

# Problem stabilnosti Higgsove mase u SM-u i MSSM-u

---

**Grahovac, Petar**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:362303>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Petar Grahovac

PROBLEM STABILNOSTI HIGSSOVE MASE U  
SM-u I U MSSM-u

Diplomski rad

Zagreb, MMXIX

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

**Petar Grahovac**

Diplomski rad

**PROB. STABILNOSTI HIGSSOVE MASE  
U SM-u I U MSSM-u**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr Amon Ilakovac

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, MMXIX

Neizmjerno hvala profesoru Amonu Ilakovcu na cjelokupnoj ukazanoj pomoći prilikom izrade ovoga rada.

## Sažetak:

Tema obuhvaća u svom uvodnom dijelu kratak pregled svih elementarnih čestica, koje su prema *SM-u* podijeljene u dvije velike grupe: fermione i bozone. Osim samog uvoda u *SM-u* bilo je rečeno nešto najosnovnije i najbitnije o fermionima, česticama koje izgrađuju svu poznatu tvar u svemiru, i o bozonima, prenositeljima četiri, odnosno tri temeljne interakcije u prirodi između fermiona. Zatim su detaljno opisane sve najvažnije karakteristike *SM-a*, uključujući baždarne transformacije i interakcije, spontani lom simetrije i lagranžijan u *SM-u*, a onda je detaljno prikazan i Higgssov mehanizam u *SM-u* uz sve svoje karakteristike. Naredni dio teme je obuhvatio općenito gradivo o *Supersimetrijama*, te o *Minimalnom Supersimetričnom Standardnom Modelu (MSSM-u)*, te je na kraju predstavljen prikaz izračuna mase *Higgsovog bozona* uz pomoć petlji u oba modela.

Ključne riječi: *SM*, masa *Higgsovog bozona*, *Supersimetrije*, *MSSM*

# HIGGS MASS STABILITY PROBLEM IN THE SM AND IN THE MSSM

## Abstract:

The thesis covers in its introductory section a brief overview of all elementary particles, which according to the *Standard Model (SM)* are divided into two large groups: fermions and bosons. In addition to the introduction to the *SM*, it was said to be the most basic and most important thing about the fermions, particles that build all the known matter in the universe, and about the bosons, the mediators four or three fundamental interactions between the fermions. Then, all the most important characteristics of the *SM*, including gauge transformations and interactions, spontaneous breaking of the symmetry (SBS) and *lagrangian* in the *SM*, are described in detail, and then the *Higgs mechanism* in the *SM* is described in detail with all its features. The next part of the thesis covered general literature on the *Supersymmetries*, and the *Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM)*, and finally presented a calculation of the *Higgs boson mass* with the help of loops in both models.

Keywords : *Standard Model, Higgs boson mass, Supersymmetry, MSSM*

# SADRŽAJ:

1. Uvod.....	-1-
2. Standardni Model.....	-1-
2.1. <i>Elementi SM-a</i> .....	-2-
2.1.1. <i>Kvarkovi</i> .....	-5-
2.1.2. <i>Leptoni</i> .....	-6-
2.1.3. <i>Baždarni bozoni</i> .....	-7-
2.1.4. <i>Higgsov bozon</i> .....	-8-
2.2. <i>Teorija grupa i elementarne čestice</i> .....	-9-
2.3. <i>Formulacija SM-a</i> .....	-11-
2.3.1. <i>Lagranžijan SM-a</i> .....	-13-
2.3.1.1. <i>Kva. brojevi eleme. čestica SM-a</i> .....	-15-
2.4. <i>Razlozi za proširenje SM-a</i> .....	-20-
2.5. <i>Yang-Millsova teorija</i> .....	-21-
2.6. <i>Kvantizacija Yang-Millsove teorije</i> .....	-23-
2.7. <i>Baždarno fiksiranje u teorijama s slomljenom baždarnom simetrijom</i> .....	-26-
2.8. <i>Yang-Millsove (ne-Abelove) baždarne teorije za kvarkove i leptone</i> .....	-27-
3. Prenositelji interakcije.....	-33-
3.1. <i>Baždarni bozoni</i> .....	-33-
3.1.1. <i>Prenositelji elektromagnetske interakcije-fotoni</i> .....	-35-
3.1.2. <i>Prenositelji jake nuklearne interakcije-gluoni</i> .....	-36-
3.1.3. <i>Prenositelji slabe nuklearne interakcije- W i Z bozoni</i> .....	-37-
3.1.4. <i>Prenositelji gravitacijske interakcije-gravitoni</i> .....	-38-
4. Baždarne (i globalne) transformacije.....	-39-
5. Interakcije u Kvantnoj Teoriji Polja (QFT) i Feynmanovi dijagrami.....	-44-
6. Spontani lom simetrije.....	-51-
6.1. <i>Osnovni pojmovi</i> .....	-51-
6.2. <i>Spontani lom diskretne simetrije</i> .....	-53-

6.3. Spontani lom globalne simetrije.....	-55-
6.4. Spontani lom lokalne baždarne simetrije.....	-58-
<b>7. SM elektroslabih interakcija.....</b>	<b>-62-</b>
7.1. Uvod u teoriju elektroslabih interakcija.....	-62-
7.2. Definiranje SM-a.....	-65-
7.3. Lagranžijan SM-a i elektroslaba interakcija leptona.....	-66-
7.4. Lomljenje simetrije i unutarnje baždarenje.....	-70-
7.5. Generiranje masa baždarnih bozona.....	-71-
7.6. Nabijene i neutralne slabe struje.....	-75-
7.7. Feynmanova pravila u SM-u.....	-76-
<b>8. Uvod u Supersimetrije.....</b>	<b>-80-</b>
8.1. Uvod i motivacija.....	-80-
8.2. Hijerarhijski problem-stabilnosti slabe skale.....	-82-
8.3. Tri kvantitativna uputstva.....	-89-
8.4. Teorijska razmatranja.....	-90-
8.5. Kvadratna divergencija.....	-93-
8.6. Ujedinjenje baždarnog vezanja.....	-96-
8.7. Supersimetrični lagranžijan.....	-97-
8.7.1. Slobodni kiralni supermultiplet.....	-97-
8.7.2. Interakcije kiralnih supermultipleta.....	-101-
8.7.3. Lagranžijan s baždarnim supermultipletima.....	-104-
8.7.4. Kombinirani kiralni i baždarni supermultipleti.....	-106-
8.7.5. Gustoća lagranžijana za opći model.....	-107-
8.8. Supersimetrična QED.....	-108-
8.9. Supersimetrična QCD.....	-111-
8.10. SUSY interakcije između čestica.....	-114-
<b>9. MSSM.....</b>	<b>-119-</b>
9.1. Prvi primjer MSSM-a.....	-119-



9.2. Specifikacija superpotencijala.....	-121-
9.3. Objedinjavanje baždarnog vezanja u MSSM-u.....	-128-
9.4. R-paritet.....	-134-
9.5. Lagranžijan MSSM-a.....	-134-
9.6. Supersimetrije MSSM-a.....	-136-
<b>10. Renormalizacijske grupne tehnike.....</b>	<b>-137-</b>
10.1. Što predstavlja renormalizacija?.....	-138-
10.2. Renormalizacijske grupne jednačbe.....	-139-
10.3. Efektivne teorije polja.....	-139-
10.4. Renormalizacijske grupne invarijante.....	-141-
<b>11. Higgsov sektor i elektroslabi lom simetrije u MSSM-u.....</b>	<b>-146-</b>
11.1. Skalarni potencijal i uvjeti za elektroslabi lom.....	-146-
11.2. Mase skalarnih Higgsovih bozona u MSSM-u.....	-151-
<b>12. Prikaz i izračun raspada Higgsovog bozona u SM-u i MSSM-u.....</b>	<b>-153-</b>
12.1. Higgsov raspad na fermione.....	-153-
12.2. Higgsov raspad na baždarne bozone.....	-154-
12.3. Higgsov raspad na fotone i gluone: $H \rightarrow \gamma\gamma, gg$ .....	-155-
12.4. Nastanak Higgsovog bozona u $e^-e^+$ sudarima.....	-158-
12.5. Nastanak Higgsovog bozona u hadronskim sudarima.....	-159-
12.6. Vlastita energija Higgsovog bozona.....	-161-
12.7. Fermionske mase u MSSM-u.....	-164-
12.8. Vezanja Higgsovog bozona u MSSM-u.....	-165-
12.9. Radijativne korekcije u MSSM-u.....	-168-
<b>13. Zaključak.....</b>	<b>-175-</b>
<i>Dodaci</i>	
<b>A. Osnovna pravila u izračunu.....</b>	<b>-176-</b>
A.1. Vrhovi (verteksi) i propagatori.....	-176-

<i>A.2. Definiranje relacija za površinu udarnog presjeka i širinu raspada.....</i>	<i>-177-</i>
<i>A.3. Dirakologija: Kontrakcije i tragovi <math>\gamma</math> matrica.....</i>	<i>-178-</i>
<i>A.4. Izračun integrala na razini jedne petlje.....</i>	<i>-179-</i>
<b>B. Notacije i konvencije.....</b>	<b>-180-</b>
<i>B.1. Generatori u anti-fundamentalnim reprezentacijama.....</i>	<i>-180-</i>
<i>B.2. Bilinearni kvantiteti.....</i>	<i>-181-</i>
<i>B.3. Fierzovi identiteti.....</i>	<i>-183-</i>
<i>B.4. Parcijalni izvodi.....</i>	<i>-184-</i>
<b>C. Supersimetrična algebra.....</b>	<b>-184-</b>
<b>D. Superpolje.....</b>	<b>-185-</b>
<i>D.1. Klasično superpolje.....</i>	<i>-185-</i>
<i>D.2. Kiralna i antikiralna superpolja.....</i>	<i>-186-</i>
<b>E. Mase s-čestica u MSSM-u.....</b>	<b>-187-</b>
<i>E.1. Sfermioni.....</i>	<i>-187-</i>
<i>E.2. Skvarkovi.....</i>	<i>-187-</i>
<i>E.3. Chargini.....</i>	<i>-188-</i>
<i>E.4. Neutralini.....</i>	<i>-188-</i>
<b>14. Literatura.....</b>	<b>-189-</b>

## 1. Uvod

Ideja o osnovnim građevnim blokovima tvari stara je 2600 godina. U 6. stoljeću prije Krista, grčki je filozof Tales pokušao odrediti prapočelo svijeta, to jest ono iz čega je sve postalo i u šta se sve vraća, ne uplićući u to bogove i nadnaravna bića. Odgovor je našao u vodi kao počelu svega. Razlog tomu je nesumnjivo u nužnosti i važnosti vode u svakodnevnom životu svih živih bića. Kasnije su se, pored vode, osnovnim elementima smatrali zemlja, vatra i zrak. Krajem 5. stoljeća prije Krista, javlja se ideja da su svi fizički objekti izgrađeni od malih, nevidljivih opeka, koje su vječne i nepromjenjive. Ovu ideju je zastupao grčki filozof Demokrit. U svojoj ideji posebno je naglašavao da se ono od čega je sve izgrađeno ne može podijeliti na još manje dijelove. Te nedjeljive građevne elemente Demokrit je nazvao *atomima*, što u prijevodu i znači nedjeljiv. Smatrao je da su atomi čvrsti i masivni, te da postoji bezbroj različitih atoma u prirodi, jer kada se atomi ne bi razlikovali, ne bismo mogli objasniti kako se spajaju u posve različite fizičke objekte.

U 20. stoljeću pokazalo se da se atomi, koji su u 19. stoljeću od strane kemičara i fizičara smatrani osnovnim sastavnim blokovima tvari, zapravo sastoje od još manjih elemenata: *elektrona, protona i neutrona*. Daljnji eksperimenti su pokazali da se protoni i neutroni sastoje od još elementarnijih čestica – *kvarkova*. Jedna od glavnih tema fizike 20. stoljeća je bila nastavak drevnog zadatka: otkrivanje i razumijevanje temeljnih sastavnica tvari. Elektron, otkriven 1897. godine, je bio prva elementarna čestica, i, nakon sto godina dodavanja i brisanja “*elementarnih*” čestica, elektron je bio i ostao istinski elementaran. Postavlja se pitanje, što to neku česticu čini elementarnom? Jednostavno rečeno, elementarne čestice se ne sastoje od drugih čestica, odnosno elementarne čestice nemaju unutarnju podstrukturu. Elektron nije izgrađen od drugih manjih čestica, stoga je on elementaran.

## 2. Standardni Model (SM)

Prema *SM-u* trenutačno postoji 12 elementarnih čestica za koje se smatra da izgrađuju cjelokupnu tvar u svemiru. Tih 12 čestica zajedničkim imenom nazivaju se *fermioni*, a dijele se u dvije grupe od po šest čestica – *kvarkove i leptone*. Cilj fizike elementarnih čestica je ustvrditi identitet svih elementarnih čestica i načine na koje elementarne čestice međusobno interagiraju. Prema *SM-u* postoje četiri fundamentalne sile: *gravitacijska, elektromagnetska, slaba nuklearna i jaka nuklearna sila*, putem kojih šest leptona i šest kvarkova međusobno interagiraju razmjenom čestica prenositelja sila – *bozona*, odnosno *baždarnih (gauge) bozona*.

Pomoću dvanaest čestica koje izgrađuju tvar i četiri čestice koje predstavljaju prenositelje interakcija između čestica tvari može se opisati ponašanje cjelokupne promatrane tvari u svemiru.

*SM* je teorija koja je opisivala sve poznate elementarne čestice u trenutku kada je građena, a predviđjela je i čestice koje su otkrivene tek kasnije. Vjerojatno je najbitnije to što je ovaj model pokazao da priroda nije toliko komplicirana koliko je u početku izgledalo. Osim čestica, *SM* jako dobro opisuje i tri osnovne sile - *jaku, slabu i elektromagnetsku*. Ova teorija je suglasna i s kvantnom mehanikom i specijalnom teorijom relativiteta.

Moderna teorija elementarnih čestica formulirana je početkom 70-ih godina XX stoljeća i naziva se *SM*. Iako se iz prilično neinovativnog imena ne može zaključiti, *SM* nije model, već matematički precizirana teorija kretanja sistema najmanjih sastojaka tvari – elementarnih čestica, čija se predviđanja u potpunosti slažu s rezultatima brojnih eksperimenata s točnošću boljom od jednog promila.

Osnova za formuliranje *SM-a* bila je ujedinjavanje do tada poznatih fundamentalnih sila u jednu teoriju. Da bi se upotpunio *SM* čestica i interakcije između njih, mora se dodati i ta treća grupa elementarnih procesa - *jake interakcije kvarkova i gluona* - opisanih *kvantnom kromodinamikom (QCD)*.

*SM* jake, slabe i elektromagnetske interakcije izvrsno opisuje sve eksperimentalne podatke do današnjeg dana. Model se sastoji od teorijskog opisa fundamentalnih interakcija temeljenog na principu lokalne *baždarne invarijantnosti*. Međutim, nije poznat mehanizam prema kojem se prenositelji sile (bezmaseni foton i vrlo masivni *W* i *Z* bozoni) u teoriji elektroslabog ujedinjenja razlikuju u masi. Na energijama koje će biti dosegnute na *Velikom hadronskom sudaraču* — *LHC (Large Hadron Collider)* u *CERN-u* (Europski centar za nuklearna istraživanja, Ženeva) pojavljuju se efekti koji razjašnjavaju ovaj misterij.

## **2.1. Elementi *SM-a***

Elementarne čestice su realni kvantni objekti koji se u svim eksperimentima ponašaju kao materijalne točke, bez ikakve unutarnje strukture i bez dimenzija. Jedno od osnovnih svojstava čestica je njihov spin koji predstavlja jedno od osnovnih svojstava čestice u *kvantnoj mehanici*. Nekad se kaže da spin označava rotaciju čestice, ali ta rotacija nije obična rotacija. Projekcija spina izražava se pozitivnim brojevima. Znak ispred broja označava smjer spina (nekad se kaže

spin gore ili spin dole). Prema vrijednosti spina, sve se čestice mogu podijeliti na dvije grupe: *fermione i bozone*. Fermioni imaju polucijelu vrijednost spina<sup>1</sup> ( $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ) i pokoravaju se *Fermi-Diracovoj raspodjeli*, a samim tim i *Paulijevom principu isključenja*. Obuhvataju dvije grupe čestica: *leptone i kvarkove*. Svi fermioni su svrstani u tri generacije. Svaka generacija fermiona sadrži po jedan par leptona i jedan par kvarkova. Pripadnici fermiona prve generacije imaju najmanju masu, dok fermioni treće generacije imaju najveću. Fermioni grade tvar.

Bozoni su čestice s cjelobrojnom vrijednošću spina ( $1, 2, 3, \dots$ ) i pokoravaju se *Bose-Einsteinovoj raspodjeli*. To su čestice sile, tj. prenositelji (posrednici, medijatori) interakcija (možda slikovitije rečeno, česticama tvari prenose informaciju o sili).

Elementarne čestice se mogu podijeliti u tri grupe: *leptoni, kvarkovi i prenositelji interakcija*. Osnovnih interakcija u prirodi ima četiri: *gravitacijska, elektromagnetska, slaba i jaka*. Leptoni su fermioni spina  $1/2$ . Sudjeluju u elektromagnetskim i slabim interakcijama, a ne sudjeluju u jakim. Čestice koje sudjeluju u jakim interakcijama nazivaju se *hadroni*. Dije se na *mezone i barione*.<sup>2</sup>

Slaba interakcija ovisi o spinu čestice u odnosu na smjer njenog impulsa. Projekcija spina na vektor impulsa čestice naziva se *helicitet*. *Kiralnost* se odnosi na zakone transformacije, ili možemo slobodno reći, na reprezentaciju *Lorentzove grupe* kojoj čestica pripada. Ako čestica nema masu onda kiralnost može da poprimi samo dvije konačne vrijednosti  $+s$  i  $-s$ .

Zbog toga se helicitet i kiralnost, u ovom slučaju, promatraju kao jedna pojava, odnosno helicitet je „*prividna*“ kiralnost. Međutim, za slučaj masivnih čestica, *Lorentzovi bustovi* mogu prebaciti helicitet, tj. u matričnom elementu se pojavljuje dodatni faktor koji opisuje vjerojatnost pojave čestice u stanju suprotnog heliciteta. Kiralnost ustvari predstavlja vlastitu vrijednost  $\gamma^5$  *Diracove matrice*. Može biti ili  $+$  ili  $-1$ . Ova stanja se obično nazivaju „*desna*“ (*R right*) ili „*lijeva*“ (*L left*). Slabi izospin,  $I$ , u fizici elementarnih čestica je kvantni broj koji se odnosi na slabu interakciju i analogan je izospinu kod jake interakcije. Postoji i zakon očuvanja slabog izospina, koji kaže da je ova veličina očuvana kod slabe interakcije. Slabi

---

<sup>1</sup> U teoriji elementarnih čestica koristi se prirodni sistem jedinica, u kojem je  $c=\hbar=1$

<sup>2</sup> Gradivni elementi hadrona su kvarkovi, pa se mezoni sastoje od kvarka i antikvarka, dok se barioni sastoje od 3 kvarka. Na primjer, proton i neutron spadaju u barione i sastoje se od dva *u* kvarka i jednog *d* kvarka *uud*, odnosno od dva *d* kvarka i jednog *u* kvarka *ddu* respektivno. Vidimo da proton i neutron nisu prave elementarne čestice, već da imaju podstrukturu, kao što nam eksperimenti dubokog neelastičnog raspršenja i govore. Prave elementarne čestice su dakle kvarkovi.

*hipernaboj* u fizici elementarnih čestica predstavlja kvantni broj povezan s električnim nabojem i trećom komponentom slabog izospina. Obilježava se obično sa  $Y$ , a definira se kao<sup>3</sup>:

$$Q = I_3 + Y/2, \quad (2.1)$$

gdje  $Q$  predstavlja električni naboj (u jedinicama elementarnog naboja)<sup>4</sup>, a  $I_3$  je komponenta slabog izospina, treća komponenta slabog naboja. Dakle, na osnovu gornje formule, slabi hipernaboj se definira kao:

$$Y = 2(Q - I_3). \quad (2.2)$$

Što ustvari predstavlja naboj neke čestice? Na ovo pitanje teško je odgovoriti direktno. Naboj predstavlja svojstvo čestice da se kreće u magnetskom polju na jednu stranu, u ovisnosti od znaka naboja. Naboj je samo jedan vid naboja, jedan stupanj slobode, jedno ispoljavanje neke osobine. Može se zaključiti da bi, u suštini, bilo najpravičnije reći naboj naboja. U teoriji elementarnih čestica postoji još naboja pored naboja koje karakteriziraju jednu česticu, na primjer već spomenuti naboj boje kod jake interakcije.<sup>5</sup>

Dok u elektromagnetizmu postoje dvije vrste naboja i nenabijeni prenositeljski bozon (*foton*), u *QCD*-ju postoji šest vrsta naboja (*boja i antiboja*) i nabojski (*obojeni*) prenositeljski bozon (*gluon*). Ovo se može rezimirati na sljedeći način:

1. Elektromagnetska interakcija ima najjednostavniju strukturu. Postoji samo jedan, električni naboj, naboj dva različita tipa – pozitivno i negativno. Istoimeni naboji se odbijaju, a raznoimeni privlače. Prenositelj ove interakcije je *foton*, koji ne posjeduje masu i nema naboja.
2. Izvori i receptori jake sile posjeduju naboj boje. Ovaj naboj je mnogo kompleksniji od električnog naboja. Određeni kvark može imati samo jednu boju (npr. *kvark crvene boje*). Leptoni, koji ne sudjeluju u jakim interakcijama, ne mogu imati boju. Sila boje između kvarkova ne ovisi o njihovim okusima. Ukupno postoji osamnaest kvarkova, tj. šest okusa, od kojih svaki može doći u tri različite boje. Prenositeljima boje nazivamo *gluone*, koji nemaju masu.
3. Slaba interakcija je savim drugačija od prethodne dvije spomenute. Fundamentalni *fermioni, kvarkovi, leptoni i neutrini* imaju, tj. posjeduju *slabi naboj*. Slabi naboj fermiona ovisi o njihovoj *kiralnosti*.

---

<sup>3</sup> Neki autori umjesto  $Y/2$  rabe  $Y$

<sup>4</sup>  $|e| = 1,60217653 \cdot 10^{-19} C$

<sup>5</sup> ovdje pojam boje nema nikakve veze sa pojmom boje u optici – to je samo još jedan „*stupanj slobode*“

Elementarne, ili bolje reći fundamentalne čestice u *SM-u* su: *kvarkovi, leptoni, baždarni (gauge) bozoni i Higsov bozon.*

### 2.1.1. Kvarkovi

Kvarkovi su fermioni (spin  $1/2$ ) koji pored električnog naboja nose i *kromodinamički (QCD) naboj* koji se naziva boja (*color*), jer može imati tri različite vrijednosti, recimo crvena, zelena i plava (kao tri primarne boje). Zato što nose električni naboj, kvarkovi sudjeluju u elektromagnetskim interakcijama, a budući da nose i *boju* (naboj *QCD-ja*), mogu sudjelovati i u ostale tri interakcije. Jake interakcije, tj. razmjena obojenih gluona, vezuju kvarkove u triplete koji se nazivaju *barioni* – najvažniji su *proton i neutron* koji grade nukleus jezgra. Postoji šest različitih kvarkova – ili se kaže da postoji šest različitih kvarkovskih okusa (*flavor*), svrstanih u tri generacije kvarkova:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

s imenima (*u – up, d – down*); (*c – charm, s – strange*); (*t – top, b – bottom*), odnosno (*gornji, donji*); (*šarm, strani/čudni*); (*vršni, dubinski*). Očito je najbolje uporabiti najjednostavniju nomenklaturu: *u-kvark, s-kvark, itd.* Od šest kvarkova, posljednji je otkriven *t-kvark*, 1995. godine u Fermilabu, pokraj Čikaga. Kvarkovi u gornjem redu dubleta: *u, c i t* imaju električni naboj  $+2/3 e$ , a u donjem redu: *d, s i b* imaju naboj  $-1/3 e$ , gdje je *e* kvant električnog naboja:  $|e| = 1,60217653 \cdot 10^{-19} \text{C}$ . Kvarkovi nose još i barionski kvantni broj  $B = +1/3$ , tako da barioni, koji se sastoje od po tri kvarka, imaju barionski broj  $B = +1$ .

U relativističkoj kvantnoj fizici svaka čestica ima svoju antičesticu, koja ima istu masu i isti spin, a svi ostali aditivni kvantni brojevi su suprotnog znaka u odnosu na česticu. Može se reći da se čestica i antičestica razlikuju u onom svojstvu koje je karakteristično za polje čija se energetska stanja promatraju. Važno je istaknuti da je cjelokupna tvar koja nas okružuje izgrađena samo od čestica iz prve generacije, ali ne i od odgovarajućih antičestica. Antikvark se označava potezom iznad imena kvarka.<sup>6</sup> Čestice koje sadrže vezana stanja *kvark-antikvark* nazivaju se mezoni.

Slobodni kvark nikada nije primjećen ni u jednom eksperimentu. Egzistencija kvarkova prvi put je ustvrđena u eksperimentu jakog neelastičnog raspršenja elektrona na protonima u

---

<sup>6</sup> Na primjer,  $u_c$  antikvark je  $\bar{u}_c$  to je čestica spina  $1/2$  električnog naboja  $-2/3 e$  barionskog broja  $-1/3$  i “anticrvene” boje (boje komplementarne crvenoj), što znači da je vezano stanje ( $\bar{u}_c u_c$ ) color singlet, tj. ne nosi boju.

akceleratoru SLAC, Stanford 1969.. Egzistencija kvarkova kao čestica od kojih su izgrađeni hadroni teorijski je predviđena pet godina ranije u radovima *Gell-Manna i Zweiga* 1964. godine. Mase kvarkova nije lako odrediti, jer su kvarkovi zatočeni unutar hadrona i današnje najbolje vrijednosti su prikazane u sljedećoj tablici, u jedinicama *MeV*.

$\left  \begin{array}{l} \text{naboj } +\frac{2}{3} e \\ \text{masa (MeV)} \end{array} \right $	u	c	t
	(1,5 do 3)	$(1270 \pm 70)$	$(171200 \pm 2100)$
$\left  \begin{array}{l} \text{naboj } -\frac{1}{3} e \\ \text{masa (MeV)} \end{array} \right $	d	s	b
	(3 do 6)	$(104 \pm 35)$	$(4200 \pm 170)$

*Tablica 2.1. Mase kvarkova*

Proton se ne raspada. Očito je da postoji nešto što ga čini tako stabilnim. Neka veličina, neuništiva, baš poput električnog naboja. Pri tom je posve jasno da je proton najlakša čestica s takvim nabojem, jer da ima neka još lakša, proton bi se mogao raspasti u tu lakšu česticu, a ostatak svoje mase bi pretvorio u zračenje. To svojstvo „teških“ čestica nazivamo *barionski broj B*, što dolazi od grčke riječi *barios* što znači težak.

### 2.1.2. Leptoni

Leptoni su dobili ime kada se smatralo da su baš oni najlakše subatomske čestice (grčki: leptos – sitan, tanak) što od otkrića  $\tau$  leptona 1975. koji imaju masu skoro dva puta veću od mase protona, više ne odgovara istini. Precizno, leptoni (nabijeni) su fermioni (*spin*  $\frac{1}{2}$ ) koji nemaju jakih interakcija (*ne sudjeluju u njima, nemaju naboj QCD-ja*). Kao i kvarkovi, mogu sudjelovati u preostale tri interakcije (osim desnih leptonskih stanja koji ne sudjeluju u slabim). Postoji šest leptona (*ili leptonskih okusa*) koji se unutar *SM-a* grupiraju u tri generacije:

$$\left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right), \quad (2.4)$$

Elektron  $e$ , muon  $\mu$  i tau  $\tau$  imaju naboje  $-e$ , i svaki ima svoj neutrino  $\nu_i$  koji nema električnog naboja.<sup>7</sup> Iako su teorijski već prije predviđeni u *SM-u*, do eksperimentalnog otkrića leptona iz treće generacije trebalo je mnogo čekati: 1975. godine na SLAC-u je otkriven  $\tau$ , a 2000. na *FermiLab-u* je direktno detektiran njegov odgovarajući neutrino  $\nu_\tau$ .

Električni naboj i masa leptona prikazani su na sljedećoj slici:

---

<sup>7</sup> Elektron je prva otkrivena elementarna čestica i jedina otkrivena u XIX stoljeću. Otkriće elektrona se obično pripisuje John J. Thompsonu, koji je 1897. godine izveo eksperiment za mjerenje odnosa  $e/m$ . Točnu vrijednost naboja i mase otkrio je Robert Miliken 1910. godine.



$\left  \begin{array}{l} \text{naboj } -e \\ \text{masa (MeV)} \\ \text{naboj } 0 \\ \text{masa} \end{array} \right $	e	$\mu$	$\tau$
	(0,51 MeV)	(105,66 MeV)	(1777 MeV)
	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
	(< 2 eV)	(< 170 keV)	(< 15,5 MeV)

Tablica 2.2. Mase leptona

Neutrini nemaju električni naboj i ne sudjeluju u interakcijama s fotonima, kao i u jakim interakcijama (nenabijeni neutrini sudjeluju u slabim i gravitacijskim interakcijama). U ovoj aproksimaciji nema procesa koji bi pretvarali jedan lepton u drugi. Zato bi svih šest leptona bilo stabilno, tj. nijedan se ne bi raspadao. Zakon očuvanja naboja zahtijeva da najlakše nabijeni lepton, elektron bude stabilna čestica, dok su mion i tau nestabilne čestice.<sup>8</sup> Neutrinske oscilacije miješaju neutrine.

U prvoj aproksimaciji, na skali energija  $\leq 1 \text{ GeV}$ , leptoni interagiraju (međudjeluju) samo s fotonom,  $\gamma$ . Imaju samo elektromagnetske interakcije koje opisuje kvantna elektrodinamika. U prirodi, kao i u *SM-u*, leptoni imaju i dodatnu slabu interakciju, koja na niskim energijama izgleda puno slabije od elektromagnetske i koja povezuje leptone iz iste generacije. Prenositelji slabih interakcija su tri *baždarna bozona*  $W^\pm$  i  $Z^0$ , koji kao i *foton* imaju spin 1, ali za razliku od fotona imaju masu i slabe vlastite interakcije.

*Neutrini* su još uvijek nedovoljno istražen sektor *SM-a* jer su neutrinski eksperimenti, uz eksperimente s *gravitonima*, najteži u fizici čestica. To je posve razumljivo, jer neutrini imaju samo slabu i gravitacijsku interakciju, pošto nemaju ni *električni* ni naboj *QCD-ja*. Zato neutrini lako i bez traga prolaze ne samo kroz detektore čestica, već i kroz cijele planete.

### 2.1.3. Baždarni bozoni

Prenositelji (medijatori) interakcija su *baždarni bozoni*: *gravitoni*, *fotoni* ( $\gamma$ ),  $W^\pm$  i  $Z$  *bozoni* i *gluoni* ( $g$ ), kao što je prikazano u sljedećoj tablici.

<sup>8</sup> Mion se raspada u procesu  $\mu \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$  s vremenom poluživota  $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .  $\tau$  lepton ima brojne, uglavnom hadronske, kanale raspada i vrijeme poluživota  $2,9 \cdot 10^{-13} \text{ s}$

Interakcija	Djeluje na	Prenositelji
gravitacijska	sve čestice koje imaju energiju	graviton (bez mase, spin 2)
elektromagnetska	sve električno nabijene čestice	foton (bez mase, spin 1)
slaba	kvarkove, leptone, $W^\pm$ i $Z^0$ bozone	$W^\pm$ i $Z^0$ bozoni
jaka	nositelje i prenositelje boje (kvarkove i gluone)	8 gluona (bez mase, spin 1)

Tablica 2.3. Prenositelji (medijatori, posrednici) interakcija

Većina prenositelja interakcija (*gluoni, fotoni i gravitoni*) su čestice bez mase, kako se i očekuje u *baždarnim teorijama*. Kao što je već spomenuto, *SM* ne uključuje gravitacijske interakcije. *Baždarne bozone* u *SM-u* čini osam *gluona* ( $g$ ), tri *slaba*  $W^\pm$  i  $Z^0$  *bozona* i *foton* ( $\gamma$ ).

Mase prenositelja slabih interakcija su prikazane u (2.5):

$$m_W = 80,403 \pm 0,029 \frac{\text{GeV}}{c^2} = 85,7 m_p, \quad m_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \frac{\text{GeV}}{c^2} = 97,2 m_p, \quad (2.5)$$

gdje je  $m_p$  masa protona, slične masama cijelih atoma rubidija ( $\text{Rb}_{85,5}^{37}$ ) i tehnečija ( $\text{Tc}_{98,9}^{43}$ ). Ponekad se za označavanje antičestica rabi samo oznaka električnog naboja. Tako je  $W^-$  antičestica od  $W^+$ , a  $Z^0$  bozon (kao i foton) identičan je svojoj antičestici.

#### 2.1.4. Higgsov bozon

*Higgsov bozon* je čestica *SM-a* čije je eksperimentalno postojanje potvrđeno u *LHC-u*. Da bi ovaj model bio matematički konzistentna teorija, pored *kvarkova, leptona i baždarnih bozona* mora postojati još jedna vrsta čestica – *Higgsov bozon*  $H$ . Elektroslaba teorija unutar *SM-a* zahtijeva postojanje skalarne (spina nula), električno neutralne i bezbojne (bez jakih interakcija) čestice  $H$ , točno određenih interakcija s *fermionima i baždarnim bozonima*, ali neodređene mase. Preko mehanizma spontanog loma *baždarne simetrije* (*Higgsov mehanizam*), *fermioni i baždarni bozoni* slabih interakcija  $W^\pm$  i  $Z^0$  dobivaju masu kao rezultat interagiranja s *Higgsovim bozonima*. Pored generiranja mase drugih čestica, postojanje *Higgsovog polja* koje spontano lomi *baždarnu simetriju elektroslabih interakcija*, ima i važne astrofizičke implikacije za evoluciju cijelog svemira – inflaciju i kozmološku konstantu.

Razumijevanje *Higgsovog sektora SM-a* danas je centralni problem fizike elementarnih čestica.

Prvotno je eksperimentalna potraga potvrdila da je masa *Higgsovog bozona* veća od  $110 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ , a

2012. je otkrivena vrijednost od  $125 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ .

## 2.2. Teorija Grupa i elementarne čestice

Kada formuliramo neku teoriju (u našem slučaju  $SM$ ) koja treba da pruži odgovore o fizikalnim procesima, onda ona mora biti invarijantna prilikom transformacija koji su nam bitni za date procese. Dakle, da bismo formulirali  $SM$  uopće, moramo odabrati neku *baždarnu grupu* i točno definirane čestice tvari (već spomenuti *kvarkovi*, *leptoni*, *baždarni bozoni* i *Higgsov bozon*). Da bi nam se teorija podudarala s eksperimentalnim rezultatima kao *baždarnu grupu SM-a* čestica moramo uzeti:

$$U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_C. \quad (2.6)$$

Da bi se kazalo da *Abelova*  $U(1)$  grupa nije *baždarna grupa QED-ja nego hipernaboja*, dodaje se indeks  $Y$ . Odgovarajuća *konstanta vezanja* i *baždarni bozon* se označavaju kao  $g_1$  i  $B_\mu$ , respektivno.  $SU(2)$  grupa posjeduje tri generatora, tzv. *Paulijeve matrice*  $\sigma_i$ , konstanta vezanja je opet označena sa  $g_2$ , a tri *baždarna bozona* sa  $W_\mu^1$ ,  $W_\mu^2$  i  $W_\mu^3$ . Ova tri generatora zbog *globalne invarijantnosti* unutar  $SU(2)$  grupe simetrija uvode novi kvantni broj, slabi izospin  $I$  koji sadrži tri komponente. Nijedan od spomenutih *baždarnih bozona* ne predstavlja česticu u fizikalnom smislu. Linearne kombinacije ovih *baždarnih bozona* će davati foton, kao i  $W^\pm$  i  $Z^0$  dobro poznate *bozone*. Oznaka  $L$  kazuje da se radi o izospinu.

I konačno, grupa  $SU(3)$  je grupa koja opisuje jake interakcije kvarkova i gluona (oznaka  $C$  kazuje da se radi o naboju boje). *Gluoni* predstavljaju odgovarajuće *baždarne bozone* (ima ih osam). Svakom kvarku (antikvarku) se dodjeljuje boja  $C$ , sa tri stupnja slobode.

$SM$  elektromagnetsku i slabu interakciju prikazuje samo kao različite komponente jedne *baždarne teorije*. Važno je istaći da je samo  $SU(2)_L$  *kiralna baždarna grupa*, te u odnosu na  $SU(3)_C$  teoriju jake interakcije različito transformira lijeve i desne kiralne projekcije fermionskih stanja.

Kvarkovi i leptoni su čestice spina  $1/2$  i opisuju se *Diracovim poljima*. Ali, način na koji fermionska polja ulaze u *lagranžijan SM-a* je kompliciran jer ovisi od svojstava interagiranja između čestica i spontanog loma simetrije. Polja leptona i kvarkova, pa time fermionska jednočestična stanja, slažu se u *multiplete baždarnih grupa* elektroslabih  $U(1)_Y \times SU(2)_L$  i  $SU(3)_C$  jakih interakcija.

Osnovni problem su  $SU(2)_L$  grupe simetrija slabih interakcija koje lome parnost, pa imaju  $V-A$  strukturu tj. razlikuju *lijeva i desna fermionska stanja*. Zato je svaki fermion u  $L_{SM}$ -a opisan s

dva spinorska polja  $\psi_L$  i  $\psi_R$ . U *SM-u* postoje samo lijeva polja neutrina (i samo desna polja antineutrina), tj. ne postoji R stanje neutrina, što garantira da neutriini unutar *SM-a* imaju masu jednaku nula. Notacija je dodatno komplicirana jer se za svako fermionsko polje  $\psi$  često rabi i *Diracov spinor*  $\psi$  i polja određenog heliciteta  $\psi_L$  i  $\psi_R$ .

U *SM-u* sva lijeva fermionska polja tvore *dubleti* (dvokomponentni spinori, tj.  $2 \times 1$  matrice), a desna *singleti* ( $1 \times 1$  matrice) u odnosu na  $SU(2)_L$  grupu simetrija slabih interakcija. To znači da postoje tri leptonska stanja (u prvoj generaciji):

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \text{-} SU(2) \text{ dublet i } \bar{e}_R \text{-} SU(2) \text{ singlet.} \quad (2.7)$$

Za razliku od leptona, kvarkovi imaju i jake interakcije, pa se kvarkovska polja slažu i u multiplete  $SU(3)_C$  grupe tih interakcija. I lijeva i desna strana su tripleti u odnosu na grupu  $SU(3)_C$ .

Na kvarkovska stanja – *triplete* (trokomponentne spinore, tj.  $3 \times 1$  matrice) djeluju  $3 \times 3$  *Gell-Mannove* matrice  $\lambda_a$  generatora grupe koji su operatori boje. To znači da svako kvarkovsko stanje nosi kvantni broj  $SU(3)_C$  grupe – boju: crvenu, zelenu ili plavu, što se označava s indeksom = 1,2,3 ...

