal{O}$ *sadrži neku okolinu* $\mathcal{O}'$ *tako da vrijedi* $S_t(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$ *za svaki* $t \geq 0$. *Kažemo da je* M **asimptotski stabilan** *ako je stabilan i ako vrijedi* $S_t y \to M$ *kada* $t \to \infty$, *za svaki* $y \in \mathcal{O}'$. *Skup* M *je* **uniformno asimptotski stabilan** *ako je stabilan i ako vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{\operatorname{dist}(S_t y, M) : y \in \mathcal{O}'\} = 0\,. \tag{1}$$

Teorem 7.2.

Neka je A *kompaktan globalni atraktor neprekidnog dinamičkog sustava* (X, S_t). *Ako postoji njegova omeđena okolina* U *takva da je preslikavanje* $(t, u) \to S_t u$ *neprekidno na* $\mathbb{R}_+ \times U$, *onda je* A *stabilan skup.*

Dokaz.

Neka je $\mathcal{O}$ okolina od A. Tada postoji $T > 0$ takav da je $S_t U \subset \mathcal{O}$ za $t \geq T$. Pokažimo da postoji okolina $\mathcal{O}'$ atraktora A takva da vrijedi $S_t \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ za svaki $t \in [0, T]$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje nizovi $\{u_n\}$ i $\{t_n\}$ takvi da $\operatorname{dist}(u_n, A) \to 0$, $t_n \in [0, T]$ i $S_{t_n} u_n \notin \mathcal{O}$. Kako je skup A kompaktan, možemo pronaći podniz $\{n_k\}$ takav da $u_{n_k} \to u \in A$ kad $t_{n_k} \to t \in [0, T]$. Nadalje, iz svojstva neprekidnosti funkcije $(t, u) \to S_t u$ slijedi $S_{t_{n_k}} u_{n_k} \to S_t u \in A$, što je u kontradikciji sa $S_{t_n} u_n \notin \mathcal{O}$. Dakle, postoji $\mathcal{O}'$ takva da je $S_t \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ za $t \in [0, T]$. Možemo odabrati T takav da vrijedi $S_t(\mathcal{O}' \cap U) \subset \mathcal{O}$ za $t \geq 0$, što povlači da je atraktor A stabilan, čime je tvrdnja dokazana. □

Napomena 7.3.

Očito je da stabilnost globalnog atraktora povlači uniformnu asimptotsku stabilnost.

U narednom dijelu rada razmatrat ćemo stabilnost atraktora u odnosu na perturbacije dinamičkog sustava. Pretpostavimo da imamo familiju dinamičkih sustava (X, S_t^λ) s istim faznim prostorom X i polugrupom S_t^λ koja ovisi o parametru λ koji varira u potpunom metričkom prostoru Λ.

Teorem 7.4.

Neka dinamički sustav (X, S_t^λ) sadrži kompaktan globalni atraktor A^λ za svaki $\lambda \in \Lambda$. Ako vrijedi:

a) postoji kompaktan skup $K \subset X$ takav da je $A^\lambda \subset K$ za svaki $\lambda \in \Lambda$;

b) ako $\lambda_k \to \lambda_0$, $x_k \in A^{\lambda_k}$ i $x_k \to x_0$, onda $S_{t_0}^{\lambda_k} \to S_{t_0} x_0$ za neki $t_0 > 0$,

onda je familija atraktora A^λ odozgo poluneprekidna u točki λ_0, odnosno,

$$h\left(A^{\lambda_k}, A^{\lambda_0}\right) \equiv \sup\left\{\operatorname{dist}\left(y, A^{\lambda_0}\right) : y \in A^{\lambda_k}\right\} \to 0 \quad \text{kad} \quad \lambda_k \to \lambda_0. \qquad (2)$$

Dokaz.

