

# Rekonstrukcija kutne raspodjele nuklearnih reakcija

---

Šako, Marin

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:671277>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-18**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Marin Šako

REKONSTRUKCIJA KUTNE RASPODJELE  
NUKLEARNIH REAKCIJA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Marin Šako**

Diplomski rad

**Rekonstrukcija kutne raspodjele  
nuklearnih reakcija**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Petar Žugec

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2019.

Prije svega, najviše zahvale dugujem svojem mentoru doc. dr. sc. Petru Žugecu jer mi je omogućio da radim ovaj diplomski rad s njim te jer me vodio kroz cijeli postupak diplomskog rada i najviše za sve vrijeme i strpljenje koje je imao za mene i moja pitanja. Zahvaljujem prijateljima Nevenu Tomičiću i Antoniju Supini za pomoć i savjete oko izrade i pisanja ovog diplomskog rada.

## Sažetak

Proučavajući procese koji se odvijaju u jezgrama atoma možemo dobiti razne informacije o strukturi samih atoma i jezgri, kao i o procesima te interakcijama koji pogone kako život na Zemlji tako i cijeli svemir.

U ovom diplomskom radu ćemo se prvenstveno baviti analizom podataka reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ . Želimo razviti metodu za rekonstrukciju kutne raspodjele nastalih protona. Oblik kutne raspodjele nam može ukazati na karakteristike i prirodu samih reakcija.

Predstaviti ćemo dvije metode rekonstrukcije kutne raspodjele, metodu direktne inverzije te metodu parcijalnih valova. Kod metode direktne inverzije sustav direktno invertiramo bez posebne parametrizacije kutne raspodjele, a kod metode parcijalnih valova pretpostavljamo da se kutna raspodjela može zapisati kao linearna kombinacija konačnog broja parcijalnih valova, odnosno Legendreovih polinoma te prilagodbom podataka dobijemo optimalan broj Legendreovih polinoma i iznose odgovarajućih koeficijenata.

Kako bismo imali potpunu kontrolu nad metodama testirat ćemo ih nad podacima koje dobijemo iz simulacije reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ , odnosno njenih izlaznih produkata. Na kraju samog diplomskog rada ćemo diskutirati i usporediti rezultate tih dviju metoda.

# Reconstruction of angular distribution in nuclear reactions

## Abstract

By studying processes which take place inside nucleus of the atom, or during nuclear reactions, we can extract all sorts of information about the structure of atoms and nuclei, processes and interactions that drive the life on Earth as well as the whole universe.

In this thesis we will primarily deal with data analysis of the  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  reaction. Our main goal is to develop a method for reconstructing the angular distribution of the created protons. The shape of angular distribution can suggest the nature of physical processes undergone during reactions.

We will present two methods for reconstructing the angular distribution, direct inversion method and partial waves method. In direct inversion method we fit the model to the data without any parameterization of the angular distribution. In partial waves method we assume that the angular distribution can be expressed as a linear combination of finite number of partial waves, that is Legendre polynomials. Then by fitting the data, we get the optimal number of Legendre polynomials and their respective coefficients.

In order to have complete control over the methods, we will simulate the products of  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  reaction and then test the methods on that simulated data.

In the final chapter we will compare and discuss the results that these two methods provide.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ekperimentalni postav simulacije</b>	<b>3</b>
2.1	Geometrijski postav detektora . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Simulacija eksperimentalnih podataka</b>	<b>3</b>
3.1	Energija nastalog protona . . . . .	6
3.2	Početni položaj generiranih protona . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Analiza podataka</b>	<b>10</b>
4.1	Učinkovitost detekcije za par detektorskih traka . . . . .	12
4.2	Detekcijska učinkovitost cijelog detektorskog sustava . . . . .	14
4.3	Rekonstrukcija kutne raspodjele . . . . .	14
4.3.1	Metoda direktne inverzije . . . . .	15
4.3.2	Metoda parcijalnih valova . . . . .	18
4.3.3	Funkcija dobrote . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Rezultati</b>	<b>21</b>
5.1	Metoda direktne inverzije . . . . .	22
5.2	Metoda parcijalnih valova . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>25</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>Metoda konstrukcije matrica <math>\mathcal{E}</math> i <math>\Gamma</math></b>	<b>27</b>
	<b>Literatura</b>	<b>28</b>



# 1 Uvod

Nuklearne reakcije inducirane neutronima su važne u raznim područjima istraživanja, od nuklearne fizike i astrofizike do primjene nuklearnih tehnologija u proizvodnji energije, medicine, fizici materijala, itd. Neutronske izazvane nuklearne reakcije na lakim jezgrama, poput ugljika, kisika i dušika su od posebne važnosti u medicini zbog njihove visoke zastupljenosti u ljudskom tijelu. Od posebne važnosti, u ovom kontekstu, su reakcije koje dovode do emisije nabijenih čestica. Među njima reakcija  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  (koja se odvija na energijama neutrona iznad praga od 13.6 MeV) [1] može utjecati na dozu radijacije u terapiji česticama ili konvencionalnoj radioterapiji ako tijekom terapije nastanu visokoenergetski sekundarni neutroni, s obzirom na to da  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  reakcija dovodi do emisije protona i elektrona prosječne energije 6.35 MeV [2], iz raspada  $^{12}\text{B}$ . Ova reakcija je također važna u izračunima za zaštitu od zračenja te za izradu kolimatora u akceleratorima.

Nedavno je u n\_TOF postrojenju (na CERN-u) predstavljen novi dizajn silicijskog teleskopa (SITE) za mjerenja neutronske inducirane reakcije s produktima nabijenim česticama [3]. On se sastoji od dva razdvojena i segmentirana sloja silicijskih traka. Svaki sloj se sastoji od 16 traka koje su jednako usmjerene među slojevima. Prvi sloj nazivamo  $\Delta E$ -sloj, a drugi E-sloj. Ovakav tip detektora omogućava diskriminaciju tipa čestica pomoću  $\Delta E$ -E koincidencija, kao i djelomičnu kutnu diskriminaciju. Mogućnosti silicijskog teleskopa u diskriminaciji tipa čestica su jasno pokazane [4] i već je uspješno korišten u zahtjevnom mjerenju reakcije  $^7\text{B}(n,p)$ . Silicijski teleskop sličnog dizajna [5] je također korišten za mjerenja u iznimno važnoj reakciji  $^7\text{B}(n,\alpha)$  [6].

Prije nekoliko godina, na n\_TOF postrojenju je napravljeno integralno mjerenje reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ , koristeći par tekućih  $\text{C}_6\text{D}_6$  scintilatora za detekciju  $\beta$  zraka nastalih raspadom  $^{12}\text{B}$  [7, 8]. Rezultati ovih mjerenja su bili iznenađujući jer se nisu slagali ni s jednim predviđanjem izrađenim na temelju prijašnjih skupova podataka. Više informacija o navedenim skupovima podataka moguće je naći u radovima [7–9]. Kako bismo razriješili ovu zagonetku naprednija mjerenja reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ , kao i  $^{12}\text{C}(n,d)^{11}\text{B}$  su predložena [9] i već realizirana na n\_TOF postrojenju, koristeći napredniju verziju silicijskog detektora kakav ćemo mi simulirati u ovom diplomskom radu.

U ovom diplomskom ćemo se prvenstveno baviti analizom reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ , odnosno analizom podataka koje dobijemo iz ove reakcije.  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  je neutronska inducirana neelastična reakcija, u kojoj neutron nailazi na  $^{12}\text{C}$  te nakon interakcije nastane  $^{12}\text{B}$  i oslobodi se jedan proton.

Glavni cilj ovog diplomskog rada je iz podataka koje ćemo dobiti simulacijom reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ , razviti metodu kojom ćemo biti u stanju rekonstruirati kutnu raspodjelu izlaznih protona. Razvit ćemo pojednostavnjenju verziju metode koja pretpostavlja monokromatski neutronska snop i u obzir uzima samo jedno stanje u jezgri kćeri (osnovno stanje  $^{12}\text{B}$ ). Kako bismo metodu mogli testirati u kontroliranim uvjetima, odnosno kako bismo imali kontrolu nad podacima, cijeli eksperiment ćemo simulirati.

U drugom poglavlju ćemo detaljno pogledati geometrijski postav detektora i same simulacije. Nakon toga, u trećem poglavlju, ćemo se baviti izračunima energije, količine gibanja i ostalih fizikalnih veličina bitnih za ovu reakciju te implementacijom kinematike reakcije. U četvrtom poglavlju ćemo malo detaljnije pogledati podatke koje dobijemo iz simulacije te ćemo se baviti njihovom obradom i analizom. Također ćemo detaljno opisati i izvesti dvije metode rekonstrukcije kutne raspodjele. I konačno u petom poglavlju ćemo analizirati i usporediti rezultate tih dviju metoda.

## 2 Eksperimentalni postav simulacije

U okviru ovog diplomskog rada simuliramo izlazne produkte nuklearne reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$ . Imamo uzorak ugljika na koji nalijeće snop neutrona promjera 5 cm. Kao rezultat nuklearne reakcije nastaju jezgre  $^{12}\text{B}$  te protoni.

*Simulirani eksperimentalni* postav se sastoji od uzorka ugljika  $^{nat}\text{C}$ , eliptičnog oblika zakrenutog za kut od  $45^\circ$ , u odnosu na smjer snopa. Debljina tog uzorka je 0.25 mm, a visina i širina uzorka, odnosno velika i mala os elipse, su takve da snop neutrona u potpunosti prekrije uzorak.

Detektorski sustav čine dva silicijska teleskopa, jedan paralelno smjeru snopa, ispod uzorka i drugi paralelno uzorku, iznad uzorka.

### 2.1 Geometrijski postav detektora

Detektorski sustav čine dva silicijska teleskopa.