Prema tome, u *SM-u* postoji ukupno dvanaest stanja  $u$  i  $d$  kvarkova (ne računajući isto toliko antikvarkovskih stanja):

$$\begin{pmatrix} u_{\alpha L} \\ d_{\alpha L} \end{pmatrix} \text{-} SU(2) \text{ dublet i } SU(3) \text{ triplet i } u_{\alpha R}, d_{\alpha R} \text{-} SU(2) \text{ singlet i } SU(3) \text{ triplet.} \quad (2.8)$$

Sva leptonska stanja su singleti u odnosu na  $SU(3)_C$ . Prema tome, prva generacija fermiona ( $\nu_e, e, u, d$ ) u *SM-u* opisana je sa *petnaest Dirakovih polja* (stanja):

$$\psi = l_L, e_R, q_L, u_R, d_R, \quad (2.9)$$

gdje je notacija još više kondenzirana uvođenjem oznaka za lijeva leptonska  $l_L$  i kvarkovska  $q_L$  stanja:

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, q_L = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L, u_\alpha = u_{\alpha R}, d_R = d_{\alpha R}, \quad (2.10)$$

### 2.3. Formulacija *SM-a*

Teorijski okvir unutar kojeg su opisane prethodno spomenute čestice i njihove interakcije naziva se *SM*. Temelji se na kvantnoj teoriji polja te je stoga konzistentan s kvantnom

mehanikom i specijalnom teorijom relativiteta. Ovaj model predstavlja lokalnu *baždarnu teoriju* zajedno sa spontanom lomom simetrije, te s *Higgsovim mehanizmom* pravi veoma uspješnu teoriju jakih, slabih i elektromagnetskih sila koja je provjerena do velike preciznosti i daje osim za neutrinske oscilacije, postojanje tamne tvari i nemogućnosti objašnjenja količine barionske tvari u svemiru gotovo savršeno slaganje s eksperimentalnim podacima sve do skala od 1000 GeVa. Od temeljnih interakcija između čestica tvari opisuje elektromagnetsku, slabu i jaku. Elektromagnetsko i slabo ujedinjuje u jednu tzv. elektroslabu interakciju<sup>9</sup>, ali ne opisuje gravitacijsku, što je jedan od razloga zašto ga se smatra nepotpunom teorijom.

Interakcije između čestica tvari odvijaju se razmjenom bozona, čestica cjelobrojnog spina. U teoriju se uvode interakcije pomoću baždarnog principa.

*SM* je teorija koja ima  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  *lokalnu baždarnu simetriju*.<sup>10</sup> Grupa  $SU(3)$  je zadužena za jake interakcije, a preostale dvije za elektromagnetske i slabe. Princip na kome počiva *SM* je princip simetrije: teorija mora da je invarijantna na neke transformacije. To jest, rezultati teorije su isti (ne mijenjaju se) pri transformacijama simetrije. Ovaj princip nije ništa novo u fizici, s njime se susrećemo svakodnevno.

Transformacije simetrije su u slučaju *SM-a* nešto drugačije. Jedna od razlika je i ta što u slučaju *SM-a* imamo lokalnu simetriju, za razliku od prethodno spomenute globalne simetrije.<sup>11</sup> Pošto se radi o lokalnim simetrijama, invarijantnost ima za posljedicu pojavu interagiranja fermiona i skalara s baždarnim bozonima. Šta više, zahtjev da je teorija invarijantna na lokalnu simetriju potpuno određuje oblik interakcije.<sup>12</sup> Svakoj interakciji odgovara određena *baždarna transformacija* bazirana na odgovarajućoj grupi simetrije, dok su sve čestice tvari raspoređene u odgovarajuće multiplete u odnosu na pojedinu grupu simetrije. Za svaku interakciju postoji onoliko *baždarnih polja* prenositelja sile koliko ima generatora grupe simetrija koja odgovara toj interakciji. Čestice unutar određenog multipleta mogu odgovarajućim interagiranjem

---

<sup>9</sup> To ujedinjene je djelo S. Glashow-a, S. Weinberga i A. Salam-a koji su za ovo otkriće dobili Nobelovu nagradu 1979. godine

<sup>10</sup> Izgradnja *SM-a* je bila vođena principima simetrije. Matematiku simetrije osigurava teorija grupa. Sama veza između simetrije i fizike je izuzetno značajna. Noetherin teorem navodi, u suštini, da za svaku kontinuiranu simetriju u prirodi postoji odgovarajući zakon očuvanja.

<sup>11</sup> Globalno znači da se nešto dešava u svim tačkama prostor-vremena na isti način, dok lokalno znači da se nešto dešava nezavisno (drugačije) u različitim tačkama prostor-vremena. Pokazuje se da ovakav zahtjev nije nimalo naivan i da on skoro potpuno definiira našu teoriju.

<sup>12</sup> Zahtjev da jednadžbe koje opisuju jaku interakciju ne ovisi od toga kako smo odabrali da definiramo boju kvarkova i to da se ta definicija može mijenjati od tačke do tačke u prostor-vremenu (jer se radi o lokalnoj simetriji) nam govori kako jaka interakcija izgleda: ona ima 8 prenositelja interakcije (gluoni), oni su bezmaseni i imaju nenultu boju, te interagiraju međusobno. Ovdje je opet zgodno istaći razliku između elektromagnetske i jake interakcije: fotoni su nenabijeni i ne interagiraju međusobno, dok gluoni imaju netrivialnu boju i interagiraju međusobno. Upravo je ovo svojstvo odgovorno za zarobljenost kvarkova unutar hadrona.

prelaziti u bilo koju drugu česticu unutar istog multiplleta. Iako naš osnovni princip izgleda jednostavan i jasan, prvi pokušaji formulacije *SM-a* nisu davali teoriju koja ima ikakve veze s realnošću. Razlog su bila dva velika problema teorije. Prvi od njih je taj što je teorija predviđala da prenositelji slabe interakcije moraju biti bezmaseni, dok se na osnovu eksperimentalnih rezultata znalo da je slaba interakcija kratkodometna, te njeni prenositelji moraju imati veliku masu. Još gore, zahtjev za određenom simetrijom je imao za posljedicu da svi leptoni i kvarkovi moraju da budu bezmaseni, što dakako nije slučaj. Oba problema su riješena kada su fizičari shvatili da simetrija može biti slomljena. Specijalan mehanizam loma simetrije, *spontani lom simetrije*, osigurava da sve čestice imaju nenultu masu i da prenositelji slabih interakcija budu dovoljno teški. Uvođenje spontanog loma simetrije je imalo svoju cijenu: moralo je da se uvede novo kvantno polje, *Higgsovo polje*. Higgsov bozon je kvant ovog polja i ima niz posebnih svojstava: spin mu je 0, pa je drugačiji od svih ostalih čestica u *SM-u*, jer su one spina 1/2 ili 1. Njegova vakuumska očekivana vrijednost je različita od nule. Svaki sustav, prepušten sam sebi, teži da se nađe u minimumu, stanju s minimalnom energijom. Polja kao što je elektromagnetsko imaju minimum koji odgovara nultoj vrijednosti polja, pa je vakuumska očekivana vrijednost fotona jednaka nuli. Kod *Higgsovog polja* međutim, minimum je stanje s nenultom vrijednošću polja. Ovo se može shvatiti kao da je cjelokupan prostor ispunjen *Higgsovim poljem* i da se sve čestice kreću kroz to polje. Interakcija s *Higgsovim bozonom* prilikom tog kretanja dovodi do toga da čestice dobijaju masu. Na taj način svi leptoni i kvarkovi, kao i prenositelji slabe interakcije  $W^\pm$  i  $Z^0$  bozoni dobijaju masu.

*SM* je dao niz predviđanja koja su potvrđena u eksperimentima osamdesetih i devedesetih godina prošlog stoljeća. Na primjer, model predviđa postojanje  $W^\pm$  i  $Z^0$  bozona, *gluona* i *c i t kvarkova*. Sve ove čestice su eksperimentalno viđene i njihova svojstva su točno ona koja predviđa *SM*. Još se može naglasiti da *SM* predviđa načine na koji se  $Z^0$  bozon raspada i sva mjerenja u *LEP-u* (*Large Electron-Positron Collider, CERN, 1989-2000.*) su vidjela točno predviđene načine raspada  $Z^0$  bozona. Iako se može vidjeti da je *SM* jako dobro testirana teorija i da pokazuje veliko slaganje s svim dosadašnjim eksperimentalnim rezultatima, ipak ovaj model ima svojih nedostataka. Najveći od njih je svakako to što model ne predviđa kolika treba da bude masa *Higgsovog bozona*. Također, mase svih fermiona su slobodni parametri u modelu. Njihove vrijednosti se dobijaju iz eksperimenata pa se zatim unose u model. Sloboda ipak nije toliko velika, jer kada se jednom izmjere, ovi parametri su fiksirani i njihove vrijednosti su iste za sve moguće procese u okviru *SM-a*. Za formuliranje *SM-a* se rabi *lagranžijanov formalizam* po kome se sve četiri prostorno-vremenske koordinate javljaju

simetrično, što se manifestira kroz relativističku kovarijantnost. Interakcije između polja se opisuju pomoću principa *lokalne baždarne invarijantnosti*.<sup>13</sup>

Očita je sličnost načina na koji se u *SM-u* uvode osnovne čestice tvari – *fermioni*, tj. *kvarkovi* i *leptoni*. Lijevi okusi kvarkova i leptona su grupirani u šest dubleta, tj. po tri generacije, dok su desni grupirani u devet singleta. Te generacije fermiona su:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e & d \end{bmatrix}_L \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu & s \end{bmatrix}_L \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau & b \end{bmatrix}_L, \quad \begin{bmatrix} e_R & u_R & d_R \\ \mu_R & c_R & s_R \\ \tau_R & t_R & b_R \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Lijevi fermionski sektor *SM-a* čine fundamentalni konstituenti tvari, kvarkovi i leptoni, koji, grupirani u ovakvih šest dubleta unutar teorije ovog modela elementarnih čestica predstavljaju još jedan od problema za koje ne postoji fundamentalno objašnjenje. Svaka generacija čestica sadrži *dva kvarka (up i down tip), nabijeni lepton i njegov neutrino*. Sve tri generacije fermiona ponašaju se identično u odnosu na interakcije u kojima sudjeluju, a razlikuju se samo po masi čestica. U promatranju kvarkova iz sve tri generacije, kvarkovi *u, c i t* se označavaju kao kvarkovi tipa *up*, a kvarkovi *d, s i b* kao kvarkovi tipa *down*. Svaki kvark se pojavljuje u tri boje ( $\alpha = 1,2,3$ ).

### 2.3.1. Lagranžijan *SM-a*

Da bi bilo moguće napisati lagranžijan neke teorije, prvo se moraju odabrati simetrije (lokalne i globalne) i sustav čestica, pa tek onda je nužno napisati svaku dozvoljenu interakciju. U ovom odjeljku ćemo iskoristiti te činjenice da bi se prije svega konstruirao *SM* čestica. Čestice koje tvore *SM* su čestice spina  $1/2$ ,  $1$  i  $0$  i opisane su odgovarajućim kvantim poljima. Sile među tim elementarnim česticama su jaka i elektroslaba interakcija. Interakcije se u teoriju uvode na jedinstven način pomoću principa *lokalne baždarne invarijantnosti*. Tako se svakom generatoru grupe *baždarnih simetrija lagranžijana* tvari  $L_m$  pridruži polje odgovarajućih *baždarnih bozona* koje je prenositelj te interakcije. Grupa *baždarnih simetrija lagranžijana* tvari  $L_m$  je  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . *Lagranžijan tvari* je:

$$L_m = L_f + L_s. \quad (2.12)$$

Prvi član,  $L_f$  je *lagranžijan slobodnih fermiona* (kvarkova i leptona) bez mase.  $L_s$  je baždarni simetrični lagranžijan skalarnog *Higgsova polja*, čije osnovno stanje lomi lokalnu elektroslabu *baždarnu simetriju*. Jaka i elektroslaba interagiranja među česticama su posljedica interagiranja

<sup>13</sup> Lokalna *baždarna simetrija* je unutarnja simetrija u odnosu na neku grupu parametara i invarijantna je u odnosu na njihove prostorno-vremenske transformacije

s *baždarnim bozonima* koji u teoriju ulaze kada se obična derivacija  $\partial^\mu$  zamijeni kovarijantnom  $D^\mu$  u  $L_m$ . Lagranžijan dobiven na ovaj način je onda invarijantan pri  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  *lokalnim baždarnim transformacijama*. Ukupni  $L_{SM}$  lagranžijan *SM-a* sadrži još i lagranžijane  $L_g$ :

$$L_g^{(1)} = -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i, \quad (2.13)$$

za svako od dvanaest polja baždarnog bozona (četiri elektroslaba i osam gluona). Bitno je napomenuti da je i  $L_g$  također  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  lokalno *baždarno invarijantan*.

Ukupni  $L_{SM}$  *simetrični lagranžijan SM-a* je:

$$L_{SM} = L_f(\partial^\mu \rightarrow D^\mu) + L_s + L_g, \quad (2.14)$$

gdje u prvom članu ( $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$ ) znači da običnu derivaciju treba zamijeniti kovarijantnom, koja ima sljedeći oblik:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu + ig_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^\mu, \quad (2.15)$$

gdje su  $g_1, g_2$  i  $g_3$  jakosti interakcija baždarnih grupa  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , respektivno. *Lagranžijan  $L_g$  elektroslabih i jakih baždarnih bozona  $B_\mu, W_\mu^i$  i  $G_\mu^a$  je:*

$$L_g = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.16)$$

gdje su tenzori polja:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu && \text{za } U(1)_Y, \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k && \text{za } SU(2)_L, \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_3 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c && \text{za } SU(3)_C. \end{aligned} \quad (2.17)$$

U gornjim izrazima  $SU(2)$  indeksi su  $i, j, k = 1, 2, 3 \dots$  a  $SU(3)$  indeksi  $a, b, c \dots$  uzimaju vrijednosti  $1, 2, 3, \dots, 8$ .  $\sigma_i$  su *Paulijeve matrice*, dok  $\lambda_a^\mu$  predstavlja osam *Gell-Mann-ovih matrica* grupe  $SU(3)$  čije su strukturne konstante  $f_{abc}$ .

Kako su sve interakcije fermiona *II i III* generacije identične onima iz prve (razlika je samo u masi fermiona), dovoljno je promatrati samo leptone i kvarkove prve generacije: elektronski neutrino  $\nu_e$  i elektron  $e^-$ , te u i d kvark ( $\nu_e, e^-, u, d$ ), pa na kraju lagranžijanu dodati iste članove za drugu ( $\nu_\mu, \mu^-, c, s$ ) i treću generaciju ( $\nu_\tau, \tau^-, t, b$ ). Te dodatne članove nećemo ni pisati u interesu kompaktnije notacije.



Fermionski dio  $SM$ -a se dobija ako se za svako od polja u (2.8) napiše kinetički član *Diracovog lagranžijana*  $\bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi$  kome se onda zamjeni ( $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ ), tako da *fermionski lagranžijan* postaje:

$$L_f = \sum_f \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (2.18)$$

gdje je kovarijantna derivacija iz (2.14), a sabira se po svim fermionskim poljima u (2.8.). Kako su fermionska polja složena u odgovarajuće multiplete grupe  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  tako se dobija *lokalno baždarno invarijantan lagranžijan*. Zbog nazočnosti polja *baždarnog bozona* u (2.14), jasno je da *lagranžijan* iz (2.17) uključuje članove interakcije *fermion-baždarni bozon* oblika  $\bar{\psi}B_\mu \psi$ ,  $\bar{\psi}W_i^\mu \psi$  i  $\bar{\psi}G_\mu^a \psi$ .

Ukupni *lagranžijan SM*-a za prvu generaciju fermiona se može napisati kao:

$$L_{SM} = L_f + L_g + L_f + L_{YUKAWA},$$

$$L_{SM} = \sum_f \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + L_s + L_{YUKAWA}, \quad (2.19)$$

gdje su fermionska polja  $\psi$  data u (2.8), izraz (2.16) daje tenzore polja *baždarnog bozona*, a kovarijantna derivacija je definirana u (2.14).

Kako leptoni ne nose boju (ne sudjeluju u jakim interakcijama),  $SU(3)$  član (zadnji član) u kovarijantnoj derivaciji (2.14) djeluje samo na kvarkovska polja i to na isti način i na L i na R polja.

### 2.3.1.1. *Kvantni brojevi elementarnih čestica SM-a*

Ako se za čestice  $SM$ -a definirane pomoću relacije (2.1) odabere da promatraju električni naboj, onda hipernaboj iznosi:

$$Y(l_L) = -\frac{1}{2}, Y(e_R) = -1, Y(q_L) = \frac{1}{6}, Y(u_R) = \frac{2}{3} \text{ i } Y(d_R) = -\frac{1}{3} \quad (2.20)$$

Kao što je već spomenuto, u odnosu na  $SU(3)$  leptoni  $l_L$  i  $e_R$  su singleti, tako da se oni ne transformiraju. Ovo znači da oni ne interagiraju s gluonima. S druge strane, kvarkovi predstavljaju tripletnu  $SU(3)$ , pa zato imamo ovakve vrijednosti hipernaboja.

Kvantni brojevi hadrona uključuju, pored spina i pariteta, skup kvantnih brojeva koji su međusobno povezani unutarnjom simetrijom, tj. simetrijom pod čijim se transformacijama ne mijenjaju *prostorno-vremenske koordinate*. Poznati kvantni brojevi koji odgovaraju unutarnjoj simetriji su *kvantni broj naboja*, *barionski broj*, *izospina*, *stranosti* i *šarma*, te brojevi B i T povezani s *trećom generacijom kvarkova*. Moguće je promatrati sve poznate hadrone kao sadržine veoma malog broja jednostavnih subjekata-kvarkova. Ovo proizilazi iz relacija između

unutarnjih kvantnih brojeva hadrona i njihovih spinova i pariteta. Na primjer, jedna od ovih relacija je da svi poznati *barioni* (hadroni s barionskim brojem 1) imaju polucijeli spin, dok svi *mezoni* (hadroni s barionskim brojem nula) imaju cijeli spin. Nisu svi unutarnji kvantni brojevi uporabljeni da opisuju nezavisnost hadrona. Na primjer, naboj  $Q$  (u jedinicama naboja protona), treća komponenta izospina  $I_3$ , barionski broj  $\beta$  i stranost  $S$  su povezani *Gell-Man Nishijiminom* formulom, tako da je opća relacija koja uključuje hadrone s šarmom  $C$  i ljepotom  $B$  za lijeva i desna kvarkovska stanja prikazana u obliku:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\beta + S + C + B + T)_L, \quad (2.21)$$

gdje  $T$  predstavlja *top (vršni) kvark*. Ova jednadžba je važna za hadrone, dok su  $Q, I_3, \beta, S, C, T, B$  dodatni kvantni brojevi. Kvantni broj  $T$  je ovdje uveden iz čisto teorijskih razloga, jer je  $t$ -kvark toliko masivan da ne može formirati hadrone. Ponekad se rabe i drugi kvantni brojevi, npr. hipernaboja koji se označava s  $Y$ . On je povezan s drugim kvantnim brojevima putem relacije (za lijeva kvarkovska stanja):

$$Y_L = \beta + S + C + B + T. \quad (2.22)$$

Definicije kvantnih brojeva sadrže neka njihova važna svojstva, dok konvencije za  $C$  i  $B$  još uvijek nisu standardne. Za hadrone, unutarnji kvantni brojevi  $Q, I_3$  su zadani vrijednostima unutar veoma ograničenog dometa. Ove vrijednosti su takve da pokazuju da normalni barion može biti jednostavno promatran kao komponenta od 3 kvarka  $qqq$ , dok bi se mezon promatrao kao komponenta sačinjena od kvarka i antikvarka  $q\bar{q}$ . Kvarkovi koji određuju kvantne brojeve hadrona se u mnogim slučajevima nazivaju valentni kvarkovi.

Aromat	$(I_3)_L$	$(S/2)_L$	$(C/2)_L$	$(B/2)_L$	$(T/2)_L$	$(\beta/2)_L$	$Y_L$	Q
$d_L$	-1/2	0	0	0	0	1/6	1/3	-1/3
$u_L$	1/2	0	0	0	0	1/6	1/3	2/3
$s_L$	0	-1/2	0	0	0	1/6	-2/3	-1/3
$c_L$	0	0	1/2	0	0	1/6	4/3	2/3
$t_L$	0	0	0	-1/2	0	1/6	-2/3	-1/3
$b_L$	0	0	0	0	1/2	1/6	4/3	2/3

Tablica 2.4. Kvarkovi i njihovi kvantni brojevi za lijeva kvarkovska stanja i formulacija lijevog hipernaboja, za izračun električnog naboja rabljene relacije (2.21) i (2.22)

Aromat	Q	$Y_R$
$d_R$	-1/3	-2/3
$u_R$	2/3	4/3
$s_R$	-1/3	-2/3
$c_R$	2/3	4/3
$t_R$	-1/3	-2/3
$b_R$	2/3	4/3

Tablica 2.5. Kvarkovski aromati za desna kvarkovska stanja vrijednosti električnog naboja i formulacija desnog hipernaboja, za izračun rabljene relacije (2.21) i (2.22)

Ako želimo da predstavimo fermionska stanja  $SM$ -a i neke od njihovih brojeva, imamo sljedeću tablicu 2.6:

	Generacija						
	I	$I_3$	Y	Q	1	2	3
Leptoni	1/2	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	-1/2	0	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$
	0	0	-1	-1	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$
Kvarkovi	1/2	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1/3	+2/3	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$
	0	0	4/3	-1/3	$u_R$	$c_R$	$t_R$
	0	0	2/3	+2/3	$d_R$	$s_R$	$b_R$
				-1/3			

Tablica 2.6. Fermionska stanja  $SM-a$  i neki od njihovih kvantnih brojeva

	Fermioni		$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
Leptoni	$L_L$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	1	2	-1/2
	$L_R$	$e_R$	1	1	-1
Kvarkovi	$Q_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	3	2	+1/6
	$Q_R$	$u_R$	3	1	+2/3
		$d_R$	3	1	-1/3

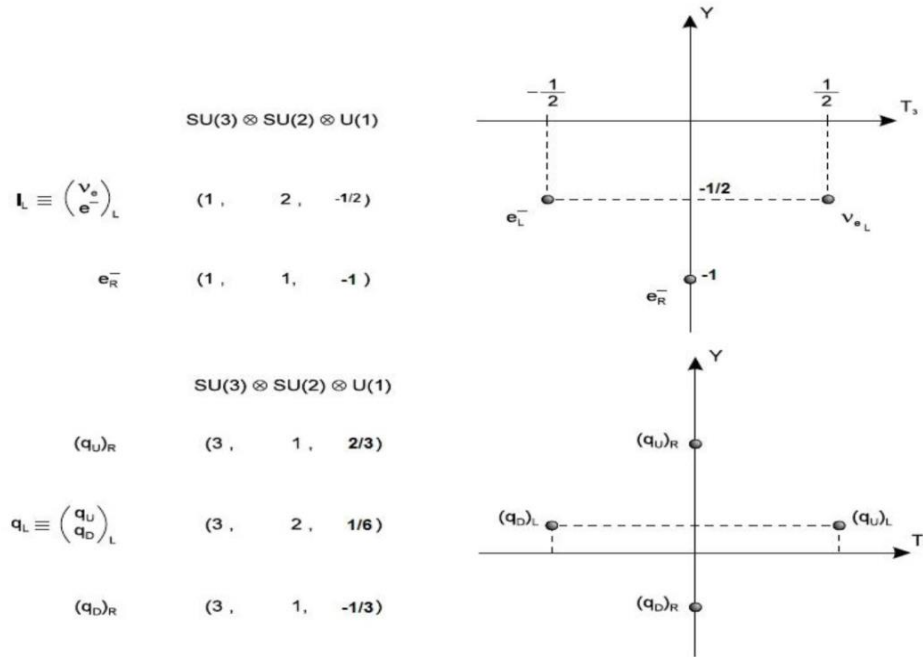
Tablica 2.7. Fermionska stanja  $SM-a$  i neki od njihovih kvantnih brojeva

Tri leptona (singleta u boji) uz četiri kvarka u tri boje čine navedenih petnaest stanja u (2.8) i (2.9). Eksplicitno, to su dvije leptonske reprezentacije,  $SU(3)_C$  singleti i tri kvarkovske reprezentacije koje se transformiraju po netrivialnoj reprezentaciji  $SU(3)_C$  grupe. Može se

spomenuti da se za petnaest stanja kojima se popunjavaju nezavisne reprezentacije mogla odabrati čisto lijeva stanja, s time da se umjesto desnih čestica uzmu lijeve antičestice:

$$l_R \rightarrow \bar{l}_L, \quad (q_U)_R \rightarrow (\bar{q}_U)_L, \quad (q_D)_R \rightarrow (\bar{q}_D)_L, \quad (2.23)$$

Dok je adjungiranje boje i slabog izospina očito, adjungiranje čak pet vrijednosti slabog hipernaboja traži dodatno pojašnjenje. Razlog leži u adjungiranoj *Abelovoj grupi* hipernaboja.



Tablica 2.8.

Ono što se da primjetiti iz *tablice 2.6* je da kada se želi predstaviti neka elementarna čestica iz *SM-a*, dovoljno je da se uz nju napišu tri odgovarajuća kvantna broja, koja će ustvari reći kojem multipletu unutar grupa simetrije ona pripada, tj. da li pripada unutar  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  multipleta. Time je umnoge olakšan posao kada želimo da promatramo određenu česticu, te da odredimo u kojim procesima ona može da sudjeluje, kao i to kakvi će biti kvantni brojevi neke novonastale čestice. Primjera radi, ako želimo da predstavimo *ljevoruki elektron*, onda je dovoljno napisati sljedeću notaciju:

$$e_L = (1, \quad 2, \quad -1/2)$$

$$SU(3), \quad SU(2), \quad U(1)$$

$$\text{singlet}, \quad \text{dublet}, \quad \text{hipernaboj } Y = 2(Q - I_3)$$

Iako se u *tablici 2.6* može vidjeti da je naboj elektrona  $e_L -1$ , to se unutar  $U(1)$  grupe predstavlja kao singlet. Znak minusa samo govori o brojnoj vrijednosti.

#### 2.4. Razlozi za proširenje $SM-a$

Nekoliko decenija nakon teorijskog postavljanja  $SM-a$  eksperimenti su potvrdili sva predviđanja ove teorije. Neka od postignuća  $SM-a$  su:

- razumijevanje jakih interakcija što omogućuje izračun svojstava nukleona – protona i neutrona, te ostalih hadrona s minimalnom točnošću
- razumijevanje svojstava slabih interakcija
- teorijsko predviđanje postojanja i izračun svojstava  $W^\pm$  i  $Z^0$  baždarnih bozona koji su prenositelji slabih interakcija u skladu s zapažanjima
- teorijsko predviđanje postojanja i izračun svojstava  $t$ -kvarka
- koncept spontanog loma simetrije i Higgsov mehanizam generiranja masa čestica
- ujedinjenje slabih i elektromagnetskih interakcija u jednu elektroslabu interakciju

Jedan od glavnih nedostataka  $SM-a$  je taj da  $SM$  nema dovoljno  $CP$  narušenje da bi proizveo količinu tvari u svemiru.

Pored toga,  $SM$  je već ukazao na moguće pravce formuliranja neke buduće, kompleksnije teorije elementarnih čestica na višim energijama. Mnogi fizičari tvrde da ovaj model nije konačna teorija elementarnih čestica, već samo vrlo dobra aproksimativna teorija na niskim energijama jer postoji nekoliko važnih problema na koje, unutar  $SM-a$ , nije moguće naći odgovor.

Iako  $SM$  nije ultimativna teorija elementarnih čestica, bilo koja buduća kompletnija teorija, u aproksimaciji u kojoj se mogu zanemariti gravitacijske interakcije, tj. na niskim energijama  $E \sim$  do 1 TeV, mora rezultirati efektivnom teorijom koja je upravo  $SM$ .

Dugo se vjerovalo da su neutrini čestice bez mase koje se prema tome kreću brzinom svjetlosti. Tek od 1998. godine iz rezultata eksperimenta *Super-Kamiokande* u Japanu indirektno znamo da neutrini ipak imaju masu, iako puno manju (masa elektronskog neutrina  $\nu_e$  manja je od  $\sim 2 \frac{eV}{c^2}$ ) od drugih fermiona. Postojanje različitih masa neutrina čini ih sličnijim drugim fermionima, ali i drastično povećava ukupni raspon fermionskih masa. Nekoliko velikih eksperimenata dizajniranih da precizno izmjere masu neutrina i parametre njihovih interakcija već uzimaju podatke ili su u zadnjim fazama pripreme za početak rada. Moguće je relativno lako proširiti  $SM$  tako da neutrini dobiju mase, a da se pri tome ne promijene druga svojstva teorije.

Postojanje mase neutrina znači da postoji miješanje različitih okusa neutrina (oscilacije neutrina) uz lom (iako jako malo) zakona očuvanja leptonskog broja.

*SM* ima devetnaest slobodnih parametara čije su vrijednosti izmjerene. Nedavna detekcija *Higgsovog bozona* bi trebala potvrditi pretpostavljeni mehanizam loma elektroslabe simetrije.

I pored velikog uspjeha *SM-a* postoje razlozi za njegovo proširenje vezani prije svega za predviđanja samog *SM-a* na izrazito visokim energijama bliskim *Planckovoj skali*,  $10^{19}$  GeV-a.

## 2.5. Yang-Millsova teorija

Do ranih 1950-ih, fizičari su bili upoznati s približnim globalnim simetrijama poput izospina. *Yang i Mills* su tvrdili da je lekcija *Einsteinove opće teorije* da simetrije, ako su fundamentalne, trebaju biti lokalne. U običnoj elektrodinamici, *baždarna simetrija* je *lokalna*, *Abelova simetrija*. *Yang i Mills* su pojasnili kako generalizirati ovo na *ne-Abelovu grupu simetrija*. Pogledajmo prvo slučaj elektrodinamike. Elektronsko polje,  $\psi(x)$ , se transformira pod *baždarnom transformacijom* kao:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) = g_\alpha(x)\psi(x). \quad (2.24)$$

Možemo zamisliti izraz  $g_\alpha(x) = e^{i\alpha(x)}$  kao grupni element u grupi  $U(1)$ . Grupa je *Abelova*,  $g_\alpha g_\beta = g_\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$ . Kvantiteti poput  $\bar{\psi}\psi$  su baždarno invarijantni, ali izrazi s derivacijama, poput  $i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$  nisu. Da bi se u jednadžbu gibanja uključili izrazi s derivacijama, važno je uvesti baždarno polje,  $A_\mu$ , koje se transformira pod transformacijom simetrije kao:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha = A_\mu + ig(x) \partial_\mu g^+(x). \quad (2.25)$$

Ovaj drugi oblik omogućava višu generalizaciju nego u *ne-Abelovom* slučaju. S zadanim  $A_\mu$  i baždarnim transformacijskim svojstvima, možemo definirati kovarijantnu derivaciju kao:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - iA_\mu)\psi. \quad (2.26)$$

Izraz za kovarijantnu derivaciju ima svojstvo da se transformira kao  $\psi$  pod simetrijom:

$$D_\mu \psi = g(x)D_\mu \psi. \quad (2.27)$$

Također se može formirati *baždarno-invarijantni objekt* jakosti *baždarnog polja*,  $F_{\mu\nu}$ . Jednostavan način da se ovo izvede je konstrukcija komutatora dvije kovarijantne derivacije:

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.28)$$

Ovaj oblik *baždarnih transformacija* može biti donekle nepoznat. U (2.26) se naboj elektrona  $e$  (*baždarna veza*) ne pojavljuje u baždarnoj transformaciji u (2.25). Umjesto toga, *baždarno vezanje* se pojavljuje uz kinetički član baždarnog polja u *baždarno-invarijantnom lagranžijanu*:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2. \quad (2.29)$$

Poznatija formulacija se dobija ako se uvede zamjena na sljedeći način:

$$A_\mu \rightarrow eA_\mu \quad (2.30)$$

U smislu ovog novog polja, baždarni zakon transformacije je oblika:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (2.31)$$

dok je kovarijantna derivacija oblika:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi. \quad (2.32)$$

Gornje razmatranje možemo generalizirati na *ne-Abelovu grupu*,  $G$ , definirajući  $\psi$  kao multiplet (*fermionski ili bozonski*) neke reprezentacije grupe.  $g(x)$  je tada matrica koja opisuje grupnu transformaciju koja djeluje u spomenutoj reprezentaciji grupe. U formalnom smislu, transformacijski zakon je isti kao prije:

$$\psi \rightarrow g(x)\psi(x), \quad (2.33)$$

ali je zakon o kompoziciji grupnih elemenata složeniji, konkretno grupno množenje nije komutativno, pa se dobija da je,

$$g_\alpha g_\beta \neq g_\beta g_\alpha \quad (2.34)$$

*Baždarno polje*,  $A_\mu$  koje sada predstavlja *matrix-valued* polje, se transformira u adjungiranu reprezentaciju *baždarne grupe* kao:

$$A_\mu \rightarrow gA_\mu g^+ + ig(x) \partial_\mu g^+(x). \quad (2.35)$$

Kovarijantna derivacija formalno, izgleda točno kao i u prethodnom slučaju:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - iA_\mu)\psi, \quad D_\mu\psi \rightarrow g(x)D_\mu\psi. \quad (2.36)$$

Kao i  $A_\mu$ , jakost polja je *matrix-valued* element:

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.37)$$

Važno je spomenuti da  $F_{\mu\nu}$  nije *baždarno invarijantno*, nego je kovarijantno:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow gF_{\mu\nu}g^+, \quad (2.38)$$



i da se transformira kao polje u adjungiranoj reprezentaciji. *Baždarno-invarijantni lagranžijan* je formalno sasvim identičan kao u U(1) reprezentacijskoj teoriji:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2g^2} \text{Tr}F_{\mu\nu}^2. \quad (2.39)$$

Ovdje je rabljeno slovo za označavanje konstante vezanja, znači  $e$  je uporabljeno za označavanje naboja elektrona, a  $g$  za konstantu vezanja. Također je važno uporabiti trag  $F_{\mu\nu}^2$  da bi se dobio *baždarno-invarijantan* izraz.

$A_\mu$  se može napisati kao:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^a T_a, \quad (2.40)$$

gdje  $T_a$  predstavlja generatore grupe  $G$  u reprezentaciji koja odgovara polju  $\psi$ . Generatori zadovoljavaju komutativnu relaciju:

$$[T^a T^b] = if^{abc} T^c, \quad (2.41)$$

gdje  $f^{abc}$  predstavljaju strukturne konstante grupe. U fundamentalnoj reprezentaciji generatori se normaliziraju tako da vrijedi:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (2.42)$$

Na kraju se dobijaju izrazi:

$$A_\mu^a = 2\text{Tr}(T_a A^\mu); \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.43)$$

Iako su formalno gotovo identične, postoje velike razlike između *Abelovih i ne-Abelovih teorija*. Možda je najupečatljivija razlika da su jednačbe za  $A_\mu$  nelinearne u *ne-Abelovim teorijama*. To ponašanje znači da je, za razliku od slučaja *Abelovih baždarnih polja*, teorija *ne-Abelovih* polja bez tvari netrivialna, interagirajuća teorija s zanimljivim svojstvima.

Polje tvari  $\psi$  se može pojaviti u bilo kojoj reprezentaciji grupe; samo treba odabrati odgovarajuće matrice  $T^a$ . Također se mogu razmotriti skalari, kao i fermioni. Za skalarno polje  $\varphi$ , se definira kovarijantna derivacija,  $D_\mu\varphi$  kao i prije, i pri akciji se pridodaje pojam  $|D_\mu\varphi|^2$  za kompleksno polje, ili  $(1/2)(D_\mu\varphi)^2$  za realno polje.

## 2.6. Kvantizacija Yang-Millsove teorije

U *Yang-Millsovoj teoriji*, u većini situacija u prirodi na koje treba obratiti pozornost, zainteresirani smo za kvantno ponašanje slabih i jakih interakcija, dok *Abelova teorija* opisuje

ponašanje *QED*-ja. Može se rabiti kanonska kvantizacija u *baždarenju*, kao npr. *Coulombovo baždarenje*, iz čije unitarnosti slijedi da sva stanja sadrže pozitivnu normu, ili se može odabrati baždarenje u kojem je *Lorentzova invarijantnost* očita, ali ne i unitarna. U *QED*-ju se sve može prikazati pomoću *Feynmanovih dijagrama* tako da su odabiri baždarenja ekvivalentni. U *ne-Abelovim teorijama*, kanonska kvantizacija je još izazovnija. Metode integrala po trajektorijama pružaju mnogo snažniji pristup kvantizaciji tih teorija.