Pretpostavimo da jednakost (2) ne vrijedi. Tada postoji nizovi $\lambda_k \to \lambda_0$ i $x_k \in A^{\lambda_k}$ takvi da je $\operatorname{dist}(x_k, A^{\lambda_0}) \geq \delta$ za neki $\delta > 0$. No, kako niz x_k leži u kompaktu K, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $x_k \to x_0 \in K$ za neki $x_0 \notin A^{\lambda_0}$. Pokažimo da taj rezultat vodi ka kontradikciji. Neka je $\gamma_k = \{u_k(t) : -\infty < t < \infty\}$ orbita dinamičkog sustava (X, S_t^λ) koja prolazi elementom x_k $(u_k(0) = x_k)$. Tada postoje podniz $\{k(n)\}$ i niz elemenata $\{u_m\} \subset K$ takvi da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} u_{k(n)}(-mt_0) = u_m \quad \text{za svaki} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje je $u_0 = x_0$. Neka je $t_0 > 0$ fiksan. Uzastopnom primjenom uvjeta *b)* dobivamo

$$u_{m-l} = \lim_{n\to\infty} u_{k(n)}(-(m-l)t_0) = \lim_{n\to\infty} S_{lt_0}^{\lambda_{k(n)}} u_{k(n)}(-mt_0) = S_{lt_0}^{\lambda_0} u_m$$

Za svaki $m = 1, 2, \dots$ i $l = 1, 2, \dots, m$. Slijedi da funkcija

$$u(t) = \begin{cases} S_t^{\lambda_0} u_0, & t \geq 0, \\ S_{t+t_0 m}^{\lambda_0} u_m, & -t_0 m \leq t < -t_0(m-1), \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

daje orbitu γ koja prolazi točkom x_0. Očito je da je orbita γ omeđena, pa prema tome, cijela pripada skupu A^{λ_0}, što je u kontradikciji sa $x_0 \notin A^{\lambda_0}$. □

Napomena 7.5.

Primijetimo kako prethodni teorem obuhvaća samo slučaj neprekidnosti odozgo familije atraktora $\{A^\lambda\}$. Kako bismo dokazali potpunu neprekidnost, potrebno je uvesti dodatne uvjete na familiju dinamičkih sustava (X, S_t^λ).

Teorem 7.6.

Neka dinamički sustav (X, S_t^λ) sadrži globalni atraktor A^λ za svaki $\lambda \in \Lambda$. Neka vrijede sljedeći uvjeti:

a) postoji omeđen skup $B_0 \subset X$ takav da je $A^\lambda \subset B_0$ za svaki $\lambda \in \Lambda$ i vrijedi

$$h(S_t^\lambda B_0, A^\lambda) \leq C_0 e^{-\eta t}, \qquad \lambda \in \Lambda \tag{3}$$

gdje su $C_0 > 0$ i $\eta > 0$ konstante neovisne o λ i gdje je

$$h(B, A) = \sup\{\mathrm{dist}(b, A) : b \in B\};$$

b) za proizvoljne $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ i $u_1, u_2 \in B_0$ vrijedi ocjena

$$\mathrm{dist}\left(S_t^{\lambda_1} u_1, S_t^{\lambda_2} u_2\right) \leq C_1 e^{\alpha t}\left(\mathrm{dist}(u_1, u_2) + \mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2)\right) \tag{4}$$

gdje su C_1 i α konstante neovisne o λ.

Tada postoji $C_2 > 0$ takav da vrijedi

$$\rho(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_1}) \leq C_2[\mathrm{dist}(\lambda_1, \lambda_2)]^q, \quad q = \frac{\eta}{\eta + \alpha}. \tag{5}$$

ρ je Hausdorffova metrika definirana formulom

$$\rho\left(\,\cdot\,,\,\cdot\,\right) = max\{h(B,A); h(A,B)\}\,.$$

Dokaz.