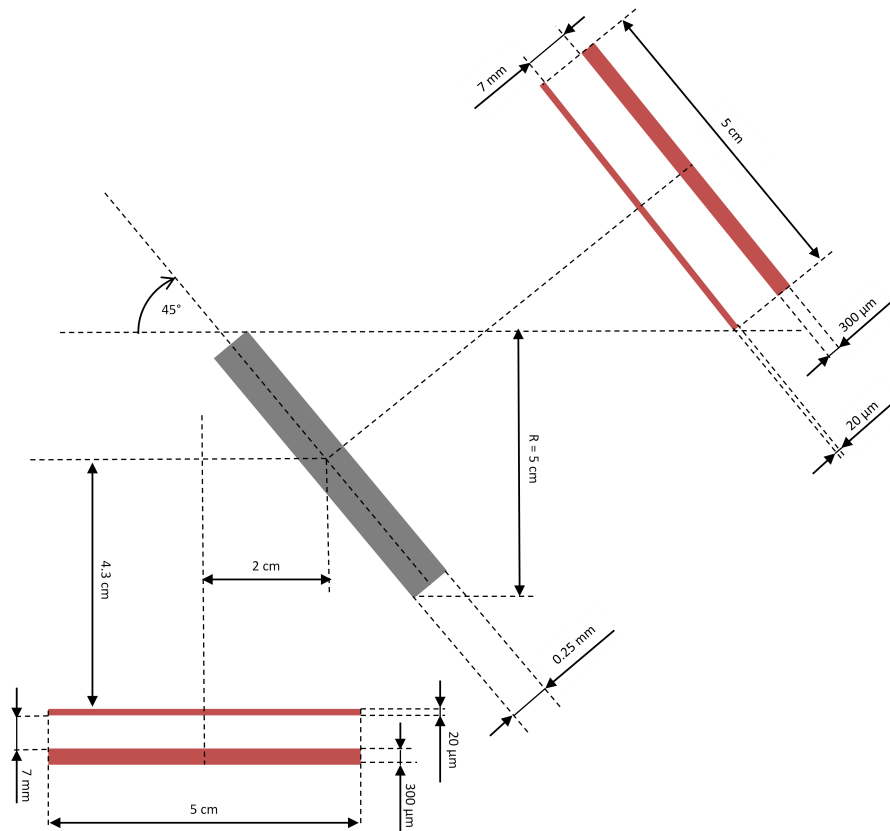
Prvi teleskop je postavljen paralelno u odnosu na uzorak, ali tako da je njegov donji rub u ravnini s gornjim rubom uzorka, tj. neutronske snop bismo dodirivao donji rub prvog teleskopa. Drugi teleskop je postavljen paralelno smjeru snopa. Razmak između ploča teleskopa iznosi 7 mm. Debljina  $\Delta E$ -ploče teleskopa iznosi  $20\ \mu\text{m}$ , a debljina E-ploče je  $300\ \mu\text{m}$ . Na slici 2.1 vidimo skicu geometrijskog postava uzorka i detektora. Slike 2.2, 2.3 i 2.4 prikazuju pogled na eksperimentalni postav iz izometrijske perspektive, s x-osi, te sa z-osi.

Ploče teleskopa su kvadrati dimenzija  $5\ \text{cm} \times 5\ \text{cm}$ . Svaka ploča je sačinjena od 16 aktivnih silicijskih traka koje su međusobno razdvojene trakama pasivnog silicija. Aktivni siliciji je onaj koji može detektirati česticu, a pasivni nema sposobnost detekcije čestica. Na slici 2.5 je prikazana skica jednog sloja silicijskog teleskopa.

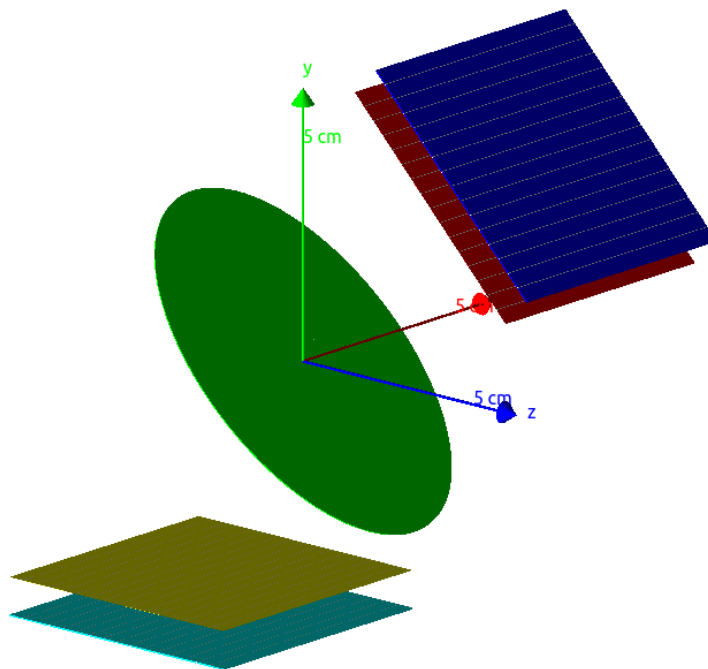
Ovakvim detektorskim pločama, podijeljenim u trake, želimo postići lakše praćenje smjera nastalog protona, iz čega ćemo kasnije moći rekonstruirati kutne raspodjele u reakciji.

## 3 Simulacija eksperimentalnih podataka

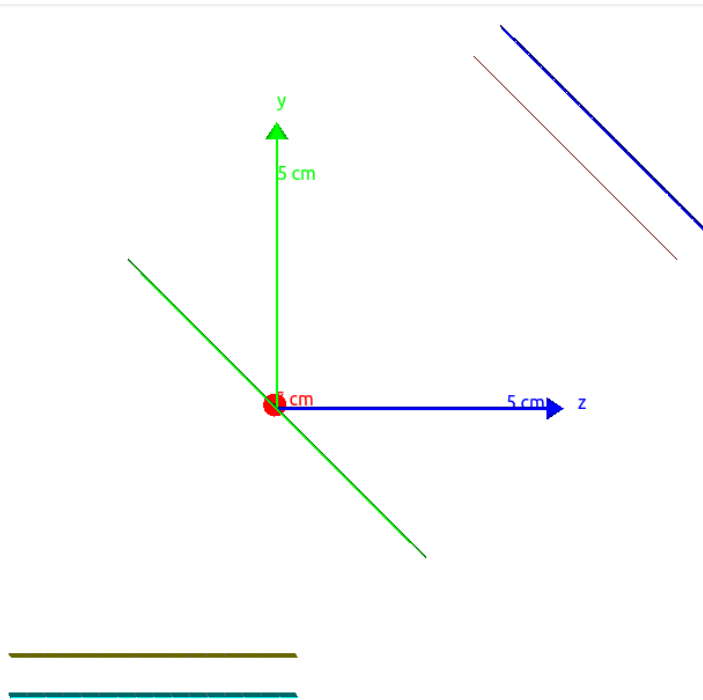
Simulaciju nuklearne reakcije radimo pomoću programskog paketa Geant4 [10], razvijenog u CERN-u.



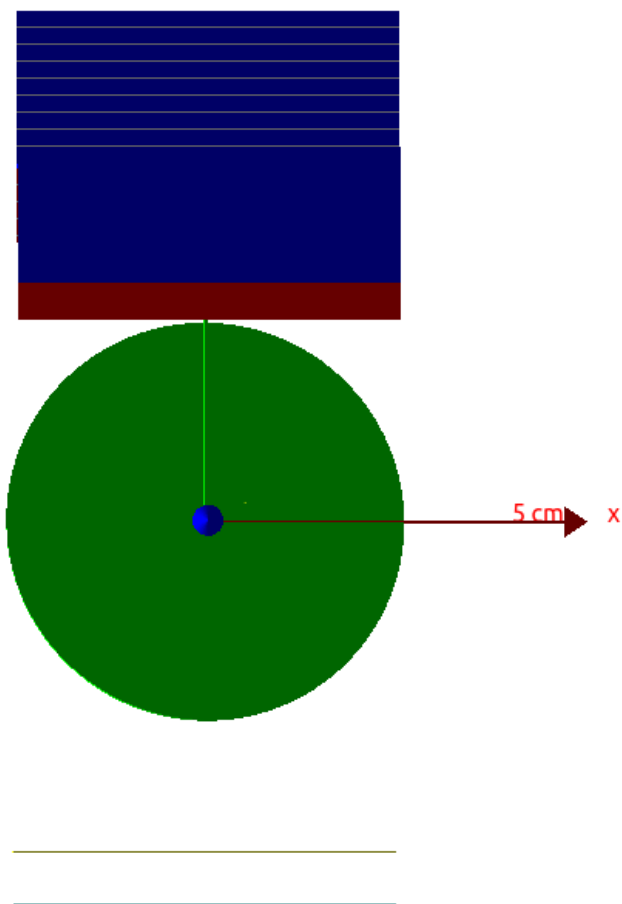
Slika 2.1: Skica geometrijskog postava.



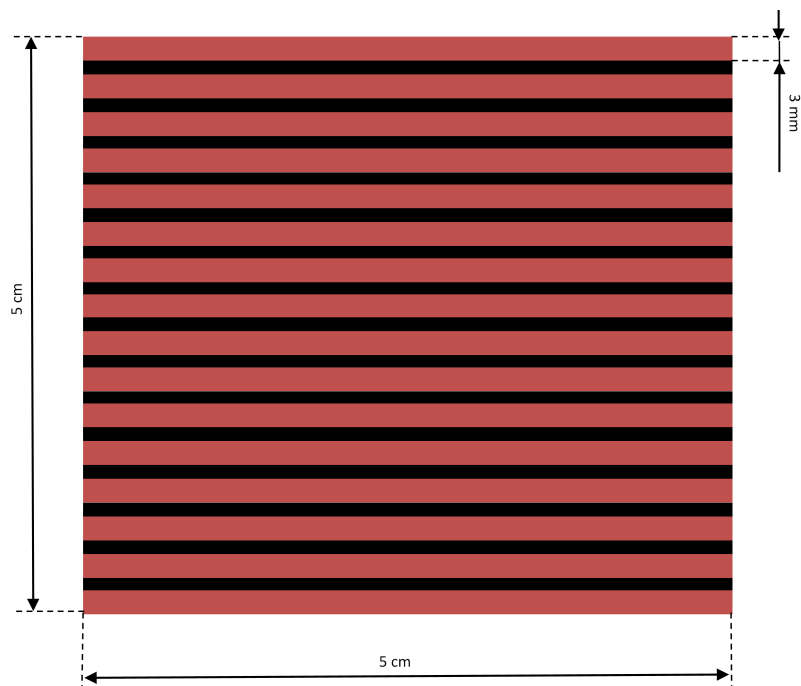
Slika 2.2: Izometrijski pogled na postav.



Slika 2.3: Pogled na postav s x-osi.



Slika 2.4: Pogled na postav sa z-osi.



Slika 2.5: Skica jedne detektorske ploče. Crvene trake su trake aktivnog silicija i ima ih 16, a crno su trake pasivnog silicija.

U simulaciji nećemo generirati snop neutrona na uzorak ugljika, zato jer detalje reakcije smatramo nepouzdanima ili neadekvatno implementiranima u simulaciji.

Ono što možemo napraviti jest u simulaciji preskočiti generiranje neutrona i samu reakciju te krenuti od izlaznih produkata reakcije. U tom slučaju moramo implementirati kinematiku reakcije, za koju bi se inače pobrinuo Geant4 [10].

U simulaciji ćemo protone emitirati izotropno u sustavu centra mase. Na temelju razlike između eksperimentalnih (ili emuliranih) rezultata i onih dobivenih pod pretpostavkom izotropne distribucije rekonstruirat ćemo pozadinsku kutnu raspodjelu u pozadini eksperimentalnih (emuliranih) podataka.