Obratit ćemo pozornost na baždarno fiksiranje i deriviranje pomoću *Feynmanovih pravila*. Počev od samog *baždarnog* polja dodavanje materijalnih skalarnih ili fermionskih polja nije teško. Integracije po trajektorijama se mogu predstaviti kao:

$$Z_1 = \int [dA_\mu] e^{iS}, \quad (2.44)$$

gdje je  $S$  akcija razmatranog sistema koji sadrži *Yang-Milsova polja*. Problem je u tome što ovaj integral sadrži beskonačnost zbog interakcija po baždarno ekvivalentnim poljima. Problem se rješava *Faddeev-Popovim metodom* koji u (2.44) uvodi jedinicu koja sadrži baždarni uvjet:

$$G^a(A_\mu^a) = \partial_\mu A^{\mu a} = g = 0. \quad (2.45)$$

Na sljedeći način, kada se u prethodni izraz uvrsti broj 1 dobija se da je:

$$1 = \int [dg] \delta(G(A_\mu^g)) \Delta[A]. \quad (2.46)$$

U izrazu (2.46)  $G$  predstavlja opći *baždarni fiksirajući uvjet*,  $A_\mu^g$  označava *baždarnu transformaciju* od  $A_\mu$  baždarnom transformacijom  $g$ , a  $\Delta$  predstavlja funkcionalnu determinantu, odnosno *Faddeev-Popovu determinantu*. Treba imati na umu da je integralni izraz u (2.46) baždarno invarijantan, tj. da je  $\Delta[A^h] = \Delta A$ . Ovo slijedi iz jednadžbe:

$$\int [dg] \delta(G(A_\mu^{hg})) = \int [dg] \delta(G(A_\mu^g)), \quad (2.47)$$

gdje je u posljednjem koraku napravljena zamjena varijabli  $g \rightarrow h^{-1}g$ . Rabeći to svojstvo za determinantu  $\Delta$  se može napisati eksplicitniji izraz. Da bi se ovo provelo, važno je definirati izraz za vrijednost  $A^g$  pod infintezimalnom baždarnom transformacijom  $g$ . Ako stavimo da je  $g = 1 + i\omega$ , i rabljenjem matričnog izraza za *baždarno* polje dobija se sljedeći izraz:

$$A_\mu^h - A_\mu \equiv \delta A_\mu = \partial_\mu \omega + i[\omega, A_\mu]. \quad (2.48)$$

Ovo se može prikladnije definirati kao kovarijantna derivacija od  $\omega$ , gdje se za  $\omega$  podrazumijeva da predstavlja polje u adjungiranoj reprezentaciji:

$$\delta A_\mu = D_\mu \omega. \quad (2.49)$$

Ako se sada odabere specifičan izbor takav da je  $G = \partial_\mu A^\mu$ , da bi se odredilo  $\Delta$  trebalo bi razviti  $G$  oko polja  $A_\mu$  za koje je  $G = 0$ :

$$G(A + \delta A) = \partial_\mu D^\mu \omega = \partial^2 \omega + i[A_\mu, \partial_\mu \omega]. \quad (2.50)$$

ili, u indeksnoj formi kao:

$$G(A_\mu^a) = (\partial^2 \delta^{ac} + f^{abc} A^{\mu b} \partial_\mu) \omega^c. \quad (2.51)$$

Tako da je:

$$\Delta[A] = \det[\partial^2 \delta^{ac} + f^{abc} A^{\mu b} \partial_\mu]^{-1/2}. \quad (2.52)$$

Uvrštavajući izraz (2.52) u (2.44) i rabeći invarijantnost  $[dA_\mu] e^{iS}$  na baždarne transformacije dobija se da je:

$$Z_1 = \int [dg] \int [dA_\mu^g] \delta(G(A^g)) \Delta(A^g) e^{iS_g} = \int dg Z. \quad (2.53)$$

U ovoj fazi je smanjena integracija po trajektorijama, pa izraz za  $Z$  ima oblik:

$$Z = \int [dA_\mu] \delta(G(A)) \Delta[A] e^{iS} \quad (2.54)$$

Izraz za  $\delta$ -funkciju se može pojednostaviti uporabom integracije po konstanti  $S$  iz baždarnog uvjeta (2.45) s *Gausijanskim težinskim faktorom*:

$$Z = \int [d\rho] e^{i \int e^{i d_x^4 (\rho^2 / \xi)} \sum \int [dA_\mu] \delta(G(A)) \Delta[A] e^{iS}. \quad (2.55)$$

Potom se može razviti integral preko  $\delta$ -funkcije, pa se kvadratni izrazi u eksponentu sada mogu predstaviti kao:

$$\int d_x^4 A^{\mu a} \left[ -\partial^2 \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] A^{\nu b}. \quad (2.56)$$

U impulsnom prostoru bi propagator izgledao kao:

$$D_{\mu\nu} = - \frac{\eta_{\mu\nu} + (\xi-1) k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.57)$$

Za pisanje eksplicitnih *Feynmanovih pravila*, trebalo bi se također pozabaviti *Faddeev-Popovom determinantom*. Feynman je odavno pogodio da se problemi unitarnosti *Yang-Millsove teorije* mogu rješavati uvođenjem fiktivnih skalarnih polja s pogrešnom statistikom.

Izraz za  $\Delta$  bi se mogao prikazati pomoću funkcionalnog integrala za takvu česticu kao:

$$\Delta[A] = \int [dc^a] [dc^{a^\dagger}] \exp[i \int d_x^4 (c^{a^\dagger} (\partial^2 \delta^{ac} + f^{abc} A^{\mu c} \partial_\mu) c^b)]. \quad (2.58)$$

## 2.7. Baždarno fiksiranje u teorijama s slomljenom baždarnom simetrijom

Razmotrimo prvo U(1) baždarnu teoriju s jednim nabijenim skalarnim poljem,  $\phi$ . Može se pretpostaviti izraz za vakuumski očekivanu vrijednost polja  $\phi$ . Potom se polje  $\phi$  može parametrizirati kao:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x))e^{(i\pi)/v}. \quad (2.59)$$

Tada se može ponovno odabrati baždarenje u kojem je  $\pi(x)=0$ . Ovo baždarenje je poznato kao *unitarno baždarenje* jer se u njemu nalaze samo fizikalni stupnjevi slobode: masivni *baždarni bozon* i *jedno realno skalarno polje*. Međutim, ovo baždarenje nije prikladno za izračun. Propagator *baždarnog bozona* u ovom baždarenju je dan formulom:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{k^2 \cdot M_V^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2} \right). \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \text{wavy line } a \rightarrow b \text{ with } k &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \\ \text{straight line } i \rightarrow j \text{ with } p &= \frac{i}{\not{p}} \delta_{ij} \\ \text{wavy line } a &= ig\gamma^{\mu}t^a \\ \text{vertex } b, \nu \text{ (p), } a, \mu \text{ (k), } c, \rho \text{ (q)} &= gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \\ \text{vertex } a, \mu \text{ (top), } b, \nu \text{ (top), } c, \rho \text{ (bottom), } d, \sigma \text{ (bottom)} &= ig^2 [f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &\quad + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \\ \text{dashed line } a \rightarrow b &= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \\ \text{vertex } a, c \text{ (dashed), } b, \mu \text{ (wavy)} &= -gf^{abc}p^\mu \end{aligned}$$

Slika 2.1. Feynmanova pravila za Yang-Millsovu teoriju

Zbog faktora s impulsima u drugom članu propagatora, pojedinačni *Feynmanovi dijagrami* imaju loše visokoenergetsko ponašanje. Prikladniji skup baždarenja, poznatija kao  $R_\xi$  baždarenja, izbjegava ovu poteškoću, po cijeni zadržavanja bezmasenog  $\pi$  polja (znanog *Goldstoneova čestica*) u *Feynmanovim pravilima*. Prilikom integracije po trajektoriji, *baždarno-fiksirajuća funkcija* se definira na sljedeći način:

$$G = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left( \partial_\mu A_\xi^\mu - e v \pi(x) \right). \quad (2.61)$$

Dodatni izraz je razborito odabran, jer kada ga eksponentiramo, izraz  $A^\mu \partial_\mu \pi$  se poništava. Eksplicitno se dobija sljedeći izraz:

$$L = -\frac{1}{2} A_\mu \left( \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu - (e^2 v^2) \eta^{\mu\nu} \right) A_\nu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{\xi}{2} (e v)^2 \pi^2 + O(\phi^3). \quad (2.62)$$

Ako se odabere da je  $\xi = 1$  (t *Hooft-Feynmanovo baždarenje*), propagator za baždarni bozon će imati jednostavan oblik:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -\frac{i}{k^2 - M_V^2} \eta_{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

s  $M^2 = e^2 v^2$ , ali također postoji i polje  $\pi$  eksplicitno u lagranžijanu, koje ima propagator oblika:

$$\langle \pi \pi \rangle = \frac{i}{k^2 - M_V^2}. \quad (2.64)$$

Ovdje se radi samo o masi vektorskog bozona.

Ovaj izbor baždarenja je lako proširen na *ne-Abelove teorije*, s sličnim rezultatima: *baždarni bozoni* sadrže jednostavne propagatore, poput onih masivnih skalara pomnoženih s  $\eta_{\mu\nu}$ . *Goldstoneovi bozoni* se eksplicitno pojavljuju u perturbacijskoj teoriji s propagatorima koji odgovaraju masivnim poljima. *Faddeev-Popovi duhovi* imaju veze u skalarnim poljima.

## 2.8. Yang-Millsove (ne-Abelove) baždarne teorije za kvarkove i leptone

Eksperimentalni podaci indiciraju da se elementarne čestice tvari (kvarkovi i leptoni – fermioni spina 1/2) grupiraju u multiplete  $\psi$  koji čine fundamentalne reprezentacije grupe unutarnjih simetrija. Simetrija *lagranžijana elementarnih čestica* mora biti *Lieva grupa lokalnih baždarnih transformacija*, jer to osigurava mogućnost izbora faze fermionskih (kvarkova i leptona) polja u svakoj prostorno-vremenskoj točki. Interakcije (sile) među česticama se onda generiraju uvođenjem u teoriju *bezmasenih baždarnih bozona* koji su prenositelji jakih i elektroslabih

interakcija. Slično, kao u primjeru kvantne elektrodinamike koja je  $U(1)_{ED}$  lokalno baždarno invarijantna teorija, lagranžijan interakcije baždarnog bozona  $L_{int}^{(1)}$  se dobija zamjenom obične derivacije kovarijantnom:  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ . U *SM-u*, grupa lokalnih baždarnih transformacija teorije je  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

$U(1)_Y$  baždarna grupa je *Abelova* i ranga je 1, te ima samo jedan generator i zahtijeva samo jedno vektorsko polje  $B_{(x)}^\mu$  baždarnog bozona. Kovarijantna derivacija je  $D^\mu = \partial_\mu + ig_1 B^\mu$ .

Baždarne transformacije su:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-\Lambda(x)}\psi(x), \quad B^\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x) = B^\mu(x) + \frac{1}{g_1}\partial^\mu\Lambda(x). \quad (2.65)$$

Sa  $g_1$  je označena proizvoljna konstanta vezanja.

Grupe baždarnih simetrija jakih i slabih interakcija su  $SU(3)$  i  $SU(2)$ , tako da se faza fermionskih polja transformira *ne-Abelovom lokalnom baždarnom transformacijom*:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\frac{\vec{\lambda}}{2}}\psi(x); \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\vec{\epsilon}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}}\bar{\psi}(x), \quad (2.66)$$

Generatori  $SU(2)$  grupe su  $T_i = \frac{\tau_i}{2}$ , gdje su  $\tau_i$  ( $i = 1,2,3$ ) *Pauljeve matrice*. Generatori  $SU(3)$  grupe  $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ , ( $a = 1,2, \dots, 8$ ) su *Gell-Mannove matrice*.

Da bi se definirala kovarijantna derivacija za  $SU(2)$  grupu važno je u teoriju uvesti tri vektorska polja baždarnih bozona (za svaki generator grupe po jedan baždarni bozon)  $W_i^\mu(x)$ , tako da je kovarijantna derivacija:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu, \quad (2.67)$$

gdje je  $g_2$  konstanta vezanja slabih interakcija (slabi naboj), koja ima istu vrijednost za sva tri slaba baždarna bozona  $W_i^\mu$ .

U *SM-u* želimo opisati i slabe i elektromagnetske interakcije fermiona – kvarkova i leptona. Grupa baždarnih simetrija *elektro-slabih interakcija*  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ima rang 4, pa zahtijeva 4 baždarna bozona  $W_i^\mu(x)$ , ( $i = 1,2,3,\dots$ ) za  $SU(2)_L$  i  $B^\mu(x)$  za  $U(1)_Y$ . Baždarna grupa lokalnih transformacija faze fermionskih polja u *SM-u* se označava kao  $U(1)_Y$  i naziva se  $U(1)$  grupa slabog hipernaboja.  $U(1)_Y$  grupa je različita od  $U(1)_{ED}$  grupe elektrodinamike. A priori, nemamo razloga vjerovati da  $U(1)_Y$  simetrija fermiona u lagranžijanu *SM-a* točno odgovara  $U(1)_{ED}$  simetriji elektrodinamike koju generiraju električni naboji  $Q$  čestica. Generator grupe  $U(1)_Y$  je  $Y$  ( $Y$  je samo realan broj), a njegov kvantni broj  $Y$  naziva se *slabi hipernaboj* i može

biti različit za polja različitih fermiona. Hipernaboj nije jednak električnom naboju čestice  $Q$ , ali je s njim povezan jednostavnom vezom  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ , gdje je  $T_3 = \frac{\tau_3}{2}$  treća komponenta  $SU(2)_L$  slabog naboja. Električni naboj je zbroj treće komponente slabog izospina i polovice hipernaboja.

$SU(2) \times U(1)$  kovarijantna derivacija je onda:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} \cdot B^\mu + ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_i^\mu, \quad (2.68)$$

gdje su  $g_1$  i  $g_2$ , za sada proizvoljne konstante vezanja  $U(1)_Y$  i  $SU(2)_L$  grupa koje određuju jakost *elektroslabih interakcija*.

U principu, kovarijantna derivacija može djelovati na fermionska polja  $\psi$  aranžirana u multiplet bilo koje reprezentacije dimenzije  $(2s + 1)$  grupe  $SU(2)$  koje se nazivaju:  $s = 0$  singlet,  $s = 1/2$  dublet,  $s = 1$  vektor, itd. Tada se u kovarijantnoj derivaciji  $SU(2)$  član pojavljuje kao skalarni produkt generatora  $SU(2)$  grupe i polja *baždarnog bozona*  $ig_2 T_i W_i^\mu = ig_2 \cdot \vec{T} \cdot \vec{W}^\mu$ , gdje  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) predstavljaju *hermitske marice* reda  $(2s + 1)$  koje su reprezentacija generatora grupe. Za singletnu reprezentaciju  $s = 0$  generatori su  $T_i = 0$ ; za fundamentalnu  $s = 1/2$  generatori su  $\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2}$ ; a za  $s = 1$  adjungiranu reprezentaciju pomoću  $3 \times 3$  matrica je  $T_{a(bc)} = +if_{abc} = +i\varepsilon_{abc}$ , matrice generatora  $T_a$  su eksplicitno date u sljedećoj formuli:

$$T_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Kako je ukupna *grupa baždarnih simetrija lagranžijana materije*  $L_m$  (*kvarkova i leptona i Higgs bozona*) u *SM-u* ustvari  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  (indeks  $L$  označava da samo lijevi fermioni nose taj kvantni broj), lako je u kompaktnom obliku napisati kompletnu kovarijantnu derivaciju dodajući  $SU(3)$  član:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_1 \frac{Y}{2} \cdot B^\mu + ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot W_i^\mu + ig_3 \frac{\lambda_a}{2} \cdot G_a^\mu, \quad (2.70)$$

gdje su  $SU(2)$  indeksi  $i = 1, 2, 3 \dots$ , a  $SU(3)$  indeksi su  $a = 1, 2, \dots 8$ . Prva dva člana u (2.70) su singleti u  $SU(2)$  i  $SU(3)$  prostoru. Treći član je  $2 \times 2$  matrica u  $SU(2)$  prostoru i singlet u  $SU(3)$  prostoru, a zadnji član je  $3 \times 3$  matrica u prostoru  $SU(3)$ , a singlet u prostoru  $SU(2)$ . Da bi se uporabila ova kompaktna notacija mora se dodatno pretpostaviti da  $SU(2)$  i  $SU(3)$  članovi iz (2.70) uvijek daju nulu kad djeluju na spinor „*pogrešne dimenzije*“ – kad treći član djeluje na  $1 \times 1$  matricu (broj) ili  $3 \times 1$  matricu daje nulu, kao i kad četvrti član djeluje na  $1 \times 1$  matricu

ili  $2 \times 1$  matricu rezultat je nula.

Osam gluona, obojanih baždarnih *bozona*  $G_a^\mu$  bez mase, su prenositelji jakih interakcija među kvarkovima. Konstante interakcije  $g_1, g_2$  i  $g_3$  su proizvoljne, ali ako ih odredimo iz eksperimenta za jednu reprezentaciju fermiona ostaju fiksirane za svaku reprezentaciju – na primjer, ako izmjerimo  $g_2$  za elektron, znamo ga i za mion. Mjerenje jakosti interakcije baždarnih bozona s jednim fermionom fiksira konstantu te interakcije s svim preostalim fermionima i baždarnim bozonima. Izraz (2.70) za kovarijantnu derivaciju je “*najvažnija*” jednačba *SM-a*, jer na vrlo kompaktan način sublimira sva dosadašnja teorijska i eksperimentalna saznanja o elementarnim česticama. Taj izraz također implicira na to da sve elementarne čestice imaju lokalnu  $U(1)$  *baždarnu simetriju* koja rezultira elektromagnetskim interakcijama; sve elementarne čestice imaju i lokalnu  $SU(2)$  *baždarnu simetriju* koja rezultira slabim interakcijama; sve elementarne čestice imaju i treću unutarnju simetriju pri lokalnim baždarnim transformacijama koje tvore  $SU(3)$  grupu i koja rezultira jakim interakcijama među tim česticama. Sve tri vrste interakcija (sila) među elementarnim česticama kompletno su opisane poljima odgovarajućih vektorskih (baždarnih) bozona adjungiranih generatorima grupa tih unutarnjih lokalnih *baždarnih simetrija*–  $B^\mu(x)$  za jedan generator  $U(1)_Y$  grupe, tri  $W_i^\mu(x)$  za tri generatora  $SU(2)_L$  i osam gluona  $G_a^\mu(x)$  za osam generatora  $SU(3)_c$ .

U slučaju *ne-Abelove*  $SU(2)$  *baždarne grupe* ne znamo lokalne baždarne transformacije vektorskih polja  $W_i^\mu(x)$ . Da se one nađu dovoljno je promatrati samo infinitezimalne  $SU(2)$  baždarne transformacije:

$$W_i^\mu(x) = W_i^\mu(x) + \delta W_i^\mu(x), \quad (2.71)$$

gdje je  $\delta W_i^\mu(x)$  prvog reda po infinitezimalnom parametru baždarne transformacije  $\varepsilon_i(x)$ . Osnovni zahtjev je da se kovarijantna derivacija pri lokalnim baždarnim transformacijama mijenja na isti način kao i fermionska polja (2.67), tj. da i u slučaju  $SU(2)$  vrijedi:

$$D^\mu \psi'(x) = e^{i\vec{\varepsilon}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} D^\mu \psi(x). \quad (2.72)$$

Uvrštavanjem (2.71) u (2.72) i zamjenjujući  $e^{i\vec{\varepsilon}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} \cong 1 + i\varepsilon_j(x) \frac{\tau_j}{2} + O(\varepsilon^2)$ , s točnošću do na prvi red po infinitezimalnom parametru  $\varepsilon_i$ , lijeva strana jednačbe (2.72) je:



$$\begin{aligned}
LSJ = D^\mu \psi' &\cong (\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot W_i^\mu) \left(1 + i\varepsilon_j \frac{\tau_j}{2}\right) \psi = (\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot W_i^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot \\
\delta W_i^\mu) &\left(1 + i\varepsilon_j \frac{\tau_j}{2}\right) \psi = \partial^\mu \psi + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot W_i^\mu \psi + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot \delta W_i^\mu \psi + i \frac{\tau_i}{2} \partial^\mu (\varepsilon_i \psi) - g_2 \frac{\tau_i \tau_j}{4} W_i^\mu \varepsilon_j \psi + \\
i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i \partial^\mu \psi &= \left[ \partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \cdot \delta W_i^\mu \psi + i \frac{\tau_i}{2} (\partial^\mu \varepsilon) - g_2 \frac{\tau_i \tau_j}{4} W_i^\mu \varepsilon_j \right] \psi + i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i (\partial^\mu \psi),
\end{aligned} \tag{2.73}$$

gdje smo zanemarili član višeg reda  $\varepsilon \delta W$ .

Desna strana jednadžbe (2.73) je:

$$DSJ = e^{i\vec{\varepsilon}(x) \cdot \vec{\tau}} D^\mu \psi(x) = \left(1 + i\varepsilon_i \frac{\tau_i}{2}\right) \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_j}{2} \cdot W_j^\mu\right) \psi = \left(\partial^\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu - g_2 \frac{\tau_j \tau_i}{4} \varepsilon_j W_i^\mu\right) \psi + i \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_i (\partial^\mu \psi). \tag{2.74}$$

Prvi, drugi i četvrti član na desnoj strani se pokrate s odgovarajućim članovima na lijevoj strani i kako jednakost mora važiti za svaku vrijednost polja  $\psi(x)$ , rješavajući po  $\delta W_i^\mu(x)$  se dobiva:

$$\tau_i \delta W_i^\mu + \frac{1}{g_2} (\partial^\mu \varepsilon) \tau_i + \frac{1}{2} \varepsilon_j W_j^\mu (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i) = 0, \tag{2.75}$$

a kako je komutator *Paulijeva matrica*  $[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \tau_k$ :

$$\tau_i \left( \delta W_i^\mu + \frac{1}{g_2} \partial^\mu \varepsilon_i + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j W_k^\mu \right) = 0. \tag{2.76}$$

Zbog linearne nezavisnosti *Paulijevih matrica*, konačno je:

$$\delta W_i^\mu(x) = -\frac{1}{g_2} \partial^\mu \varepsilon_i(x) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j(x) W_k^\mu(x). \tag{2.77}$$

Izraz (2.74) pokazuje da se pri lokalnoj baždarnoj transformaciji iz SU(2) grupe polja  $W_i^\mu(x)$  *baždarnih bozona* "rotiraju" jedna u drugu, za razliku od slučaja *Abelove U(1) baždarne grupe* (2.70) kad lokalna baždarna transformacija polja  $B^\mu(x)$  uključuje samo prvi član u (2.77). Jasno je da se dodatni član pojavljuje kad god komutator generatora grupe nije nula, tj. kad je *baždarna grupa ne-Abelova*. Da bi se precizno razumjelo značenje drugog člana u (2.77) važno je razmotriti kako se vektor polja baždarni bozon  $\vec{W}^\mu$  [vektor u SU(2) unutarnjem prostoru, tj.  $3 \times 1$  matrica] transformira pri SU(2) *baždarnoj transformaciji*:

$$\vec{W}_i^\mu = e^{i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{T}} \vec{W}^\mu, \tag{2.78}$$

gdje je  $T_i$  odgovarajuća  $s = 1$  adjungirana reprezentacija generatora SU(2) za koju je:

$$(T_i)_{jk} = -if_{ijk} = -i\varepsilon_{ijk}. \tag{2.79}$$

Za infinitezimalnu transformaciju vektora se dobija da je:

$$W_i^\mu \cong (1 + i\varepsilon_k T_k)_{ij} W_j^\mu = W_j^\mu + i\varepsilon_k (-i\varepsilon_{kij}) W_j^\mu = W_j^\mu - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_j W_k^\mu = W_i^\mu + \delta W_i^\mu, \quad (2.80)$$

što odmah daje promjenu vektora  $\vec{W}^\mu$  polja baždarnog bozona uslijed rotacije u SU(2) unutarnjem prostoru teorije:

$$\delta W_i^\mu = -\varepsilon_{ijk} \varepsilon_k W_j^\mu, \quad (2.81)$$

upravo drugi član u (2.77).

Potpuno analogno s (2.77), za SU(3) grupu infinitezimalna *baždarna transformacija polja gluona* određena parametrom  $\omega_\alpha(x)$  je:

$$\delta G_a^\mu(x) = -\frac{1}{g_3} \partial^\mu \omega_\alpha - f_{abc} \omega_b G_c^\mu. \quad (2.82)$$

*Kako konstruirati Yang-Mills teoriju?*

Polazeći od *renormalizabilnog lagranžijana*  $L_m^{(1/2)}(\psi_i, \partial^\mu \psi_i)$  tvari koji ovisi o elementarnim česticama (fermionima spina 1/2) opisanih *Diracovim poljima*  $\psi_i$  (lagranžijan tvari može uključivati i čestice spina 0 opisane skalarnim poljima  $\phi_i$ ), bez mase. Pretpostavimo da je  $L_m$  invarijantan pri nekim globalnim (parametar transformacije  $\varepsilon_\alpha$  je konstanta koja ne ovisi o točki  $x^\mu$  prostor-vremena) *baždarnim transformacijama* – koje su to baždarne transformacije, tj. koju *Lievu grupu* one tvore, mora nam reći eksperiment. Infinitezimalna *globalna baždarna transformacija* polja tvari je oblika :

$$\delta \psi_i(x) = i\varepsilon_\alpha (T_\alpha)_{ij} \psi_j(x), \quad (2.83)$$

gdje su  $T_\alpha$  generatori *baždarne grupe* koji zadovoljavaju komutativne relacije *Lieve algebre*:

$$[T_\alpha, T_b] = if_{abc} T_c, \quad (2.84)$$

a  $f_{abc}$  su strukturne konstante grupe.

Najopćenitiji renormalizabilni način da se elementarne čestice iz  $L_m$  vežu s kolekcijom čestica spina 1 (*baždarnim bozonima*) je sljedeći recept:

- u teoriju se uvede po jedno vektorsko polje baždarnog bozona  $W_a^\mu(x)$  za svaki generator  $T_\alpha$  iz *Lieve algebre grupe baždarnih simetrija*,
- posvuda u  $L_m$  zamijene se obične prostorno-vremenske derivacije  $\partial^\mu$  kovarijantnim derivacijama  $D^\mu$  na način da je:

$$D^\mu \psi_i(x) \equiv \partial^\mu \psi_i(x) + ig W_a^\mu(x) (T_\alpha)_{ij} \psi_j(x), \quad (2.85)$$

- teorijskom lagranžijanu se doda *lagranžijan*  $L_g^{(1)}$  *baždarnih bozona* na sljedeći način:

$$L_g^{(1)} = -\frac{1}{4} W_a^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^a, \quad (2.86)$$

gdje je tenzor polja *baždarnog bozona*  $W_a^\mu(x)$  definiran kao u (2.80):

$$W_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu W_a^\nu(x) - \partial^\nu W_a^\mu(x) - g f_{abc} W_\mu^b(x) W_\nu^c(x), \quad (2.87)$$

- ukupni lagranžijan  $L_{YM}$  tako dobijene *Yang-Millsove teorije* se definira kao:

$$L_{YM} = L_m^{(1/2)}(\psi_i, D^\mu \psi_i) + L_g^{(1/2)}(W_a^\mu, \partial^\nu W_a^\mu), \quad (2.88)$$

invarijantan je (ustvari,  $L_m$  i  $L_g$  su odvojeno invarijantni) pri lokalnim ili "*baždarnim*" poopćenjem *globalnih transformacija* (2.83), tj. pri transformacijama:

$$\delta W_a^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{g} \partial^\mu \varepsilon_\alpha(x) - f_{abc} \varepsilon_b(x) W_c^\mu(x), \quad (2.89)$$

$$\delta \psi_i(x) = i \varepsilon_\alpha (T_\alpha)_{ij} \psi_j(x). \quad (2.90)$$

*SM* elementarnih čestica je ovakva *ne-Abelova lokalno baždarno invarijantna teorija* čija je baždarna grupa  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Takva teorija je u oštroj suprotnosti s eksperimentima. Problem je u masama čestica – sve čestice u teoriji su bez mase, a eksperiment pokazuje da sve elementarne čestice (osim fotona i gluona) *imaju masu!* Problem je očit u slučaju *slabih baždarnih bozona* – svi baždarni bozoni u ovakvoj teoriji su bez mase i generiraju sile dugog dometa kao *elektromagnetska interakcija*. Ali, u realnosti su slabe interakcije izuzetno kratkog dometa svega  $\leq 10^{-17}$  m, što znači da su mase slabih baždarnih bozona velike i iznose 80,4 GeV za  $W^\pm$  i 91,2 GeV-a za  $Z$ . Da bi *Yang-Millsove teorije* mogle opisati ponašanje realnih elementarnih čestica mora se pronaći način da se u teoriju uvedu mase čestica, ali tako da se očuva *lokalna baždarno invarijantnost* teorije koja osigurava *renormalizabilnost*.

### 3. Prenositelji interakcija

#### 3.1. Baždarni bozoni

Prema *SM-u*, s obzirom na vrijednost spina, sve elementarne čestice dijele se u dvije velike grupe: fermione i bozone. U fermione spadaju elementarne čestice koje izgrađuju svu poznatu tvar u svemiru, dok u bozone spadaju elementarne čestice koje se nazivaju *baždarni bozoni*. To su bozoni koji nemaju unutarnju strukturu, u potpunosti su elementarni i definiraju se kao čestice prenositelji (medijatori) tri temeljne sile prirode, ne računajući gravitaciju.

Trenutačno u *SM-u* postoje tri vrste *baždarnih bozona*: *gluon*, *foton*, te *Z* i *W* bozon. Ove čestice vrše sve interakcije između čestica tvari i poneke od njih između samih sebe, pri čemu je svaka od njih odgovorna za jednu interakciju. Najpoznatiji bozon je *foton*, prenositelj elektromagnetske sile koja je odgovorna za pojavu struje, magnetizma i svjetlosti. *W* i *Z* bozon

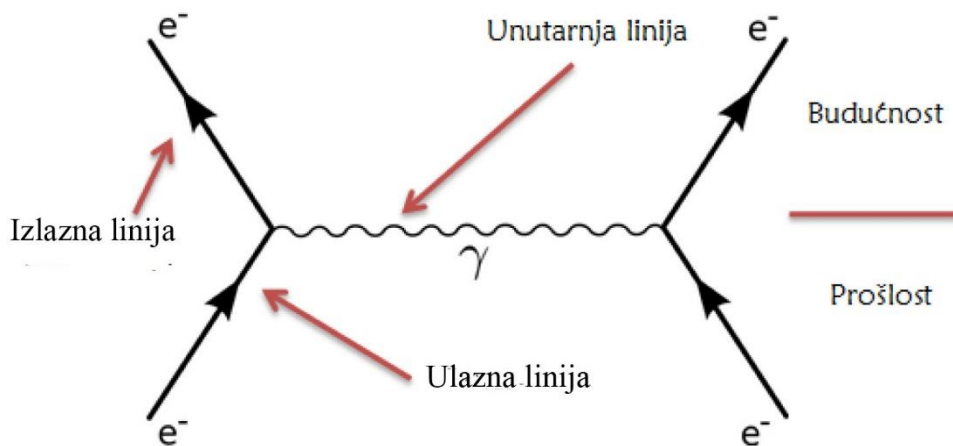
su prenositelji slabe nuklearne sile, a *gluon* jake nuklearne sile koja vezuje kvarkove u hadrone (*protone, neutrone, ...*).

Iako jedna od temeljnih sila prirode, gravitacija nije dio *SM-a*. Znanstvenici još nisu sigurni kako je moguće ovu silu usuglasiti s kvantnom teorijom *SM-a*.

Postoje pretpostavke da bi se ovaj problem gravitacije možda mogao riješiti postojanjem, zasad još uvijek, hipotetskog baždarnog bozona nazvanog *graviton*.

Dakle, elementarne čestice interagiraju jedna s drugom razmjenjujući baždarne bozone. Interakcije elementarnih čestica se vizualno mogu prikazati putem *Feynmanovih dijagrama*, grafičkim prikazom matematičkih izraza koji određuju ponašanje elementarnih čestica. *Slika 3.1.* daje primjer *Feynmanovog dijagrama* za interakciju dva elektrona. Interakcije čestica mogu biti vrlo složene i teške za razumjeti, stoga *Feynmanovi dijagrami* omogućavaju jednostavnu vizualizaciju onog što bi inače bila komplicirana i apstraktna formula. U *Feynmanovom dijagramu* trajektorije čestica predstavljene su linijama koje mogu biti valovite, ravne ili crtkane, s strjelicom ili bez, ovisno o vrsti čestica. Točka u kojoj se linije povezuju s drugim linijama dijagrama naziva se *vrhom interakcije*, i to je točka u kojoj se čestice susreću i međusobno interagiraju razmjenjujući *baždarne bozone*.

Postoje tri različite vrste linija: *unutarnje linije koje povezuju dva vrha*, *ulazne linije koje se protežu iz "prošlosti" do vrha* i predstavljaju inicijalno (početno stanje), te *izlazne linije koje se protežu od vrha do budućnosti* i predstavljaju finalno (konačno) stanje. Ponekad donji dio dijagrama predstavlja *prošlost*, a gornji *budućnost*, a ponekad je *prošlost s lijeve strane*, a *budućnost s desne strane* dijagrama.



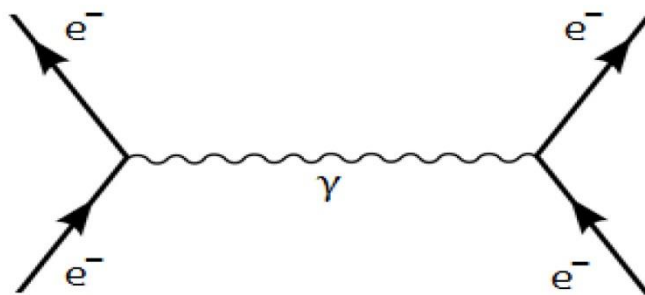
*Slika 3.1.* Primjer *Feynmanovog dijagrama* za interakciju dva elektrona

### 3.1.1. Prenositelji elektromagnetske interakcije-fotoni

*Elektromagnetska sila* djeluje između čestica koje posjeduju električni naboj, tako da se čestice istoimenog naboja međusobno odbijaju, a raznoimenog međusobno privlače. Ona je odgovorna gotovo za sve pojave s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu, osim za gravitaciju.

Znamo da atomi imaju jednak broj protona i elektrona, tako da su atomi električno neutralni. Odnosno, njihov ukupan električni naboj jednak je nuli. Budući da su atomi neutralni, postavlja se pitanje kako se atomi mogu držati na okupu i formirati stabilne molekule? Otkriveno je da se električno nabijeni dio jednog atoma može privlačiti s električno nabijenim dijelom drugog atoma. Odnosno, protoni jednog atoma mogu privlačiti elektrone drugog atoma. To omogućava da se različiti atomi mogu držati na okupu. Dakle, elektromagnetska sila je ono što omogućava atomima da se drže na okupu i tako stvaraju stabilne molekule. Bilo koja struktura na svijetu može postojati samo zato što proton i elektron imaju suprotne naboje. Čestice prenositelji elektromagnetske sile su *fotoni*. Oni se razmjenjuju svaki put kada električno nabijene čestice stupaju u interakciju. Foton je čestica bez naboja, tako da ona sama ne doživljava djelovanje elektromagnetske sile. Drugim riječima, fotoni ne mogu izravno komunicirati jedni s drugima. Foton ne samo da je čestica bez naboja, već i bez mase te stoga uvijek putuje brzinom svjetlosti. Međutim, fotoni nose energiju i impuls, te u prenošenju tih svojstava među česticama uzrokuju pojavu elektromagnetske sile.

U tim procesima, energija i impuls moraju biti očuvani, u skladu s osnovnim zakonima fizike. No, energija električno nabijenih čestica nije očuvana, jer jedna nabijena čestica emitira foton, dok ga druga apsorbira. Na primjer, u reakciji dva elektrona, jedan elektron emitira foton, dok ga drugi apsorbira. Ovu reakciju možemo prikazati putem *Feynmanovog dijagrama* prikazanim na slici 3.2..



Slika 3.2. Dva elektrona uzajamno djeluju jedan na drugog uz razmjenu fotona

Kvantna mehanika dopušta ovu neravnotežu, pod uvjetom da fotoni zadovoljavaju *Heisenbergove relacije neodređenosti* (3.1) i (3.2):

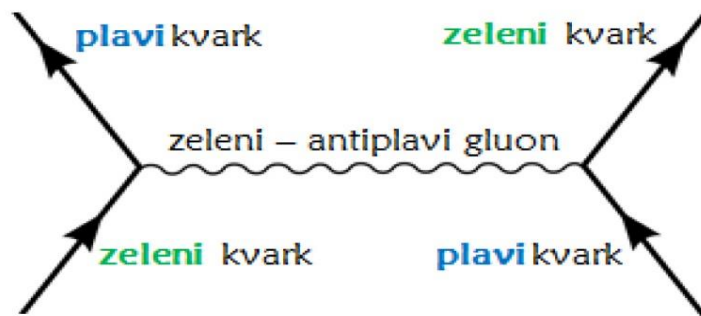
$$\Delta x \cdot \Delta p \leq \frac{h}{2\pi} \quad (3.1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \leq \frac{h}{2\pi}. \quad (3.2)$$

Prema relaciji (3.1) nemoguće je znati sve detalje određenog kvantnog sustava. Na primjer, ako se zna točan položaj elektrona, nemoguće je znati impuls elektrona. Ova neodređenost omogućava da neproporcionalnost u energiji postoji neko vrijeme, pod uvjetom da vrijedi relacija (3.2), odnosno da umnožak neodređenosti energije i vremena bude manji ili jednak reduciranoj *Planckovoj konstanti*. Stoga se energija razmijenjenog fotona može shvatiti kao “posuđena” u granicama načela neodređenosti. Što je više energije posuđeno, kraće je vrijeme posudbe.

### **3.1.2. Prenositelji jake nuklearne interakcije-gluoni**

Znamo da se jezgra atoma sastoji od protona i neutrona, čestica za koje znamo da su izgrađene od kvarkova. Budući da su neutroni čestice bez naboja, protoni se, zbog pozitivnog naboja i male udaljenosti između njih, odbijaju velikom električnom silom, no ipak se jezgra atoma ne razleti. Postavlja se pitanje zašto je to tako. Razlog tomu je što je jaka nuklearna sila između kvarkova u jednom protonu i kvarkova u drugom protonu dovoljno velika da nadjača odbojnu elektromagnetsku silu između njih. Zato se jezgra atoma drži na okupu. Elementarne čestice odgovorne za jaku nuklearnu silu, to jest silu koja djeluje između kvarkova nazivaju se *gluonima*. Gluoni, baš kao i *kvarkovi*, su čestice koje imaju boju. Kvarkovi razmjenjuju gluone u jakoj interakciji i stvaraju vrlo jako polje sile boje koje drži kvarkove zajedno. Kada se kvarkovi udalje jedan od drugog, polje sile boje postane jače. Prilikom međusobne razmjene gluona kvarkovi stalno mijenjaju boju. Budući da razmjena gluona mijenja boju kvarkova i budući da je boja očuvana “*veličina*”, možemo zamisliti da gluoni, za razliku od kvarkova, nose boju i antiboju. Postoji *osam različitih kombinacija boje i antiboje* koje gluoni mogu nositi. Tako na primjer, ako *zeleni kvark* emitira zeleni – *antiplavi gluon*, kvark mora promijeniti boju u plavu jer ukupna boja mora ostati zelena. Nakon emisije gluona, plava boja kvarka se poništi s antiplavom bojom gluona i preostala boja je zelena boja kvarka. *Slika 3.3.* prikazuje *Feynmanov dijagram* za interakciju između kvarkova.

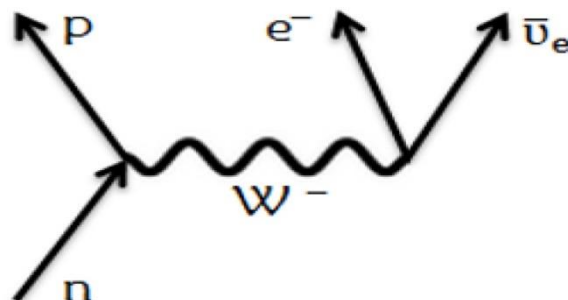


Slika 3.3. Feynmanov dijagram za interakciju kvarkova

Kvarkovi unutar hadrona emitiraju ili apsorbiraju veliki broj gluona u jedinici vremena, tako da ne postoji mogućnost da opazimo boju pojedinačnog kvarka. Boja kvarkova u *hadronima* se mijenja tako da je ukupna boja u svakom trenutku *neutralna*.