Prema svojstvu simetrije relacije (5) dovoljno je pokazati da vrijedi

$$h\left(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}\right) \leq C_2[\mathrm{dist}(\lambda_1,\lambda_2)]^q\,. \tag{6}$$

Nejednakost (3) povlači da je za svaki $\varepsilon > 0$

$$.S_t^{\lambda}\,B_0 \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(A^\lambda\right) \qquad \text{za svaki} \qquad \lambda \in \Lambda \tag{7}$$

kad je $t \geq t^*(\varepsilon, C_0) \equiv \eta^{-1}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln C_0\right)$, a $\mathcal{O}_\varepsilon\left(A^\lambda\right)$ je ε-okolina skupa A^λ. Iz (4) slijedi:

$$h\left(S_t^{\lambda_1}\,B_0,\, S_t^{\lambda_2}\,B_0\right) = \sup_{x\in B_0}\ \inf_{y\in B_0}\ \mathrm{dist}\left(S_t^{\lambda_1}x, S_t^{\lambda_2}y\right) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in B_0}\ \mathrm{dist}\left(S_t^{\lambda_1}x, S_t^{\lambda_2}x\right) \leq C_1 e^{\alpha t}\mathrm{dist}(\lambda_1,\lambda_2). \tag{8}$$

Budući da je $A^\lambda \subset B_0$, imamo da je $A^\lambda = S_t^\lambda A^\lambda \subset S_t^\lambda B_0$. Stoga, uz $t \geq t^*(\varepsilon, C_0)$, relacija (7) daje nam

$$A^\lambda \subset S_t^\lambda B_0 \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(A^\lambda\right). \tag{9}$$

Za proizvoljne $x, z \in X$ vrijedi ocjena

$$\mathrm{dist}\left(x, A^\lambda\right) \leq \mathrm{dist}(x,z) + \mathrm{dist}\left(z, A^\lambda\right).$$

Dakle, dobivamo

$$\mathrm{dist}\left(x, A^\lambda\right) \leq \mathrm{dist}(x,z) + \varepsilon$$

Za svaki $x \in X$ i $z \in \mathcal{O}_\varepsilon\left(A^\lambda\right)$. Slijedom toga, relacija (9) povlači da je

$$\mathrm{dist}\left(x, A^\lambda\right) \leq \mathrm{dist}\left(x, S_t^\lambda B_0\right) + \varepsilon\,, \qquad x \in X$$

Za $t \geq t^*(\varepsilon, C_0)$, što znači da je

$$h\left(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}\right) = \sup_{x \in A^{\lambda_1}} \operatorname{dist}\left(x, A^{\lambda_2}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in A^{\lambda_1}} \operatorname{dist}\left(x,\, S_t^{\lambda_2}\, B_0\right) + \varepsilon \leq h\left(S_t^{\lambda_1}\, B_0,\, S_t^{\lambda_2}\, B_0\right) + \varepsilon\,.$$

Dakle, nejednakost (8) nam za svaki $\varepsilon > 0$ daje

$$h\left(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}\right) \leq C_1 e^{\alpha t} \operatorname{dist}(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon$$

Za $t \geq t^*(\varepsilon, C_0)$. Konačno, uzmemo li $\varepsilon = [\operatorname{dist}(\lambda_1, \lambda_2)]^q$, $q = \frac{\eta}{\eta + \alpha}$ i

$t = t^*(\varepsilon, C_0) \equiv \eta^{-1}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln C_0\right)$ i uvrstimo u posljednju nejednakost, dobivamo ocjenu (6), čime je tvrdnja teorema dokazana. □

U teoriji dinamičkih sustava važnu ulogu ima i pojam Poissonove stabilnosti. U zadnjem dijelu ovog rada navest ćemo još jedan bitan rezultat i na primjeru pokazati njegovu učinkovitost u primjenama, obzirom da nam omogućava značajno smanjivanje dimenzije faznog prostora i olakšava rad sa beskonačno dimenzionalnim sustavima.

Definicija 7.7.

Za orbitu $\gamma = \{u(t) : -\infty < t < \infty\}$ *dinamičkog sustava* (X, S_t) *kažemo da je* **Poisson stabilna** *ako pripada svom* ω*-graničnom skupu* $\omega(\gamma)$.

Napomena 7.8.

Očito je da su fiksne točke i periodičke orbite sustava Poisson stabilne.

Teorem 7.9. Princip redukcije

Neka u disipativnom dinamičkom sustavu (X, S_t) *postoji pozitivno invarijantan, lokalno kompaktan skup* M *sa svojstvom uniformnog privlačenja, odnosno, za svaki omeđeni skup* $B \subset X$ *vrijedi jednakost*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(S_t y, M) = 0\,. \qquad (10)$$

Neka je A *globalni atraktor dinamičkog sustava* (M, S_t). *Tada je* A *također globalni atraktor sustava* (X, S_t).