### 3.1 Energija nastalog protona

Pogledajmo kako izračunati kinetičku energiju nastalog protona.

U laboratorijskom sustavu imamo mirujuću metu  $^{12}\text{C}$  na koju nalijeće snop neutrona kinetičke energije  $T_n^{\text{LAB}}$ . Kao rezultat reakcije nastaju  $^{12}\text{B}$  i proton.

Zanima nas kinetička energija protona.

Imamo:

$$E_n^{\text{LAB}} = T_n^{\text{LAB}} + m_n c^2 \quad (3.1)$$

$$E_C^{\text{LAB}} = m_C c^2 \quad (3.2)$$

gdje je  $E_i^{\text{LAB}}$  ukupna energija čestice  $i$ .

Kako bismo lakše riješili problem želimo transformirati energije u sustav centra mase jer je tamo po definiciji ukupna količina gibanja jednaka nuli.

Primjenjujemo Lorentzove transformacije, na svaku energiju posebno:

$$E_n^{\text{CM}} = \gamma(E_n^{\text{LAB}} - \beta p_n^{\text{LAB}} c) \quad (3.3)$$

$$E_C^{\text{CM}} = \gamma(E_C^{\text{LAB}} - \beta p_C^{\text{LAB}} c) = \gamma E_C^{\text{LAB}} \quad (3.4)$$

jer je  $p_C^{\text{LAB}} = 0$ , gdje je  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

Kako bismo dobili  $\beta$ , iskoristimo Lorentzovu transformaciju za količinu gibanja:

$$p^{\text{CM}} c = -\beta \gamma E^{\text{LAB}} + \gamma p^{\text{LAB}} c \quad (3.5)$$

Količina gibanja u sustavu centra mase je po definiciji jednaka nuli. Uz to i jednadžbu (3.5) dobijemo izraz za  $\beta$ .

$$\beta = \frac{p_{uk}^{\text{LAB}} c}{E_{uk}^{\text{LAB}}} = \frac{\sqrt{(E_n^{\text{LAB}})^2 - m_n^2 c^4}}{E_n^{\text{LAB}} + E_C^{\text{LAB}}} \quad (3.6)$$

Ukupna energija u sustavu centra mase prije reakcije je:

$$E^{\text{CM}} = E_C^{\text{CM}} + E_n^{\text{CM}} \quad (3.7)$$

Sada možemo iskoristiti zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije kako bismo izračunali kinetičku energiju nastalog protona.

Nakon reakcije ukupna energija u sustavu centra mase je jednaka zbroju energije  $^{12}\text{B}$  i energije protona te je također zbog zakona očuvanja energije jednaka energiji iz (3.7).

$$E^{\text{CM}} = E_B^{\text{CM}} + E_p^{\text{CM}} \quad (3.8)$$

U sustavu centra mase po definiciji vrijedi:  $\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$ , stoga vrijedi:

$$\vec{0} = \vec{p}_{uk}^{\text{CM}} = \vec{p}_B^{\text{CM}} + \vec{p}_p^{\text{CM}} \quad (3.9)$$

iz čega slijedi:

$$\vec{p}_B^{\text{CM}} = -\vec{p}_p^{\text{CM}} \quad (3.10)$$

$$|\vec{p}_B| = |\vec{p}_p| \quad (3.11)$$

Radi jednostavnosti zapisa, označimo iznose vektora bez strelica.

Pomnožimo (3.11) s  $c$  i kvadrirajmo dobivenu jednadžbu.

Time dobijemo:

$$(p_B c)^2 = (p_p c)^2 \quad (3.12)$$

Prisjetimo se relativističke relacije koja povezuje energiju, količinu gibanja i masu.

$$E^2 = (m c^2)^2 + (p c)^2 \quad (3.13)$$

Iskoristimo relaciju (3.13) u jednadžbi (3.12),

$$(E_B^{\text{CM}})^2 - m_B^2 c^4 = (E_p^{\text{CM}})^2 - m_p^2 c^4 \quad (3.14)$$

Iz (3.14) i (3.8) slijedi:

$$E_p^{\text{CM}} = \frac{(E^{\text{CM}})^2 + m_p^2 c^4 - m_B^2 c^4}{2E^{\text{CM}}} \quad (3.15)$$

Označimo s  $\theta_{\text{CM}}$  kut između  $\vec{p}_p^{\text{CM}}$  i  $\vec{p}_n^{\text{CM}}$  te izaberimo  $z$ -os tako da  $\vec{p}_n^{\text{CM}}$  leži na  $z$ -osi.

Tada je kut  $\theta_{\text{CM}}$  jednak kutu između  $\vec{p}_p^{\text{CM}}$  i  $z$ -osi.

Kosinus kuta  $\theta_{\text{CM}}$  u simulaciji generiramo slučajno u sustavu centra mase, iz uniformne raspodjele, u intervalu  $[-1, 1]$ .

Za  $\cos \theta_{\text{CM}}$  također vrijedi:

$$\cos \theta_{\text{CM}} = \frac{p_{p,z}^{\text{CM}}}{p_p^{\text{CM}}} \quad (3.16)$$

Iz (3.13) imamo:

$$p_p^{\text{CM}} c = \sqrt{(E_p^{\text{CM}})^2 - m_p^2 c^4} \quad (3.17)$$



Zatim iz (3.16) i (3.17) slijedi:

$$p_{p,z}^{\text{CM}} c = \cos \theta_{\text{CM}} \sqrt{(E_p^{\text{CM}})^2 - m_p^2 c^4} \quad (3.18)$$

Sada se možemo vratiti u laboratorijski sustav primjenjujući Lorentzovu transformaciju.

$$E_p^{\text{LAB}} = \gamma(E_p^{\text{CM}} + \beta p_{p,z}^{\text{CM}} c) \quad (3.19)$$

Uvrstimo izraz (3.18) u jednadžbu (3.19). Nakon malo sređivanja dobijemo ukupnu energiju nastalog protona u laboratorijskom sustavu.

$$E_p^{\text{LAB}} = \gamma E_p^{\text{CM}} \left( 1 + \beta \cos \theta_{\text{CM}} \sqrt{1 - \frac{m_p^2 c^4}{(E_p^{\text{CM}})^2}} \right) \quad (3.20)$$

U simulaciji nam treba kinetička energija protona. Nju ćemo dobiti tako da od ukupne energije oduzmemo masu mirovanja protona.

$$T_p^{\text{LAB}} = E_p^{\text{LAB}} - m_p c^2 \quad (3.21)$$

Za simulaciju nam također treba kosinus kuta  $\theta_{\text{LAB}}$  u laboratorijskom sustavu. Njega ćemo dobiti tako da transformiramo količinu gibanja iz laboratorijskog u sustav centra mase.

$$\cos \theta_{\text{LAB}} = \frac{p_{p,z}^{\text{LAB}}}{p_p^{\text{LAB}}} \quad (3.22)$$

Iskoristimo odgovarajuće Lorentzove transformacije kako bismo dobili  $p_{p,z}^{\text{LAB}}$  i  $p_p^{\text{LAB}}$ .

$$p_p^{\text{LAB}} c = +\beta \gamma E_p^{\text{CM}} + \gamma p_p^{\text{CM}} c \quad (3.23)$$

$$p_p^{\text{CM}} c = \sqrt{(E_p^{\text{CM}})^2 - m_p^2 c^4} \quad (3.24)$$

$$p_{p,z}^{\text{LAB}} c = +\beta \gamma E_p^{\text{CM}} + \gamma p_{p,z}^{\text{CM}} c \quad (3.25)$$

$$p_{p,z}^{\text{CM}} c = p_p^{\text{CM}} c \cos \theta_{\text{CM}} \quad (3.26)$$

Izraz (3.22) možemo proširiti s  $c$ . Tada dobijemo konačni rezultat za kosinus kuta  $\theta_{\text{LAB}}$  u laboratorijskom sustavu

$$\cos \theta_{\text{LAB}} = \frac{p_{p,z}^{\text{LAB}} c}{p_p^{\text{LAB}} c} \quad (3.27)$$

$T_p^{\text{LAB}}$  definira kinetičku energiju koju nosi proton, a smjer protona je definiran preko polarnih koordinata, kao  $\hat{r}_p = (\sin \theta_{\text{LAB}} \cos \phi, \sin \theta_{\text{LAB}} \sin \phi, \cos \theta_{\text{LAB}})$ , gdje je  $\sin \theta_{\text{LAB}} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{\text{LAB}}}$ , a  $\phi$  je generiran slučajno iz uniformne raspodjele u intervalu  $[0, 2\pi]$ . Kut  $\phi$  je jednak u oba sustava.

### 3.2 Početni položaj generiranih protona

Kako bismo pravilno simulirali protone koji nastaju u reakciji, moramo ih generirati unutar uzorka, i to tako da se u radijanom smjeru koordinate generiraju gausijanski, a u smjeru snopa koordinatu možemo generirati uniformno. To je tako jer je poprečni presjek neutronske snopa gausijanski, što znači da se najviše čestica nalazi u središtu snopa, pa se tako najviše protona mora generirati u središtu uzorka. U najopćenitijem slučaju, za generiranje koordinate u smjeru snopa bismo trebali uzeti u obzir interakciju neutrona s materijalom uzorka, odnosno atenuaciju snopa neutrona. To bi nam dalo da vjerojatnost generiranja eksponencijalno opada kako idemo dublje u uzorak, međutim kako je uzorak jako tanak takvu ovisnost možemo zanemariti.

Radialne koordinate položaja protona generiramo iz gausove raspodjele definirane s  $\mu = 0$  i  $\sigma = \frac{R}{3}$ , a z koordinatu iz uniformne raspodjele.

## 4 Analiza podataka

Sada kada imamo podatke iz simulacije možemo krenuti u analizu istih.

U simulaciji smo u tekstualnu datoteku ispisali određene podatke, poput iznosa depozirane energije u danu traku, kosinusa kuta pod kojim je emitiran proton u sustavu centra mase, početne energije protona itd. Najvažniji su nam kosinus kuta u sustavu centra mase, redni broj detekcije – jedinstveni redni broj protona koji je uzrokovao detekciju te jedinstvena oznaka detektorske trake koja je detektirala česticu. Na kosinusima kuta ćemo provoditi daljnje analize, a broj događaja i oznaka detektorske

trake će nam poslužiti da bismo uspostavili koincidencije između  $\Delta E$ -E slojeva.