### 3.1.3. Prenositelji slabe nuklearne interakcije- *W* i *Z* bozoni

Slaba interakcija odgovorna je za raspade masivnih kvarkova i leptona u lakše kvarkove i leptone. Kada se elementarne čestice raspadaju, opažamo nestanak jedne čestice i nastanak dvije ili više različitih čestica. Nastale čestice pri tome imaju manju masu od originalne čestice. Budući da masa prema *Einsteinovoj relaciji*  $E = mc^2$  odgovara energiji, to znači da mora biti očuvana, te je višak energije originalne čestice pretvoren u kinetičku energiju nastalih čestica. Čestice nositelji slabe interakcije su *W* i *Z bozoni*, vrlo masivne čestice. *W* bozoni imaju električni naboj, dok je *Z* bozon čestica bez naboja. Nabijene *W* čestice su odgovorne za procese, kao što su  $\beta$  raspad, u kojima čestica koja sudjeluje mijenja predznak. Na primjer, kada se neutron raspada na proton, on emitira  $W^-$  česticu, tako da ukupan naboj ostane nula prije i poslije raspada. Pri tome se  $W^-$  čestica odmah pretvara u elektron i antineutrino, čestice koje su opažene u laboratorijima kao produkti  $\beta$  raspada neutrona. Ovu jednostavnu reakciju, beta raspada neutrona, možemo prikazati *Feynmanovim dijagramom* kao na slici 3.4. U sličnim reakcijama koje ne uključuju promjene u naboju neće se izmjenjivati *W* bozoni, već *Z* bozoni.



Slika 3.4. Feynmanov dijagram za  $\beta$  raspad neutrona

Važno je spomenuti da su prema *SM-u* slaba i elektromagnetska interakcija ujedinjene u *elektroslabu interakciju*. Fizičari su dugo vremena vjerovali da je slaba nuklearna sila tijesno povezana s elektromagnetskom. Otkrili su da je na vrlo malim udaljenostima slaba nuklearna sila po jakosti usporediva s elektromagnetskom, dok je na većim udaljenostima *deset tisuća puta manja* od *elektromagnetske*. Došli su do zaključka da su *slaba nuklearna i elektromagnetska sila* zapravo različite manifestacije jedne sile, *elektroslabe*.

### 3.1.4. Prenositelji gravitacijske interakcije- gravitoni

Najslabija, ali ipak najizrazitija, od četiri temeljne sile prirode je *gravitacija*. No, ipak *SM* je još uvijek ne može objasniti na zadovoljavajući način. Gravitacija predstavlja jedan od najvećih neriješenih problema u fizici.

Iako gravitacijsku silu možemo lako izračunati, ne zna se kako ju usuglasiti s kvantnom teorijom *SM-a*. U svijetu atoma, učinci gravitacije su zanemarivi u usporedbi s drugim silama koje djeluju. Iako je gravitacijska sila slaba, ona može utjecati na jako velikim udaljenostima. Gravitacijska sila je zanemariva po jakosti u usporedbi s drugim silama, što proizilazi iz usporedbe iz *Newtonovog zakona gravitacije* i *Coulombovog zakona*. Na određenoj udaljenosti gravitacijska sila postaje nezanemariva (dominantna) zbog zasjenjenja drugih sila. Naravno da ta udaljenost ovisi o masama tih tijela. Gravitacijski učinci velikih, masivnih objekata mogu biti značajni na udaljenostima koje su izvan domašaja drugih sila.

Čestice koje bi bile odgovorne za *gravitacijsku silu* nazivaju se *gravitonima*. One još uvijek nisu otkrivene. Kad bi ove čestice bile pronađene, *SM* bi se možda mogao zamijeniti za sada nedostižnom teorijom svega, koja bi ujedinila sve četiri temeljne sile prirode u jednu jedinu temeljnu silu. Možda, jer u tom slučaju još uvijek bi bilo teško (ili bolje rečeno nemoguće) uklopiti gravitaciju s kvantnom teorijom *SM-a*.



#### 4. Baždarne i globalne transformacije

$SM$  predstavlja prije svega *Kvantnu Teoriju Polja (KTP)*. U *KTP-u*, čestice su pridružene poljima  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  u ovisnosti o prostorno-vremenskim koordinatama  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Mi promatramo samo polja s spinom  $s = 0, 1/2, 1$  (*antigravitacijska*), jedina koja su nužna za  $SM$  i jedina za koju znamo pisati teorijski konzistentnu *KTP*. Njihova dinamika je određena s akcijom  $S$  u izrazu za gustoću lagranžijana  $L(x)$  s energetsom dimenzijom 4. *Lagranžijan SM-a* je *Lorentz-invarijantan* i *lokalan*, te može biti zapisan kao suma monoma u vrijednostima polja i njihovih derivacija (do dvije) u zadanoj prostorno-vremenskoj točki kao:

$$S = \int d^4x L(x), \quad L(x) = \sum_k c_k O_k(x). \quad (4.1)$$

U konkretnom smislu, lagranžijan će sadržavati: konstantni član, koji nije fizički sve dok gravitacija nije uzeta u obzir; linearni član u poljima, koji može biti reapsorbiran redefiniranjem pomaka polja  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + c$ ; izraz za bilinearnost u poljima, "*slobodni lagranžijan*"  $L_{\text{free}}$  koji se rabi za slobodni propagator polja i definira njihove dimenzije (u jedinicama energije, odnosno mase:  $1$  za *bozone* i  $3/2$  za *fermione*); izraze s najmanje tri polja, "*interakcije lagranžijana*"  $L_{\text{int}}$ , koje se rabe za interakcije s poljima. U perturbacijskoj teoriji, amplituda bilo kojeg fizikalnog procesa može biti izražena u obliku širenja  $L_{\text{int}}$  (u zadanom redoslijedu) skupom *Feynmanovih dijagrama*. Najjednostavniji primjer interakcije *KTP-a* uključene u jedno realno, skalarno polje  $\phi(x)$  s lagranžijanom je predstavljen sljedećim izrazom:  $L = (\partial\phi)^2/2 - m^2\phi^2/2 - \lambda\phi^4/4$ . Dimenzija koeficijentata  $c_k$  u jednadžbi (4.1) je veoma važna, jer određuje svojstva odgovarajuće interakcije. Izrazi s negativnom dimenzijom,  $c = 1/\Lambda^D$ ,  $D > 0$ , gdje  $\Lambda$  predstavlja energetska skalu, se odvajaju kod dovoljno niske energije  $E$ , pa im je uloga potisnuta s članom  $(E/\Lambda)^D$ . Oni su nazvani "*nevažni*", a ujedno su "*renormalizabilni*". Jedino su marginalni i bitni (također "*renormalizabilni*" i "*superrenormalizabilni*") članovi s koeficijentima dimenzije nula, odnosno dimenzije većim od nula relevantni pri niskoj količini energije. Nazočnost nevažnih izraza poprima značaj za visoke energije, gdje ti izrazi na kraju čine teoriju nevažecom. Kao što amplituda raste kao  $(E/\Lambda)^D$ , zapravo, viši redovi u perturbacijskom razvoju će eventualno postati važniji od nižih redova, dok teorija postaje ne-perturbacijska. O tome svjedoči činjenica da se javlja unitarnost teorije slomljene na perturbacijskoj razini. Prema tome, nevažni izrazi mogu biti tolerirani samo u kontekstu efektivne teorije koja vrijedi do određene energetske skale ("*praga*")  $\Lambda$ . Kod skale  $\Lambda$ , takve izraze treba uzeti u obzir s renormalizabilnim interakcijama, ukoliko bi teorija ostala perturbacijska i izračunljiva. Takva teorijska razmatranja su igrala važnu ulogu u razvoju  $SM$ -

$a$  čiji prethodnik je bila nevažna (nerenormalizabilna) *Fermijeva teorija* slabih interakcija. Kasnije se pokazalo važnim riješiti *nevažne četvoro-fermionske Fermijeve interakcije* rabeći ih za slabe interakcije kod niskih energija u izrazima renormalizabilne teorije.

Što se tiče simetrija, generatori  $t$  grupa  $SU(N)$  i  $U(1)$  parametriziraju infintezimalne transformacije kao  $u \approx 1 - i\epsilon t$ , iz *Lieve algebre*,  $[t_1, t_2] = it_3$ ,  $[t_1[t_2, t_3]] + [t_2[t_3, t_1]] + [t_3[t_1, t_2]] = 0$ , i u slučaju za  $SU(N)$  predstavljaju *Hermitske matrice* bez tragova. Standardni izbor  $SU(N)$  generatora je  $t_a = \sigma_a/2$ ,  $a = 1, 2, 3$ , za slučaj kada je  $N = 2$ , gdje  $\sigma_a$  predstavljaju *Paulijeve matrice*,  $t_a = \lambda_a/2$ ,  $a = 1, 2, 3$ , za slučaj kada je  $N = 3$ , gdje  $\lambda_a$  predstavljaju *Gell-Mannove matrice*,  $t_i, i = 1 \dots N^2 - 1$ , s  $\text{tr}(t_i t_j) = \delta_{ij}/2$ , u općem slučaju. Strukturne konstante  $f_{ijk}$  su definirane kao  $[t_i t_j] = if_{ijk} t_k$  i potpuno su antisimetrične.

U kvantnoj mehanici kontinuirana grupa simetrije je predstavljena unitarnom transformacijom na stanja sustava koja komutiraju s *hamiltonijanom*. Generatori odgovaraju očuvanim veličinama. U *KTP-u* razmatramo simetrije čija djelovanja na stanja odgovaraju transformaciji polja  $\phi_i(x) \rightarrow U_{ij} \phi_j(x)$  koja predstavlja simetriju lagranžijana. Ukoliko  $U$  ne ovisi o prostorno-vremenskoj koordinati  $x$ , onda se ta simetrija naziva "*globalnom*" ili "*rigidnom*". Generatori simetrije, ili preciznije, njihovo djelovanje  $T$  na kvantna stanja je zadano pomoću *Noetherinog teorema* u smislu očuvanja struja na način:

$$T = \int dx j^0, \quad j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.2)$$

gdje  $\delta\phi$  predstavlja infintezimalnu promjenu  $\phi$  pridruženu generatoru  $t$ . Klasičan primjer globalne simetrije u *KTP-u* predstavlja *izospin* koji tvori lokalnu  $SU(2)$  simetriju, te djeluje na dublet  $Q = (u, d)^T$  izgrađen od donjeg i gornjeg kvarkovskog polja. U graničnom slučaju kada je  $m_u = m_d = 0$  i kada se zanemare elektromagnetske interakcije,  $SU(2)$  izospinska transformacija  $Q \rightarrow UQ$  postaje simetrija *kvantno kromodinamičkog lagranžijana* za  $u, d$ . Izospinske struje su  $j_a^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu (\sigma_a/2) Q$  (za svaki generator). Izospinska simetrija se odnosi na mase i vezanja neekvivalentnih stanja. Eksperimentalni dokaz da izospin doista predstavlja simetriju proizilazi iz činjenice da se lakši hadroni grupiraju u izospinske multiplete. Proton i neutron, na primjer, tvore izospinski dublet  $1/2$  sa  $m \approx 940$  MeV, pioni izospinski triplet  $1$  sa  $m \approx 140$  MeV. Također su vezanja *pion-nukleon* povezana izospinskom simetrijom. *Baždarne transformacije* nisu simetrije u tom kontekstu u kakvom su *globalne simetrije*. Njihovo djelovanje na polja ovisi o *prostorno-vremenskoj točki* gledišta, dok se sa fizikalne

točke gledišta ne odnose na ekvivalentna fizikalna stanja. Odnose se na različite, ali baždarno ekvivalentne konfiguracije polja.

Da bi se stekao osjećaj kako nastaju *baždarne simetrije*, prvo treba razmotriti prototipnu *baždarnu teoriju*, kvantnu elektrodinamiku (*QED*). Baždarna simetrija prije svega ima svojstvo klasične teorije. Znamo da su fizikalni stupnjevi slobode elektrodinamike: elektromagnetska polja  $F_{\mu\nu}$  i struja  $j^\mu$ , u izrazu u kojem su formulirane *Maxwellove jednadžbe*. S druge strane,  $F_{\mu\nu}$  nije pogodna dinamička varijabla, pogotovo jer ne dozvoljava da *Maxwellove jednažbe* budu rabljene iz varijacijskog načela. S druge strane,  $F_{\mu\nu}$  je moguće prikazati preko vektorskog potencijala  $A_\mu$  kao  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Jednadžbe gibanja tada mogu biti izvedene iz lagranžijana i imaju oblik  $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$ . S druge strane,  $A_\mu$  nije fizikalna varijabla jer bilo koja dva različita polja povezana baždarnom transformacijom, npr.  $A(x)_\mu \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ , odgovaraju istoj fizikalnoj varijabli  $F_{\mu\nu}$ . Stoga, baždarna transformacija samo definira ekvivalentnost konfiguracija odgovarajući istoj fizikalnoj opservabli, te su ti stupnjevi slobode suvišni.

Sada ćemo razmatrati kvantnu teoriju i slučaj u kojem je elektromagnetska struja pridružena jednom *Diracovom fermionu*  $\psi$  s nabojem  $Qe$  u struji  $j^\mu = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , gdje  $e$  predstavlja apsolutnu vrijednost naboja elektrona. Lagranžijan bi se tada mogao predstaviti na način:

$$L_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (4.3)$$

a također je pridružen i *slobodni lagranžijan Diracovog spinora*. Možemo provjeriti eksplicitno da: 1) se može ispostaviti da elektromagnetska struja  $j^\mu$  ustvari predstavlja *Noetherinu struju* pridruženu  $U(1)$  globalnoj simetriji pod kojom vrijedi da je  $\psi(x) \rightarrow e^{-ieQ\alpha}\psi(x)$ , te stoga može biti uzeta u obzir za očuvanje električnog naboja; i 2) se za  $U(1)$  simetriju može zaključiti da je u relaciji s *baždarnim transformacijama*. Važno bi bilo prisjetiti se činjenice da želimo da lagranžijan bude invarijantan u respektabilnosti s *baždarnim transformacijama* vektorskog polja, ili da imamo mogućnost da razlikujemo ekvivalentne konfiguracije. Ispostavlja se da je lagranžijan invarijantan pod uvjetom da se  $\psi$  transformira prema gore navedenoj *lokalnoj verziji globalne  $U(1)$  transformacije* kao:

$$A(x)_\mu \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad \psi(x) \rightarrow e^{-ieQ\alpha}\psi(x). \quad (4.4)$$

Stoga se *baždarna invarijantnost* može smatrati fundamentalnim načelom očuvanja naboja. Da bi se verificirala invarijantnost lagranžijana, prikladno je definirati "kovarijantnu" derivaciju kao:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu, \text{ tako da je } D_\mu \left( e^{-ieQ\alpha(x)} \psi(x) \right) = e^{-ieQ\alpha(x)} \left( D_\mu \psi(x) \right). \quad (4.5)$$

*Lagranžijan Kvantne Elektrodinamike (QED-ja)* bi se tada mogao napisati u obliku:  $L_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$ .

Možemo posegnuti korak dalje i tvrditi da *baždarna invarijantnost* nije jedino fundamentalno načelo očuvanja naboja, ali da *lagranžijan QED-ja* sam proističe iz toga. Stvar je u tome da se lagranžijan iz jednadžbi (4.3) može dobiti zahtijevajući da je spinor slobodnog lagranžijana  $\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$ , te da je istoimeni invarijantan na lokalne U(1) transformacije kao  $\psi(x) \rightarrow e^{-ieQ\alpha} \psi(x)$ , te invarijantnog pod lokalnim U(1) transformacijama. Da bi derivacijski izraz postao invarijantan, primorani smo uvesti vektorsko polje  $A_\mu$  transformirajući ga kao u jednadžbi (4.4). *Baždarno invarijantni* kinetički izraz za  $A_\mu$  u lagranžijanu se može tada prikazati u izrazu za *baždarno invarijantnu* veličinu  $F_{\mu\nu}$ . Baždarna invarijantnost također objašnjava zašto je foton bezmasen, dok bi je maseni izraz za  $A_\mu$  slomio.

Postoji i drugi razlog za vjerovanje da bi se *baždarna invarijantnost* trebala promatrati kao fundamentalno načelo, povezano s činjenicom da kvantizacija fotonskog polja nije jednostavna. Važno je spomenuti da je uvođenje *vektorskog polja* kao *baždarnog polja* jedini poznati postojeći način na koji se može izvršiti kvantizacija, i da ta kvantizacija zahtijeva dodatni "*baždarno fiksirajući*" član, kao npr.  $-(\partial_\mu A^\mu)^2 / (2\xi)$  na lagranžijan kako bi se riješila suvišnih stupnjeva slobode.

S obzirom na impresivan uspjeh *QED-ja* kao *baždarne teorije* (i eksperimentalno i u rješavanju problema kvantizacije vektorskih bozona), prirodno je razmotriti generalizaciju *baždarnog načela* na kompaktnu, *Lievu grupu*. Posebice je zanimljiv slučaj *ne-Abelovih* grupa, koje dovode do najmanje dvije kvalitativne razlike u jednostavnom Abelovom slučaju *QED-ja*: vektorski bozoni imaju svojstvo vlastite interakcije i vezanja (koja u *kvantnoj teoriji polja* ovise o energetske skali procesa u kojima su izmjerene) moraju biti jače na manjim skalama. Stoga *ne-Abelove baždarne teorije* postaju kandidati za opisivanje jakih interakcija. Doista se ispostavlja da jake interakcije mogu biti opisane *baždarnom teorijom* baziranom na SU(3) baždarnoj grupi djelujući na "*obojeni*" stupanj slobode, *kvantnu kromodinamiku (QCD)*.

Sada ćemo razmotriti opću baždarnu teoriju. Sastojci koji su potrebni za specifikaciju su sljedeći: 1) kompaktna baždarna grupa G (koja specificira sadržaj vektorskog polja. 2) skalarna polja  $\phi_i, i = 1, \dots, n_s$  i fermionska polja  $\psi_i, i = 1, \dots, n_f$  (kolektivno označena kao  $\phi$ ). 3) transformacije (kvantni brojevi) posljednjeg pod djelovanjem *baždarne grupe*. 4)

*renormalizabilni lagranžijan*  $L_0(\Phi, \partial\Phi)$  za skalarna i fermionska polja i njihove derivacije simetrično pod globalnim (*prostorno-vremenskim*) transformacijama polja kao što je gore navedeno. Sada je važno detaljno razmotriti specifikaciju sadržaja fermionskog polja i kvantnih brojeva. Radi se o tome da su fermioni obično opisani u izrazima za *Diracove spinore*  $\psi_i$  koji predstavljaju kombinaciju dvije nezavisne komponente s lijevom i desnom kiralnošću,  $\psi_{iL} = (1-\gamma^5)\psi_i/2$  i  $\psi_{iR} = (1+\gamma^5)\psi_i/2$  (u zadanoj konvenciji za gama matrice), od kojih svaka predstavlja ireducibilnu reprezentaciju *Lorentzove grupe*. Jedini zahtjev za djelovanje *baždarne grupe* na fermione je taj da oni komutiraju s *Poincareovom grupom*. Za posljedicu se može uzeti da grupne transformacije za  $\psi_{iL}$  i  $\psi_{iR}$  nisu nužno iste: one mogu sadržavati različite kvantne brojeve. Ovo nije slučaj u *QED-ju* i *QCD-ju*, niti u bilo kojoj drugoj teoriji koja čuva paritet čestica, ali se ispostavlja da je to slučaj za *SM*. Teorija kao što je *SM*, gdje se lijeva i desna komponenta kiralnosti fermiona transformiraju pod neekvivalentnim reprezentacijama *baždarne grupe* je nazvana "*kiralnom*". Kiralna teorija lomi paritet, odnosno moglo bi se dogoditi nešto još važnije. Konjugirane reprezentacije lijevih i desnih polja  $\psi_{iR}^*, \psi_{iL}^*$  imaju suprotnu polarnost od polaznih polja  $\psi_L, \psi_R$  ( $\psi_{iR}^*$  je lijevoruka, kao  $\psi_{iL}$ ), te se stoga mogu pojaviti interakcije koje mogu miješati  $\psi_{iL}$  polja s  $\psi_{iR}^*$  poljima. Ovo nije slučaj u *SM-u*, ali se događa u *Teorijama Velikog Ujedinjenja*. Znači, na kraju se može zaključiti da bi sadržaj fermionskog polja trebao biti specifikiran u izrazima za lijevoruke fermione, navođenjem oba kvantna broja  $\psi_{iL}$  i  $\psi_{iR}^*$  (ili u ekvivalentnom smislu  $\psi_{iL}$  i  $\psi_{iR}$ ).

Sada je važno napisati lagranžijan pridružen gore navedenim sastojcima *baždarnog načela*. Prvo je važno prikazati bazu generatora  $t_a$  za grupu  $G$  kao gore i pridružiti im realno vektorsko polje  $A_a^\mu$  i jakost polja  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ . Zatim je važno definirati kovarijantnu derivaciju kao  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T_a$ , gdje  $T_a$  predstavlja djelovanje generatora  $t$  na polja  $\Phi$  (tada za polja koja su zadana *baždarnom transformacijom*  $\Phi(x) \rightarrow U(x)\Phi(x)$  imamo da je  $F_{\mu\nu}^a T_a \equiv F_{\mu\nu} \rightarrow UF_{\mu\nu}U^{-1}$  i  $D_\mu(U(x)\Phi(x)) = U(x)(D_\mu\Phi(x))$ ). Baždarni lagranžijan tada glasi:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + L_0(\Phi, D\Phi) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 + \text{duhovi}, \quad (4.6)$$

gdje prvi izraz predstavlja tzv. *Yang-Millsov lagranžijan* za vektorska polja, derivacija je promovirana u kovarijantnu, a pored posljednjeg člana fiksira se *baždarenje i posljednji član* uključuje pomoćne, nefizikalne antikomutirajuće skalare (*duhove*) koji su važni za očuvanje unitarnosti. Pomoću jednadžbe (4.3) se može dobiti korekcija *lagranžijana QED-ja* iz slobodnog *lagranžijana Diracovog fermiona*. *Baždarne interakcije* između tvari i *baždarnog polja* proizilaze iz člana koji uključuje kovarijantnu derivaciju, npr. iz kinetičkih članova u

lagranžijanu  $L_0$  prije *baždarenja*. U slučaju skupa fermionskih stanja  $\psi = (\psi_1 \dots \psi_{n_f})^T$  podložno djelovanju  $\psi \rightarrow T_a \psi$  generatora, kinetički izraz  $\bar{\psi} i \partial^\mu \gamma_\mu \psi$  daje sljedeću relaciju:

$$\bar{\psi} i \partial^\mu \gamma_\mu \psi \rightarrow \bar{\psi} i D^\mu \gamma_\mu \psi = \bar{\psi} i \partial^\mu \gamma_\mu \psi - g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi. \quad (4.7)$$

Svojstvene interakcije baždarnih bozona su  $g f_{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{ab'c''} A^{b\mu} A^{c\nu} A_\mu^{b''} A_\nu^{c''}$ . Sve baždarne interakcije su određene u izrazima za *baždarno univerzalno vezanje*  $g$ . U slučajevima u kojima je baždarna grupa izgrađena od nekolicine faktora (kao u slučaju *SM-a*), postoji jedno nezavisno *baždarno vezanje* za svaki ireducibilni faktor.

## 5. Interakcije u KTP-u i Feynmanovi dijagrami

Interakciju među poljima razmotrimo na jednostavnom primjeru slobodnog realnog skalarnog polja čiji je lagranžijan predstavljen na sljedeći način:

$$L_{sl.}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2]. \quad (5.1)$$

Ako slobodnom lagranžijanu (5.1) dodamo lagranžijan interakcije oblika

$$L_{int.}^{(0)} = -\phi(x) \rho(x). \quad (5.2)$$

ukupni lagranžijan je:

$$L^{(0)} = L_{sl.}^{(0)} + L_{int.}^{(0)} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2] - \phi \rho, \quad (5.3)$$

i lagranžijanova jednažba za polje  $\phi$  postaje:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = \rho. \quad (5.4)$$

Po analogiji sa elektrodinamikom  $\rho(x)$  se može interpretirati kao gustoća izvora polja  $\phi(x)$ . Ponašanje sustava analizirajmo za najjednostavniji slučaj, vremenski nezavisnog točkastog izvora naboja  $g$  koji miruje u ishodištu,

$$\rho(x) = g \delta(\vec{x}), \quad (5.5)$$

tako da jednažba (5.4) postaje:

$$(-\nabla^2 + m^2) \phi(\vec{x}) = g \delta(\vec{x}), \quad (5.6)$$

i može se riješiti *Fourierovim transformom* na sljedeći način:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{k}). \quad (5.7)$$

Kako je eksponencijalna reprezentacija  $\delta$ -funkcije:  $\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ , za *Fourierov transform*  $\phi(\vec{k})$ , dobija se da je:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (5.8)$$

tako da s rješenjem:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (5.9)$$

*Yukawin potencijal* glasi:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad \text{gdje je } r = |\vec{x}|. \quad (5.10)$$

Gornji izraz je polje točkastog izvora naboja  $g$  u ishodištu dometa  $r \sim \frac{1}{m}$ . Ako zamislimo još jednu česticu (izvor) gustoće  $\rho_2(\vec{x})$ , *Hamiltonijan interakcije* (energija interakcije) između ta dva izvora, tj. precizno, izvora  $\rho_2(\vec{x})$  i potencijala (5.10) prvog izvora je:  $H = \int d^3 x \phi_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x})$ , što je analogno izrazu za elektrostatsku potencijalnu energiju u klasičnoj elektrodinamici.

Da izraz učinimo simetričnim po oba izvora, izrazimo polje prvog izvora (5.10) kao integral:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 x' \rho_1(\vec{x}') \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (5.11)$$

Zamjena  $\rho_1(\vec{x}') = g\delta(\vec{x}')$  u (5.11) odmah daje (5.10). *Hamiltonijan interakcije* između dvije čestice (izvora) se onda može napisati u obliku koji je potpuno simetričan po koordinatama obje čestice:

$$H_{12} = \frac{1}{4\pi} \int d^3 x_1 d^3 x_2 \rho(\vec{x}_1) \rho(\vec{x}_2) \frac{e^{-m|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}. \quad (5.12)$$

Izraz (5.12) pokazuje da potencijalna energija dvije čestice na udaljenosti  $r$  iznosi:

$$V(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (5.13)$$

što u limesu  $m \rightarrow 0$  daje *Coulombovu potencijalnu energiju* dva točkasta naboja (konstante interakcije – naboji  $g_1$  i  $g_2$  su iz izvora prebačeni u potencijalnu energiju).

1949. *Feynman* je razvio grafičku tehniku (*Feynmanovi dijagrami*) za izračun vjerojatnosti procesa u *kvantnoj teoriji polja*. Matrični elementi fizikalnih procesa radi jednostavnosti najčešće se računaju u impulsnom prostoru. U skladu s (5.9) razmjena jednog kvanta skalarnog polja – čestice spina 0, mase  $m$  i impulsa  $k^\mu$  reprezentira se u kvantnoj amplitudi procesa propagatorom:

$$\frac{1}{k^2 \cdot m^2}, \quad (5.14)$$

ili precizno: u *Feynmanovom dijagramu* svakoj unutarnjoj liniji bozona spina 0, mase  $m$  i impulsa  $k^\mu$  pridružuje se propagator:

$$i\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2}. \quad (5.15)$$

Ovo je prvi primjer pravila po kojima se u kvantnoj teoriji polja bilo kojem *Feynmanovom dijagramu* koji reprezentira neki fizikalni proces pridružuje kvantnomehanička amplituda tog dijagrama.

Svaki se *Feynmanov dijagram* sastoji od vanjskih linija koje reprezentiraju čestice (*bozone ili fermione*) u početnom (*inicijalnom*) i konačnom (*finalnom*) stanju, unutarnjih linija čestica u «*međustanju*» i *verteksa* («*čvorova*») dijagrama gdje se sreću tri ili više linija koji reprezentiraju emisiju ili apsorpciju čestica *prenositelja interakcije*. Lagranžijan teorije omogućuje da se nađu pravila pridruživanja multiplikativnih faktora svakoj vrsti linija (čestica) i svakom tipu vrhova (verteksa) u *Feynmanovom dijagramu*. Na taj način se može napisati amplituda svakog dijagrama. Vanjskim linijama pridružuju se *valne funkcije* tih čestica, unutarnjim linijama pridružuju se *propagatori* tih čestica, a «*čvorovima*» se pridružuju *faktori vrhova*.

Vjerojatnost bilo kojeg fizikalnog procesa je kvadrat apsolutne vrijednosti sume amplituda svih *Feynmanovih dijagrama* koji odgovaraju tom procesu.

Bilo koji *fizikalni proces, raspad ili raspršenje elementarnih čestica* na primjer, predstavlja prijelaz iz nekog inicijalnog stanja  $i$  u neko finalno stanje  $f$ . U prvoj aproksimaciji, koja se naziva *Bornova aproksimacija*, matrični element  $M_{fi}$  procesa  $i \rightarrow f$  je  $M_{fi} \cong \langle f|V|i \rangle$ , gdje je potencijal  $V$  upravo lagranžijan interakcije  $V = L_{\text{int}}$  odgovarajuće kvantne teorije polja.

Prototip kvantne teorije polja je *kvantna elektrodinamika* – teorija *fermionskog polja*  $\psi(x)$ , tj. čestica spina  $1/2$ , mase  $m$  i naboja  $q = -e$ , elektrona i vektorskog polja  $A^\mu(x)$ , tj. čestica spina  $1$ , bez mase – fotona. Za *kvantnu elektrodinamiku (QED) lagranžijan interakcije* glasi:

$$L_{\text{int}} = -j_\mu A^\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \quad (5.16)$$

gdje je  $j_\mu(x)$  vektorska struja elektrona u kojoj su  $\bar{\psi}$  i  $\psi$  polja finalnih i inicijalnih elektrona  $e$ , a  $A^\mu$  je polje fotona  $\gamma$ . Lagranžijan interakcije sadrži tri polja i predstavlja eey teorije vrhova. Prema tome, ukupni lagranžijan kvantne elektrodinamike predstavlja sumu *Diracovog lagranžijana* za polje elektrona, *Maxwellovog lagranžijana* za polje fotona i *lagranžijana interakcije* i piše se kao:

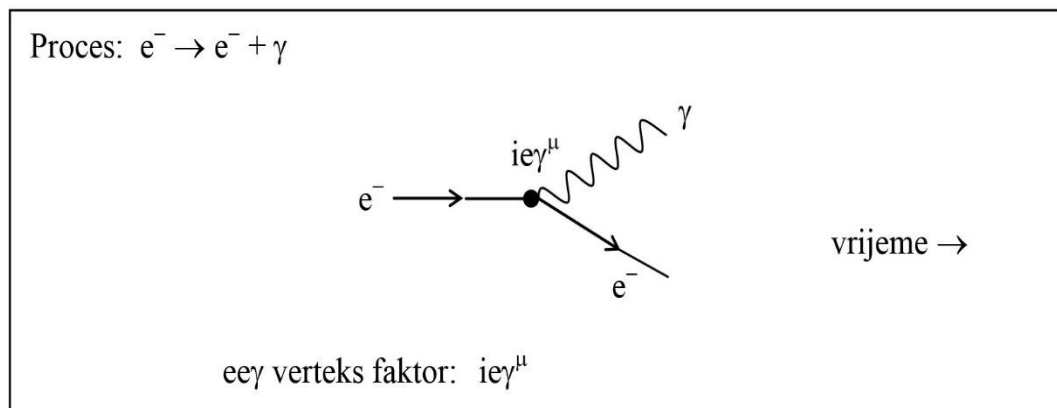


$$L^{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}-m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}, \quad (5.17)$$

gdje je:

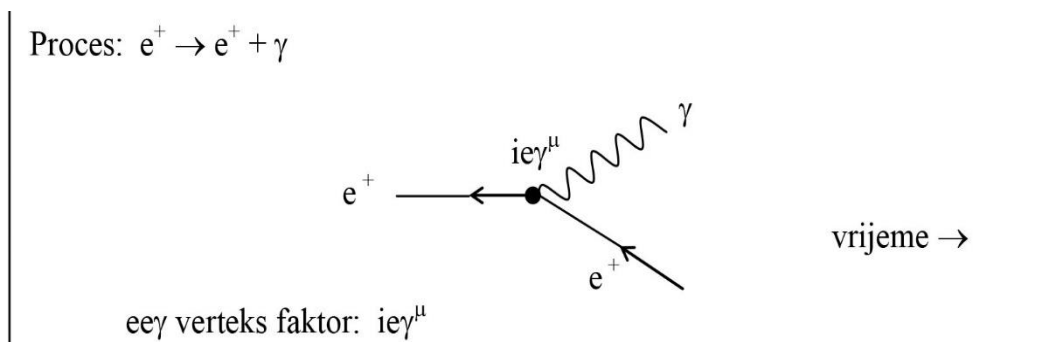
$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \quad (5.18)$$

Elementarni proces kvantne elektrodinamike je  $e^{-} \rightarrow e^{-} + \gamma$ , u kome *inicijalni elektron* impulsa  $p$  emitira foton impulsa  $k$  i nastavlja gibanje (skrene) kao *finalni elektron* s impulsom  $p'$ , tako da je:  $p'_{\mu} + k_{\mu} = p_{\mu}$ . Taj proces reprezentira se dijagramom u kome u *verteksu* ulazi linija *inicijalnog elektrona* impulsa  $p_{\mu}$ , a iz verteksa izlaze linije *finalnog elektrona* impulsa  $p'_{\mu}$  i linija fotona impulsa  $k_{\mu}$ . Valna funkcija *inicijalnog elektrona* je  $\psi = u(p)e^{-ipx}$ , a za *finalni elektron* valna funkcija je  $\bar{\psi} = \bar{u}(p')e^{+ip'x}$ . *Valna funkcija fotona* je:  $A_{\mu} = \varepsilon_{\mu} \cdot e^{+ikx}$ , gdje je  $\varepsilon_{\mu}$  vektor polarizacije fotona. *Slika 5.1* prikazuje *Feynmanov dijagram* ovog elementarnog procesa. Faktor koji se pridružuje  $ee\gamma$  verteksu je  $ie\gamma^{\mu}$  što je upravo  $L_{\text{int}}$  bez valnih funkcija čestica. Tako je u svakoj teoriji polja: *interakcijski lagranžijan* direktno daje elementarne procese teorije koji se reprezentiraju osnovnim verteksima teorije. Dijagrami višeg reda (*s više verteksa*) koji reprezentiraju kompliciranije procese dobivaju se spajanjem više elementarnih dijagrama.



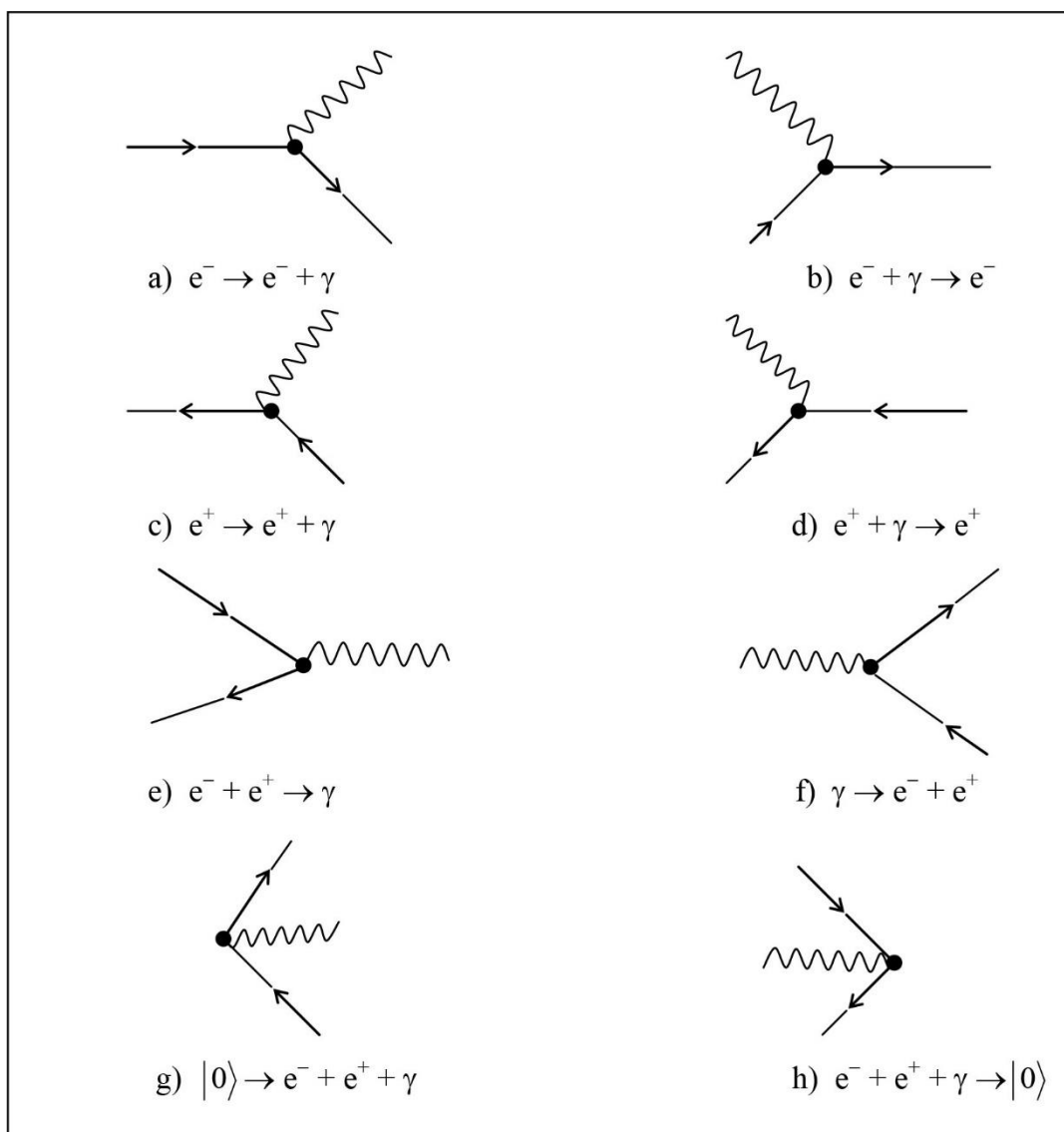
*Slika 5.1 Feynmanov dijagram za proces kvantne elektrodinamike*

Analogni elementarni proces s antičesticama – emisija fotona od strane pozitrona, prikazan je na *slici 5.2*. Jedina razlika je da se pozitron prikazuje kao elektron koji se giba *unazad u vremenu*, tj. opisuje valnom funkcijom  $v(p)e^{+ipx}$ , ili  $\bar{v}(p)e^{-ipx}$ .



Slika 5.2 Emisija fotona od strane pozitrona

Svi elementarni procesi prvog reda (s samo jednim verteksom), tj. oni *Feynmanovi dijagrami* čije amplitude su prvog reda po konstanti interakcije (*naboju*)  $e$ , u kvantnoj elektrodinamici prikazani su na *slici 4.3*. Gibanje jedne čestice određenog impulsa prikazuje se odgovarajućom linijom – *valovitom za foton, a ravnom za elektron*. Tim linijama se pridružuje propagator koji je inverzni operator *kinetičkog (kvadratnog) člana lagranžijana* odgovarajućeg polja za svaku unutarnju liniju, a valna funkcija čestice za svaku vanjsku liniju u dijagramu.



Slika 5.3 Elementarni procesi prvog reda (samo s jednim vrhom)

Elementarni procesi sa *slike 5.3* su redom:

- a) emisija fotona od strane elektrona,
- b) apsorpcija fotona od strane elektrona,
- c) emisija fotona od strane pozitrona,
- d) apsorpcija fotona od strane pozitrona,
- e) anihilacija elektron-pozitron para uz emisiju fotona,

- f) tvorba para elektron-pozitron od strane fotona,
- g) tvorba para elektron-pozitron i fotona iz vakuuma,
- h) anihilacija para elektron-pozitron i fotona u vakuum.