Dokaz.

Dovoljno je provjeriti da je

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in B} \operatorname{dist}(S_t y, A) = 0 \qquad (11)$$

za bilo koji omeđeni skup $B \subset X$. Pretpostavimo da postoji skup B takav da jednakost (11) ne vrijedi. Tada postoje nizovi $\{y_n\} \subset B$ i $\{t_n : t_n \to \infty\}$ takvi da je

$$\operatorname{dist}\left(S_{t_n} y_n, A\right) \geq \delta \qquad (12)$$

za neki $\delta > 0$. Neka je B_0 omeđen apsorbirajući skup sustava (X, S_t). Odabiremo trenutak t_0 takav da je

$$\sup\left\{\operatorname{dist}\left(S_{t_0} y, A\right) : y \in M \cap B_0\right\} \leq \frac{\delta}{2}. \qquad (13)$$

Ovaj je izbor moguć jer je A globalni atraktor od (M, S_t). Jednakost (10) povlači da vrijedi

$$\operatorname{dist}\left(S_{t_n - t_0} y_n, M\right) \to 0, \quad t_n \to \infty.$$

Zbog svojstva disipativnosti sustava (X, S_t), imamo da je $S_{t_n - t_0} y_n \in B_0$ kad je n dovoljno velik. Stoga, lokalna kompaktnost skupa M garantira nam egzistenciju elementa $z \in M \cap B_0$ i podniza $\{n_k\}$ takvih da je

$$z = \lim_{k\to\infty} S_{t_{n_k}} y_{n_k}.$$

To sada povlači da $S_{t_{n_k}} y_{n_k} \to S_{t_0} z$. Konačno, nejednakost (12) nam daje $\operatorname{dist}\left(S_{t_0} z, A\right) \geq \delta$, što je, obzirom na činjenicu da je $z \in M \cap B_0$, u kontradikciji sa nejednakošću (13), pa je teorem dokazan. □

Primjer 7.10.

Promotrimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} \dot{y} + y^3 - y = yz^2, & y|_{t=0} = y_0 \\ \dot{z} + z(1 + y^2) = 0, & z|_{t=0} = z_0 \end{cases} \qquad (14)$$

Očito je da za bilo koji početni uvjet (y_0, z_0) problem (14) ima jedinstveno rješenje na nekom intervalu $\big(0, t^*(y_0, z_0)\big)$. Ukolik prvu jednadžbu pomnožimo sa y, a drugu sa z i potom ih zbrojimo, dobivamo

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^2 + z^2) + y^4 - y^2 + z^2 = 0, \qquad t \in \big(0, t^*(y_0, z_0)\big)\,.$$

To povlači da funkcija $V(y, z) = y^2 + z^2$ ima svojstvo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\big(y(t), z(t)\big) + 2V\big(y(t), z(t)\big) \leq 2, \quad t \in \big[0, t^*(y_0, z_0)\big)\,.$$

Stoga, vrijedi

$$V\big(y(t), z(t)\big) \leq V(y_0, z_0)e^{-2t} + 1, \qquad t \in \big[0, t^*(y_0, z_0)\big)\,,$$

Što povlači da bilo koje rješenje problema (14) može biti prošireno na cijelu poluos $\mathbb{R}_+$ i da je dinamički sustav $(\mathbb{R}^2, S_t)$ generiran sustavom jednadžbi (14) disipativan. Očito je skup $M = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ pozitivno invarijantan, pa druga jednadžba iz (14) povlači da vrijedi

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z^2 + z^2 \leq 0, \quad t > 0\,.$$

Dakle, sada imamo $|z(t)|^2 \leq z_0^2 e^{-2t}$. Stoga, skup M eksponencijalno privlači sve omeđene skupove u $\mathbb{R}^2$, pa nam prema tome Princip redukcije daje da je globalni atraktor dinamičkog sustava (M, S_t) također i atraktor sustava $(\mathbb{R}^2, S_t)$. No, na skupu M sustav jednadžbi (14) reduciran je na diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{y} + y^3 - y = 0, \quad y|_{t=0} = y_0\,. \qquad (15)$$

Dakle, atraktori dinamičkih sustava generiranih sustavom (14) i jednadžbom (15) se podudaraju, pa je proučavanje dinamike u ravnini reducirano na ispitivanje svojstava jednodimenzionalnog dinamičkog sustava.