U simulaciji smo generirali monokromatski snop neutrona energije 20 MeV, što se vidi na slici 4.1 ako pogledamo drugi stupac.

```

15 20 Si_1Z 0.273596 6.207 0.538132 0.426899
15 20 Si_2[ 5.54881 6.207 0.538132 0.426899
38 20 Si_1X 0.223567 6.60035 0.741527 0.669996
38 20 Si_2X 5.32749 6.60035 0.741527 0.669996
49 20 Si_1W 0.27347 6.571 0.726753 0.651855
49 20 Si_2W 5.37138 6.571 0.726753 0.651855
53 20 Si_1V 0.29179 6.81418 0.84731 0.802146
53 20 Si_2V 4.81989 6.81418 0.84731 0.802146
54 20 Si_1I 0.494315 4.60503 -0.4469 -0.563147
59 20 Si_1V 0.0113987 6.91232 0.894816 0.862795
89 20 Si_1E 0.676206 4.60433 -0.447398 -0.563576
89 20 Si_2D 1.39451 4.60433 -0.447398 -0.563576
105 20 Si_2F 3.56267 4.36383 -0.624917 -0.712211
114 20 Si_1L 0.321631 5.24932 -0.0147834 -0.164964
114 20 Si_2L 3.54256 5.24932 -0.0147834 -0.164964
117 20 Si_1Q 0.280384 6.98677 0.930439 0.90881
130 20 Si_1L 0.57754 5.16366 -0.0690237 -0.217901
130 20 Si_2L 1.43219 5.16366 -0.0690237 -0.217901
138 20 Si_1K 0.5012 4.79947 -0.310291 -0.442976
159 20 Si_1D 0.927223 4.31249 -0.664134 -0.743938
162 20 Si_1F 0.614166 4.60772 -0.444969 -0.561484
162 20 Si_2E 1.89808 4.60772 -0.444969 -0.561484
165 20 Si_1_ 0.474083 6.31199 0.593601 0.491785
165 20 Si_2_ 2.19537 6.31199 0.593601 0.491785
172 20 Si_1I 1.09769 4.83652 -0.284913 -0.420083
173 20 Si_1V 0.381194 6.77894 0.830095 0.780368
173 20 Si_2U 3.19074 6.77894 0.830095 0.780368
183 20 Si_2H 2.81802 4.78022 -0.323561 -0.454875
219 20 Si_1] 0.249637 6.40203 0.640471 0.547431
224 20 Si_1H 0.626531 4.42135 -0.58155 -0.676664
224 20 Si_2G 1.776 4.42135 -0.58155 -0.676664
238 20 Si_2N 2.92501 5.25903 -0.00868729 -0.15896
241 20 Si_1B 0.654481 4.18494 -0.76374 -0.822766
253 20 Si_1_ 0.294877 5.78168 0.303727 0.164044
253 20 Si_2_ 2.99264 5.78168 0.303727 0.164044
259 20 Si_1\ 0.289946 6.12182 0.492462 0.374258
259 20 Si_2\ 4.32731 6.12182 0.492462 0.374258
273 20 Si_2] 5.34883 6.67219 0.777423 0.714395

```

Slika 4.1: Dio ispisa podataka. S lijeva na desno, stupci su: redni broj detekcije, početna kinetička energija neutrona, oznaka detektorske trake, ukupna deponirana energija, početna kinetička energija protona, z komponenta početne količine gibanja protona, kosinus kuta protona u centru mase

Na slici 4.1 vidimo da se uglavnom u parovima pojavljuju *Si\_1* i *Si\_2*. To je tako jer u većini slučajeva proton dođe do prve ploče, prođe kroz nju te na drugoj ploči aktivira neku od susjednih traka. Ovo je ključni dio u obradi podataka jer  $\Delta E$ -E koincidencije uklanjaju najveći dio pozadinskog šuma.

Može dogoditi da se u paru pojave dvije trake iz prve ploče. To se događa za

niskoenergijske protone koji se pod velikim kutem rasprše u jednoj traci te se ne probiju kroz prvu ploču nego završe u susjednoj traci u prvoj ploči. Nije nemoguće da proton aktivira čak tri trake.

Primijetimo da su početna kinetička energija protona, z komponenta početne količine gibanja te kosinus kuta jednaki za sve događaje koji imaju isti redni broj događaja. Tu se radi o detekcijama jednog te istog protona u različitim detektorskim trakama. Ovo nam omogućuje da zahvaljujući rednom broju događaja znamo koje trake je aktivirao isti proton.

#### 4.1 Učinkovitost detekcije za par detektorskih traka

Pogledajmo brojeve detekcija za parove detektorskih traka.

Kosinus kuta (koji je u intervalu  $[-1, 1]$ ) ćemo podijeliti na proizvoljan broj kutnih odjeljaka. Širina kutnih odjeljaka može biti jednaka, ali ne mora. Mi ćemo radi jednostavnosti cjelokupni kutni interval podijeliti na  $n$  jednakih odjeljaka. Želimo znati koliko je događaja detektirano u svakom od kutnih odjeljaka, za svaki par detektorskih traka posebno, tj. svaki par traka će imati pripadajući histogram.

Važno za napomenuti je da se radi o kosinusima kuta pod kojim je emitiran proton u sustavu centra mase, a ne o kosinusima kuta pod kojim je proton upao na detektor.

Promotrimo detekcijsku učinkovitost,  $(i,j)$ -para detektorskih traka, odnosno vjerojatnost da  $(i,j)$ -par detektira česticu.

Neka je  $d\mathcal{N}(\chi)$  ukupan broj protona emitiranih pod kutem  $\chi$ , a  $dN_{i,j}(\chi)$  broj protona emitiranih pod kutem  $\chi$  i detektiranih parom  $(i,j)$ . Definiramo:

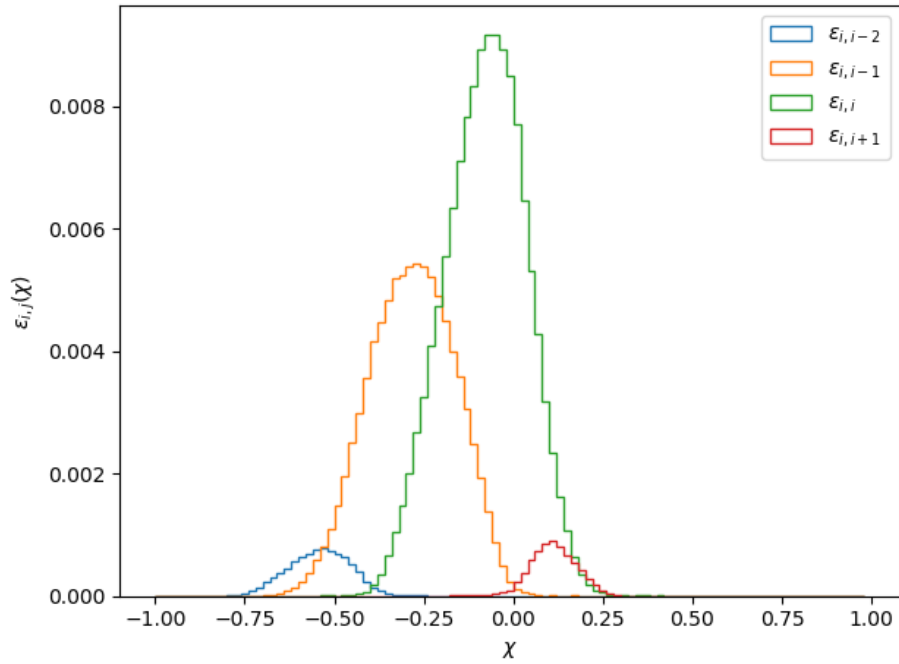
$$\epsilon_{i,j}(\chi) \equiv \frac{dN_{i,j}(\chi)}{d\mathcal{N}(\chi)} \quad (4.1)$$

gdje je  $\epsilon_{i,j}(\chi)$  upravo učinkovitost detekcije protona emitiranih pod kutem  $\chi$ , parom  $(i,j)$ .

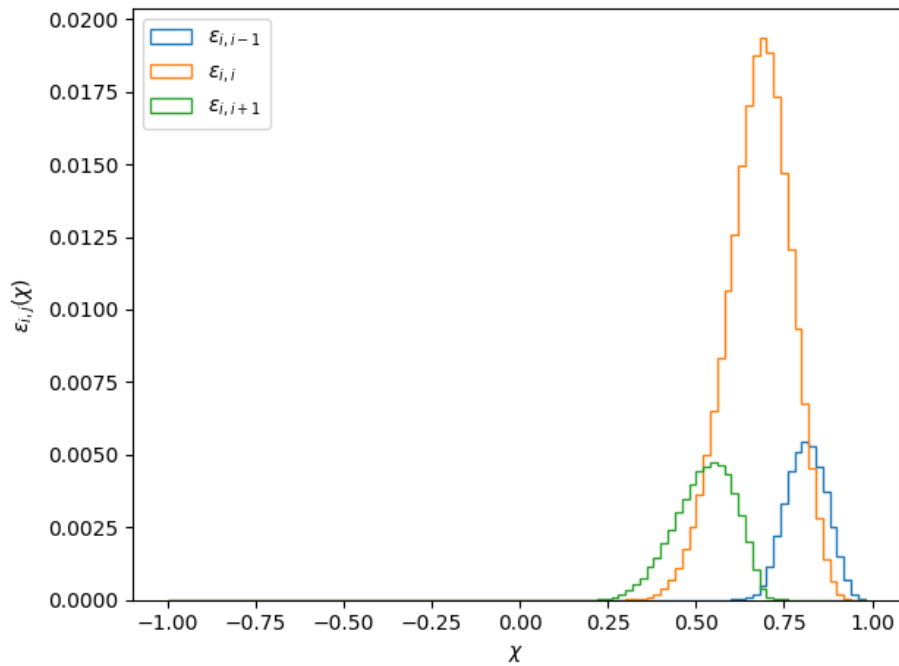
Na slici 4.2 su prikazane detekcijske učinkovitosti za parove  $(i,i-2)$ ,  $(i,i-1)$ ,  $(i,i)$  i  $(i,i+1)$  iz stražnjeg teleskopa, pri čemu par isovrsnih indeksa  $(i,i)$  predstavlja nasuprotne trake iz  $\Delta E$  i  $E$  sloja.

Na slici 4.3 su prikazane detekcijske učinkovitosti za parove  $(i,i-1)$ ,  $(i,i)$  i  $(i,i+1)$  iz prednjeg teleskopa.

Primijetimo da parovi na slici 4.2 pokrivaju stražnje kuteve, a dok parovi na slici



Slika 4.2: Detekcijske učinkovitosti za proizvoljno izabranu ( $i$ -tu)  $\Delta E$ -traku u koincidenciji s nekoliko najbližih E-traka (stražnji teleskop).