U prvoj aproksimaciji [ako zanemarimo fazne faktore ( $\pm 1, \pm i$ ), spinske faktore u brojniku propagatora, pravila integracije po zatvorenim konturama u kompliciranijim dijagramima s zatvorenim petljama, itd.], amplituda  $M_{fi}$  bilo kojeg *Feynmanovog dijagrama* sastoji se od slijedećih multiplikativnih faktora:

- Za svaki vrh odgovarajući verteks faktor (npr.  $ie\gamma^\mu$  za *QED*),
- Za svaku unutarnju liniju *4-impulsa*  $q$  i mase  $m$  propagator  $\frac{1}{q^2-m^2}$ ,
- Spinor  $\bar{u}$  za svaki fermion u finalnom stanju, a spinor  $u$  za svaki fermion u inicijalnom stanju (i takođe,  $\bar{v}$  za svaki inicijalni antifermion, a  $v$  za svaki finalni antifermion); 1 za svaku skalarnu česticu bilo u inicijalnom ili u finalnom stanju;  $\epsilon_\mu$  za svaki vektorski bozon bilo u inicijalnom ili u finalnom stanju. Ovi faktori su valne funkcije odgovarajućih čestica bez dijela koji daje prostorno-vremensku ovisnost (*ravni val*).

*Napomena:* Gornja aproksimativna pravila za *Feynmanove dijagrame* na isti način tretiraju sve vrste čestica *4-impulsa*  $q$  u unutarnjim linijama dijagrama – svakoj pridružuju propagator  $(q^2-m^2)^{-1}$ . Brojnici propagatora ovise o spinu čestice, tako da su propagatori ustvari:

- za svaku unutarnju liniju bozona spina 0, mase  $m$  i impulsa  $q$ :

$$i\Delta_F(q) = \frac{i}{q^2-m^2}, \quad (5.19)$$

- za svaku unutarnju fermionsku liniju spina 1/2, mase  $m$  i impulsa  $q$ :

$$iS_F(q) = \frac{i}{\gamma^\mu q_\mu - m} = \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}, \quad (5.20)$$

- za svaku unutarnju liniju fotona (spina 1 i mase  $m = 0$ ) impulsa  $q$ :

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (5.21)$$

- za svaku unutarnju liniju bozona spina 1, mase  $m$  i impulsa  $q$  u unitarnom baždaru:

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m^2}. \quad (5.22)$$

## 6. Spontani lom simetrije

Mehanizam spontanog loma simetrije je prvi put uveden u oblasti čvrste tvari (*P. W. Anderson, Phys. Rev. 130, 439 1963.*), a zatim je generaliziran na relativističke sustave i fiziku elementarnih čestica. Za rad na ovom polju, Nobelovu nagradu za fiziku 2013. godine su podijelili Peter Higgs (*Peter Higgs*) i François Englert (*François Englert*).

### 6.1. Osnovni pojmovi

Neka je *Lieva grupa*  $G$  simetrija fizičkog sustava, čiji je hamiltonijan  $H$ . Onda mora važiti da je:

$$U(g)HU^+(g), \quad g \in G, \quad (6.1)$$

tj. hamiltonijan je invarijantan na djelovanje grupe  $G$ . Poslije kvantizacije teorije, stanja u teoriji se dobijaju djelovanjem skupa operatora kreacije  $\hat{\Phi}^A$  na vakuum, tj.  $|A\rangle = \hat{\Phi}^A |0\rangle$ . Pri transformacijama grupe  $G$  operator  $\hat{\Phi}^A$  se mijenja prema sljedećoj relaciji:

$$U\hat{\Phi}_A U^+ = \hat{\Phi}_B. \quad (6.2)$$

Operator  $\hat{\Phi}_B$  djelovanjem na vakuum daje stanje  $|B\rangle$ :

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \hat{\Phi}_B |0\rangle \\ &= U(g)\hat{\Phi}_A U^+(g)|0\rangle \\ &= U(g)\hat{\Phi}_A |0\rangle \\ &= U(g)|A\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Simetrija *hamiltonijana* se manifestira u degeneraciji energetske razine:

$$E_A = \langle A|H|A\rangle = \langle B|H|B\rangle = E_B. \quad (6.4)$$

U prethodnom je izračunu rabljena pretpostavka da je osnovno stanje teorije invarijantno na djelovanje grupe  $G$ , tj.  $U|0\rangle = |0\rangle$ .

Ako vakuum nije invarijantan, tj.  $|0\rangle \neq U|0\rangle$ , nećemo imati degeneraciju razina, iako su *hamiltonijan*  $H$  i *lagranžijan*  $L$  invarijantni. U tom slučaju kažemo da je simetrija spontano slomljena. Ovaj termin nije najpodesniji, jer simetrija postoji u hamiltonijanu, odnosno lagranžijanu, ali osnovno stanje ne posjeduje tu simetriju.

U nerelativističkoj fizici, tipičan primjer sustava s spontanom lomom simetrije je *feromagnet* (*feromagnetizam*). Ako se feromagnet nalazi na temperaturi koja je iznad *Kirijeve (kritične) temperature*, onda je on u *paramagnetskoj fazi* i ukupna magnetizacija sustava je *nula*. Ukoliko

se feromagnet nađe na temperaturi nižoj od *Kirijeve temperature*, onda je on u feromagnetskoj fazi i ukupna magnetizacija je različita od nule. Kada se feromagnetik nađe u dovoljno jakom vanjskom magnetskom polju  $B$ , magnetizacija  $M$  je paralelna vanjskom magnetskom polju. Gustoća slobodne energije sustava u blizini *Kirijeve temperature* se može opisati sljedećim izrazom:

$$u(M) = (\partial_i M)^2 + V(M), \quad (6.5)$$

gdje je potencijal dat sa:

$$V(M) = \alpha_1(T)(M \cdot M) + \alpha_2(M \cdot M)^2 + \dots, \quad \alpha_i > 0. \quad (6.6)$$

Vidimo da su gustoća slobodne energije  $u$  i potencijal  $V$  invarijantni na grupu rotacija  $SO(3)$ .

Pokazuje se da je funkcija  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1(T) = \alpha(T - T_C), \quad (6.7)$$

gdje je  $\alpha$  pozitivna konstanta. Minimum slobodne energije je određen s formulom:

$$\frac{\partial V}{\partial M_i} = 0,$$

odakle se dobija sljedeća relacija:

$$M(\alpha_1 + 2\alpha_2 M^2) = 0. \quad (6.8)$$

Ukoliko je temperatura iznad kritične temperature  $T > T_C$ , vidimo da je ovaj uvjet ispunjen ako osnovno stanje ima nultu magnetizaciju  $M = 0$ . U feromagnetskoj fazi, to jest kada je  $T < T_C$ , osnovno stanje je određeno s<sup>14</sup> sljedećom formulom:

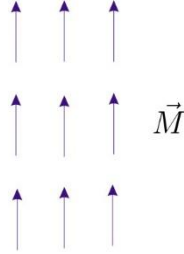
$$M = \sqrt{\frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}}. \quad (6.9)$$

Intenzitet magnetizacije osnovnog stanja određen je omjerom konstanti  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , dok je smjer proizvoljan, što reflektira  $SO(3)$  simetriju. Kada sustav odabere jedno osnovno stanje (jedan smjer za *vektor magnetizacije*, što se može zadati pomoću *vanjskog magnetskog polja*) onda je *rotacijska simetrija*, koja je očita u (6.5) slomljena. Slobodna energija i dalje ima rotacijsku simetriju  $SO(3)$ , ali je u osnovnom stanju ova simetrija slomljena do  $SO(2)$  simetrije, kao što

---

<sup>14</sup> Jednadžba (6.8) je u slučaju  $T < T_C$  zadovoljena za  $M = 0$  ili  $M = \sqrt{\frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}}$ . Pokazuje se da  $M = 0$  ne odgovara minimumu slobodne energije, dok  $M = \sqrt{\frac{-\alpha_1}{2\alpha_2}}$  doista opisuje minimum slobodne energije i odgovara osnovnom stanju.

se vidi s *slike 6.1*. Bolji naziv je skrivena simetrija. Zbog toga se često, umjesto izraza "slomljena simetrija", rabi izraz "skrivena simetrija".



*Slika 6.1* Jedno osnovno stanje za vektor magnetizacije

## 6.2. Spontani lom diskretne simetrije

Razmotrimo sada mehanizam *spontanog loma simetrije (SLS)* u teoriji polja, i to prvo na jednostavnom primjeru *diskretne simetrije*. Neka je gustoća *lagranžijana realnog skalarnog polja* data sljedećom relacijom:

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (6.10)$$

gde je potencijal zadan pomoću sljedeće relacije:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (6.11)$$

Da bi potencijal bio ograničen s donje strane, uzeti ćemo da je  $V(\phi) > 0$ . Generalizirani impuls je onda:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \partial_0\phi, \quad (6.12)$$

pa je hamiltonijan:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[ (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + V(\phi) \right] \\ &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\pi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Minimum energije je određen minimumom potencijala  $V(\phi)$ , koji se određuje iz uvjeta  $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ .

Ovaj uvjet daje jednadžbu:

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0. \quad (6.14)$$

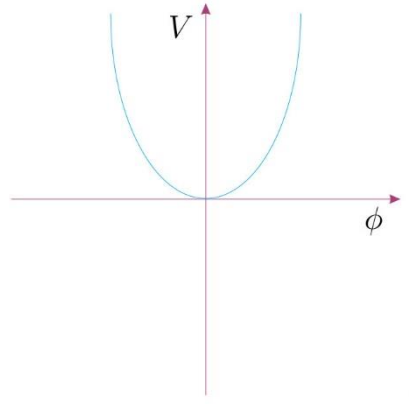
Moguća rješenja su:

$$\phi = 0 \quad \vee \quad \phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (6.15)$$

Razlikujemo dva slučaja:

- Slučaj  $\mu^2 > 0$ .

U ovom slučaju, potencijal ima oblik kao na *slici 6.2.*



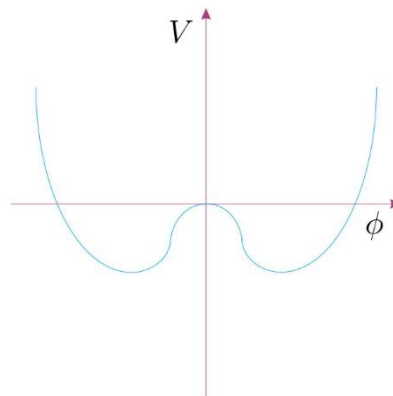
*Slika 6.2.* Oblik potencijala kada je  $\mu^2 > 0$

Vidimo da je jedino rješenje jednačbe (6.14)  $\phi = 0$  i ono odgovara minimumu energije. Dakle, osnovno stanje je nedegenerirano.

- Slučaj  $\mu^2 < 0$ .

Ako je  $\mu^2 < 0$ , onda je jednačba (6.14) zadovoljena i za  $\phi = 0$  i za  $\phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ .

U ovom slučaju, potencijal ima oblik kao na *slici 6.3.*:



*Slika 6.3* Oblik potencijala kada je  $\mu^2 < 0$



Sa slike 6.3. se vidi da  $\phi = 0$  odgovara lokalnom maksimumu, dok postoje dva lokalna minimuma  $\phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ . U kvantnoj teoriji postoje dva vakuumska stanja  $|0_{\pm}\rangle$  tako da je vakuumski očekivana vrijednost polja  $\phi$  predstavljena na način da je:

$$\langle 0_{\pm} | \hat{\phi}(x) | 0_{\pm} \rangle = v = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (6.16)$$

Simetrija hamiltonijana  $H$  i lagranžijana  $L$  je zrcalna simetrija  $\phi \rightarrow -\phi$ . Kada jedan od minimuma potencijala izaberemo za osnovno stanje, ono više ne sadrži zrcalnu simetriju. Hilbertovi prostori stanja konstruirani nad ova dva vakuuma  $|0_{\pm}\rangle$  su ortogonalni,<sup>15</sup> te je početna simetrija spontano slomljena.

Kada se odabere da je  $\langle \phi \rangle = +v$  vakuum i uvede novo polje, dobija se sljedeća relacija:

$$\phi' = \phi - v, \quad (6.17)$$

čija je vakuumska očekivana vrijednost jednaka nuli. Zamjenom (6.17) u lagranžijanu dobija se:

$$L = \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - (-\mu^2)\phi'^2 - \lambda v\phi'^3 - \frac{\lambda}{4}\phi'^4, \quad (6.18)$$

odakle se vidi da je polje  $\phi'$  postalo maseno polje s masom:

$$m(\phi') = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (6.19)$$

Može se primijetiti da u lagranžijanu (6.10), u slučaju  $\mu^2 < 0$ , član  $-\mu^2\phi^2$  nije maseni član, jer predznak nije odgovarajući. Tek poslije SLS-a maseni član za polje  $\phi'$  ima odgovarajući predznak, pa se može reći da lagranžijan (6.18) opisuje realno maseno skalarno polje.

### 6.3. Spontani lom globalne simetrije

Važno je promotriti sada SLS na primjeru globalne Ablove simetrije. Neka je gustoća lagranžijana zadana s:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi_2)^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (6.20)$$

gde je potencijal zadan kao:

---

<sup>15</sup> U okviru kvantne teorije polja se može pokazati da je amplituda tuneliranja iz jednog u drugi vakuum  $\langle 0_- | 0_+ \rangle \sim e^{-CV}$ , gdje je  $C$  konstanta, a  $V$  zapremina prostora u kojoj promatramo kvantnu teoriju. Kad  $V \rightarrow \infty$  gornja amplituda teži nuli, pa nema tuneliranja iz jednog vakuuma u drugi, što lomi refleksiranu simetriju lagranžijana. Ovo je suprotno kvantno mehaničkom analogonu kada bi potencijal bio  $V(x) = (\mu^2/2)x^2 + (\lambda/4)x^4$ . U ovom slučaju postoji konačna vjerojatnost da sustav tunelira iz jednog vakuuma u drugi. Vidimo da u sustavima s konačnim brojem stupnjeva slobode nema SLS-a, dok u sustavima s beskonačnim brojem stupnjeva slobode (teorija polja) dolazi do SLS-a.

$$V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (6.21)$$

U slučaju kada je  $\mu^2 > 0$ , ova gustoća lagranžijana opisuje dva realna skalarna polja mase  $\mu$ , koja međusobno interagiraju. Konstanta interakcije  $\lambda$  je bezdimenzionalna i pozitivna konstanta. Gustoća lagranžijana (6.20) može se napisati u obliku:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad (6.22)$$

gdje je uvedeno kompleksno polje  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ . Ova gustoća lagranžijana opisuje *kompleksno skalarno polje* koje interagira s samim sobom.

Gustoća lagranžijana (6.20) je invarijantna na globalne SO(2) rotacije:

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

gdje je parametar transformacije  $\alpha$  konstantan. S druge strane, gustoća lagranžijana (6.22) je invarijantna na globalne U(1) transformacije:

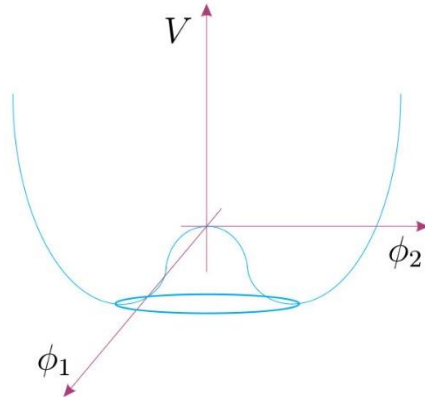
$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha\phi} \\ \phi' &\rightarrow e^{-i\alpha}\phi^*. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ove dvije grupe su *lokalno izomorfne*. Sada je važno potražiti lokalne minimume u teoriji. Stacionarne točke potencijala nalazimo iz sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_i} &= \mu^2 \phi_i + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_i = 0 \\ \phi_i (\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)) &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Kao i u prethodnom poglavlju, i ovdje se mogu razlikovati dva slučaja:  $\mu^2 > 0$  i  $\mu^2 < 0$ .

Kao što je rečeno na početku, u slučaju kada je  $\mu^2 > 0$ , gustoća lagranžijana (6.20) opisuje dva *realna skalarna polja* mase  $\mu$  koja međusobno interagiraju. Minimum potencijala je u točki  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . U ovom slučaju ne postoji spontani lom simetrije, pa se ovaj slučaj neće dalje razmatrati. U slučaju  $\mu^2 < 0$  potencijal izgleda kao na *slici 6.4.*:



Slika 6.4 Oblik potencijala kada je  $\mu^2 < 0$

Može se vidjeti da je *lokalni maksimum* u  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , dok su *lokalni minimumi* (njih beskonačno puno) raspoređeni na kružnici i predstavljeni su u obliku:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (6.26)$$

Ova jednadžba je invarijantna na  $SO(2)$  rotacije. Izborom bilo koje točke s kružnice za lokalni minimum, lomi se  $SO(2)$  simetrija i dobijamo sustav s spontanom lomom simetrije. Može se odabrati da je  $\langle \phi_1 \rangle_0 = v$  i  $\langle \phi_2 \rangle_0 = 0$  za osnovno stanje teorije. Sada se može ispitati čestični spektar teorije pomoću zamjena:

$$\phi_1' = \phi_1 - v, \quad \phi_2' = \phi_2, \quad (6.27)$$

tako da su vakuumske očekivane vrijednosti polja  $\phi_1'$  i  $\phi_2'$  nula. Gustoća lagranžijana postaje:

$$L = \frac{1}{2} \left[ (\partial \phi_1')^2 + (\partial \phi_2')^2 \right] + \mu^2 \phi_1'^2 - \lambda v \phi_1' (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2. \quad (6.28)$$

Mogu se uočiti da polja  $\phi_1'$ ,  $\phi_2'$  imaju masene članove s odgovarajućim predznacima zadane kao:

$$m(\phi_2') = 0, \quad m(\phi_1') = \sqrt{2}\mu. \quad (6.29)$$

Polje  $\phi_1'$  je dobilo masu, dok je polje  $\phi_2'$  bezmaseno. Bezmaseno polje u teoriji s *SLS-om* se naziva *Goldstoneov bozon*. Gustoća lagranžijana (6.28) opisuje dva realna skalarna polja, jedno maseno i jedno bezmaseno, koja međusobno interagiraju.

#### 6.4. Spontani lom lokalne baždarne simetrije

BEH (Brout-Englert-Higgs) mehanizam opisuje *spontani lom lokalne simetrije*. Može se pojasniti na primjeru *lokalne U(1) simetrije* s jednim kompleksnim poljem. Gustoća lagranžijana iznosi:

$$L = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6.30)$$

Ova gustoća lagranžijana opisuje kompleksno skalarno polje  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ , gdje su  $\phi_1$  i  $\phi_2$  dva realna skalarna polja, koje interagira s elektromagnetskim poljem  $A_\mu$  i s samim sobom. Interakcija sa poljem  $A_\mu$  data je preko kovarijantne derivacije:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi, \quad (6.31)$$

dok je međusobna interakcija polja  $\phi_1$  i  $\phi_2$  data članom  $\lambda(\phi^* \phi)^2$ , gdje je  $\lambda$  pozitivna konstanta. Može se vidjeti da maseni član za polja  $\phi_1$  i  $\phi_2$  nema odgovarajući predznak, pa maseni (čestični) spektar teorije nije jasan. Konačno, član  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  je kinetički član za polje  $A_\mu$ , a  $F_{\mu\nu}$  je tenzor jakosti polja:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.32)$$

Gustoća lagranžijana (6.30) je invarijantna na lokalne U(1) transformacije u sljedećem obliku:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha, \quad (6.33)$$

gde je parametar  $\alpha = \alpha(x)$  funkcija *prostorno-vremenskih koordinata*. Potencijal je:

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (6.34)$$

Lokalni minimumi potencijala su određeni s:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} &= -\mu^2 \phi + 2\lambda (\phi^\dagger \phi) \phi = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda (\phi^\dagger \phi) \phi^\dagger = 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Kada je  $\mu^2 > 0$ , minimum potencijala iznosi :

$$\phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \quad (6.36)$$

Rabeći zapis kompleksnog polja preko realnih polja:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}},$$

jednadžba (6.35) se svodi na:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \quad (6.37)$$

Kao i u slučaju *globalne simetrije*, i ovdje se dobija kružnica degeneriranih *lokalnih minimuma*. Jednadžbe (6.35) i (6.37) su invarijantne na U(1), odnosno SU(2) transformacije. Odabirom jedne točke s kružnice 6.37. za *lokalni minimum*, ova simetrija se lomi.

Odaberimo točku:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

s

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0. \quad (6.38)$$

za osnovno stanje teorije. Ovo osnovno stanje nije U(1) invarijantno, tj. simetrija je spontano slomljena. Spontanost se ogleda u činjenici da sustav sam odabere neku od točaka s kružnice za osnovno stanje, a odabir je potpuno proizvoljan.

Da bi se ispitao čestični spektar teorije uvode se nova polja:

$$\phi'_1 = \phi_1 - v, \quad \phi'_2 = \phi_2,$$

tako da je vakuumski očekivana vrijednost ovih novih polja jednaka nuli,  $\langle \phi'_i \rangle = 0$ . Onda je:

$$\phi = \frac{v + \phi'_1 + i\phi'_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^\dagger = \frac{v + \phi'_1 - i\phi'_2}{\sqrt{2}}.$$

Lako se vidi da je:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi &= [(\partial_\mu + igA_\mu)\phi^\dagger](\partial^\mu - igA^\mu)\phi \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu + igA_\mu)(v + \phi'_1 - i\phi'_2)](\partial^\mu - igA^\mu)(v + \phi'_1 + i\phi'_2) \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi'_1)^2 + (\partial_\mu \phi'_2)^2 - ig\partial_\mu(\phi'_1 - i\phi'_2)A^\mu(v + \phi'_1 + i\phi'_2) \\ &\quad + igA_\mu(v + \phi'_1 - i\phi'_2)\partial^\mu(\phi'_1 + i\phi'_2) + g^2 A_\mu A^\mu ((v + \phi'_1)^2 + \phi'^2_2) + \dots]. \end{aligned}$$

Ukupna gustoća lagranžijana iznosi:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi'_1)^2 + (\partial_\mu \phi'_2)^2 + igA^\mu(v + \phi'_1 - i\phi'_2)\partial_\mu(\phi'_1 - i\phi'_2)] + \\ &\frac{v^2 g^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mu^2 \phi_1'^2 - \lambda v \phi_1' (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Može se vidjeti da je *baždarno polje* postalo *maseno*, s masom:

$$m(A) = vg.$$

Također je dobiveno da je *masa skalarnog polja (Higsov bozon)*  $m(\phi'_1) = \mu/\sqrt{2}$ , dok je polje  $\phi'_2$  bezmaseno. U slučaju *globalne U(1) simetrije*, polje  $\phi'_2$  bi odgovaralo *Goldstoneovom bozonu*. Analizu čestičnog spektra teorije (6.39) dodatno komplicira član  $vA^\mu \partial_\mu \phi'_2$ . On ukazuje na "miješanje" polja  $A_\mu$  i  $\phi'_2$ , jer bi poslije kvantiziranja teorije dao doprinos "miješanom" propagatoru.

Na kraju se mogu prebrojati stupnjevi slobode<sup>16</sup> prije i poslije *SBS-a*. Prije spontanog loma simetrije imali smo *bezmaseno baždarno polje*  $A_\mu$  (2 stupnja slobode) i dva realna skalarna polja što ukupno daje četiri stupnja slobode. Poslije loma simetrije polje  $A_\mu$  je postalo maseno pa ima tri stupnja slobode. Pored toga imamo i crtkana polja  $\phi'_1, \phi'_2$ , pa ukupan broj stupnjeva slobode iznosi 5. Ispostavlja se da je ovo neslaganje broja stupnjeva slobode prividno. Naime, može se pokazati da je  $\partial_\mu \phi'_2$  treći stupanj slobode masenog polja  $A_\mu$ . Kako je teorija invarijantna na lokalne transformacije, može se definirati transformacija takva da polje  $\phi'_2$  može da se ukloni (odkalibrira) iz teorije. Primjenom ove transformacije, prelazi se u *unitarnu kalibraciju (unitarno "baždarenje")*, u kojoj je čestični spektar teorije jasan i nema neslaganja u broju stupnjeva slobode prije i poslije spontanog loma simetrije.

Sada se ovo može primijeniti na primjer koji imamo. Parametriziramo polje  $\phi$  na sljedeći način (*polarna parametrizacija*):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x))e^{\frac{i\xi(x)}{v}}. \quad (6.40)$$

Za male oscilacije polja  $H(x)$  i  $\xi(x)$  se svode na  $\phi'_1$  i  $\phi'_2$ . *Baždarna transformacija* na polje  $\phi$  i baždarno polje  $A_\mu$  djeluje kao:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \quad (6.41)$$

odnosno

$$H' = H, \quad \xi' = \xi + v\alpha \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x). \quad (6.42)$$

Ukoliko umjesto potencijala  $A_\mu$  uvedemo polje  $B_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi$ , vidi se da je polje  $B_\mu$  inva-

---

<sup>16</sup> Ovi stupnjevi slobode zapravo odgovaraju dimenzijama IR reprezentacija Lorentzove grupe: 1 za realno skalarno polje, 2 za kompleksno polje, 3 za bezmaseno vektorsko polje i 4 za maseno vektorsko polje

rijantno na transformacije (6.41), odnosno (6.42). Ako se specijalno odabere da je parametar transformacije  $\alpha = -\xi/v$ , dobija se da je:

$$H' = H, \quad \xi' = 0 \quad A'_\mu = B_\mu. \quad (6.43)$$

Ovim odabirom parametra fiksirana je baždarna transformacija i izvršen je prijelaz u *unitarnu kalibraciju* (unitarno "baždarenje"):

$$\phi \rightarrow \phi_\mu(x) = e^{-\frac{i\xi(x)}{v}} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)), \quad A_\mu \rightarrow B_\mu = A_\mu - \frac{1}{gv} \partial_\mu \xi(x). \quad (6.44)$$

Kovarijantna derivacija se transformira kao i samo polje, pa je u unitarnoj kalibraciji data s:

$$D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)_u = e^{-\frac{i\xi(x)}{v}} (D_\mu \phi) = (\partial_\mu - igB_\mu) \phi_u. \quad (6.45)$$

Ako se sada transformacije (6.44) i (6.45) zamijene u gustoću lagranžijana (6.39), dobija se:

$$\begin{aligned} L = & (\partial_\mu \phi_u^+ + igB_\mu \phi_u^+) (\partial^\mu \phi_u - igB_\mu \phi_u) + \mu^2 \phi_u^+ \phi_u - \lambda (\phi_u^+ \phi_u)^2 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \\ & \frac{1}{2} g^2 B_\mu B^\mu (v^2 + 2Hv + H^2) + \frac{\mu^2}{2} (v + H)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + H)^4 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = \\ & \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \mu^2 H^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 B_\mu B^\mu H(H + 2v) - \lambda v H^3 - \frac{1}{4} \lambda H^4, \end{aligned} \quad (6.46)$$

gde je  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ . Može se vidjeti da je polje  $B_\mu$  postalo maseno sa  $m(B) = gv$ . *Higgsovo polje*  $H$  također ima masu,  $m(H) = \mu/\sqrt{2}$ , dok je polje  $\xi$  nestalo tj. odkalibrirano je. Ono bi bio *Goldstoneov bozon* da je simetrija globalna. U žargonu se kaže da je *baždarno polje* pojelo *Goldstoneov bozon* i tako povećalo broj stupnjeva slobode za jedan, tj. postalo je maseno. Analiza broja stupnjeva slobode data je u sljedećoj tablici:

prije SBS-a	st. slobode	poslije SBS-a	st. slobode
$\phi_1$	1	H maseno	1
$\phi_2$	1		
$A_\mu$	2	$B_\mu$ maseno	3
ukupno	4	ukupno	4

Tablica 6.1 Analiza broja stupnjeva slobode

Može se zaključiti da mehanizam spontanog loma lokalne simetrije generira masu *baždarnog polja*. Ovo nagovještava da će teorija slabe interakcije, pored *baždarne simetrije* i *Yang-Millsove* akcije, sadržavati i mehanizam spontanog loma simetrije.

## 7. Standardni Model elektroslabe interakcije

### 7.1. Uvod u teoriju elektroslabe interakcije

Da bi teorijski opisao  $\beta$ -raspad  $n \rightarrow pe\bar{\nu}$ , Fermi je 1934. godine predložio invarijantnu amplitudu:

$$M = G_F (\bar{u}_n \gamma^\mu u_p) (\bar{u}_\nu \gamma_\mu u_e), \quad (7.1)$$

gdje je  $G_F$  *Fermijeva konstanta slabe interakcije* koja iznosi:

$$1,1644 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

U godinama koje su slijedile otkriveni su i drugi procesi s dugim vremenima poluraspada (npr.  $\mu \rightarrow e\bar{\nu}, \pi \rightarrow \mu\nu$ ) i iskristalizirao se je koncept nove vrste interakcija nazvanog *slaba interakcija*. Otkriće da ova interakcija ne čuva paritet stimuliralo je daljnja istraživanja i formulirana je nova, takozvana  $V-A^{17}$  teorija koja slabu interakciju opisuje amplitudom:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u] [\bar{\nu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)e], \quad (7.2)$$

gdje su kao oznake fermionskih spinora uporabljeni simboli odgovarajućih čestica.

Ukoliko se sada definira *slaba nabijena leptonska struja*:

$$J^\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)e, \quad (7.3)$$

i, analogno, *slaba nabijena hadronska struja*:

$$J^\mu = \bar{u}\gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)d, \quad (7.4)$$

gornju amplituda se može napisati u obliku:

$$M = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J_{\mu}^\dagger. \quad (7.5)$$

---

<sup>17</sup> Vektor-minus aksijalni vektor



Kasnije su otkrivene i neutralne slabe struje koje je također moguće opisati V-A teorijom. No kako one nemaju čisti V-A oblik, tj. lom pariteta nije uvijek maksimalan kao kod nabijenih slabih struja, te se uvode parametri  $c_V$  i  $c_A$  koji mjere udio vektorske, odnosno aksijalne komponente u neutralnoj slaboju struji. Tako na primjer invarijantna amplituda za neutralno *kvark–neutrino raspršenje* izgleda ovako:

$$M^{NC} = \frac{G_N}{\sqrt{2}} [\bar{g}\gamma^\mu (c_V^q - c_A^q \gamma_5) q] [\bar{\nu}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu]. \quad (7.6)$$

Ovdje je  $G_N$  konstanta vezanja za neutralne struje čiji je omjer prema *Fermijevoj konstanti* prilično važan i označava se sa:

$$\rho = \frac{G_N}{G_F}. \quad (7.7)$$

Analogno nabijenim slabim strujama (7.3.), neutralne slabe struje se definiraju kao:

$$J^{NC\mu} = \bar{u}_f \gamma_\mu \frac{1}{2} (c_V^f - c_A^f \gamma_5) u_f, \quad (7.8)$$

tako da je gornja amplituda oblika:

$$M^{NC} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} 2\rho J^{NC\mu} J_\mu^{NC}. \quad (7.9)$$

Ovakva teorija sposobna je opisati veliku većinu eksperimentalnih rezultata (uključujući lom pariteta) no ona još uvijek nije zadovoljavajuća konzistentna kvantna teorija slabe interakcije radi slijedeća dva ozbiljna nedostatka:

- *Nerenormalizabilnost.* Kako konstanta interakcije  $G_F$  ima dimenziju (masa)<sup>-2</sup> pokazuje se da se divergencije u doprinosima viših redova računa smetnje ne mogu eliminirati procedurom renormalizacije.
- *Neunitarnost.* Teorijske amplitude nekih procesa na velikim energijama lome unitarnost.

Pokazuje se da su ova dva problema tijesno povezana. Ako dijagrami nižih redova imaju loše visokoenergetsko ponašanje, onda doprinosi viših redova, koji su integrali preko dijagrama nižih redova, ne mogu biti renormalizirani.

Sljedeći korak u razvoju teorije slabih interakcija bilo je uvođenje nabijenih vektorskih bozona,  $W^+$  i  $W^-$ , koji prenose ovu interakciju. Naime, obzirom da se slaba struja  $J_\mu$  (7.3) transformira pod djelovanjem *Lorentzovih transformacija* kao *četverovektor*, baš kao i elektromagnetska struja, logično je pokušati imitirati (vrlo uspješnu) teoriju *kvantne elektrodinamike (QED)* i pretpostaviti osnovni *lagranžijan* slabe interakcije u obliku:

$$L = -\frac{g}{\sqrt{2}}J^\mu W_\mu^\dagger + \text{h. c.} \quad (7.10)$$

gdje je  $g$  bezdimenzionalna konstanta vezanja vektorskih bozona s fermionima. Staru četverofermionsku V-A interakciju (7.2) dobivamo iz ovog lagranžijana u granici malih izmijenjenih impulsa ( $(p_e - p_\nu)^2 \ll m_W^2$ ). Pritom identificiramo:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{m_W^2}. \quad (7.11)$$

Provodeći dalje analogiju s kvantnom elektrodinamikom možemo pretpostaviti da je slaba interakcija baždarne prirode s tim da su *baždarni bozoni*, za razliku od fotona, masivni. Tako bi lagranžijan slobodnog vektorskog polja  $W_\mu$  imao oblik:

$$L_w = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}. \quad (7.12)$$

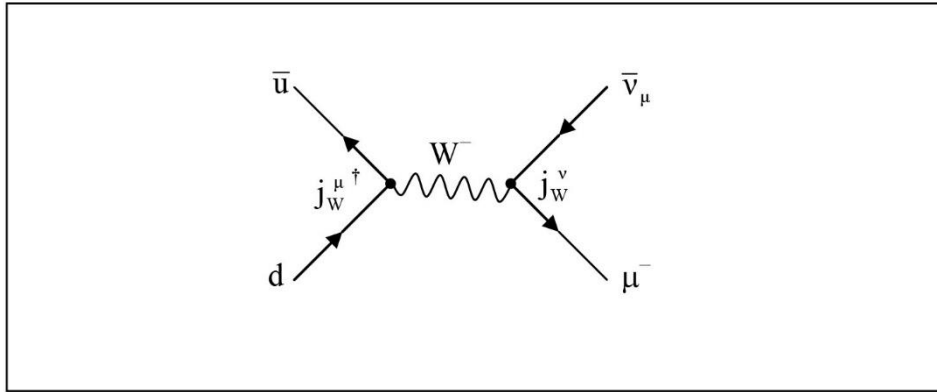
Odavde slijedi izraz za propagator W bozona u obliku:

$$iD_F(q)_{\mu\nu} = -i \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m_W^2}{p^2 - m_W^2}, \quad (7.13)$$

koji se za  $p \rightarrow \infty$  ponaša kao konstanta što opet znači da teorija nije renormalizabilna. Problem leži u tome što je W bozon masivan što daje član  $p_\mu p_\nu / m_W^2$  u brojniku propagatora. Kako je masivnost W bozona nužna radi reproduciranja četverofermionske teorije na niskim energijama problem se čini nerješivim.

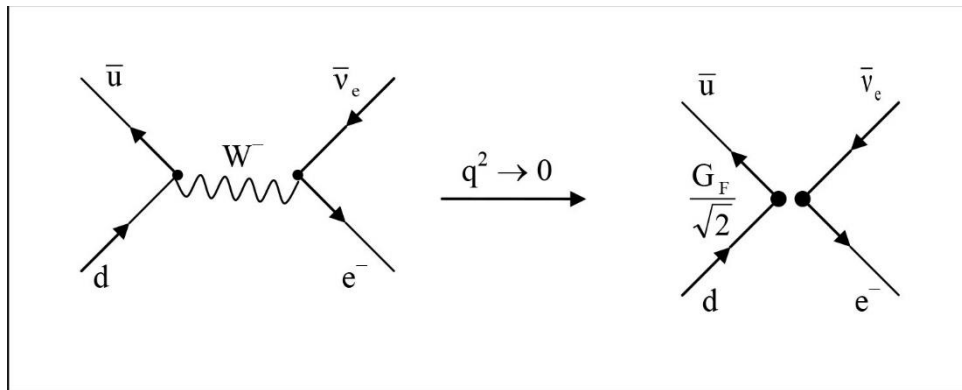
Međutim, otkriće da se fenomen *spontanog loma simetrije* (poznat od prije u fizici čvrstog stanja) može primijeniti u *baždarnim teorijama* fizike elementarnih čestica daje čitavoj priči konačni obrat. U lagranžijanu originalno nema masenih članova, već čestice dobivaju masu tek preko interakcije s hipotetskim skalarnim poljem putem tzv. *Higgsovog mehanizma*. Na taj način teorija zadržava svojstvo renormalizabilnosti usprkos tome što *baždarni bozoni* imaju masu.

Amplituda procesa (7.12) i (7.13) je produkt tri faktora: *kvarkovski nabijene struje*  $g_W j_W^\mu$  za prvi verteks, *propagatora W bozona*  $D_F(q)_{\mu\nu}$  i *leptonske (mionske) slabe nabijene struje*  $g_W j_W^\mu$  za drugi verteks. Kako je  $g_W = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}$ , zanemarujući fermionske spinore i faktore -i, amplituda *Feynmanovog dijagrama* sa slike 7.1 je proporcionalna s  $g_W^2 D_F(q)$ .



Slika 7.1 Feynmannov dijagram za  $W^-$  proces

Ako je kvadrat impulsa  $q^2$  puno manji od kvadrata mase  $W^-$  bozona ( $M_W = 80,4 \text{ GeV}$ ), svi članovi u njegovom propagatoru koji ovise o impulsu  $g_\mu$  se mogu zanemariti tako da je  $D_F(q)_{\mu\nu} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}$ , pa amplituda postaje jednostavno  $\frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{g_2^2}{8} \frac{4}{v^2 g_2^2} = \frac{1}{2v^2}$  ( $m_W = \frac{g_2 v}{2}$ ). U limesu  $q^2 \ll M_W^2$ , slabe interakcije su opisane efektivnom *Fermijevom struja-struja (četiri fermiona) točkastom interakcijom* čiji je lagranžijan  $L_{CC}^{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{W\mu} j_W^{\mu \dagger}$ , kao što je simbolično prikazano na slici 7.2.



Slika 7.2 Feynmannov dijagram za  $W^+$  proces

## 7.2. Definicija SM-a

Kako se pojam *SM-a* ne rabi uvijek u potpuno istom značenju, konstrukcija *SM-a* može započeti navođenjem osnovnih pretpostavki koje ga određuju:

- baždarna grupa je  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .
- postoji jedan *Higgsov dublet* koji generira sve masene članove.

- *baždarna grupa* je spontano slomljena na grupu U(1) elektromagnetizma. Tako je jedini bezmaseni baždarni bozon *foton*, koji je nastao miješanjem baždarnog bozona U(1)<sub>Y</sub> grupe i neutralnog baždarnog bozona SU(2)<sub>L</sub> grupe. Ovo miješanje karakterizirano je tzv. *kutem slabog miješanja*  $\theta_W$ .
- svi fermioni su reprezentirani lijevim SU(2)<sub>L</sub> dubletima i desnim singletima.
- neutrini su bezmaseni (mala masa, do 10 eV) i nema miješanja među leptonskim generacijama. Nabijene slabe struje miješaju kvarkovske generacije.