Bibliografija

[1] I.D. Chueshov, *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, ACTA, 2002.

[2] M. Braun, *Differential equations and their applications*, Springer Verlag, 1993.

[3] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Matematički odjel, PMF, Zagreb, 1994.

[4] M. Starčević, *Dinamički sustavi*, Matematički odjel, PMF, Zagreb, 2017.

Sažetak

Na početku rada, u poglavljima Uvod u dinamičke sustave i Orbite i invarijantni skupovi, obradili smo osnovne pojmove i u primjerima naveli neke dinamičke sustave. Definirali smo invarijantne i granične skupove, orbite, te važne vrste točaka sustava i njihova svojstva bitna za daljnje razumijevanje.

U sljedećem poglavlju definirali smo pojam atraktora i potom tu definiciju proširili uz dodatne uvjete na nekoliko različitih tipova atraktora, od kojih su najpoznatiji Milnorov i Ilyashenkov. Zatim smo pokazali odnos među njima i pripremili temelje za sljedeća razmatranja.

Nadalje, u četvrtom i petom poglavlju, proučavali smo apsorbirajuće skupove, objasnili pojam disipativnosti i kroz različite rezultate promatrali zahtjeve asimptotske kompaktnosti na atraktorima. Također, upoznali smo se s uvjetima za postojanje globalnog atraktora i njegovim svojstvima.

U šestom smo se poglavlju, Struktura globalnog atraktora, bavili pojmom nestabilnog skupa i njegovom ulogom u atraktoru, objasnili termin Lyapunove funkcije i primjerom pokazali njeno korištenje pri dokazivanju egzistencije periodičke orbite u atraktoru.

U posljednjem, sedmom poglavlju, obradili smo definicije stabilnosti, asimptotske stabilnosti te Poissonove stabilnosti i proučili uvjete potrebne da bi atraktor bio stabilan. Na samom kraju naveli smo i dokazali važan tehnički rezultat – Princip redukcije, koji nam omogućava smanjenje dimenzije faznog prostora, što je vrlo važna činjenica u proučavanju beskonačno dimenzionalnih sustava.

Summary

At the beginning of this thesis the themes Introduction to dynamic systems and Trajectories and invariant sets are dealt with, including a few examples of dynamic systems. Defined are invariant and limit sets, trajectories, together with important points of the systems and their characteristics which are crucial for further understanding.

The focus of the next chapter is on the concept of attractors, their definition being extended with additional conditions for a number of different types of attractors, Milnor's and Ilyashenkov's being the most famous. We then showed relations amnog them and introduced milestones for further considerations.

In the fourth and fifth chapters absorbing sets are examined, the concept of dissipativity is explained and asymptotic compactness on attractors is contemplated by way of different results. Furthermore, conditions for the existence of a global attractor and its characteristics are introduced.

The sixth chapter – The Structure of a Global Attractor – deals with the concept of unstable set and its role within an attractor, and the concept of Lyapun's function is explained, followed by an example of its use at proving the existence of periodic trajectories in an attractor.

In the final, seventh chapter, the definition of stability, asymptotic stability and Poisson's stability is addressed and conditions necessary for an attractor to be stable are examined. At the very end an important technical result - Reduction Principle - is quoted and proven because it enables us to decrease the dimension of the phase space, this fact being very important for the study of infinite-dimensional systems.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 1.11.1993. godine. 2000. godine započela sam svoje školovanje u Osnovnoj školi Medvedgrad u Zagrebu. Po završetku osnovne škole, 2008. godine, upisala sam X. gimnaziju „Ivan Supek“, a nakon toga, 2012. godine, Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon stjecanja titule univ.bacc.math, 2017. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.