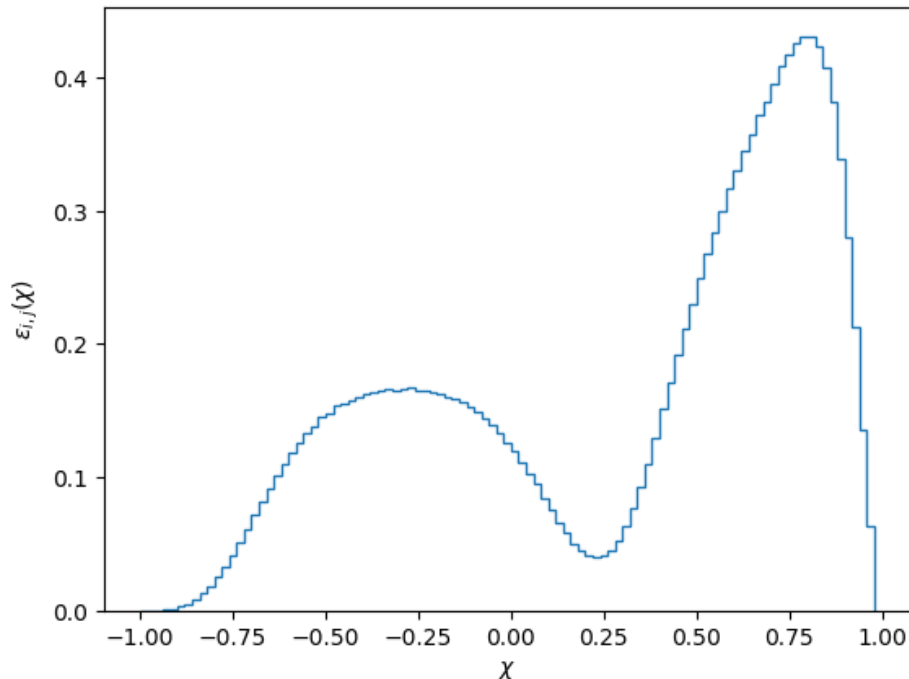


Slika 4.3: Detekcijske učinkovitosti za proizvoljno izabranu ( $i$ -tu)  $\Delta E$ -traku u koincidenciji s nekoliko najbližih E-traka (prednji teleskop).

4.3 pokrivaju prednje kuteve, što je upravo odraz geometrijskog pozicioniranja dvaju teleskopa.

## 4.2 Detekcijska učinkovitost cijelog detektorskog sustava

Sada kada imamo zasebne histograme za svaki par detektorskih traka, možemo se pitati kako izgleda ukupna detekcijska učinkovitost za cijeli detektorski sustav.



Slika 4.4: Detekcijska učinkovitost za cijeli detektorski sustav.

Na slici 4.4 je prikazana detekcijska učinkovitost za cijeli detektorski sustav. Ovakav graf nam daje uvid u detektorski sustav kao cjelinu.

Možemo primijetiti da su najbolje pokriveni kosinusi kuteva u rasponu od  $[0.5, 1]$  koji odgovara prednjim kutevima, odnosno prednjem teleskopu te  $[-0.5, 0.0]$  koji odgovara stražnjim kutevima, odnosno stražnjem teleskopu. Također vidimo da je puno više događaja detektirano u prednjem teleskopu nego u stražnjim. To je zbog toga što se prema stražnjem detektoru protoni moraju probiti kroz deblji sloj materijala (samog uzorka) zbog nagiba uzorka od  $45^\circ$  s obzirom na smjer neutronske snop. Površina ispod potpunog histograma predstavlja ukupnu detekcijsku učinkovitost detektorskog sustava.

## 4.3 Rekonstrukcija kutne raspodjele

Kutnu raspodjelu ćemo rekonstruirati koristeći dvije metode, metodu direktne inverzije te metodu parcijalnih valova. Na kraju ćemo usporediti rezultate obje metode.

Za ukupan broj protona emitiranih pod kutem  $\chi$  vrijedi:

$$d\mathcal{N}(\chi) = \mathcal{N}_{tot} \cdot A(\chi) d\chi \quad (4.2)$$

gdje je  $\mathcal{N}_{tot}$  ukupan broj emitiranih protona, u cijeli prostorni kut.

Ako u izraz (4.1) uvrstimo u (4.2), dobijemo:

$$dN_{i,j}(\chi) = \mathcal{N}_{tot} \cdot \epsilon_{i,j}(\chi) A(\chi) d\chi \quad (4.3)$$

Neka je  $N_{i,j}$  ukupni broj događaja detektiran  $(i,j)$ -parom. Želimo sve  $N_{i,j}$  staviti u jedan vektor  $\vec{N}$  u svrhu kasnijeg dovođenja u matičnu formu. Svakom  $(i,j)$ -paru dodijelit ćemo jedinstven indeks  $\alpha$ , koji će zamijeniti dvostruki indeks  $(i,j)$ . Uvodimo jedinstveni indeks  $\alpha$  za svaki  $(i,j)$ -par, tj. (proizvoljno) konstruiramo neku bijekciju  $\alpha: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; (i,j) \mapsto \alpha$ .

Za potrebe analize podataka nužan nam je integralni oblik detektiranih čestica parom  $\alpha$ :

$$N_\alpha = \int_{-1}^1 \frac{dN_\alpha(\chi)}{d\chi} d\chi = \mathcal{N}_{tot} \int_{-1}^1 \epsilon_\alpha(\chi) A(\chi) d\chi \quad (4.4)$$

jer ukupan broj događaja mjerimo u eksperimentu.

### 4.3.1 Metoda direktne inverzije

Integral u izrazu (4.4) ćemo aproksimirati sumom:

$$\int_{-1}^1 d\chi \rightarrow \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} (\Delta\chi)_k \quad (4.5)$$

gdje je  $(\Delta\chi)_k$   $k$ -ti proizvoljno izabrani interval kosinusa kuta.

Izrazom (4.5) smo zapravo definirali potpuno proizvoljnu podjelu kuteva na diskretne odjeljke jer ne samo da je broj kutnih odjeljaka  $\mathcal{K}$  proizvoljan, nego i njihove širine ne moraju biti sve jednake međusobno.

Radi kratkoće zapisa definirajmo,  $X_k \equiv (\Delta\chi)_k$ .

Koristeći (4.5), izraz (4.4) postaje:

$$N_\alpha = \mathcal{N}_{tot} \sum_k \langle \epsilon_\alpha(\chi) A(\chi) \rangle_k X_k \quad (4.6)$$

gdje smo zbog diskretizacije morali prijeći na prosjeke unutar kutnih odjeljaka,

$$\langle \epsilon_\alpha(\chi)A(\chi) \rangle_k = \frac{1}{X_k} \int_{X_k} \epsilon_\alpha(\chi)A(\chi)d\chi \quad (4.7)$$

Sada ćemo prosjek umnoška aproksimirati umnoškom prosjeka, tj:

$$\langle \epsilon_\alpha(\chi)A(\chi) \rangle_k \approx \bar{\epsilon}_{\alpha,k} \cdot \bar{A}_k \quad (4.8)$$

gdje prosječne detekcijske učinkovitosti dobivamo direktno iz simulacija kao:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha,k} = \frac{N_{\alpha,k}}{\mathcal{N}_k} \quad (4.9)$$

gdje je  $N_{\alpha,k}$  broj protona detektiranih parom  $\alpha$  unutar  $k$ -tog kutnog odjeljka, a  $N_k$  broj protona emitiranih u  $k$ -ti kutni odjeljak.

Neka imamo ukupno  $\mathcal{R}$  relevantnih parova detektora, to su parovi čije podatke nismo odbacili, odnosno oni  $(i,j)$ -parovi koji su detektirali dovoljan broj događaja da ih smatramo statistički bitnima. To znači da možemo formirati skup od najviše  $\mathcal{R}$  jednadžbi, odnosno kutni raspon podijeliti na najviše  $\mathcal{R}$  intervala. Kutni interval ćemo podijeliti na  $\mathcal{K}$  intervala,  $\mathcal{K} \leq \mathcal{R}$ .

Sada se (4.6) svodi na:

$$N_\alpha = \mathcal{N}_{tot} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \bar{\epsilon}_{\alpha,k} \bar{A}_k X_k \quad (4.10)$$

Definiramo li:

$$\mathcal{E}_{\alpha,k} \equiv \bar{\epsilon}_{\alpha,k} X_k \quad (4.11)$$

$$\mathcal{A}_k \equiv \mathcal{N}_{tot} \bar{A}_k \quad (4.12)$$

možemo pisati:

$$N_\alpha = \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \mathcal{E}_{\alpha,k} \mathcal{A}_k \quad (4.13)$$

Očito smo dobili matricnu jednadžbu,

$$\vec{N} = \mathcal{E} \vec{\mathcal{A}} \quad (4.14)$$

Za  $\mathcal{K} = \mathcal{R}$  ovo je sustav od  $\mathcal{R}$  jednadžbi s  $\mathcal{R}$  nepoznanica, za koji postoji jedinstveno



rješenje, a za  $\mathcal{K} < \mathcal{R}$  imamo sustav s više jednadžbi s nego nepoznanica spreman za linearnu prilagodbu podataka, koji nalazi najbolje rješenje u smislu najmanjih kvadrata.

Ukupni broj emitiranih čestica  $\mathcal{N}_{tot}$  možemo dobiti iz uvjeta normalizacije kutne raspodjele:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \bar{A}_k X_k = 1 \quad (4.15)$$

koji vodi na:

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \mathcal{A}_k X_k = \mathcal{N}_{tot} \quad (4.16)$$

U izrazu (4.15) se krije slom metode direktne inverzije za detektorski sustav kakav mi imamo. Naime, kako bi ova metoda bila primjenjiva moramo prosumirati kutnu raspodjelu po svim kutnim odjeljcima. Međutim razmatrani detektorski sustav je takav da ne pokriva sve kuteve, te samim time nismo u mogućnosti provesti sumu definiranu izrazom (4.15). Na slici 4.4 možemo vidjeti da je detekcijska učinkovitost u području oko stražnjih kuteva jednaka nuli. Međutim, dovedimo metodu do kraja u nadi da bi mogla ukazati barem na oblik kutne raspodjele ako već ne apsolutnu normalizaciju podataka.

Kada bismo imali pokriveno sve kuteve, konačan skup podataka o kutnoj raspodjeli rekonstruirali bismo iz:

$$\bar{A}_k = \frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{N}_{tot}} = \frac{\mathcal{A}_k}{\sum_i \mathcal{A}_i X_i} \quad (4.17)$$

Članove  $\mathcal{A}_k$  možemo dobiti prilagodbom podataka na jednadžbu (4.14) jer vektor  $\vec{N}$  možemo dobiti direktno iz eksperimenta, a matricu  $\mathcal{E}$  znamo iz simulacija. U matrici  $\mathcal{E}$  su pohranjene informacije o fizikalnim interakcijama protona s materijalom.