Ovaj skup pretpostavki predstavlja najminimalniji model suglasan s svim eksperimentima do otkrića neutrinjskih oscilacija. Na osnovu njega se može napisati *lagranžijan SM-a*  $L_{SM}$ <sup>18</sup>.

### 7.3. Lagranžijan SM-a i elektroslaba interakcija leptona

Lagranžijan Standardnog modela se može napisati u obliku:

$$L_{SM} = L_b + L_f + L_H + L_Y, \quad (7.14)$$

gdje pojedini članovi imaju slijedeće značenje: lagranžijan koji opisuje kinetičke energije baždarnih bozona i njihove međusobne interakcije:

$$L_b = -\frac{1}{4}W^{\mu\nu}W_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}. \quad (7.15)$$

Kinetičke energije fermiona i njihove interakcije s baždarnim bozonima su predstavljene kao:

$$L_f = \bar{L}_i i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) L_i + \bar{R}_i i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) R_i. \quad (7.16)$$

Kinetička energija *Higgsovog bozona*, *mase Higgsovog* i *baždarnog bozona*, te njihova međusobna vezanja su predstavljena sljedećom formulom:

$$L_H = \left[ \left( \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \right]^\dagger \left[ \left( \partial_\mu + igT \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \right] - V(\phi), \quad (7.17)$$

gdje je  $V(\phi)$ :

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (7.18)$$

Mase fermiona i njihova vezanja na *Higgsov bozon* (*Yukawina vezanja*):

$$L_Y = -g_{ij}^{(d)} \bar{q}_{iL} \phi d_{jR} - g_{ij}^{(u)} \bar{q}_{iL} \tilde{\phi} u_{jR} - g_{ij}^{(e)} \bar{l}_{iL} \phi e_{jR} + h. c. \quad (7.19)$$

Oznake u gornjim izrazima imaju slijedeće značenje:

<sup>18</sup> Ovo ne bi trebalo shvatiti u smislu da se *lagranžijan SM-a* može izvesti iz nekakvog skupa aksioma. Ovo gore su samo osnovne pretpostavke ugrađene u taj lagranžijan.

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{iL} \\ e_{iL} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix},$$

koji predstavljaju *lijeve fermionske dublete (izo-dublete)* i-te generacije ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ).

$$R_i = e_{iR}, u_{iR} \quad \text{i} \quad d_{iR},$$

predstavljaju *desne fermionske singlete* i-te generacije. Posebno su  $l_{iL}$  ( $l_{iR}$ ) i  $q_{iL}$  ( $q_{iR}$ ) *leptonski i kvarkovski dubleti (singleti)*.

$W_\mu$  su baždarni bozoni grupe  $SU(2)_L$  (definirane generatorima  $T$ ), a  $B_\mu$  je baždarni bozon grupe  $U(1)_Y$  (definirane generatorom  $Y/2$ ). Funkcije:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix},$$

predstavljaju *Higgsov dublet* i odgovarajući nabojno konjugirani dublet ( $\psi^- \equiv \psi^{+*}$ ).  $g$  i  $g'$  su konstante vezanja  $SU(2)_L$ , odnosno  $U(1)_Y$  grupe, a  $g_{ij}^{(f)}$  *Yukawine konstante vezanja*.

Lagranžijan  $L_e^{\text{int.}}$  slabih neutralnih struja leptona glasi:

$$L_e^{\text{int.}} = -e j_{Q_e}^\mu A_\mu - g_Z j_{Z_e}^\mu Z_\mu, \quad (7.20)$$

gdje je konstanta elektromagnetskih interakcija  $e$  (naboj pozitrona), a konstanta interakcija s  $Z$  bozonima je  $g_Z = \frac{g_2}{\cos \theta_W}$ .

Odgovarajuće struje elektrona koje određuju oblik neutralnih elektroslabih interakcija u (7.20) su:

$$j_{Q_e}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu Q_e e = -\bar{e} \gamma^\mu e, \quad j_{Z_e}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (C_V^e - C_A^e \gamma^5) e = \bar{e} \gamma^\mu (s_W^2 - 1) e. \quad (7.21)$$

Lagranžijan  $L_{cc}^1$  slabe nabijene struje leptona se može napisati pomoću *Diracovih polja leptona* u obliku:

$$L_{cc}^1 = -g_W (j_W^\mu W_\mu^- + j_W^{\mu \dagger} W_\mu^+) = -g_W [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu W_\mu^- + \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+], \quad (7.22)$$

gdje konstanta jakosti slabih interakcija leptona s  $W^\pm$  bozonima definirana kao  $g_W = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}$ .

Indeks  $CC$  označava „*nabijenu struju*“, jer se (7.22) najčešće naziva *lagranžijanom slabe nabijene struje*. Analogno se (7.20) naziva *lagranžijanom slabe neutralne struje (NC – neutral current) leptona*.

Ukupna elektroslaba interakcija leptona se može napisati kao zbog lagranžijana slabih neutralnih  $L_e^{\text{int.}}$  i nabijenih  $L_{cc}^1$  struja leptona kao:

$$L_1^{\text{int.}}[\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_\gamma] = L_e^{\text{int.}} + L_{\text{cc}}^1 = -e j_{Q_e}^\mu A_\mu - g_Z j_Z^\mu Z_\mu - g_W (j_{W_i}^\mu W_\mu^- + \text{h. k.}), \quad (7.23)$$

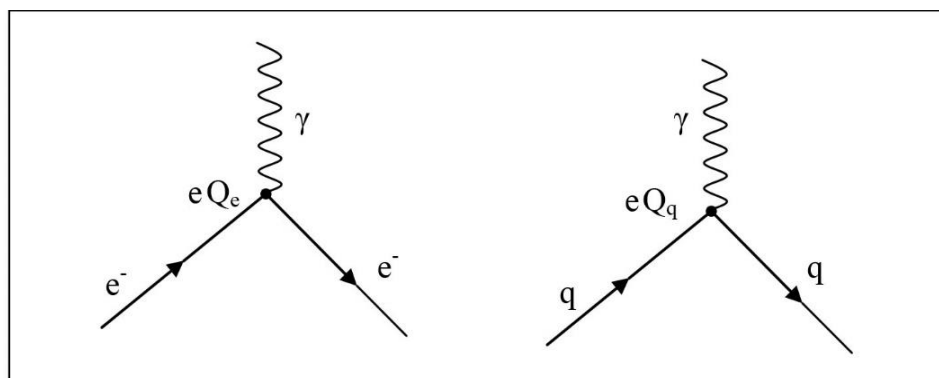
gdje *h.c.* označava *Hermitiski konjugiran član*.

Lagranžijan elektroslabih *baždarnih interakcija* za svaki fermion prve generacije  $f = (v_e, e, u, d)$  iznosi:

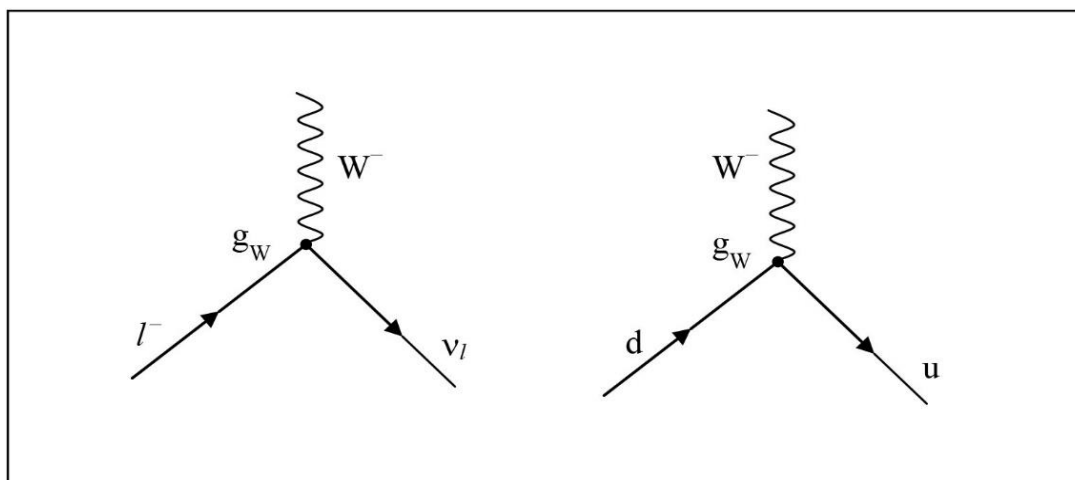
$$L_1^{\text{int.}}[\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_\gamma] = -e j_{Q_f}^\mu A_\mu - \frac{e}{\sin Q_W \cos Q_W} j_Z^\mu Z_\mu = \frac{e}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin Q_W} (j_{W_i}^\mu W_\mu^- + j_{W_i}^{\mu \dagger} W_\mu^+) \quad (7.24)$$

gdje su sve konstante interakcija napisane pomoću naboja pozitrona  $e$  radi lakše usporedbe. Prvi član je uobičajena *QED interakcija elektromagnetske struje fermiona*  $j_Q^\mu$  ( $Q$  je električni naboj u jedinicama  $e$ ) s fotonima, drugi daje interakcije *fermionske slabe struje*  $j_Z^\mu$  s neutralnim  $Z_\mu$  baždarnim bozonima, a treći član je *interakcija fermionske struje*  $j_W^\mu$  s električno nabijenim  $W^\pm$  baždarnim bozonima.

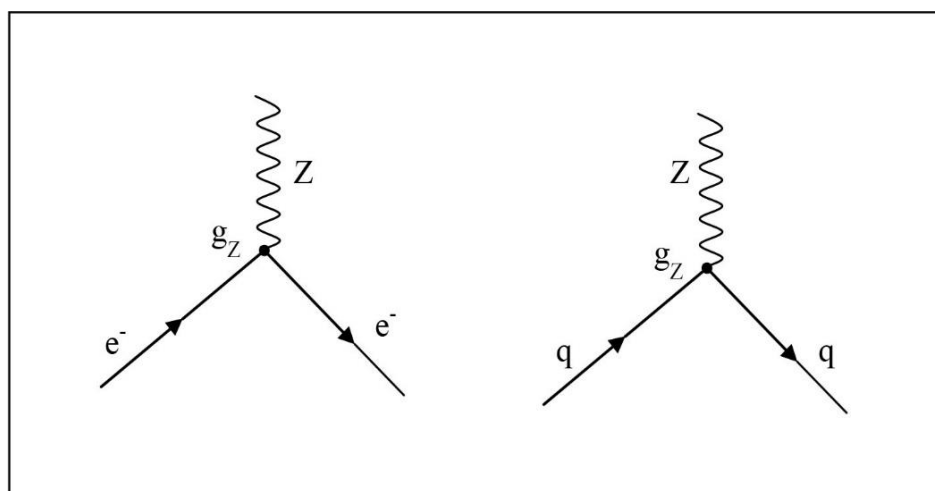
Lagranžijan interakcije (7.24) daje vertekse *Feynmanovih dijagrama* elementarnih procesa emisije/apsorpcije elektroslabih baždarnih bozona u *SM-u*.



*Slika 7.3.* Vrhovi elektromagnetskih interakcija  $j_Q^\mu A_\mu$  električno nabijenih leptona i kvarkova s fotonom  $A_\mu$  koji su isti kao u kvantnoj elektrodinamici. Verteks faktori su:  $-e\gamma^\mu Q_f$ .



Slika 7.4. Interakcije slabe struje leptona i kvarkova  $j_W^\mu$  s  $W^+$  i  $W^-$  slabim bozonima, tj. procesi emisije/apsorpcije nabijenih baždarnih bozona  $f \rightarrow f \pm W^\pm$  koji mijenjaju okuse fermiona. Lagranžijan (7.24) pokazuje da su faktori vrhova ovih interakcija  $g_W \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ , gdje je  $g_W = \frac{e}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \theta_W}$ .

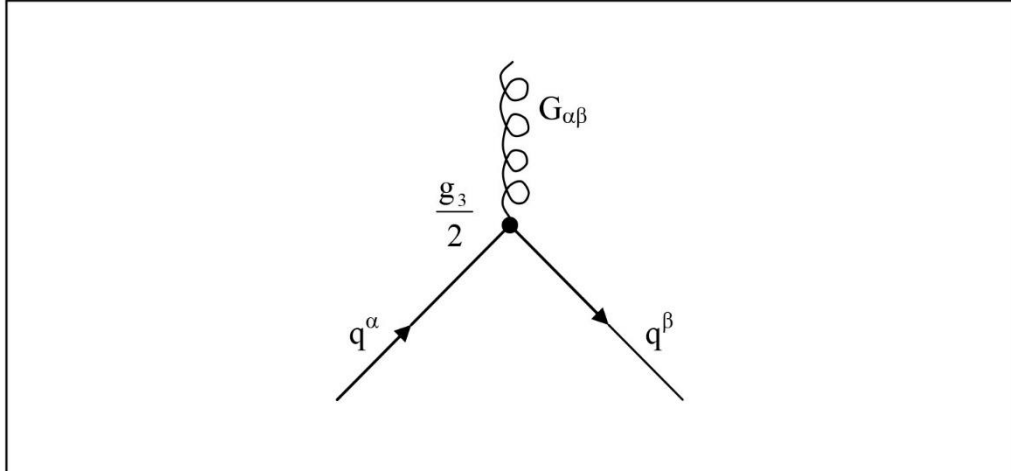


Slika 7.5. Elementarni procesi interakcija slabih neutralnih struja  $j_Z^\mu$  fermiona s  $Z_\mu$  bozonima. Za svaki fermion, faktori vrhova su  $g_Z \gamma^\mu (C_V^f - C_A^f \gamma^5)$ , gdje je  $g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}$ .

Lagranžijan interakcije QCD-ja se može napisati pomoću Diracovih kvarkovskih polja u i d kao:

$$L_{\text{QCD}}^{(\text{int.})} = -\frac{g_3}{2} [\bar{u}\gamma^\mu(\bar{\lambda} \cdot G_\mu)u + \bar{d}\gamma^\mu(\bar{\lambda} \cdot G_\mu)d]. \quad (7.25)$$

Vrhovi jakosne interakcije kvarkova i gluona prikazani su na slici 7.6.



Slika 7.6. Verteksi jake interakcije kvarkova i gluona

Indeksi  $\alpha, \beta = 1, 2, 3..$  su kvarkovski i gluonski kolor indeksi.

#### 7.4. Lomljenje simetrije i unitarno baždarenje

Potencijal koji ulazi u *Higgsov lagranžijan*:

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (7.26)$$

uz  $\mu^2 < 0$  i  $\lambda > 0$ , izaziva spontani lom simetrije  $SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{em}$  zahvaljujući činjenici da *Higgsovo polje*  $\phi$  poprima vakuumski očekivanu vrijednost  $\phi_0$  različitu od nule.

Tako je  $\phi = \phi_{\min}$  za:

$$\phi^\dagger\phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \quad (7.27)$$

što je uvjet koji zadovoljava cijeli skup degeneriranih minimuma. Obzirom da želimo da preostala  $U(1)_{em}$  grupa simetrija bude generirana generatorom  $Q = T_3 + Y/2$  (konvencionalno je  $Y(\phi) = 1$ ) odabiremo:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Polje  $\phi$  se parametrizira na slijedeći način:



$$\phi = e^{i\frac{T_i \xi_i(x)}{v}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} = U^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Sada se na sva polja u  $L_{SM}$  može primijeniti transformacija  $U = e^{-i\frac{T_i \xi_i(x)}{v}}$  (unitarno baždarenje):

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$W'_\mu = UW^\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial^\mu U^{-1}, \quad W^\mu \equiv T \cdot W^\mu, \quad B'_\mu = B^\mu, \quad L' = UL, \quad R' = R. \quad (7.31)$$

Rezultat ove transformacije je da u lagranžijanu ostaju samo fizikalna polja. Masa odgovarajuće čestice (*Higgsovog bozona*) se dobiva iz odgovarajućeg kvadratnog člana:

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2}. \quad (7.32)$$

### 7.5. Generiranje masa baždarnih bozona

Relevantni dio u  $L_H$  (7.17) je:

$$L_{\text{masa bažd.bozona}} = \left[ \left( ig \frac{\tau}{2} \cdot W_\mu + ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \check{\Phi}_0 \right]^\dagger \left[ \left( ig \frac{\tau}{2} \cdot W_\mu + ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \check{\Phi}_0 \right], \quad (7.33)$$

što se može napisati u obliku:

$$L_{\text{masa bažd.bozona}} = \frac{1}{2} M_{ab}^2 W_a^\mu W_{b\mu}, \quad (7.34)$$

gdje je  $a, b = W_1, W_2, W_0, B \dots$  i  $W_4^\mu \equiv B^\mu$ . Matrica mase ima oblik:

$$M_{ab} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Simetričnost matrice  $W_a^\mu W_{b\mu}$  dopušta njenu dijagonalizaciju koja daje mase:

$$m_{W_1} = m_{W_2} = \frac{1}{2} vg, \quad m_A = 0, \quad m_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (7.36)$$

gdje su polja  $A_\mu$  (elektromagnetsko), te  $Z_\mu$  rezultat miješanja polja  $W_\mu^3$  i  $B_\mu$  definirana kao:

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \quad (7.37)$$

$$Z_\mu = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3, \quad (7.38)$$

ako su izrazi za ortogonalizaciju polja:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & -s_W \\ s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}, \text{ odnosno } \begin{pmatrix} c_W X + s_W Y \\ -s_W X + c_W Y \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Kut slabog miješanja (*Weinbergov kut*)  $\theta_W$  se može izračunati pomoću uvjeta da su  $A_\mu$  i  $Z_\mu$  svojstvena stanja mase, te vrijedi da je:

$$\operatorname{tg}\theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (7.40)$$

Za foton se nalazi da je bezmaseno vektorsko polje:

$$\left| \operatorname{ig} \begin{pmatrix} \frac{W_3}{2} & \frac{W_1-iW_2}{2} \\ \frac{W_1+iW_2}{2} & -\frac{W_3}{2} \end{pmatrix} + \operatorname{ig}' \frac{1}{2} B \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{v^2 g^2}{8} (W_1^2 + W_2^2) + \frac{v^2}{8} (-gW_3 + g'B)^2 +$$

$$O(g'W_3 + gB) = (W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad B) \cdot \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ B \end{pmatrix}, \quad (7.41)$$

$$\text{ako je izraz } \operatorname{ig} \begin{pmatrix} \frac{W_3}{2} & \frac{W_1-iW_2}{2} \\ \frac{W_1+iW_2}{2} & -\frac{W_3}{2} \end{pmatrix} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} gW_3 + g'B & g(W_1-iW_2) \\ g(W_1+iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix}.$$

Što se pak polja  $W_\mu^1$  i  $W_\mu^2$  tiče, egzistencija *nabijenih* slabih struja (s nabojima  $\pm 1$ ) inducira na to da se kao fizikalna polja uporabe njihove linearne kombinacije  $W_\mu^+$  i  $W_\mu^-$  dane s:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2). \quad (7.42)$$

Odgovarajući maseni član u  $L_{SM}$  je:

$$L_W = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} v g \right)^2 \left( (W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right) = \left( \frac{1}{2} v g \right)^2 W_\mu^+ W_\mu^-, \quad (7.43)$$

pa su tako mase fizikalnih  $W^+$  i  $W^-$  čestica:

$$m_{W^+} = m_{W^-} = \frac{1}{2} g v. \quad (7.44)$$

Razmotrimo sada kinetički član:

$$L \supset (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi). \quad (7.45)$$

Kada djeluje na  $\Phi$ , kovarijantna derivacija ima oblik:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu - i \frac{g}{2} W_\mu^a \tau^a. \quad (7.46)$$

Za  $\Phi$  u unitarnom baždarenju se dobija:

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) & (v+h) \\ \partial_\mu h + \frac{i}{2}g(W_\mu^3 - g'B_\mu) & (v+h) \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

*Hermitsko konjugiranje* konačno daje:

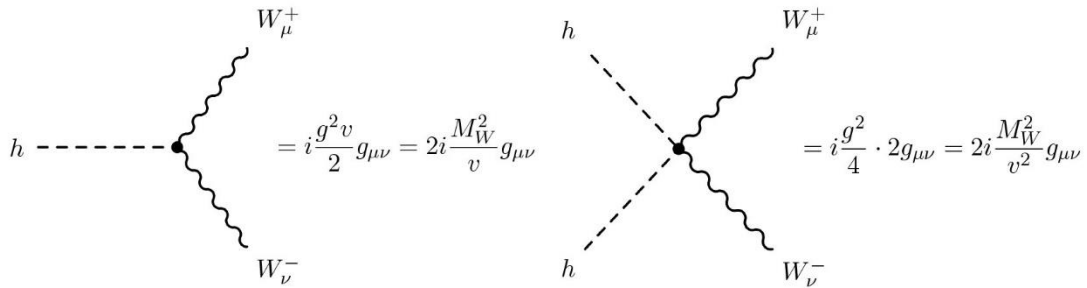
$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{8}g^2(v+h)^2(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(W^{1\mu} + iW^{2\mu}) + \frac{1}{8}(v+h)^2(-g'B_\mu + gW_\mu^3)^2. \quad (7.48)$$

Sada se mogu detaljno pogledati tri člana koja se pojavljuju u gornjem izrazu. Prvi član je samo kinetički član za realno skalarno polje  $h$  (*Higgsov bozon*). U drugom članu, bitno je vidjeti da kombinacije  $W_\mu^1 \pm iW_\mu^2$  odgovaraju nabijenim  $W$  bozonima. Drugi član u jednadžbi (7.48) postaje:

$$L \supset \frac{1}{8}g^2(v+h)^2(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(W^{1\mu} + iW^{2\mu}) = \frac{1}{4}g^2(v+h)^2W_\mu^+W^{-\mu} = \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{g^2v}{2}hW_\mu^+W^{-\mu} + \frac{g^2}{4}hhW_\mu^+W^{-\mu}. \quad (7.49)$$

Prvi član predstavlja masu  $W$  bozona, danu kao:

$$M_W^2 = \frac{g^2v^2}{4}. \quad (7.50)$$



Slika 7.7: Feynmanova pravila za  $hWW$  i  $hhWW$  vrhove.

*Vakuumski očekivana vrijednost Higgsova (vev)* dala je masu  $W$  bozonu! Kako su  $M_W$  i  $g$  direktno izmjereni, može se odrediti  $v \approx 246$  GeV. Drugi i treći član u jednadžbi (7.47) prikazuju interakciju jednog ili dva Higgsova bozona sa  $W^+W^-$ . Odgovarajuća *Feynmanova pravila* prikazana na slici 7.7 su:

$$\begin{aligned} hW_\mu^+W_\nu^-: & \quad i \frac{g^2v}{2} g_{\mu\nu} = igM_W g_{\mu\nu} = 2i \frac{M_W^2}{v} g_{\mu\nu}, \\ hhW_\mu^+W_\nu^-: & \quad i \frac{g^2}{4} \times 2! g_{\mu\nu} = 2i \frac{M_W^2}{v} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

gdje 2! u drugom izrazu predstavlja kombinatorički faktor zbog dva identična *Higgsova bozona* koja se pojavljuju u lagranžijanu. Vrijedi vidjeti da masa W bozona, hWW interakcija, kao i hhWW interakcija dolaze od istog člana u lagranžijanu dobijenog razvojem faktora  $(v + h)^2$ . Dakle interakcije hWW i hhWW su jedinstveno predviđene u *SM-u* kada su poznate vrijednosti  $v$  i mase W bozona.

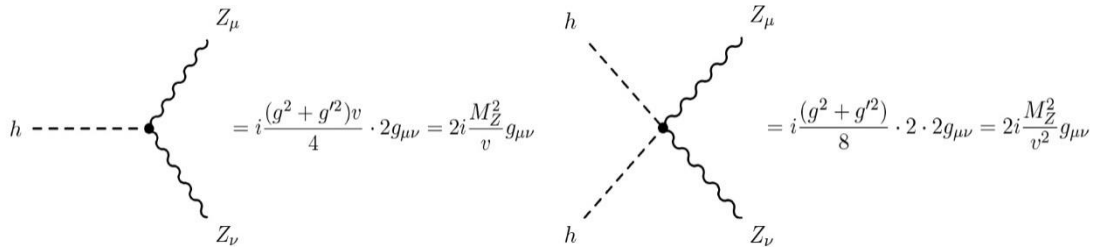
Sada se može razmotriti i treći član u jednadžbi (7.48). Prije svega može se napisati linearna kombinacija  $W_\mu^3$  i  $B_\mu$  koja se pojavljuje u ovom članu kao normalizirano realno polje:

$$(gW_\mu^3 - g'B_\mu) = \sqrt{g^2 + g'^2} \left( \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} W_\mu^3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} B_\mu \right) = \sqrt{g^2 + g'^2} (c_W W_\mu^3 - s_W B_\mu) = \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu, \quad (7.52)$$

gdje su  $s_W = \sin \theta_W$ ,  $c_W = \cos \theta_W$  definirane vrijednosti, gdje je  $\theta_W$  tzv. *Weinbergov kut*. Također je definirana kombinacija polja  $Z_\mu$ , koje je dobilo masu i identificirano je kao Z bozon. Može se vidjeti da ortogonalno stanje:

$$(s_W W_\mu^3 + c_W B_\mu) \equiv A_\mu, \quad (7.53)$$

ne dobija masu preko *Higgsovog mehanizma* i identificiramo ga kao foton.<sup>19</sup>



Slika 7.8: Feynmanova pravila za hZZ i hhZZ vertekse.

Treći član u jednadžbi (7.48) postaje:

$$L \supset \frac{1}{8} (v + h)^2 (-g'B_\mu + gW_\mu^3)^2 = \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (v + h)^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (v + h)^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{(g^2 + g'^2)v}{4} h Z_\mu Z^\mu + \frac{(g^2 + g'^2)v}{8} hh Z_\mu Z^\mu. \quad (7.54)$$

<sup>19</sup> Kako se električni naboj definira preko fotona, fizikalni Higgsov bozon će uvijek biti električno neutralan.

Prvi član u gornjem izrazu je maseni član za Z bozon,

$$M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} = M_W^2(1 + \tan^2 Q) = \frac{M_W^2}{c_W^2}. \quad (7.55)$$

Drugi i treći član u jednadžbi (7.54) daju interakciju jednog ili dva *Higgsova bozona* s ZZ bozonima. Odgovarajuća *Feynmanova pravila* prikazana na slici 7.8 su:

$$\begin{aligned} hZ_\mu Z^\mu: & \quad i \frac{(g^2 + g'^2)v}{4} \times 2! g_{\mu\nu} = i \sqrt{g^2 + g'^2} M_Z g_{\mu\nu} = 2i \frac{M_Z^2}{v} g_{\mu\nu}, \\ hhZ_\mu Z^\mu: & \quad i \frac{(g^2 + g'^2)}{8} \times 2! \times 2! g_{\mu\nu} = 2i \frac{M_Z^2}{v^2} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

gdje svako vezanje sadrži faktor 2! zbog dva identična Z bozona, dok drugi član sadrži i dodatni faktor 2! uslijed dva identična *Higgsova bozona* koja se pojavljuju u lagranžijanu. Kao i prije, masa Z bozona, hZZ interakcija, kao i hhZZ interakcija dolaze od istog člana u lagranžijanu i dobivaju se razvojem faktora  $(v + h)^2$ . Odatle su hZZ i hhZZ interakcije jedinstveno predviđene u *SM-u* kada su poznate vrijednosti  $v$  i mase Z bozona. Ovim je prikazan način na koji *Higgsov mehanizam* unutar *SM-a* rješava problem postojanja masa *baždarnih bozona*. Kao rezultat, određen je oblik interakcije *Higgsovog bozona* s W i Z bozonima, te je mjerenje istih poslužilo kao provjera mehanizma loma elektroslabe simetrije.

## 7.6. Nabijene i neutralne slabe struje

Interakcije fermiona s baždarnim poljima dane su sa sljedećom relacijom:

$$L_{\text{int.}} = \bar{L}_i i \gamma^\mu \left( ig T \cdot W_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) L_i + \bar{R}_i i \gamma^\mu \left( ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) R_i. \quad (7.57)$$

Kako je Q generator  $U(1)_{\text{em}}$  i odgovara naboju čestice u jedinicama naboja protona, česticama se moraju pridružiti slijedeće vrijednosti hipernaboja:

$$Y(l_L = -1), \quad Y(l_R = -1), \quad Y(q_L) = \frac{1}{3}, \quad Y(u_R) = \frac{4}{3}, \quad Y(d_R) = \frac{-2}{3}. \quad (7.58)$$

Nakon ovog pridruživanja se može izračunati lagranžijan nabijenih leptonskih slabih struja kao:

$$\begin{aligned} L_{\text{CC}} = \bar{l}_i \gamma^\mu (ig T^1 W_\mu^1 + ig T^2 W_\mu^2) l = -\frac{g}{2} \left\{ (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L W_\mu^1 + \right. \\ \left. (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L W_\mu^2 \right\} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu W_\mu^-). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Kvarkovska nabijena slaba struja je identična ( $\nu \rightarrow u_L$ ,  $e \rightarrow d_L$ ). Usporedbom s V-A teorijom, kako je već pokazano u relaciji (7.11), identificira se kao:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (7.60)$$

Kako je  $m_W = \frac{1}{2}gv$ , imamo da je:

$$v = \frac{1}{\sqrt{G\sqrt{2}}} = 246 \text{ GeV}. \quad (7.61)$$

Lagranžijan neutralnih slabih struja je:

$$L_{\text{NC}} = \bar{L}_i i\gamma^\mu \left( igT^3 \cdot W_\mu^3 + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) L + \bar{R}_i i\gamma^\mu \left( ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) R, \quad (7.62)$$

te se nakon rabljenja relacija (7.37) i (7.38), te dodatnih algebarskih operacija može napisati u obliku:

$$L_{\text{NC}} = -\frac{g}{\cos\theta_W} \bar{f}\gamma^\mu \frac{1}{2} [(T^3 - 2Q\sin\theta_W) - T^3\gamma_5] f Z_\mu - g\sin\theta_W \bar{f}\gamma^\mu Q f A_\mu. \quad (7.63)$$

Usporedi li se ovo s V-A teorijom te s poznatim oblikom  $L_{\text{elektromagnetsko}}$  može se identificirati kao:

$$e = g\sin\theta_W, \quad c_V = \frac{1}{2}(T^3 - 2Q\sin^2\theta_W), \quad c_A = -\frac{1}{2}T^3. \quad (7.64)$$

U granici malih izmijenjenih impulsa imamo:

$$M^{\text{NC}} = \frac{g^2}{\cos^2\theta_W m_Z^2} J^{\text{NC}\mu} J_\mu^{\text{NC}}. \quad (7.65)$$

Iz prethodne relacije, te rabeći (7.11), slijedi da je:

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1. \quad (7.66)$$

Ovo je vrlo važan rezultat *SM-a* koji je eksperimentalno dobro provjeren.

### 7.7. Feynmanova pravila u *SM-u*

Na kraju se mogu skupiti sve rezultati u pregledan oblik. Članovi dijagonalni i kvadratni po poljima iz ukupnog *lagranžijana SM-a* poslije spontanog loma simetrije daju propagatore odgovarajućih čestica, dok *lagranžijan interakcije* daje *verteks faktore* i određuje *perturbacijski razvoj S-matrice*. Popis svih *Feynmanovih pravila za SM* (osim 3 i 4-verteksa elektro-slabih *baždarnih bozona i gluona*) je onda predstavljen u sljedećem obliku:

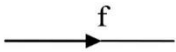
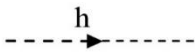
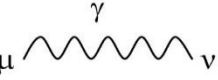
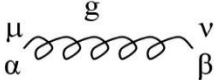
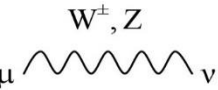
### Pregled Feynmanovih pravila u SM-u

Fermionska polja su definirana na način da je:



$$l = \{e, \mu, \tau\} \quad \nu_l = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\} \quad q_u = \{u, c, t\}, \quad q_d = \{d, s, b\} \quad \{q_u, q_d\} \quad (3 \text{ boje za svaki kvark}) \quad f = \{l, \nu_l, q_u, q_d\} \quad (7.67)$$

Elektroslabi baždarni bozoni su:  $\gamma, z, W^\pm$ , gluoni su zadani s oznakom  $g$ , a Higgsov bozon sa  $h$ .



Propagatori:

	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$		$\frac{i}{p^2 - M_h^2}$
	$\frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2}$		$\frac{-i g^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{p^2}$
	$\frac{-i \left( g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \right)}{p^2 - M^2}$		

Ulazne linije:

	$u_\sigma(p)$
	$\bar{v}_\sigma(p)$

Izlazne linije:

	$\bar{u}_\sigma(p)$
	$v_\sigma(p)$

Slika 7.9: Feynmanova pravila za propagatore i ulazne i izlazne linije



Slika 7.10 Feynmanova pravila za propagatore i ulazne i izlazne linije

Prilikom izračuna *udarnih presjeka* potrebno je sumirati po svim komponentama polarizacije (spina) konačnih čestica što omogućuju relacije potpunosti za fermione:

$$\sum_{\sigma=1,2,\dots} u_{\sigma}(p) \bar{u}_{\sigma}(p) = \gamma^{\mu} p_{\mu} + m, \quad \sum_{\sigma=1,2,\dots} v_{\sigma}(p) \bar{v}_{\sigma}(p) = \gamma^{\mu} p_{\mu} - m, \quad (7.68)$$

i *baždarne bozone*:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{\mu*} \varepsilon_{\lambda}^{\nu} = \begin{cases} -g^{\mu\nu}, & M = 0 \\ -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{M^2}, & M \neq 0 \end{cases} \quad (7.69)$$

Kada bi se sumiralo samo po transverzalnim stanjima ne bi se dobio samo  $g_{\mu\nu}$  u brojniku propagatora. Međutim za *QED* se takva suma može zamijeniti s  $g_{\mu\nu}$  zbog *Wardovog identiteta*. Za *QCD* je situacija malo složenija, ali se na kraju dobiva identičan rezultat. Fermionska stanja su spinori čije su normalizacije predstavljene kao:

$$\bar{u}_{\sigma}(p) u_{\sigma}(p) = -\bar{v}_{\sigma}(p) v_{\sigma}(p) = 2m. \quad (7.70)$$

Interakcije su određene verteksnim (vršnim) faktorima. Konstante interakcija su:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \begin{cases} 1/137, & \text{skala } m_e \\ 1/128 & \text{skala } m_Z \end{cases}, \quad \alpha_3 = \frac{g_3^2}{4\pi} = 0,118, \quad \text{skala } M_Z \quad \sin^2 \theta_W = 0,231, \quad g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad g_W = \frac{e}{\sin \theta_W 2\sqrt{2}}. \quad (7.71)$$

Za svaki fermion  $f$  konstante vezanja s  $Z$  bozonom određene su faktorima:

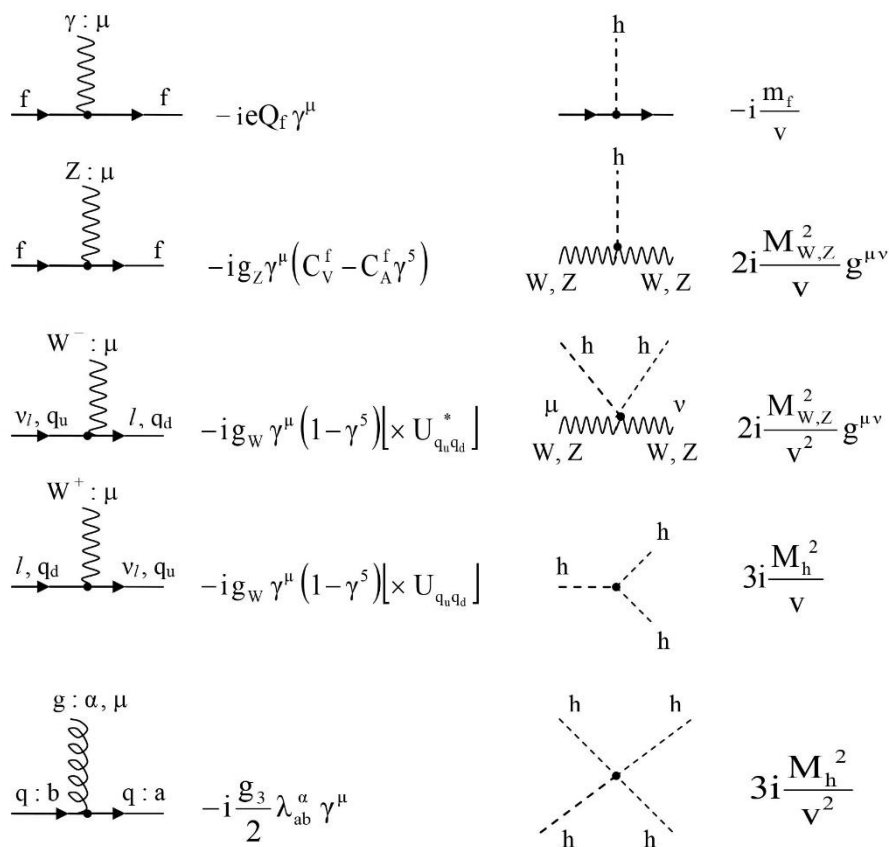
$$C_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - \theta_f \sin^2 \theta_W; \quad C_A^f = -\frac{1}{2} T_3^f, \quad (7.72)$$

koji su prikazani u *tablici 7.1*.



f	$Q_f$	$C_A$	$C_V$
$\nu_l$	0	$-\frac{1}{4}$	0,250
l	-1	$+\frac{1}{4}$	0,038
$q_u$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0,193
$q_d$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	0,652

Tablica.1. Faktori fermiona f kostante vezanja s Z bozonom



Slika 7.11 Feynmanova pravila za vrhove (verteks faktore)

Gornji faktori uz Feynmanova pravila dozvoljavaju da se za svaki dijagram odredi odgovarajući S-matrični element  $S_{fi}$ .

## Pravila:

- za željena inicijalna „i“ i finalna „f“ stanja nacrtati sve moguće *Feynmanove dijagrame* za proces  $i \rightarrow f$  koji su određenog reda u teoriji perturbacija, počevši od najnižeg (s *minimalnim brojem vrhova*). Dodavanje vrhova uvijek podiže red dijagrama.
- amplituda dijagrama  $M_{fi}$  dobija se zamjenom svake izlazne/ulazne linije i vrhova u dijagramu odgovarajućim faktorom.
- sumirati po svim *Diracovim i Lorentzovim indeksima* i integrirati po 4-impulsima svih ulaznih linija (*propagatora*).
- ukoliko dijagram ima  $n$  vrhova, podijeliti s  $n!$  i pomnožiti s brojem perturbacija identičnih vrhova unutar dijagrama.
- pomnožiti s  $-1$  za svaku zatvorenu fermionsku petlju
- ovako dobijeni matricni element  $M_{fi}$  pomnožiti s  $(-i)$  i s  $\delta$ -funkcijom očuvanja 4-impulsa u procesu, tj. sa  $(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i)$ , gdje je  $p_i$  suma svih ulaznih, a  $p_f$  suma svih izlaznih 4-impulsa.