Prilagodbu podataka radimo koristeći sljedeći izraz [12]:

$$\vec{A} = (\mathcal{E}^T \mathbf{V}^{-1} \mathcal{E})^{-1} \mathcal{E}^T \mathbf{V}^{-1} \cdot \vec{N} \quad (4.18)$$

gdje je  $\mathbf{V}$  matrica kovarijance ulaznih podataka, koja u našem slučaju ima jednostavan dijagonalni oblik. Umjesto matrice  $\mathbf{V}$  možemo radi jednostavnosti odmah računati njen inverz  $\mathbf{V}^{-1}$ , s obzirom na to da samu matricu  $\mathbf{V}$  ne koristimo nigdje.

$$\mathbf{V}_{ij} = N_i \delta_{ij} \Rightarrow \mathbf{V}_{ij}^{-1} = \frac{1}{N_i} \delta_{ij} \quad (4.19)$$

## Nepouzdanost rekonstruirane kutne raspodjele

Nepouzdanosti parametara prilagodbe podataka iznose [12],

$$(\Delta \mathcal{A}_k)^2 = (\boldsymbol{\mathcal{E}}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{E}})_{kk}^{-1} \quad (4.20)$$

Sada trebamo pažljivo izračunati nepouzdanosti  $\Delta \bar{A}_k$ .

Dakle:

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{A}_k)^2 &= \left( \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial A_k} \Delta A_k \right)^2 + \sum_{m \neq k} \left( \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial A_m} \Delta A_m \right)^2 \\ &= \left( \frac{\mathcal{N}_{tot} - X_k A_k}{(\mathcal{N}_{tot})^2} \Delta A_k \right)^2 + \sum_{m \neq k} \left( \frac{A_k}{(\mathcal{N}_{tot})^2} X_m \Delta A_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\mathcal{N}_{tot})^4} \left[ A_k^2 [(\Delta \mathcal{N}_{tot})^2 - (X_k \Delta A_k)^2] + (\Delta A_k)^2 (\mathcal{N}_{tot} - X_k A_k)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(\mathcal{N}_{tot})^4} \left[ (\mathcal{N}_{tot} \Delta A_k)^2 + (A_k \Delta \mathcal{N}_{tot})^2 - 2 \mathcal{N}_{tot} X_k A_k (\Delta A_k)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

### 4.3.2 Metoda parcijalnih valova

U ovoj metodi ćemo kutnu raspodjelu rastaviti na parcijalne valove, odnosno Legendrove polinome. Pretpostavljamo da se kutna raspodjela može napisati u obliku:

$$A(\chi) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} a_l P_l(\chi) \quad (4.22)$$

gdje je maksimalni dozvoljeni broj parcijalnih valova  $\mathcal{R}$ , odnosno  $\mathcal{L} < \mathcal{R}$ . Želimo razviti metodu kojom ćemo pronaći optimalni  $\mathcal{L}$  te sve koeficijente  $a_l$ .

Ako izraz (4.3) zapišemo u integralnom obliku te u njega uvrstimo (4.22) dobijemo:

$$N_\alpha = \mathcal{N}_{tot} \int_{-1}^1 \epsilon_\alpha(\chi) A(\chi) d\chi = \mathcal{N}_{tot} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} a_l \int_{-1}^1 \epsilon_\alpha(\chi) P_l(\chi) d\chi \quad (4.23)$$

pri čemu smo odmah napravili transformaciju  $(i, j) \mapsto \alpha$ .

Definiramo li:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha l} &\equiv \int_{-1}^1 \epsilon_\alpha(\chi) P_l(\chi) d\chi \\ \tilde{a}_l &\equiv \mathcal{N}_{tot} a_l \end{aligned} \quad (4.24)$$

dobijemo:

$$N_\alpha = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l \quad (4.25)$$

što je matricni sustav:

$$\vec{N} = \Gamma \vec{a} \quad (4.26)$$

Rješenje je dano izrazom [12]:

$$\vec{a} = (\Gamma^T \mathbf{V}^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{V}^{-1} \cdot \vec{N} \quad (4.27)$$

gdje je  $\mathbf{V}$  matrica kovarijance ulaznih podataka.

Ukupan broj emitiranih čestica možemo dobiti iz uvjeta normiranosti kutne raspodjele:

$$\int_{-1}^1 A(\chi) d\chi = 1 \implies \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} a_l \int_{-1}^1 P_l(\chi) d\chi = 1 \quad (4.28)$$

Iz ortogonalnosti Legendreovih polinoma<sup>1</sup> slijedi:

$$\int_{-1}^1 P_l(\chi) d\chi = \int_{-1}^1 P_l(\chi) P_0(\chi) d\chi = 2\delta_{l0} \quad (4.29)$$

Kombinirajući (4.28) i (4.29) dobijemo da je prvi član uvijek fiksna konstanta:  $a_0 = \frac{1}{2}$ , a onda iz toga slijedi:

$$\mathcal{N}_{tot} = 2\tilde{a}_0 \quad (4.30)$$

### Nepouzdanosti koeficijenata Legendreovih polinoma

Nepouzdanosti koeficijenata  $\tilde{a}_l$  računamo kao [12]:

$$(\Delta \tilde{a}_l)^2 = (\Gamma^T \mathbf{V}^{-1} \Gamma)_{ll}^{-1} \quad (4.31)$$

Međutim, sada nepouzdanosti  $\Delta a_l$  možemo dobiti vrlo jednostavno, jer vrijedi  $a_l = \frac{\tilde{a}_l}{2\tilde{a}_0}$ .

$$(\Delta a_l)^2 = \left( \frac{\partial a_l}{\partial \tilde{a}_l} \Delta \tilde{a}_l \right)^2 + \left( \frac{\partial a_l}{\partial \tilde{a}_0} \Delta \tilde{a}_0 \right)^2 = \left( \frac{1}{2\tilde{a}_0} \Delta \tilde{a}_l \right)^2 + \left( \frac{\tilde{a}_l}{2\tilde{a}_0^2} \Delta \tilde{a}_0 \right)^2 \quad (4.32)$$

<sup>1</sup>Po definiciji vrijedi:  $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ .

Sada lako dobijemo nepouzdanost rekonstruirane kutne raspodjele:

$$(\Delta A(\chi))^2 = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} (\Delta a_l P_l(\chi))^2 \quad (4.33)$$

### 4.3.3 Funkcija dobrote

Funkcija dobrote (poznata još kao *Loss* i *Cost* funkcija) je skupni naziv za klasu funkcija koje mjere *dobrotu*, predikcije, rekonstrukcije ili nekog sličnog numeričkog izračuna. To je neka funkcija  $\mathcal{L}(\hat{y}, y)$ , gdje je  $\hat{y}$  predikcija, rekonstruirana vrijednost ili nešto slično, a  $y$  prava, odnosno točna vrijednost ili željena vrijednost konvergencije metode.

Mi kao funkciju dobrote koristimo reducirani  $\chi^2$ , tj.  $\chi^2$  po stupnju slobode.

$$\chi_{\mathcal{L}}^2 = \frac{1}{\mathcal{R} - (\mathcal{L} + 1)} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{[\hat{N}_{\alpha}(\mathcal{L}) - N_{\alpha}]^2}{(\Delta N_{\alpha})^2} \quad (4.34)$$

gdje je  $\hat{N}_{\alpha}(\mathcal{L})$  rekonstruirani broj detekcija parom  $\alpha$ , odnosno vrijedi  $\hat{N}_{\alpha}(\mathcal{L}) = \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l$ .  $\hat{N}_{\alpha}(\mathcal{L})$  naravno ovisi o broju parcijalnih valova koji smo izabrali za rekonstruiranje.  $N_{\alpha}$  je broj detekcija parom  $\alpha$  koji dobijemo direktno iz simulacije ili eksperimenta. U obzir ćemo uzeti samo statističke nepouzdanosti za koje prema Poissonovoj stastici vrijedi  $(\Delta N_{\alpha})^2 = N_{\alpha}$ . Stoga imamo:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}}^2 &= \frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{[\hat{N}_{\alpha}(\mathcal{L}) - N_{\alpha}]^2}{N_{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{[\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l - N_{\alpha}]^2}{N_{\alpha}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Želimo minimizirati  $\chi_{\mathcal{L}}^2$ , odnosno naći vektor  $\vec{a}$  za koji  $\chi_{\mathcal{L}}^2$  postiže minimum.

Ispada da ovako definirana funkcija dobrote ipak nije u dovoljno dobra za naše potrebe. Problem je u tome što dolazi do tzv. pretjerane prilagodbe podataka (eng. *overfitting*). Ekstremni primjer pretjerane prilagodbe podataka je da na  $N$  točaka prilagođavamo polinomom  $N$ -tog stupnja. U ovoj metodi se nešto slično događa kada vrijedi  $\mathcal{L} \approx \mathcal{R}$ . Tada rekonstruiranoj kutnoj raspodjeli dozvoljavamo prevelik broj stupnjeva slobode. Korištenje reduciranog  $\chi^2$  bi trebalo spriječiti ovu pojavu. Kasnije će se ispostaviti  $\mathcal{R} \approx 60$ , dok za optimalni  $\mathcal{L}$  tipično očekujemo puno manju vrijednost. U takvim okolnostima faktor  $\frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1}$  počinje penalizirati broj parametara

tek za prevelike vrijednosti  $\mathcal{L}$ . Stoga moramo puno ranije penalizirati veliki broj slobodnih parametara.

Treba nam neki procjenitelj koji će mjeriti pouzdanost prilagodbe podataka, kako bismo mogli definirati konačni procjenitelj koji će u obzir uzeti i dobrotu i pouzdanost prilagodbe podataka. Oba ova procjenitelja su proizvoljna. Za procjenitelj pouzdanosti mi smo uzeli  $\Delta\chi_{\mathcal{L}}^2$ , odnosno nepouzdanost od  $\chi_{\mathcal{L}}^2$ .

$$(\Delta\chi_{\mathcal{L}}^2)^2 = \sum_{m=0}^{\mathcal{L}} \left( \frac{\partial\chi_{\mathcal{L}}^2}{\partial\tilde{a}_m} \Delta\tilde{a}_m \right)^2 \quad (4.36)$$

Raspišimo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_{\mathcal{L}}^2}{\partial\tilde{a}_m} &= \frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial\tilde{a}_m} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{(\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l - N_{\alpha})^2}{N_{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{2(\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l - N_{\alpha}) \cdot \Gamma_{\alpha m}}{N_{\alpha}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Uvrstimo li izraz (4.37) u (4.36) dobijemo:

$$(\Delta\chi_{\mathcal{L}}^2)^2 = \frac{1}{\mathcal{R} - \mathcal{L} - 1} \sum_{m=0}^{\mathcal{L}} \left( 2\Delta\tilde{a}_m \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{R}} \frac{\sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \Gamma_{\alpha l} \tilde{a}_l - N_{\alpha}}{N_{\alpha}} \Gamma_{\alpha m} \right)^2 \quad (4.38)$$

Kao konačnu funkciju dobrote smo uzeli  $\mathfrak{L} = \chi_{\mathcal{L}}^2 \cdot \Delta\chi_{\mathcal{L}}^2$ , odnosno želimo minimizirati  $\chi_{\mathcal{L}}^2 \cdot \Delta\chi_{\mathcal{L}}^2$ . Ovime tražimo svojevrsni kompromis između dobrote i nepouzdanosti prilagodbe podataka. Množenje  $\chi_{\mathcal{L}}^2$  s  $\Delta\chi_{\mathcal{L}}^2$  je jedan oblik regularizacije jer ovime ne dozvoljavamo da kutna raspodjela ima prevelik broj stupnjeva slobode, čime se onda smanjuje pretjerana prilagodba podataka.