Da se dobiju diferencijalni udarni presjeci  $d\sigma$  i širine raspada  $d\Gamma$ , apsolutnu vrijednost kvadrata suma amplituda svih dijagrama  $|M_{fi}|^2$ , ako je dovoljno usrednjena po *neopserviranim komponentama spina/boje ulaznih čestica*, treba podijeliti s tokom ulaznih čestica  $I_0$  (*kinematički faktor*) i pomnožiti s faktorom faznog prostora  $\prod_{f,i} \frac{1}{2E_{f,i}} \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}$ , te integrirati po impulsima svih konačnih čestica. Ova pravila su dovoljna za izračun udarnih presjeka jednostavnih procesa, na primjer  $2 \rightarrow 2$  procese, prvog ili drugog reda u teoriji perturbacija. Izračunavanje korekcija višeg reda zahtijeva kompletnu teoriju koja uključuje i dodatna pravila uslijed renormalizacije (dijagrame s dodatnim nefizikalnim „ghost“ česticama).

## **8. Uvod u supersimetrije**

### **8.1. Uvod i motivacija**

*Supersimetrija (SUSY)*- predstavlja simetriju koja se odnosi na *bozonske i fermionske stupnjeve slobode*. Ona takođe predstavlja u suštini izvrsnu i uzbudljivu ideju, ali joj je provedba tehnički prilično komplicirana. To može izgledati obeshrabrujuće kada se poslije standardnih tečajeva otkriju informacije o npr. *Diracovoj jednadžbi* i *Kvantnoj teoriji polja (QTP)*, tako da je važno početi iznova i ovladati novim formalizmom. S druge strane, prošlo je 40 godina od prvih istraživanja *SUSY* ranih 70 -tih, bez ikakvih izravno otkrivenih dokaza o njihovoj važnosti za

fiziku. *SM* fizike čestica (prikladno proširen kako bi uključio adekvatnu fenomenologiju neutrina) se rabi na iznimno zadovoljavajući način.

Postavlja se pitanje: *Zašto trošiti vrijeme proučavajući zamršene stvari iz SUSY?* Doista, zašto uopće špekulirati o tome kako ići "izvan" *SM-a*, osim ako nas eksperiment ne prisili na to? Ako to nije slomljeno, zašto pokušavati i fiksirati to?

Što se tiče formalizma, većina standardnih izvora vezanih za *SUSY* rabi i "točkastu" 2-dvokomponentsku spinorsku notaciju otkivenu u teoriji reprezentacija *Lorentove grupe*, ili 4-komponentne *Majorana spinore*. Nijedan od njih obično nije uključen u uvodne tečajeve o *Diracovoj jednadžbi* (iako bi možda trebali biti). No, naravno, savršeno je moguće prikazati jednostavne aspekte *SUSY* pomoću notacije koja se meko nastavlja na standardne 4-komponentne tečajeve *Diracovih jednadžbi* i brutalno silovit, "pokušaj-i-vidi" pristup konstruiranju *SUSY*-invarijantnih teorija.

Što je s važnošću da se ide dalje od *SM-a*? Unutar samog *SM-a* postoji vjerodostojan povijesni odgovor na to pitanje. *V-A struja-struja (četvero-fermionska)* teorija slabih interakcija vrlo je dobro funkcionirala mnogo godina, kada se rabila u najnižem redu u teoriji perturbacija. Ipak je *Heisenberg* već 1939. zabilježio pojavu problema koji su nastali prilikom pokušaja izračuna efekata višeg reda, te bi tada očito došlo do potpunog loma teorije perturbacije kod tada nezamislivo visoke energije od nekakvih 300 GeV-a (skala  $G_F^{-1/2}$ ). Kasnije je to postalo povezano s nerenormalizacijom četvero-fermionske teorije, čistog teorijskog problema u godinama prije eksperimentima postignute preciznosti važne za osjetljivost na elektroslabe radijativne korekcije. Model '*Srednji Vektorski Bozon*', je predvidio slabu interakciju između dva fermiona koja je posredovana *masivnim vektorskim bozonima*. *Glashow* je predlagao u svom članku iz 1961.  $SU(2) \times U(1)$  strukturu. *Weinberg i Salam* su u svojim *baždarnim teorijskim* modelima rabili hipoteze spontanog loma simetrije za stvaranje masa *baždarnih bozona* i fermiona prepostavljajući da ovaj oblik loma simetrije ne lomi renormalizabilnost koju posjeduje bezmasena (slomljena) teorija. Kada je *t'Hooft* demonstrirao ovo 1971., nastala je teorija *Glashow-Salam-Weinberg*, te je njen teorijski status usporediv s onim iz *QED-ja*. S vremenom je preciznost elektroslabih eksperimenata spektakularno potvrđena putem izračunatih radijativnih korekcija, pa čak i iznimnim preciznim predviđanjem mase *top (vršnog) kvarka*, bazirane na efektima virtualne čestice...ali ovdje se priča ne završava, jer još nisu dozvoljeni eksperimentalni pristupi za predloženi lom simetrije, tj. tzv. *Higgsov sektor*.

Također, postoji nekoliko vidljivih nesavršenosti teorije, te u slučaju *SM-a*, prilično ozbiljnu nesavršenost (za mnoge teoretičare) predstavlja '*hijerarhijski problem*'. *SUSY* može pomoći pri rješavanju tog vidljivog problema, pod uvjetom da *njene* partnerski poznate čestice imaju mase otprilike ne veće od 1-10 TeVa .

Još je važno naglasiti da je šezdesetih godina prošlog stoljeća došlo do pokušaja spajanja vanjskih simetrija, kao što je *Lorentzova invarijantnost*, s unutarnjim simetrijama, kao što je *okusna izospinska* ili *SU(3)* simetrija, kako bi se proširila *Poincaréova* algebra s unutarnjim transformacijama. Ipak su *Coleman i Mandula* 1967. dokazali da je nemoguće kombinirati ove dvije vrste simetrija pod pretpostavkom da se rabe samo *bozonski (cjelobrojni spinski) generatori*. Međutim, *Gol'fand i Likhtman* su 1971. godine pronašli način da se izbjegne ovaj teorem, proširujući *Poincaréovu* algebru s *fermionskim (polu-cjelobrojnim spinskim) generatorima*. Tada je rođena *supersimetrija*. Nekoliko mjeseci kasnije su *Ramond* i zajedno *Neveu i Schwarz* uspjeli uvesti i fermione u teorije struna, kako bi se objasnilo podrijetlo bariona. To su bila prva dvodimenzionalna *supersimetrična modela*. Četverodimenzionalne supersimetrične teorije polja su uvedene 1973. godine od strane *Volkova i Akulova* u nelinearnoj realizaciji (oni su pokušali primijeniti supersimetriju na neutrine, ali je to pokazano eksperimentalno tako da njihova teorija nije ispravno opisala interakcije pri niskoj energiji). Iste godine, *Wess i Zumino* su predložili prvu linearnu realizaciju supersimetrične teorije polja u četiri dimenzije, koja se sada rabi u većini modela. Onda su *Wess, Zumino, Iliopoulos i Ferrara* otkrili da mnoge divergencije inherentne za neke četverodimenzionalne teorije polja nestaju kada se uvede pojam supersimetrije. Supersimetrija je postala još atraktivnija zahvaljujući ovom posljednjem obilježju. Kasnije su 1976. dvije nezavisne skupine, *Freedman, van Nieuwenhuizen i Ferrara* s jedne strane, te *Deser i Zumino* s druge strane, otkrile da analogno s *baždarnim teorijama* lokalna supersimetrija može uključivati opis gravitacije, tj. *tzv. supergravitaciju*.

## **8.2. 'Problem nestabilnosti slabe skale- hijerarhijski problem'**

Elektroslabi sektor *SM-a* sadrži u sebi parametar s dimenzijama energije (tj. 'slabu skalu'), tj. vakuumski očekivanu vrijednost *Higgsovog polja*,

$$v \approx 246 \text{ GeVa.} \quad (8.1)$$

Ovaj parametar, u principu, postavlja skalu svih masa u teoriji. Na primjer, masa  $W^\pm$  (zanemarujući radijativne korekcije) je zadana kao:

$$M_W = gv/2 \sim 80 \text{ GeVa,} \quad (8.2)$$

dok masa *Higgsovog bozona* iznosi:

$$M_H = v\sqrt{\frac{\lambda}{2}} = 246\text{GeV}\sqrt{\frac{\lambda}{2}} = 125\text{ GeV}, \quad (8.3)$$

gdje  $g$  predstavlja  $SU(2)$  baždarnu konstantu vezanja, a  $\lambda$  jakost *Higgsove samointerakcije* u *Higgsovom potencijalu* koja je zadana sljedećom relacijom:

$$V = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (8.4)$$

gdje su  $\lambda > 0$  i  $\mu^2 > 0$ .  $\phi$  predstavlja  $SU(2)$  dubletno polje koje se definira kao:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

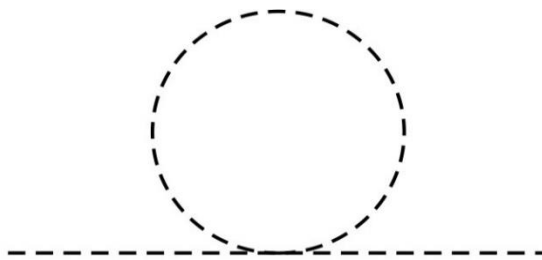
i podrazumijeva se da su sva polja kvantna. Minimum  $V$  se može interpretirati kao klasični potencijal koji za nultu vrijednost iznosi:

$$|\phi| = \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (8.6)$$

gdje je  $\mu \equiv \sqrt{\mu^2}$ . Taj klasični minimum (*ravnotežna vrijednost*) je konvencionalno interpretiran kao očekivana vrijednost kvantnog polja u kvantnom vakuumu ( tj. *vev*). Ako se ' $-\mu^2$ ' u relaciji (8.4) zamijeni s pozitivnom veličinom ' $\mu^2$ ', klasična ravnotežna vrijednost jednaka je nuli, što znači da izraz  $v = 0$  predstavlja slučaj u kojemu bi sve čestice mogle biti bezmasene. Stoga je od vitalne važnosti očuvati znak  $i$ , zapravo, magnitudu koeficijenata  $\phi^\dagger\phi$  iz relacije (8.4).

Pošto je do sada diskusija vođena bez petlje, postavlja se pitanje *šta se događa kad petlje budu uključene?*  $SM$  je renormalizabilan, što znači da su konačni rezultati dobiveni za sve korekcije višeg reda (*petlje*) čak i ako se po impulsima u integralima petlje integrira sve do beskonačnosti. Ali premda to implicira da je teorija dobro definirana i ako se računa na vrlo velikim energijama, ne vjeruje se da je  $SM$  stvarno sve što postoji na vrlo visokim energijama. Integracijska mjera integrala petlje je oblika:

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \quad (k, \text{ unutarnji impuls}). \quad (8.7)$$



Slika 8.1 Dijagram vlastite energije jedne petlje u  $\phi^4$  renormalizacijskoj teoriji

Postoje indikacije da se *SM* mora promatrati kao dio veće teorije koja uključuje "*novu fiziku*" visokih energija, gdje  $\Lambda$  predstavlja skalu na kojoj se pojavljuje ova nova fizika i gdje *SM* mora biti modificiran. U najmanju ruku, sigurno postoji nekakva vrsta nove fizike na skali u trenutku kada kvantna gravitacija dobiva važnu ulogu, za koju se vjeruje da je naznačena *Planckovom masom*:

$$M_P = (G_N)^{-1/2} \approx 1,2 \times 10^{19} \text{ GeV.} \quad (8.8)$$

Samointerakcija 4-dimenzionalnog bozona u općenitom izrazu (8.4), u redu s jednom petljom, doprinosi  $\phi^\dagger\phi$  izrazu, odgovarajući vlastitom energetskom dijagramu predstavljenom na *slici 8.1.* koji je proporcionalan s:

$$\lambda \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_H^2}. \quad (8.9)$$

Ovaj integral jasno kvadratno divergira (postoje četiri  $k$  impulsa u interakcijskoj mjeri i dva u nazivniku), a ispostavlja se da je *pozitivan*, dajući korekciju:

$$\sim \lambda \Lambda^2 \phi^\dagger \phi, \quad (8.10)$$

za  $-\mu^2 \phi^\dagger \phi$  izrazu u  $V$ . Izraz ' $\lambda$ ' predstavlja brojni faktor koji ima vrijednost  $\frac{1}{4} \pi^2$ . Koeficijent  $-\mu^2$  od  $\phi^\dagger \phi$  je tada zamijenjen s korekcijskom *fizikalnom* vrijednošću  $-\mu_{\text{phys}}^2$  od jedne petlje, koja se definira kao  $-\mu_{\text{phys}}^2 = -\mu^2 + \lambda \Lambda^2$ , ili ekvivalentno:

$$\mu_{\text{phys}}^2 = \mu^2 - \lambda \Lambda^2. \quad (8.11)$$

Ponovno-minimizirajući  $V$ , dobivamo izraz identičan izrazu (8.6), ali je  $\mu$  zamjenjen s  $\mu_{\text{phys}} = \sqrt{\mu_{\text{phys}}^2}$ . Sada treba razmotriti koja je vjerojatnost vrijednosti  $\mu_{\text{phys}}$ .

Sada je v fiksirano fenomenološki vrijednošću iz (8.1) i jednadžbom iz (8.6) koja je modificirana tako da sadrži  $\mu_{\text{phys}}$ , te definira omjer između dva nepoznata parametra  $\mu_{\text{phys}}$  i  $\lambda$ :  $\mu_{\text{phys}} \approx 123 \text{ GeV} \sqrt{\lambda}$ . Slijedi da ako želimo biti sposobni tretirati *Higgsovo vezanje*  $\lambda$  perturbativno,  $\mu_{\text{phys}}$  teško može biti veća od najviše nekoliko stotina GeVa. (Znatno veća vrijednost od ove bi zbog (8.6) značila da je  $\lambda$  mnogo veća od jedinice, te da bi *Higgsov sektor* mogao biti "*jakosno interagirajući*"; premda nije logički isključena, ta mogućnost općenito nije favorizirana, zbog praktičke poteškoće provođenja pouzdanih neperurbacijskih izračuna). S druge strane, ako je  $\Lambda \sim M_P \sim 10^{19} \text{ GeV}$ , korekcija jedne petlje u izrazu (8.11) je tada znatno

veća od  $\sim(100\text{GeV})^2$ , što zahtijeva da se za parametre  $\mu^2$  uzme vrlo velika vrijednost da bi  $\mu_{\text{phys}}^2$  bio reda veličine  $\sim(100\text{GeV})^2$  ukazujući na važnost da se dvije velike veličine  $\mu^2$  i  $-\Lambda^2/4\pi^2$  zbrajaju u malu veličinu  $\mu_{\text{phys}}^2$ . To dovodi do problema tzv. '*finog podešavanja*' teorije.

Ovaj problem '*finog podešavanja*' koji uključuje parametar  $\mu$  utječe ne samo na masu *Higgsove* čestice, koja je predstavljena u izrazima za  $\mu$  (kombinacija izraza (8.3) i (8.6)) kao:

$$M_H = \sqrt{2}\mu, \quad (8.12)$$

nego i na masu  $W$  kao:

$$M_W = g\mu/\sqrt{\lambda}, \quad (8.13)$$

te na kraju na sve mase u *SM-u* koje nastaju iz  $v$  i stoga i iz  $\mu$ . Ozbiljan problem za *SM* zbog ove "*neprirodne*" situacije, koja je uzrokovana kvadratnom masom divergencija u skalarnom sektoru, je nastao iz privatnog razgovora između *K. G. Wilsona* i *L. Suskinda*.<sup>20</sup>

Premda se ovo sve događa u izrazu za masu renormalizabilnih teorija, trebali bi biti zabrinuti, jer se zapravo radi o problemu koji se pojavljuje na posebno nezgodan način u teorijama koje uključuju skalarnu česticu u *lagranžijanu*-za razliku od teorija s *fermionima* i *baždarnim poljima* u *lagranžijanu*, ali koje su sposobne proizvesti skalarnu česticu kao nekakvu vrstu vezanih stanja. Primjer s fermionima i baždarnim poljima je *QED*. U *QCD-ju* se analogno slici 8.1 javlja proces s jednom petljom u kojem *elektron* emitira, a zatim ponovno apsorbira *foton*. To dovodi do korekcije  $\delta_m$  do fermionske mase  $m$  u *lagranžijanu*, koja se definira kao:

$$\delta_m \sim \alpha \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{\gamma^{\mu} k_{\mu} k^2} \sim \alpha \Lambda. \quad (8.14)$$

Ustvari, međutim, kada se izračun razradi detaljno, dobija se sljedeća relacija:

$$\delta_m \sim \alpha m \ln \Lambda, \quad (8.15)$$

tako da se čak ako  $\Lambda \sim 10^{19}$  GeV, dobija da je  $\delta_m < m$  i neugodno *fino podešavanje* nije neophodno.

---

<sup>20</sup> Iz malo drugačije perspective, *t' Hooft* je također skrenuo pozornost na poteškoće koje su nastale teorijama "neprirodnim" lakim skalarima. U kontekstu *Velikog Ujedinjavanja baždarnih teorija*, Weinberg je naglasio da je teško pronalaziti prirodnu teoriju (tj. one koja nije fino podešena) u kojoj su skalarna polja povezana s lomom simetrije elementarna, te da su neke neke simetrije slomljene na GUT skali na približno  $\sim 10^{16}$  GeV, dok su druge slomljene na mnogo nižoj slaboj skali; to se obično naziva "*baždarni hijerarhijski problem*"

Zašto se to baš u ovom slučaju događa, tj. kada je  $\delta_m \sim m$ ? To se događa zbog toga što *lagranžijan* za *QED* (i *SM* za tu tvar) sadrži kiralnu simetriju kao fermionsku masu koja ide ka nuli. To je simetrija pod transformacijama (na fermionskim poljima) oblika:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad (8.16)$$

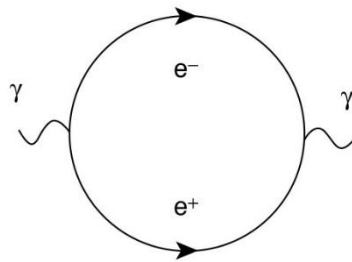
u *U(1)* slučaju, ili:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\tau/2\gamma_5}\psi, \quad (8.17)$$

u *SU(2)* slučaju. Ova simetrija jamči da sve radijativne korekcije od  $m$ , izračunate u perturbacijskoj teoriji iščezavaju o limesu  $m \rightarrow 0$ . Dakle,  $\delta_m$  mora biti proporcionalno s  $m$ , pa je ovisnost o  $\Lambda$  (iz dimenzionalnih analiza) jedino logaritamska. Što je s vlastitim energetske korekcijama masa *baždarnih čestica*? Za *QED* *slomljena baždarna simetrija* primorava masu fotona da bude jednaka nuli ( $m_\gamma = 0$ ) u svim redovima računa smetnje. Drugim riječima, *baždarna invarijantnost* nam garantira da ne postoji izraz oblika:

$$m_\gamma^2 A^\mu A_\mu, \quad (8.18)$$

koji se ne može proizvesti u neslomljenoj *baždarnoj teoriji*, jer je foton bezmasen. Dijagram na slici 8.2 je divergentan, ali samo logaritamski; divergencija je apsorbirana u konstanti renormalizacije jakosti polja, a kinetički član ovisan o energiji fotona utječe na konstantu fine strukture,  $\alpha = e^2/4\pi$ .



Slika 8.2 Dijagram vlastite energije u *QED*-ju koji sadrži foton s jednom petljom

S druge strane, ne-nulte mase  $W$  i  $Z$  bozona u *SM*-u se pojavljuju neperturbacijskim putem spontanog loma simetrije, kao što se moglo vidjeti putem *Higsove vakuumske očekivane vrijednosti*  $v$ . Ako je  $v$  jednaka nuli, tada su  $W$  i  $Z$  su bezmaseni kao i foton. No,  $v$  je proporcionalna s  $\mu$ , tako da su mase koje se dobivaju lomom simetrije jednako osjetljive na skalu  $\Lambda$ , kao i  $M_H$ .



Označimo sada kvalitativno način na koji se supersimetrija može riješiti kvadratne divergencije u skalarnoj *vlastitoj energiji* razmatrajući moguću korekciju fermionske petlje u izrazu  $-\mu^2\phi^\dagger\phi$ , kao što je prikazano na *slici 8.3*. Na nultom izlaznom impulsu, takav doprinos se vodi kao:

$$\left(-g_f^2 \int_1^\Lambda d^4k \text{Tr} \left[ \frac{1}{(\gamma^\mu k_\mu - m_f)^2} \right] \right) \phi^\dagger \phi = \left(-4g_f^4 \int_1^\Lambda d^4k \text{Tr} \left[ \frac{k^2 + m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} \right] \right) \phi^\dagger \phi. \quad (8.19)$$

U ovoj relaciji predznak dolazi iz zatvorene fermionske petlje i igra važnu ulogu. Izraz koji sadrži  $k^2$  u brojniku u (8.19) je kvadratno divergentan i suprotnog je predznaka od izraza za kvadratnu divergenciju (8.10) zbog *Higgsove petlje*. Zanemarujući brojne faktore, ova se dva doprinosa mogu predstaviti u zajedničkom obliku na način:

$$(\lambda - g_f^2) \Lambda^2 \phi^\dagger \phi. \quad (8.20)$$

Ako je iz nekog razloga postojalo *bozonsko-fermionsko vezanje*  $g_f$ , povezano s *Higgsovim vezanjem* kao:

$$g_f^2 = \lambda, \quad (8.21)$$

tada se ne bi dogodila kvadratna ovisnost  $\mu_{\text{phys}}^2$  o  $\Lambda^2$ . Nakon opisanog  $\Lambda^2$  doprinosa naša dva dijagrama *vlastite Higgsove energije* bi imala zajednički doprinos logaritamski ovisan o  $\Lambda$ :

$$\sim \lambda (aM_H^2 - bm_f^2) \ln \Lambda, \quad (8.22)$$

gdje  $a$  i  $b$  predstavljaju konstante. Iz izraza (8.22) slijedi da se problem finog podešavanja još uvijek može pojaviti u slučaju ako se Higgs veže na bilo koji fermion mase  $m_f$  mnogo veće od one na slaboj skali. Općenito, ako *Higgsov sektor* posjeduje bilo kakvo vezanje, čak i indirektno preko petlji, s vrlo masivnim stanjima (kao što se, na primjer, događa u *Teorijama Velikog Ujedinjenja, GUT teorijama*), ta masivna stanja će utjecati na radijativne korekcije  $-\mu^2$  izraza zahtijevajući fino podešavanje da bi se reproducirala eksperimentalna *Higgsova masa*. Supersimetrije elegantno rješavaju problem hijerarhije. U supersimetričnoj verziji našeg '*jedan Higgs - jedan novi fermion*' modela, mase bozona i fermiona bi bile jednake ( $M_H = m_f$ ), te bi se ne samo doprinos iz relacije (8.22) pokratio, nego i pridruženi konačni članovi. Slično tome bi se poništili i ostali doprinosi *vlastite energije* čestica *SM-a* i njihovih superpartnera, ukoliko bi *SUSY* bila egzaktno realizirana. Općenitije, u supersimetričnim teorijama su jedino valne funkcije beskonačne. Međutim, superpartneri za čestice *SM-a* nisu još otkriveni, tako da supersimetrija mora biti mekano slomljena, s masama superpartnera koje će, ukoliko budu otkrivene, imati malo prevelike vrijednosti. U našem jednostavnom modelu, ovo znači da je  $M_H^2 \neq m_f^2$ . U ovom slučaju, kvadratne divergencije se i dalje poništavaju, kao i u prethodnom

slučaju, međutim preostaje korekcija fizikalnog izraza '- $\mu^2$ ' reda  $\lambda(M_H^2 \neq m_f^2)\ln\Lambda$ . Može se zaključiti da (*mekano*) slomljena *SUSY* može riješiti problem *SM-a* finog podešavanja, pod uvjetom da novi *SUSY* superpartneri nisu mnogo teži od skale  $v$  (ili  $M_H$ ).

Ukratko, *SUSY* može *stabilizirati* hijerarhiju  $M_{H,W} \ll M_P$ , u smislu da radijativne korekcije neće potisnuti  $M_{H,W}$  do visoke skale  $\Lambda$ ; taj argument nas upućuje na to da bi *SUSY* trebala biti opažajuća kod skale vrijednosti ne veće od 1-10 TeVa ukoliko bi se postigla željena stabilizacija. Podrijetlo spomenute skale loma *SUSY* je poseban problem. Važno je naglasiti da ono vrijedi za teoriju *MSSM* vrste, s masama superpartnera koje nisu veće od nekoliko TeVa.

Bez obzira na gore navedenu motivaciju za pronalazak supersimetrične verzije *SM-a* (pregled koji je postao široko prihvaćen još od ranih 1980-ih), trebali bi biti svjesni da supersimetrije povijesno gledano nisu izumljene kao odgovor na problem finog podešavanja *SM-a*. Supersimetrične teorije polja i supersimetrična algebra su postojale još od ranih 1970-ih: u dvije dimenzije, u kontekstu teorije struna; u nelinearnoj realizaciji; kao gradirana *Lieva algebra* u četiri dimenzije, te u četverodimenzionalnoj kvantnoj teoriji polja. Doista, *Fayet* je bio pionir *SUSY* proširenja na *SM-u* prije nego što je došlo do pojave centralnog problema s finim podešavanjem, i prije nego što je fenomenološka važnost mekog loma *SUSY-ja* bila uvažena; i *Farrar* i *Fayet* su zatim započeli istraživanja fenomenologije superpartnera.

Ne bi trebali imati dojam da *SUSY* predstavlja jedino relevantno rješenje hijerarhijskog problema. Zapravo, u ponudi je još nekoliko drugih. Jedan, koji je bio gotovo jednako dugo kao *SUSY*, generički se naziva "*technicolor*". On predlaže da *Higgsovo polje* nije "*elementarno*", nego da je analogno stanju elektronskog para u *BCS* teoriji supravodljivosti, kao vezano stanje novih dubleta bezmasnih kvarkova  $Q$  i anti-kvarkova  $\bar{Q}$  koji međusobno inetragiraju unutar nove jake interagirajuće *baždarne teorije*, slično *QCD-ju*. U ovom slučaju, lagranžijan *Higgsovog sektora* predstavlja samo efektivnu teoriju, koja vrijedi za energije čije se vrijednosti kreću znatno ispod skale na kojoj bi  $Q$ - $\bar{Q}$  struktura mogla biti otkrivena - recimo 1-10 TeVa. Integral iz relacije (8.9) bi se morao prikladno proširiti tek na ovoj skali. Suštinski su nove jake interakcije smještene na skali koja je puno bliža elektroslaboj skali. Postoji još jedno moguće rješenje problema hijerarhije, a to je da je *gravitacijska (ili string)* skala zapravo znatno niska - možda čak i reda veličine nekoliko TeV. Hijerarhijski problem tada nestaje, jer ultravioletna granična vrijednost  $\Lambda$  nije mnogo veća od same slabe skale. Ovaj mehanizam generiran je uvođenjem "*velikih*" skrivenih ekstra dimenzija, možda i većih od *sub-milimetarskih* skala. Ipak, može se reći da je *SUSY*, u obliku *MSSM-a*, trenutačno najrazvijeniji okvir za vodeća i informirajuća istraživanja fizike "*izvan SM-a*".

### 8.3. Tri kvantitativna uputstva

Ovdje se mogu ukratko navesti tri kvantitativna rezultata *MSSM-a*, koji su zajednički definirani na način tako da mnogi fizičari ozbiljno shvaćaju *SUSY* modele. To su:

- "*Minimalni supersimetrični standardni model*" (*MSSM*) koji sadrži dva *Higgsova dubleta*, predviđa da najlakša *Higgsova čestica* ne smije biti teža od 140 GeV. U *SM-u*, nasuprot tome, ne postoje ograničenja na  $M_H$ .<sup>21</sup>
- Na razini jedne petlje, inverzne "*konstante fine strukture*" kao što su  $\alpha_1^{-1}(\theta^2)$ ,  $\alpha_2^{-1}(\theta^2)$ ,  $\alpha_3^{-1}(\theta^2)$  *SM-a* imaju derivaciju proporcionalnu logaritmu skale  $\ln\theta^2$ .  $\alpha_1^{-1}(\theta^2)$  se smanjuje s  $\theta^2$ , a  $\alpha_2^{-1}(\theta^2)$  i  $\alpha_3^{-1}(\theta^2)$  povećavaju, i sve tri se susreću na visokoj  $\theta^2 \sim (10^{16} \text{ GeV})^2$ , tako da se one zapravo uvjerljivo susreću u *MSSM-u*. To nije ostvareno u *SM-u*. Zajednička vrijednost konstanti fine strukture se ostvaruje pod uvjetom da su mase superpartnera u rasponu od 100 GeV-10 TeV, što predstavlja poticaj ideji ujedinjenja. Značajno je da ova procjena *SUSY* skale u osnovi identična onoj koja proizilazi iz razmatranja „*finog podešavanja*“.
- U bilo kojoj renormalizabilnoj teoriji, maseni parametri u *lagranžijanu* su također ovisni o skali, baš kao i konstante vezanja. U *MSSM-u*, evolucija parametra *Higgsove mase* od skale ujedinjenja konstanti vezanja,  $10^{16}$  GeV do skale reda veličine  $v = 256$  GeV generira negativnu vrijednost *Higgsove mase* na skali od 100 GeV, iz čega proizilazi prirodno moguće objašnjenje za nastanak *elektroslabog loma simetrije*, posebno na niskim skalama. Zapravo se ovo događa zbog toga što je *Yukawino vezanje* veliko za *top kvark* (proporcionalno je s njegovom masom), što ima dominantan učinak na evoluciju *Higgsove mase*. Još jednom, ovaj rezultat pretpostavlja da mase superpartnera nisu veće od nekoliko TeV. Stoga postoji izvanredna konzistentnost između svih ovih prilično različitih načina procjene *SUSY* skale.

### 8.4. Teorijska razmatranja

Dominantna tema fizike u dvadesetom stoljeću je bila i na *simetriji*, kao traženom pojmu koji je bio *heuristički* vrlo uspješan. Prirodno je postaviti si pitanje da li su naše sadašnje *kvantne teorije polja* uporabile sve vrste simetrija koje mogu postojati, u konzistentnosti s *Lorentzovom*

---

<sup>21</sup> Ne u posve istom smislu (tj. matematičke granice), u svakom slučaju. Svakako se može reći, iz (8.3.), da ukoliko  $\lambda$  nije mnogo veći od jedinice, postoji nada da će perturbacijska teorija biti primjenjiva, jer tada  $M_H$  ne može biti mnogo veća od nekoliko stotina GeV.

*invarijantnošću*. Sada se mogu razmotriti simetrijski "naboji" koje poznajemo u *SM-u*, na primjer *elektromagnetski naboj* oblika:

$$\theta = e \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad (8.23)$$

ili *SU(2) naboj* (izospinski operator) oblika:

$$T = g \int d^3x \psi^\dagger (\tau/2) \psi, \quad (8.24)$$

gdje  $\psi$  u relaciji (8.24) predstavlja *SU(2) dublet*, dok u obje prethodne relacije (8.23) i (8.24)  $\psi$  predstavlja *fermionsko polje*. Do otkrića *SUSY*, operatori unutarnjih simetrija su bili *Lorentzovi skalari*. Iz ovoga slijedi da kada oni djeluju na stanje finalnog spina  $j$ , ne mogu mijenjati taj spin, a to je prikazano sljedećom relacijom:

$$\theta |j\rangle = |\text{isto } j, \text{ kao mogući različiti član multipleta simetrije}\rangle. \quad (8.25)$$

Da li je to nužno?

Generatori *Poincaréove* grupe nisu skalari, nego tenzori. Operator 4-impulsa  $P_\mu$  inducira prostorno-vremenske pomake i njegove su svojstvene vrijednosti očuvane. Postoje također i operatori momenta impulsa koji se nalaze unutar antisimetričnog tenzora  $M_{\mu\nu}$ . Da li bi, možda mogli imati očuvani naboj simetričnog tenzora  $\theta_{\mu\nu}$ ? Razmotrimo djelovanje jednog takvog naboja na 1-čestično stanje jedne čestice s 4-impulsom  $p$ :

$$\theta_{\mu\nu} |p\rangle = (\alpha p_\mu p_\nu + \beta g_{\mu\nu}) |p\rangle. \quad (8.26)$$

Desna strana formule dobivena je argumentom "*kovarijantnosti*" (tj najopćenitijim izrazima s naznačenim transformacijskim svojstvima tenzora  $\theta_{\mu\nu}$ , izgrađenim od tenzora koji nam stoje na raspolaganju, a to su *Lorentz invarijantni tenzor*  $g_{\mu\nu}$  i simetrični tenzor drugog reda izgrađen od 4-impulsa stanja  $|p\rangle$ . Sada možemo razmotriti *dvo-čestično stanje*  $|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle$  i pretpostaviti da su  $\theta_{\mu\nu}$  vrijednosti aditivne, očuvane i da djeluju samo na jednu česticu kao i drugi poznati naboji. Tada je:

$$\theta_{\mu\nu} |p^{(1)}, p^{(2)}\rangle = (\alpha (p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)}) + 2\beta g_{\mu\nu}) |p^{(1)}, p^{(2)}\rangle. \quad (8.27)$$

Proces elastičnog raspršenja oblika  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  se može prikazati pomoću sljedeće relacije (iz očuvanja svojstvenih vrijednosti):

$$p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)} = p_\mu^{(3)} p_\nu^{(3)} + p_\mu^{(4)} p_\nu^{(4)}. \quad (8.28)$$

Ali za proces  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  imamo 4-impulsno očuvanje:

$$p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(3)} + p_{\mu}^{(4)}, \quad (8.29)$$

tako da se kao jedina zajednička rješenja za relacije (8.28) i (8.29) javljaju:

$$p_{\mu}^{(1)} = p_{\mu}^{(3)}, p_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(4)}, \quad \text{ili} \quad p_{\mu}^{(1)} = p_{\mu}^{(4)}, p_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}^{(3)}, \quad (8.30)$$

što znači da se može dogoditi samo raspršenje "naprijed" (raspršenje bez interakcije), što je neprihvatljivo.

Opća poruka je da sve izgleda kao da nema mjesta za aditivne očuvane operatore s netrivialnom *Lorentzovom transformacijskom* strukturom (tj. da nema mjesta za *Lorentzove tenzore*). Postojeći takvi operatori  $P_{\mu}$  i  $M_{\mu\nu}$  dopuštaju da se dogode odgovarajući procesi raspršivanja, ali nametanje bilo kakvih zakona očuvanja previše ograničavaju moguće konfiguracije. Takav je bio zaključak *Coleman-Mandulinog* teorema, ali se zapravo ispostavlja da njihov argument ne isključuje "naboje" koji se transformiraju pod *Lorentzovim transformacijama* kao *spinori*: tj. stvari koje se transformiraju kao fermionsko polje  $\psi$ . Takav naboj možemo označiti s  $\theta_a$ , gdje je indeks  $a$  definiran kao komponenta spinora. Za takav naboj, jednačba (8.25) očito neće vrijediti, nego će imati oblik:

$$\theta_a |j\rangle = |j \pm 1/2\rangle. \quad (8.31)$$

Takav operator neće davati doprinos matričnom elementu za 2-čestično  $\rightarrow$  2-čestično elastični proces raspršenja čestica (u kojem čestični spinovi ostaju isti) i zbog toga gore spomenuta vrsta "no-go" argumenta *Colemana* i *Mandule* ne vrijedi.

Da li je moguće uključiti takve *spinorne operatore* u postojeću algebarsku shemu, zajedno s poznatim operatorima očuvanja  $P_{\mu}$  i  $M_{\mu\nu}$ ? Potvrđan odgovor su najprije dali *Gol'fand* i *Likhtman*, a zatim je najopćenitija takva '*supersimetrična algebra*' spomenuta kod *Haaga*. Pod '*algebrom*' se ovdje podrazumijeva (kao i obično) skup komutirajućih relacija među "nabojima" -kojeg, da se podsjetimo, također čine generatori odgovarajućih transformacija simetrije.  $SU(2)$  algebra operatora momenta impulsa, koji su ustvari generatori rotacija, predstavlja poznati primjer. Nova bitna značajka ovdje je ta da će ovi naboji koji posjeduju spinorni karakter imati *antikomutirajuće* relacije među sobom, a ne komutirajuće. Na taj način takve algebre uključuju neke komutirajuće relacije i neke antikomutirajuće relacije.

Kako će izgledati takve algebre? Budući da je naš generički spinorni naboj  $\theta_a$  operator simetrije, on mora komutirati s *Hamiltonijanom sustava* na način da je:

$$[\theta_a, H] = 0, \quad (8.32)$$

kao i s antikomutatorom koji sadrži dvije različite komponente na način:

$$[\{\theta_a, \theta_b\}, H] = 0. \quad (8.33)$$

Kao što je gore navedeno, spinorni izrazi  $\theta$  imaju dvije komponente, tako da se  $a$  i  $b$  transformiraju kao simetrični objekti  $\{\theta_a, \theta_b\} = \theta_a \theta_b + \theta_b \theta_a$  koji sadrže tri nezavisne komponente, te možemo da pretpostavimo da se moraju transformirati kao 1- spinski objekt (baš kao i simetrične kombinacije dvije valne funkcije spina  $-1/2$ ). Međutim, kao i obično u relativističkoj teoriji, taj 1-objekt treba biti opisan 4- vektorom, a ne 3-vektorom. U daljnjem prikazu ovaj 4-vektor je očuvan, kao što je pokazano u relaciji (8.33). Postoji samo jedan takav očuvani 4-vektorski operator (iz *Coleman-Mandulinog* teorema), koji se naziva  $P_\mu$ . Dakle,  $\theta_a$  izrazi moraju zadovoljiti algebru oblika kao u sljedećoj formuli:

$$\{\theta_a, \theta_b\} \sim P_\mu. \quad (8.34)$$

Jasno je da je ova relacija neprikladna: indeksi se ne uravnotežuju na svim stranama. Promatrajući malo bolje, mogli bismo zamisliti apsorpiranje ' $\mu$ ' multipliciranjem s  $\gamma^\mu$ , tako da sama  $\gamma$ -matrica konvencionalno sadrži dva matrična indeksa, koji bi mogli odgovarati  $a$  i  $b$ . Kada bi prihvatili činjenicu da relacija (8.34) obuhvaća suštinu stvari, bili bismo u mogućnosti da vidimo što to doista definiira radikalnu ideju supersimetrija. Jednadžba (8.34) poručuje, grubo govoreći, da ako se radi sa dvije *SUSY* transformacije generirane  $\theta$  generatorima, prvo jednim, pa drugim, dobiva se operator 4-impulsa. Ili, još jasnije (ali posve ekvivalentno), dobiva se translacijski operator *prostor-vremena*, tj. 4-derivacija. Pojavljujući se okolo, *SUSY* spinorialni  $\theta$  - operatori izgledaju poput kvadratnih korijena 4-impulsa, ili kvadratnih korijena 4-derivacije! Pitanje je kako se može definirati kvadratni korijen *Diracove jednažbe*? Četvero-dimenzionalne derivacije su čvrsto vezane za naše ideje o četvero-dimenzionalnom *prostor-vremenu*. Sada nam se pruža interesantna mogućnost da od njih izvadimo kvadratne korijene i to na način na koji možemo da učinkovito proširimo sadržaj samog *prostor-vremena*, analogno uvođenju kvadratnog korijena od  $-1$ . To jest, ako ozbiljno uporabimo algebru koja uključuje i  $P_\mu$  i  $\theta'$ -re, morat ćemo reći da su *prostorno-vremenske* koordinate proširene kako bi uključile naredne stupnjeve slobode, na koje djeluju  $\theta'$ , te da su ti stupnjevi slobode povezani standardnim sredstvima transformacija koje su generirane sa  $\theta'$ -rima. Ovi naredni stupnjevi slobode su zapravo fermionski. Možemo reći da nas *SUSY* poziva na promatranje "*fermionskih dimenzija*" i povećanje *prostorno-vremenskih* koordinata na "*superprostorne koordinate*".