## 5 Rezultati

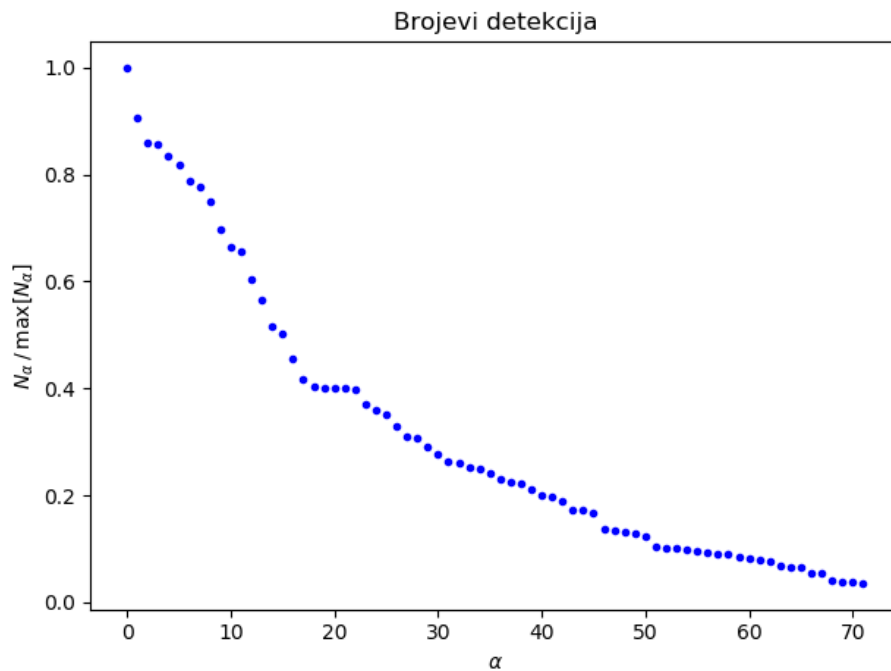
U ovome poglavlju ćemo pogledati i usporediti rezultate obje metode.

Detekcijske učinkovitosti su svojstvo detekcijskog sustava i kao takve su neovisne o kutnoj raspodjeli emitiranih protona. Kako za njihovo određivanje u simulacijama možemo koristiti bilo koju raspodjelu, koristili smo najjednostavniju: izotropnu.

Za konstrukciju testnog skupa podataka (umjetno generiranih brojeva  $N_{\alpha}$  detektiranih događaja) uzeli smo u obzir da u eksperimentu tipično možemo očekivati

raspodjelu koja veću vjerojatnost daje prednjim, a manju stražnjim kutevima. Na takvim podacima ćemo testirati metodu, te procijeniti valjanost rekonstrukcije. Za konstrukciju skupa  $N_\alpha$  koristili smo neku, u osnovi proizvoljnu anizotropnu kutnu raspodjelu.

Tako dobivene podatke ćemo dovesti na željenu razinu statistike. Zatim ćemo ih slučajno raspodijeliti prema Poissonovoj raspodjeli, kako bismo uveli statističke fluktuacije.



Slika 5.1: Statistički očekivani brojevi detekcija za anizotropnu raspodjelu, poredani po veličini.

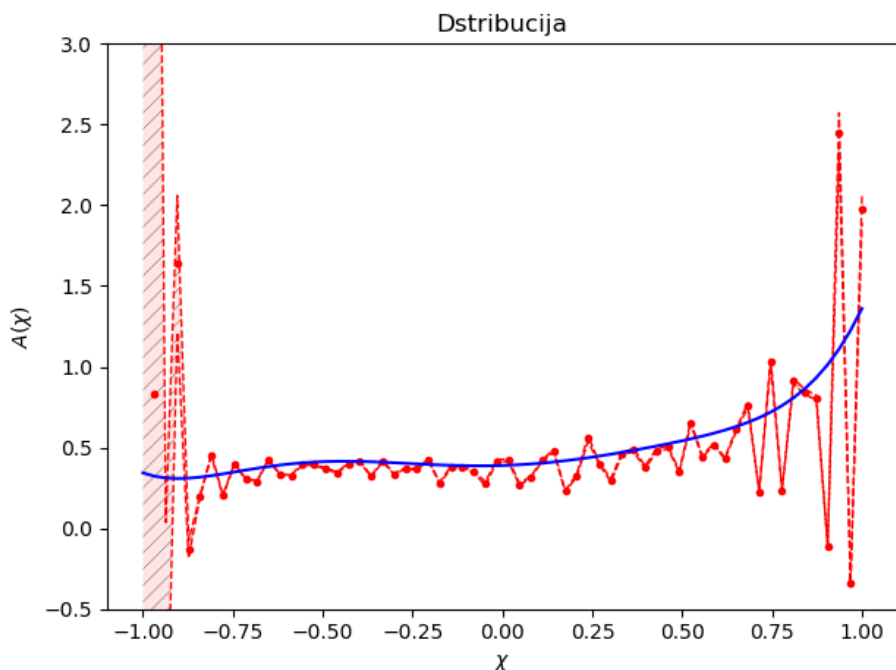
Na slici 5.1 su prikazani statistički očekivani brojevi detekcija za anizotropnu kutnu raspodjelu. Ovaj skup podataka nam služi kao osnovni skup podataka koji onda možemo po potrebi modificirati (reskalirati, uvoditi statističke fluktuacije i slično).

## 5.1 Metoda direktne inverzije

Pogledajmo rezultate koje smo dobili koristeći metodu direktne inverzije.

Kako bismo dobili rezultate koje ima smisla prikazati, kod ove metodu smo ulaznim podacima morali povećati razinu statistike tako da vrijedi  $\max[N_\alpha] \approx 3.5 \cdot 10^7$ .

Na slici 5.2 su prikazani rezultati metode direktne inverzije za anizotropnu raspo-



Slika 5.2: Rekonstruirana anizotropna raspodjela metodom direktne inverzije uz  $\max[N_\alpha] \approx 3.5 \cdot 10^7$

djelu uz  $\max[N_\alpha] \approx 3.5 \cdot 10^7$ . Vidimo referentnu raspodjelu označenu plavom bojom te rekonstruiranu raspodjelu označenu crvenom bojom. Crveno područje prošarano nakošenim crtama je nepouzdanost rekonstruirane raspodjele.

Primijetimo da u metodi direktne inverzije nepouzdanost poprima najveće vrijednosti na krajevima. To je bilo za očekivati jer razmatrani detektorski postav slabo pokriva te kuteve.

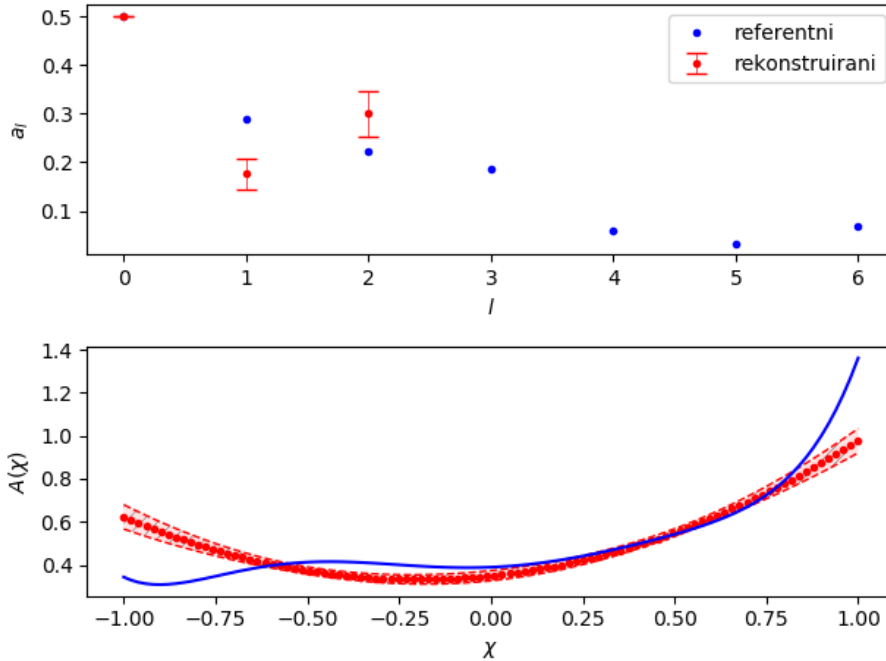
Ova metoda je možda na prvu privlačna zbog nedostatka ikakvih ograničenja na rješenje, međutim upravo to je njena najveća mana. Izostatkom ograničenja ne unosimo nikakvu dodatnu informaciju o kutnoj raspodjeli te joj dopuštamo da poprimi bilo koji oblik.

Upravo ovo je bila glavna motivacija za metodu parcijalnih valova jer pretpostavkom da se kutna raspodjela može raspisati kao linearna kombinacija konačnog broja parcijalnih valova unosimo dodatnu informaciju u model te ne dozvoljavamo raspodjeli da poprimi bilo kakav oblik. Restrikcija raspodjele na linearnu kombinaciju parcijalnih valova je svojevrsan oblik regularizacije, čime smanjujemo pretjeranu prilagodbu raspodjele na jedan određeni skup podataka.

## 5.2 Metoda parcijalnih valova

Pogledajmo rezultate metode parcijalnih valova.

U ovoj metodi smo kao ulazne podatke korsitili isti skup podataka, odnosno istu realizaciju poasonovskih fluktuacija kao kod direktne inverzije (slika 5.2) uz  $\max[N_\alpha] \approx 120$ .

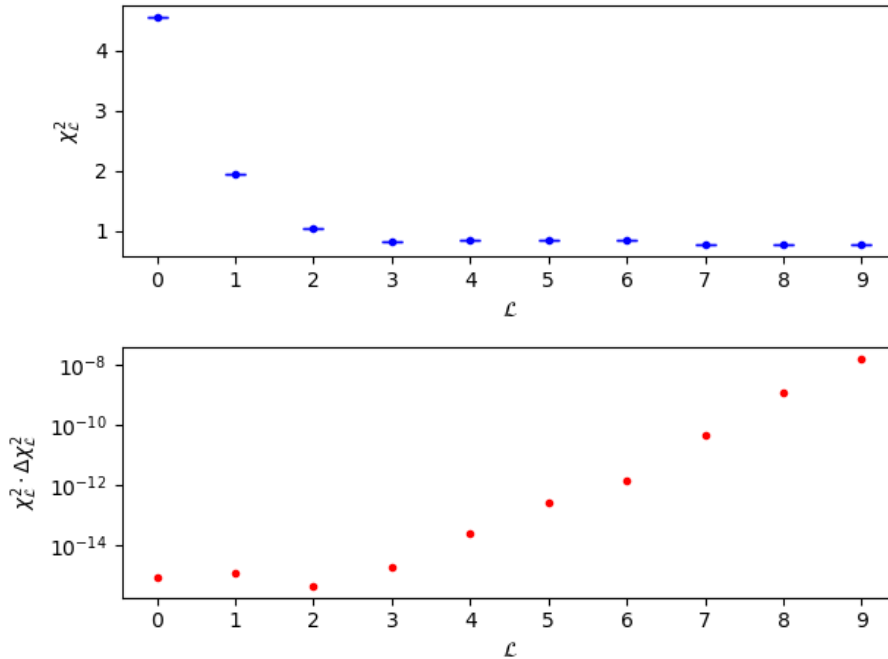


Slika 5.3: Rekonstruirana anizotropna raspodjela metodom parcijalnih valova

Na slici 5.3 vidimo rezultat rekonstrukcije anizotropne raspodjele metodom parcijalnih valova. U gornjem dijelu slike 5.3 su prikazani Legendreovi koeficijenti raspodjele. Plavom bojom su označeni Legendreovi koeficijenti koji definiraju referentnu raspodjelu, a crvenom bojom su označeni rekonstruirani Legendreovi koeficijenti te njihova nepouzdanost. U donjem dijelu slike vidimo rekonstruiranu kutnu raspodjelu označenu crvenom bojom, a plavom bojom je označena referentna raspodjela. Primjetimo da je kod metode parcijalnih valova bitno manja razina statistike (pet redova veličine manja!) polučila rezultate iste pa čak i bolje kvalitete.

Na slici 5.4 su prikazane  $\chi_{\mathcal{L}}^2$  vrijednosti u gornjem dijelu slike, te vrijednosti procjenitelja  $\chi_{\mathcal{L}}^2 \Delta \chi_{\mathcal{L}}^2$  za razne maksimalne stupnjeve parcijalnih valova  $\mathcal{L}$ . Vidimo da  $\chi_{\mathcal{L}}^2$  vrijednosti padaju kako se broj parcijalnih valova povećava. Međutim iznos nepouzdanosti  $\Delta \chi_{\mathcal{L}}^2$  se povećava kako  $\mathcal{L}$  raste. Definirajući procjenitelj kao  $\chi_{\mathcal{L}}^2 \Delta \chi_{\mathcal{L}}^2$  smo postigli da se procjenitelj sustavno povećava kada  $\mathcal{L}$  postane prevelik.





Slika 5.4:  $\chi_\ell^2$  i  $\chi_\ell^2 \Delta \chi_\ell^2$  vrijednosti za anizotropnu raspodjelu

## 6 Zaključak

U ovom diplomskom radu smo predstavili dvije metode rekonstrukcije kutne raspodjele u nuklearnim reakcijama. Kako bismo metode mogli detaljno testirati pod kontroliranim uvjetima simulirali smo izlazne produkte reakcije  $^{12}\text{C}(n,p)^{12}\text{B}$  te cijeli detektorski postav koji se sastoji od dva silicijska teleskopa. Pomoću teleskopa smo uspostavili koincidencije između detekcija, iz kojih smo zatim statističkom analizom rekonstruirali kutnu raspodjelu.

Vidjeli smo dvije metode rekonstrukcije kutne raspodjele, metodu direktne inverzije i metodu parcijalnih valova. Kod metode direktne inverzije sustav direktno invertiramo bez posebne parametrizacije oblika kutne raspodjele, a kod metode parcijalnih valova pretpostavljamo da se kutna raspodjela može zapisati kao linearna kombinacija konačnog broja Legendreovih polinoma te prilagodbom podataka dobijemo iznose koeficijenata Legendreovih polinoma i optimalan broj Legendreovih polinoma.

Iako je metoda direktne inverzije na prvi pogled privlačna zbog nedostatka ikakvih restrikcija na kutnu raspodjelu, ona nije u mogućnosti kvalitetno rekonstruirati niti najjednostavniju kutnu raspodjelu, čak i uz izrazito visoku razinu statistike. Nadalje, ova metoda je iznimno osjetljiva na statističke fluktuacije upravo zbog nedostatka ikakvih ograničenja na oblik kutne raspodjele. Osim toga metoda direktne

inverzije se temelji na pretpostavci da kutnu raspodjelu možemo normirati, za što moramo imati pokriven cjelokupni kutni interval. Korišteni eksperimentalni postav ne zadovoljava ovaj zahtjev, što ovu metodu čini neprimjenjivom.

Metoda parcijalnih valova daje bolje rezultate, međutim i dalje ostaje izazov kako pronaći optimalni broj parcijalnih valova, odnosno odabir dobrog procjenitelja koji će to raditi. U sklopu našeg problema optimizacija dobrote rekonstrukcije i njegove nepouzdanosti predstavlja dva suprotstavljena cilja, stoga smo za procjenitelj kvalitete rekonstrukcije izabrali umnožak reduciranog  $\chi^2$  i njegove nepouzdanosti  $\Delta\chi^2$ , kao kompromis između dobrote i pouzdanosti rekonstrukcije. Pri tome niže vrijednosti reduciranog  $\chi^2$  daju prednost dobroti rekonstrukcije, dok niže vrijednosti  $\Delta\chi^2$  daju prednost pouzdanosti rekonstrukcije.

# Dodaci

## Dodatak A Metoda konstrukcije matrica $\mathcal{E}$ i $\Gamma$

Iz (4.7) i (4.8) slijedi:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha,k} \equiv \frac{1}{X_k} \int_{X_k} \epsilon_{\alpha}(\chi) d\chi \quad (\text{A.1})$$

Podsjećamo da učinkovitosti određujemo iz simulacija, u kojima slobodno izabiremo kutnu raspodjelu  $\hat{A}(\chi)$  emitiranih protona. Pri tome s  $\hat{\cdot}$  označavamo sve u simulacijama proizvoljno izabrane veličine. Prema (4.1) integral po kutu možemo svesti na integral po broju događaja:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha,k} = \frac{1}{\hat{\mathcal{N}}_{tot} X_k} \int_{\hat{N}_{\alpha,k}} \frac{dN_{\alpha}(\chi)}{\hat{A}(\chi)} \quad (\text{A.2})$$

To nam omogućava da čitav integral izgradimo događaj po događaj:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha,k} = \frac{1}{\hat{\mathcal{N}}_{tot} X_k} \sum_{q=1}^{\hat{N}_{\alpha,k}} \frac{1}{\hat{A}(\chi_q)} \quad (\text{A.3})$$

gdje je  $\hat{N}_{\alpha,k}$  broj protona emitiranih unutar  $k$ -tog kutnog odjeljka i detektiranih parom  $\alpha$ . S obzirom na to da smo podatke simulirali koristeći uniformnu raspodjelu  $\hat{A}(\chi) = \frac{1}{2}$ , imamo:

$$\bar{\epsilon}_{\alpha,k} = \frac{1}{\hat{\mathcal{N}}_{tot} X_k} \sum_{q=1}^{\hat{N}_{\alpha,k}} 2 = \frac{2}{\hat{\mathcal{N}}_{tot} X_k} \hat{N}_{\alpha,k} \quad (\text{A.4})$$

Sasvim analogno, uvrštavanjem izraza (4.1) u definiciju matrice  $\Gamma$  iz (4.24), ponovno možemo dobiti integral po broju događaja:

$$\Gamma_{\alpha l} = \frac{1}{\hat{\mathcal{N}}_{tot}} \int_{\hat{N}_{\alpha}} \frac{P_l(\chi)}{\hat{A}(\chi)} dN_{\alpha} \quad (\text{A.5})$$

što na omogućava izgradnju integrala izravnim sumiranjem detektiranih događaja

$$\Gamma_{\alpha l} = \frac{2}{\hat{\mathcal{N}}_{tot}} \sum_{q=1}^{\hat{N}_{\alpha}} P_l(\chi_q) \quad (\text{A.6})$$

pri čemu smo odmah uvrstili  $\hat{A}(\chi) = \frac{1}{2}$ .

## Literatura

- [1] P. Žugec, et al. Integral measurement of the  $^{12}\text{C}(n, p)^{12}\text{B}$  reaction up to 10 GeV. The European Physical Journal A 52, (2016).
- [2] P. Žugec, et al. Measurement of the  $^{12}\text{C}(n, p)^{12}\text{B}$  cross section at n\_TOF at CERN by in-beam activation analysis. Physical Review C 90, (2014).
- [3] M. Barbagallo, J. Andrzejewski, M. Mastromarco, et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A 887 (2018) 27.
- [4] L. Damone, M. Barbagallo, M. Mastromarco, et al., Phys. Rev. Lett. 121 (2018) 042701.
- [5] L. Cosentino, A. Musumarra, M. Barbagallo, et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A 830 (2016) 197.
- [6] M. Barbagallo, A. Musumarra, L. Cosentino, et al., Phys. Rev. Lett. 117 (2016) 152701.
- [7] P. Žugec, N. Colonna, D. Bosnar, et al., Phys. Rev. C 90 (2014) 021601(R).
- [8] P. Žugec, N. Colonna, D. Bosnar, et al., Eur. Phys. J. A 52 (2016) 101.
- [9] P. Žugec, N. Colonna, D. Bosnar, et al., CERN-INTC-2017-081 / INTC-107 P-522 (2017).
- [10] GEANT4, (09.06.2019), <https://geant4.web.cern.ch/>, 12.12.2018.
- [11] GEANT4 User Documentation, (09.06.2019), [https://geant4.web.cern.ch/support/user\\_documentation](https://geant4.web.cern.ch/support/user_documentation), 12.12.2018.
- [12] Behnke, Olaf (ed.) ; Kröninger, Kevin (ed.) ; Schott, Grégory (ed.) ; Schörner-Sadenius, Thomas (ed.), Data Analysis in High Energy Physic. 1st ed. Weinheim : Wiley-VCH, 2013.