Čini se da to iz nekog razloga nije najčešće naglašena pojava u *SUSY*-ju. Umjesto toga, ljudi mnogo više govore o činjenici da se pod *SUSY* podrazumijevaju (ako je točna simetrija)

degenerirani multiplieti bozona i fermiona. Naravno, taj aspekt je svakako točan, i fenomenološki važan, ali je fermionsko proširenje *prostor-vremena* nedvojbeno upečatljiviji pojam.

### 8.5. Kvadratna divergencija

Inspirirani činjenicom da se lokalna supersimetrija bavi gravitacijom, mnogi su teoretičari pokušali ujediniti u supergravitacijske modele sve čestice i interakcije. Ipak, ne postoje dokazi za lomljenje skale supersimetrije, i nitko nije u mogućnosti da protumači da li bi ova nova supersimetrična stanja (*s-čestice*) trebala biti tako teška kao *Planckova skala*, gdje  $M_P \sim 10^{19}$  GeV, a gdje se očekuje opis gravitacije. *Planckova masa* je općenito prihvaćena kao temeljna masena skala u fizici, ali se postavlja pitanje da li je povezana s takozvanim masenim hijerarhijskim problemom: tj. zašto je  $M_P \gg M_W$ ? Budući da je odnos između *Gravitacijske konstante* i *Fermijeve konstante* predstavljen kao  $G_{N/F}$ , a na skali definiran kao  $1/M_{P/W}^2$ , ovo posljednje ispitivanje pretvara se u pitanje: zbog čega je  $G_N \ll G_F$ ? I opet, budući da je u atomu *Newtonov potencijal* proporcionalan s  $G_N m_e^2/r$ , a *Coulombov* s  $e^2/r$ , može se postaviti pitanje zbog čega je *Newtonov potencijal* mnogo manji od *Coulombovog potencijala*? Bez odgovora na pitanje možemo reći da je to zbog toga što je  $M_P \gg M_W$ , ali zašto? Moglo bi se pokušati nositi s tim, što znači, da se može pretpostaviti da je  $M_P \gg M_W$  i da se može prihvatiti naše neznanje što se događa na vrlo velikim energetska skalama. Na taj način možemo izračunati nultu masu elektrona  $m_0 \bar{\psi}\psi$ . Kada počnemo uključivati radijativne korekcije na razini jedne petlje, renormalizirana teorijska masa će se očitavati putem sljedeće formule:  $m^{\text{ren}} = m^0 + \delta m$ , gdje  $\delta m$  predstavljaju korekcije jedne petlje. Ovaj novi doprinos je zapravo divergentan zbog *ultra-violetnih (UV) singulariteta* u integralima petlje.  $\delta m$  sadrži  $1/\epsilon$  ukoliko uzmemo u obzir dimenzionalnu regularizaciju ( $D = 4 - 2\epsilon$ ). Jasno je da fizičko objašnjenje ove divergencije ne vrijedi za našu teoriju polja pri velikoj energiji, zbog toga što u nju nije uključena gravitacija. Nakon toga se apsorbiraju naše nepoznate u  $\delta m$  i  $m^0$  koje su beskonačne u namjeri da se stvori konačna vrijednost za  $m^{\text{ren}}$ , koja je povezana s eksperimentalno izmjerenom vrijednošću koja za elektron iznosi  $m^{\text{exp}} = m^{\text{ren}} = m_0 + \delta m = 0,51$  MeV. Stoga trebamo beskonačno fino podešavanje između nulte mase i korekcija petlje.

Ipak, možemo izbjeći ovaj problem beskonačnog *finog podešavanja* ako uvedemo skalu  $\Lambda$  koja ograničava vrijednosti radijativnih korekcija. Ovo bi se moglo učiniti ukoliko se zamijeni naš pristup dimenzionalne regulacije s fizikalnijim pristupom koji uvodi u integrale petlje graničnu skalu  $\Lambda$ . Tako ćemo i učiniti, podrazumijevajući primjer elektrona. Korekcija mase elektrona,

$\delta m_F$ , inducirana fotonskom petljom je definirana pomoću sljedeće relacije i prikazana na *slici* (8.3 (a)):

$$\delta m_F \sim \int^\Lambda d^4 k \frac{1}{k^3} \sim \Lambda + m_F \ln \frac{\Lambda}{m_F}. \quad (8.35)$$

Zapravo znamo da se u graničnom području nulte mase pojavljuje nova simetrija: *kiralna simetrija*. Tada adjungirana transformacija  $\psi \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)\psi$  zaštićuje masene izraze od generiranja na razini petlje. Dakle, kiralna simetrija je slomljena, ali na takav način da se vraća na ograničenje gdje sve fermionske mase teže ka nultoj vrijednosti. Kao posljedicu toga, u ovom ograničenju očekujemo da doprinos masi na razini jedne petlje bude nula, tj. da nema linearnih divergencija u (8.35). Radijativne korekcije su kontinuirano povezane s kiralnim sektorom i dosljedno vode na čistu logaritamsku divergenciju. Dakle, dobija se da je  $\delta m_F \sim m_F \ln \Lambda/m_F$ , pa čak i za velike vrijednosti  $\Lambda$ , korekcija petlje je reda  $m_F$ , tj. ukoliko je  $\delta m_F < \sim m_F$ , tada neće biti beskonačnog fino podešavanja. U tom smislu, kiralna simetrija štiti fermionske mase. Sada se može postaviti pitanje što se događa s radijativnom korekcijom jedne petlje za mase *baždarnih bozona*? Ako označimo s  $m_{\text{petlje}}$  doprinos masi *fermiona* i *baždarnih bozona* zbog radijativnih korekcija petlji, kako je prikazano na *slici* (8.3 (b i c)), možemo napisati korekciju u obliku:

$$\delta m_G^2 \sim \int^\Lambda d^4 k \frac{1}{k^2} \sim \Lambda^2 + m_{\text{petlje}}^2 \ln \frac{\Lambda}{m_{\text{petlje}}}. \quad (8.36)$$

Opet postoji simetrija koja ovdje ukida kvadratnu divergenciju. *Baždarna simetrija*, slomljena ili *spontano slomljena*, jamči da kvadratne divergencije nestaju.

Problemi počinju kada se uzmu u obzir radijativne korekcije skalarnih masa, kao na primjer korekcija mase *SM-a Higgsovog bozona*  $\delta m_H^2$ . Svaki dijagram jedne petlje dozvoljen u *SM-u* kao i ovi na *slici* (8.3. (d-g)), producira iste divergencijske doprinose, za razliku od prethodnog slučaja korekcija petlje *baždarnih bozona*, osim što ne postoji posebna simetrija koja poništava kvadratnu divergenciju, tako da se sve ovo može prikazati sljedećim izrazom:

$$\delta m_H^2 \sim \int^\Lambda d^4 k \frac{1}{k^2} \sim \Lambda^2 + m_{\text{petlje}}^2 \ln \frac{\Lambda}{m_{\text{petlje}}}. \quad (8.37)$$

Ako se naglasi da  $\Lambda \sim M_P$ , masa *Higgsovog bozona* od 125 GeVa postaje mnogo manja od kvantne korekcije (zapravo čim je  $\Lambda > \sim 1$  TeVa). Kao što je bilo pokazano, ovo ne predstavlja važan problem za renormalizaciju teorije, jer je uvijek moguće imati beskonačno *fino podešavanje* između divergencije i nulte mase. Ipak, ovo *fino-podešeno* poništavanje bi moralo biti ponovljeno u svakom redu perturbacijske teorije i ovo svojstvo se smatra neprirodnim. Na-



damo se da ćemo zaštititi prirodno male mase bozona  $m_H^2 \geq \delta m_H^2$  principom simetrije u analogiji s *baždarnom simetrijom* ili *kiralnom simetrijom*. Ova simetrija koja poništava kvadratnu divergenciju masa skalarnih polja postoji, i naziva se *supersimetrija*. Ona rabi činjenicu da dijagrami fermionske petlje sadrže suprotan predznak doprinosa skalaru mase u odnosu na dijagrame skalarne petlje. Kvantna korekcija jedne petlje na *Higgsovoj masi* zbog fermiona je definirana sljedećom relacijom:

$$\delta^{(f)} m_H^2 = \frac{\lambda_F^2}{8\pi} \left[ -\Lambda^2 + 6m_F^2 \ln \frac{\Lambda}{m_F} - 2m_F^2 \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right), \quad (8.38)$$

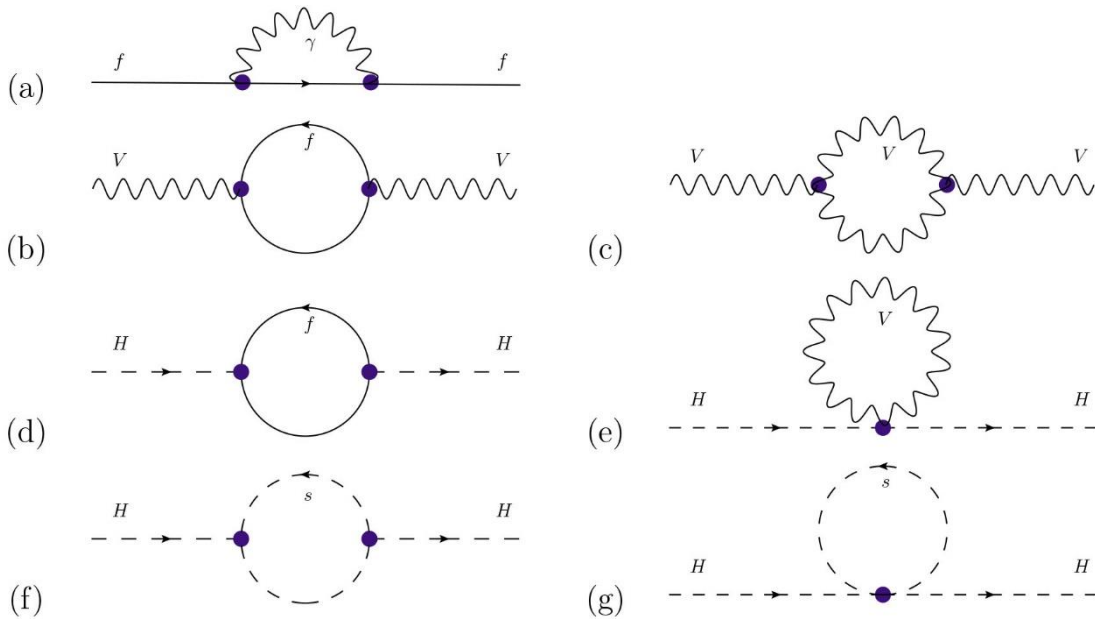
te se može usporediti s odgovarajućim doprinosom skalarne čestice Higgsovoj masi:

$$\delta^{(f)} m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} \left[ -\Lambda^2 + 2m_S^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{m_S}\right) \right] - \frac{\lambda_S}{16\pi^2} v^2 \left[ -1 + 2 \ln \left(\frac{\Lambda}{m_S}\right) \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \quad (8.39)$$

Posljedično, u supersimetričnoj teoriji s dvostruko većim brojem skalara od fermiona i s *Yukawinim* zadovoljavajućim vezanjem  $\lambda_S = -\lambda_F^2$ , nestaju kvadratne divergencije mase *Higgsovog bozona*. Jedino ostaju logaritamske (prirodno) male korekcije, koje se mogu prikazati kao:

$$\delta^{(f+s)} m_H^2 = \frac{\lambda_S^2}{4\pi^2} \left[ (m_F^2 - m_S^2) \ln \left(\frac{\Lambda}{m_S}\right) + 3m_F^2 \ln \left(\frac{m_S}{m_F}\right) \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \quad (8.40)$$

Problem hijerarhije i problem prirodnosti teorije u *t'Hooftovom* smislu su time praktički riješeni. U slučaju egzaktne supersimetrije, u kojoj je  $m_S = m_F$ , uopće nema divergencije budući da su sve logaritamske divergencije također poništene.



Slika 8.3 Kvantne korekcije fermiona, baždarnih bozona i skalarnih masa na razini jedne petlje

### 8.6. Ujedinjenje baždarnih konstanti (konstanti vezanja)

U *SM-u* sve interakcije: *jake, slabe i elektromagnetske*, su opisane kroz grupu simetrije koja uvodi konstantu vezanja. Još od prije smo upoznati s tim da su u *elektroslaboj teoriji slaba i elektromagnetska interakcija* djelimično ujedinjene pod *elektroslabom interakcijom* koja je opisana pomoću baždarne grupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , ali su još uvijek važne dvije konstante vezanja. Na primjeru *Teorije Velikog Ujedinjenja (GUT-a)*, baždarna grupa *SM-a* bi predstavljala podskup više simetrije ( $SU(5)$ ,  $SO(10)$  ili  $E(6)$ ) ostvarene na višim energijama. U ovom okviru sva bi *baždarna vezanja SM-a* mogla konvergirati prema zajedničkoj vrijednosti pri visokim energijama, a to predstavlja *baždarnu konstantu ujedinjenja*.

*Baždarne konstante* predstavljaju renormalizirane veličine, te se stoga kližu s energetsom skalom. Promjena se zbiva kroz korekcije kvantnih petlji u višim redovima računa smetnje i opisana je *Renormalizacijskim Grupnim Jednadžbama*. Na razini jedne petlje, evolucija konstanti vezanja je predstavljena na način na koji je:

$$\beta \equiv \frac{d}{dt} g_x = \frac{1}{16\pi^2} b_x g_x^3, \quad (8.41)$$

s tim da je  $t \equiv \ln\theta$ , gdje je  $\theta$  defnirana kao renormalizacijska skala. Konstanta vezanja  $g'$  se množi faktorom  $\sqrt{5/3}$ , npr. da je  $g_{U(1)_Y} = \sqrt{5/3} g'$ , jer se generator  $\sqrt{3/5} Y$  prirodno javlja kao jedan od generatora grupa, npr.  $SU(5)$  ili  $SO(10)$ , dok ostale ostaju nepromijenjene,  $(g_{U(1)_Y}, g_{SU(2)_L}, g_{SU(3)_C}) = \left( \sqrt{\frac{5}{3}} g', g, g_s \right)$ . Tada  $b_x$  imaju sljedeće vrijednosti:

$$(b_{U(1)_Y}, b_{SU(2)_L}, b_{SU(3)_C}) = \left( \frac{41}{10}, -\frac{19}{6}, -7 \right). \quad (8.42)$$

Važno je da se jednadžbe (8.41) izraze putem nove konstanti "*fine strukture*"  $\alpha_x$ , na način da je  $\alpha_x = g_x^2/4\pi$ . Onda se dobija da je  $\beta_x$  :

$$\beta \equiv \frac{d}{dt} \alpha_x^{-1} = -\frac{b_x}{2\pi}. \quad (8.43)$$

U *Minimalnom Supersimetričnom proširenju SM-a* će čestice većeg spektra uvesti nove efekte kvantne petlje, i tada se pokreću modifikacije *baždarnog vezanja SM-a*. Unutar *MSSM-a* su koeficijenti  $b_x$  jednaki:

$$(b_{U(1)_Y}, b_{SU(2)_L}, b_{SU(3)_C}) = \left( \frac{33}{5}, -1, -3 \right). \quad (8.44)$$

## 8.7. Supersimetrični Lagranžijan

### 8.7.1. Najjednostavniji supersimetrični model: slobodni kiralni supermultiplet

Minimalni sadržaj fermiona u teoriji polja u četiri dimenzije sastoji se od jednog *lijevorukog dvokomponentnog Weylovog fermiona*  $\psi$ . Budući da je ovo intrinzično kompleksan objekt, čini se razumnim da se kao njegov superpartner odabere kompleksno skalarno polje  $\phi$ . Najjednostavnije djelovanje koje se može zapisati za ova polja sastoji se od sume kinetičkih energija tih polja:

$$S = \int d^4x (L_{\text{skalarni}} + L_{\text{fermionski}}), \quad (8.45)$$

$$L_{\text{skalarni}} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi, \quad L_{\text{fermionski}} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \quad (8.46)$$

Ovo se naziva bezmasenim, neinteragirajućim *Wess-Zumino modelom*, i odgovara jednom kiralnom supermultipletu.

Supersimetrična transformacija bi mogla pretvoriti skalarno bozonsko polje  $\phi$  u nešto što uključuje fermionsko polje  $\psi_\alpha$ . Najjednostavnija mogućnost za transformaciju skalarnog polja je:

$$\delta\phi = \varepsilon\psi, \quad \delta\phi^* = \varepsilon^\dagger\psi^\dagger, \quad (8.47)$$

gdje  $\varepsilon^\alpha$  predstavlja infintezimalni, antikomutirajući, dvokomponentni *Weylov* fermionski objekt koji parametrizira supersimetričnu transformaciju. Za globalne simetrije vrijedi da je  $\varepsilon^\alpha$  konstanta koja zadovoljava relaciju  $\partial_\mu \varepsilon^\alpha = 0$ . Budući da  $\psi$  ima dimenziju  $[\text{masa}]^{3/2}$ , a  $\phi$  ima dimenziju  $[\text{masa}]$ , to znači da  $\varepsilon$  ima dimenziju  $[\text{masa}]^{-1/2}$ . Rabeći prethodne relacije, skalarni dio *lagranžijana* se transformira na način koji je predstavljen pomoću sljedeće relacije:

$$\delta L_{\text{skalarni}} = -\varepsilon \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \varepsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi. \quad (8.48)$$

Željeli bismo da je  $\delta L_{\text{fermionski}}$  jednak nuli do na totalnu derivaciju, jer bi pri tome akcija bila invarijantna na SUSY transformacije. Usporedbom (8.48) s  $L_{\text{fermionskim}}$  vidi se da se to može ostvariti ako je  $\delta\psi$  linearan u  $\varepsilon^\dagger$  i  $\psi$ , i sadrži *prostorno-vremensku* derivaciju i to se može analizirati samo na jedan način. Postoji samo jedna mogućnost da se dođe do multiplikacijske konstante, a to je predstavljeno na sljedeći način:

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi, \quad \delta\psi_\alpha^\dagger = i(\varepsilon \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu \phi^*. \quad (8.49)$$

S tom pretpostavkom,  $\delta L_{\text{fermionski}}$  glasi:

$$\delta L_{\text{fermionski}} = -\varepsilon \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu \phi^* + \psi^\dagger \varepsilon^\dagger \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi. \quad (8.50)$$

Uporabom *Paulijevih matričnih identiteta* i komutativnosti parcijalnih derivacija za  $\delta L_{\text{fermionski}}$  dobija se:

$$\delta L_{\text{fermionski}} = \varepsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* + \varepsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu - \partial_\mu (\varepsilon \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi \partial_\nu \phi^* + \varepsilon \psi \partial^\mu \phi^* + \varepsilon^\dagger \psi^\dagger \partial^\mu \phi). \quad (8.51)$$

Prva dva člana u (8.51) poništavaju  $\delta L_{\text{scalar}}$  iz (8.48), a ostali doprinosi u (8.51) predstavljaju totalnu derivaciju. Stoga vrijedi:

$$\delta S = \int d^4x (\delta L_{\text{skalarno}} + \delta L_{\text{fermionsko}}) = 0, \quad (8.52)$$

što opravdava pretpostavku (8.49). Da bi se pokazalo da je teorija opisana s (8.45) supersimetrična, treba još pokazati da se supersimetrična algebra zatvara, odnosno da se komutator *SUSY* transformacija (8.47) može prikazati preko ostalih simetrijskih generatora sadržanih u supersimetričnoj algebri. Uporabom (8.47) i (8.49) dobija se sljedeća relacija:

$$(\delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2}) \phi \equiv \delta_{\varepsilon_2} (\delta_{\varepsilon_1} \phi) - \delta_{\varepsilon_1} (\delta_{\varepsilon_2} \phi) = i(-\varepsilon_1 \sigma^\mu \varepsilon_2^\dagger + \varepsilon_2 \sigma^\mu \varepsilon_1^\dagger) \partial_\mu \phi. \quad (8.53)$$

Ta relacija predstavlja savršen rezultat koji pokazuje da je komutator dvaju supersimetričnih transformacija proporcionalan derivaciji izvornog polja, odnosno djelovanju operatora vremenske translacije  $P_\mu = i \partial_\mu$  na polje koje je sastavni dio *SUSY* algebre. Isti rezultat, uz određene pretpostavke se dobija za fermionsko polje. Uporabom jednadžbi (8.47) i (8.49) nalazi se relacija:

$$(\delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2}) \psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \varepsilon_1^\dagger)_\alpha \varepsilon_2 \partial_\mu \psi + i(\sigma^\mu \varepsilon_2^\dagger)_\alpha \varepsilon_1 \partial_\mu \psi. \quad (8.54)$$

Uvođenjem  $\chi = \sigma^\mu \varepsilon_1^\dagger, \zeta = \varepsilon_2, \eta = \partial_\mu \psi$ , odnosno  $\chi = \sigma^\mu \varepsilon_2^\dagger, \zeta = \varepsilon_1, \eta = \partial_\mu \psi$ , te uporabom *Fiertzovih identiteta* (Dodatak B.3) dobija se rezultat:

$$(\delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2}) \psi_\alpha = i(-\varepsilon_1 \sigma^\mu \varepsilon_2^\dagger + \varepsilon_2 \sigma^\mu \varepsilon_1^\dagger) \partial_\mu \psi_\alpha + i\varepsilon_{1\alpha} \varepsilon_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - i\varepsilon_{2\alpha} \varepsilon_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad (8.55)$$

koji zadovoljava *SUSY* algebru samo ako su fermioni na ljusci mase, a ne izvan nje, što je problem. Taj se problem rješava uvođenjem dodatnog kompleksnog skalarnog polja dimenzije  $[\text{masa}]^2$ , opisanog lagranžijanom (koji se uvodi kao dodatni član supersimetričnog lagranžijana). Takva se polja nazivaju *pomoćnim* i to su zapravo samo *book-keeping* uređaji koji dopuštaju simetričnoj algebri da se zatvori. *Lagranžijanova* gustoća za F i njeno kompleksno konjugirano polje glasi:

$$L_{\text{pomoćni}} = F^* F. \quad (8.56)$$

Dimenzije za polje  $F$  su  $[\text{masa}]^2$ , za razliku od običnog skalarnog polja, koje ima dimenzije  $[\text{masa}]$  i jednažbe gibanja  $F = F^* = 0$ . To polje zbog svoje dimenzije ne može imati kinetički član. Takva se polja nazivaju pomoćna polja. Uvođenjem supersimetričnih transformacija  $F$  polja u višestruku jednažbu gibanja za  $\psi$ , dobija se:

$$\delta F = -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad \delta F^* = i \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \varepsilon. \quad (8.57)$$

One su proporcionalne jednažbama gibanja spinornih polja, koje vode na sljedeću transformaciju pomoćnog dijela *lagranžijana*, te se za pomoćni dio gustoće *lagranžijana* dobija da je:

$$\delta L_{\text{pomoćno}} = -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi F^* + i \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \varepsilon F, \quad (8.58)$$

te daj dio uklanja *on-shell fizikalnu shemu*, ali ne i proizvoljne *off-shell fizikalne sheme* konfiguracije polja. Uvođenjem dodatnih članova u transformacijama spinornih polja  $\psi$  i  $\psi^\dagger$  dobijaju se sljedeće relacije:

$$\delta \psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi + \varepsilon_\alpha F, \quad \delta \psi_\alpha^\dagger = i(\varepsilon \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu \phi^* + \varepsilon_\alpha^\dagger F^*, \quad (8.59)$$

te se rješava problem da je jednažba (8.55) ispunjena samo na *masenoj on-shell fizikalnoj shemi*. Naime, za novi set *SUSY* transformacija (8.49), (8.57) i (8.59) i za novi *lagranžijan*  $L = L_{\text{skalarni}} + L_{\text{fermionski}} + L_{\text{pomoćni}}$ , komutatori *SUSY* transformacija kad djeluju na bilo koje od polja  $X = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$ , ispunjavaju relaciju:

$$(\delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2})X = i(-\varepsilon_1 \sigma^\mu \varepsilon_2^\dagger + \varepsilon_2 \sigma^\mu \varepsilon_1^\dagger) \partial_\mu X, \quad (8.60)$$

bez uporabe jednažbi gibanja. Time je dokazano da je *SUSY* simetrija *lagranžijana*  $L = L_{\text{skalarni}} + L_{\text{fermionski}} + L_{\text{pomoćni}}$  općenito: na i izvan ljske mase.

Rezimirajmo: *SUSY* zahtijeva jednakost brojeva bozonskih i fermionskih stupnjeva slobode. *On-shell*, kompleksno skalarno polje  $\phi$  ima dva propagirajuća stupnja slobode, koja su u korespondenciji s dvije spinske polarizacije polja  $\psi$  (jednažba gibanja eliminira sve stupnjeve slobode *Weylovog spinora*). *Off-shell*, *Weylov fermion*  $\psi$ , je kompleksni dvokomponentni i ima 4 stupnja slobode. Stoga u teoriju treba uvesti još jedno skalarno polje  $F$  da bi se broj bozonskih i fermionskih stupnjeva slobode podudarao. Brojanje stupnjeva slobode sažeto je u *tablici 8.1*.

	$\phi$	$\psi$	F
on-shell ( $n_B = n_F = 2$ )	2	2	0
off-shell ( $n_B = n_F = 4$ )	2	4	2

Tablica 8.1 Brojanje realnih stupnjeva slobode u *Wess-Zumino* modelu

### 8.7.2. Interakcije kiralnih supermultiplata

U *MSSM-u* postoji mnogo vrsta kiralnih supermultiplata koji sadrže i *baždarne* i *ne-baždarne* interakcije. Razmotrimo konstrukciju najopćenitije teorije masa i *ne-baždarnih interakcija* za čestice koje se nalaze u kiralnim supermultipletima. U *MSSM-u* su to *kvarkovi*, *skvarkovi*, *leptoni*, *sleptoni*, *Higgsovi skalari* i *higgsino fermioni*.

Polazna točka bi mogla biti gustoća *lagranžijana* definirana za skupinu slobodnih kiralnih supermultiplata označenih indeksom  $i$ , koja predstavlja sve *baždarne* i *okusne stupnjeve slobode*. Budući da bi se trebala izgraditi teorija interakcije s supersimetrijom koja zatvara *off-shell shemu*, svaki supermultiplet sadrži kompleksni skalar  $\phi_i$  i *ljevoruki Weylov fermion*  $\psi_i$  kao fizikalni stupanj slobode, plus ne-propagirajuće kompleksno pomoćno polje  $F_i$ . Rezultat za *slobodni lagranžijan* bi se mogao predstaviti pomoću sljedeće relacije:

$$L_{\text{slobodni}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \quad (8.61)$$

gdje se sumiranje vrši preko indeksa  $i$  koji se ponavljaju (koje ne treba miješati s potisnutim spinorskim indeksima), s konvencijom da polja  $\phi_i$  i  $\psi_i$  uvijek sadrže donje indekse, dok njihovi konjugati uvijek sadrže gornje indekse. Ona je invarijantna na supersimetričnu transformaciju i predstavljena je na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \delta\phi_i &= \varepsilon\psi_i, & \delta\phi^{*i} &= \varepsilon^\dagger\psi^{\dagger i}, \\ \delta(\psi_i)_\alpha &= -i(\sigma^\mu\varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi_i + \varepsilon_\alpha F_i, & \delta(\psi^{\dagger i})_{\dot{\alpha}} &= i(\varepsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^{*i} + \varepsilon_{\dot{\alpha}}^\dagger F^{*i}, \\ \delta F_i &= -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i, & \delta F^{*i} &= i\partial_\mu \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Sada se može pronaći najopćenitiji skup renormalizabilnih interakcija za ta polja koja su konzistentna s supersimetrijom. To se radi u teoriji polja prije nego što se izvrši integriranje pomoćnih polja. U članovima u *lagranžijanu* ukupna masena dimenzija polja mora biti  $\leq 4$ . Jedini članovi koji su na raspolaganju su:

$$L_{\text{int}} = \left( -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + x^{ij} F_i F_j \right) + \text{c. c.} - U, \quad (8.63)$$

gdje  $W^{ij}$ ,  $W^i$ ,  $x^{ij}$  i  $U$  predstavljaju polinome u skalarnim poljima  $\phi_i$ ,  $\phi^{*i}$ , s stupnjevima 1,2,0 i 4.

*Lagranžijan*  $L_{\text{int}}$  mora biti invarijantan na supersimetrične transformacije, budući da je  $L_{\text{slobodni}}$  bio već invarijantan sam po sebi. To bi odmah značilo da posljednji izraz u prethodnoj formuli  $U(\phi_i, \phi^{*i})$  mora da nestane. Ukoliko bi postojao takav izraz, tada bi se prva relacija u (8.62) pod supersimetričnom transformacijom transformirala u drugu funkciju sastavljenu samo od skalarnih polja, te pomnožena s  $\epsilon \psi_i$  ili  $\epsilon^\dagger \psi^{\dagger i}$  bez *prostorno-vremenskih* derivacija ili  $F_i$ ,  $F^{*i}$  polja. Slično tome, bezdimenzionalno vezanje  $x^{ij}$  bi moralo imati vrijednost *nule*, jer njenu supersimetričnu transformaciju također nije moguće poništiti rabeći nekakav drugi član. Dakle, prethodna relacija se transformira u:

$$L_{\text{int}} = \left( -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i \right) + \text{c. c.} \quad (8.64)$$

Najlakše je podijeliti varijaciju  $L_{\text{int}}$  na nekoliko dijelova, koji bi se morali zasebno poništavati. Kao prvo bi bilo nužno razmotriti dio koji sadrži 4 -spinore promatrajući *SUSY* transformaciju:

$$\delta L_{\text{int}|4\text{-spinora}} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi_k} (\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) - \frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi^{*k}} (\epsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j) \right] + \text{c. c.} \quad (8.65)$$

Izraz proporcionalan s  $(\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j)$  se ne može poništiti nekim drugim članom. Srećom, iz *Fierzovih identiteta* slijedi:

$$(\epsilon \psi_i) (\psi_i \psi_j) + (\epsilon \psi_j) (\psi_k \psi_i) + (\epsilon \psi_i \psi_j) = 0, \quad (8.66)$$

tako da ovaj doprinos  $\delta L_{\text{int}}$  iščezava identično ako je i samo ako  $\delta W^{ij} / \delta \phi_k$  potpuno simetrično na permutacije  $i, j, k$ . Ne postoji identitet s izrazom proporcionalnim izrazu  $(\epsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j)$ . Budući da se taj izraz ne može eliminirati nekakvim drugim izrazom,  $W^{ij}$  ne može sadržavati  $\phi^{*k}$ . Drugim riječima,  $W^{ij}$  je holomorfan (ili kompleksno analitičan) u skalarnim poljima  $\phi_k$ .

Kombinirajući sve ovo do sada dobija se sljedeća relacija:

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk} \phi_k, \quad (8.67)$$

gdje  $M^{ij}$  predstavlja simetričnu masenu matricu za fermionska polja, dok je  $y^{ijk}$  *Yukawina interakcija* skalara  $\phi_k$  i dva fermiona  $\psi_i \psi_j$  koja bi morala biti potpuno simetrična na permutacije  $i, j, k$ . Moguće je, i zgodnije je (8.67) pisati u obliku:

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_i \delta \phi_j} W, \quad (8.68)$$

gdje je uvedena veličina koja se nalazi u sljedećoj relaciji:

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k, \quad (8.69)$$

zvana *superpotencijal*. To nije skalarni potencijal u uobičajenom smislu; u stvari, nije čak ni realan. Ona je zapravo holomorfnja funkcija skalarnih polja  $\phi_i$ , koje se tretiraju kao kompleksne varijable. Dijelovi  $\delta L_{\text{int}}$  sadrže *prostorno-vremenske derivacije* i mogu se prikazati pomoću sljedeće relacije:

$$\delta L_{\text{int}}| = (iW^{ij} \partial_\mu \phi_j \psi_i \sigma^\mu \epsilon^\dagger + iW^i \psi_i \sigma^\mu \epsilon^\dagger) + \text{c. c.} \quad (8.70)$$

Sada se pomoću (8.68) dobija sljedeća relacija:

$$W^{ij} \partial_\mu \phi_j = \partial_\mu \left( \frac{\delta W}{\delta \phi_i} \right) = \frac{\delta W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \partial_\mu \phi_j. \quad (8.71)$$

Stoga će (8.70) biti totalna derivacija ako je:

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \phi_i} = M^{ij} \phi_j + \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_j \phi_k, \quad (8.72)$$

što objašnjava zašto smo odabrali njegovo ime. Preostali izrazi u  $\delta L_{\text{inv}}$  su svi linearni u  $F_i$  ili  $F^{*i}$ , te je lako pokazati da se poništavaju, s obzirom na zadane rezultate za  $W^i$  i  $W^{ij}$  koji su prije otkriveni.

Zapravo, možemo uključiti linearni izraz u superpotencijal bez ometanja valjanosti prethodne diskusije:

$$W = L^i \phi_i + \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k, \quad (8.73)$$

U prethodnoj relaciji  $L_i$  predstavljaju parametre s dimenzijama [masa]<sup>2</sup>, koji utječu samo na skalarni potencijalni dio *lagranžijana*. Takvi linearni pojmovi su dozvoljeni samo kada  $\phi_i$  sačinjava *baždarni singlet*, a oni ne izgledaju kao singletni kiralni supermultipljeti u *MSSM-u* s minimalnim sadržajem polja.

Zaključimo, otkrivene su najopćenitije *ne-baždarne interakcije* za kiralne supermultiplete određene jednom holomorfnom funkcijom kompleksnih skalarnih polja, tj. *superpotencijalom*  $W$ . Pomoćna polja  $F_i$  i  $F^{*i}$  se mogu eliminirati uporabom njihovih klasičnih jednadžbi gibanja. Dio  $L_{\text{slobodni}} + L_{\text{int}}$  koji sadrži pomoćna polja se tada predstavlja kao  $F_i F^{*i} + W^i F_i + W_i^* F^{*i}$ , vodeći nas do sljedećih jednadžbi gibanja:

$$F_i = -W_i^*, \quad F^{*i} = -W^i. \quad (8.74)$$



Tako su pomoćna polja algebarski izražena (bez ikakvih derivacija) u izrazima za skalare polja. Poslije ubacivanja znaka † kao zamjene prethodne relacije u  $L_{\text{slobodni}} + L_{\text{int}}$ , gustoća *lagranžijana* će izgledati kao:

$$L = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} (W^{ij} \psi_i \psi_j + W_{ij}^* \psi^\dagger_i \psi^\dagger_j) - W_i^*. \quad (8.75)$$

Sada su *ne-propagirajuća polja*  $F^i, F^{*i}$  definirana, a to proizilazi iz prethodne jednadžbe u kojoj se skalarni potencijal jednostavno uvodi u smislu *superpotencijala* na način:

$$V(\phi, \phi^*) = W^k W_k^* = F^{*k} F_k = M_{ik}^* M^{kj} \phi_i^* \phi_j + \frac{1}{2} M^{in} y_{jkn}^* \phi_i \phi_j^* \phi^{*k} + \frac{1}{2} M_{in}^* y^{jkn} \phi_i^* \phi_j \phi_k + \frac{1}{4} y^{ijn} y_{kln}^* \phi^{*k} \phi^{*l} \phi_i \phi_j. \quad (8.76)$$

Ovaj skalarni potencijal je automatski ograničen odozdo; budući da predstavlja sumu kvadrata od apsolutne vrijednosti ( $W^k$ ), on je uvijek *pozitivan*. Ako zamijenimo opći obrazac za superpotencijal iz (8.69) u (8.76) dobivamo za ukupnu *lagranžijansku* gustoću sljedeći izraz:

$$L = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - V(\phi, \phi^*) + \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} M^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} M_{ij}^* \psi^\dagger_i \psi^\dagger_j - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k \psi^\dagger_j \psi^\dagger_i. \quad (8.77)$$

Sada se mogu usporediti mase fermiona i skalara promatrajući linearizirane jednadžbe gibanja:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \phi_i &= M_{ik}^* M^{kj} \phi_j + \dots, \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i &= M_{ij}^* \psi^\dagger_j + \dots, & i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^\dagger_i &= M_{ij} \psi_j + \dots. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Jedna može eliminirati  $\psi$  u izrazima za  $\psi^\dagger$  i obratno, pa se na kraju dobijaju sljedeće formule:

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi_i = M_{ik}^* M^{kj} \psi_j + \dots, \quad \partial^\mu \partial_\mu \psi^\dagger_j = \psi^\dagger_i M_{ik}^* M^{kj} + \dots. \quad (8.79)$$

Stoga, fermioni i bozoni zadovoljavaju identičnu valnu jednadžbu s točno identičnom kvadratnom masenom matricom s realnim pozitivnim svojstvenim vrijednostima, nazvanu  $(M^2)_i^j = M_{ik}^* M^{kj}$ . Slijedi dijagonaliziranje ove matrice redefiniranjem polja s unitarnom matricom koja daje skup kiralnih supermultiplata, od kojih svaki sadrži maseni degenerirani *kompleksni skalar* i *Weylov fermion*.

### 8.7.3. Lagranžijan za baždarne supermultiplete

Propagirajući stupnjevi slobode u baždarnom supermultipletu čine *bezmaseno baždarno bozonsko polje*  $A_\mu^a$  i *dvokomponentni Weyl fermionski baždarino*  $\lambda^a$ . Indeks  $a$  ovdje ima rastuće vrijednosti preko adjungirane reprezentacije *baždarne grupe* ( $a = 1, 2, 3, \dots, 8$  za  $SU(3)_C$

obojene gluone i gluine;  $a = 1, 2, 3$  za  $SU(2)_L$  slabi izospin;  $a = 1$  za  $U(1)_Y$  slabi hipernaboj). Baždarne transformacije polja vektorskih supermultiplleta su zadane pomoću sljedećih relacija:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c, \quad (8.80)$$

$$\lambda^a \rightarrow \lambda^a + g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c, \quad (8.81)$$

a u njima  $\Lambda^a$  predstavlja infnitezimalni baždarni transformacijski parametar,  $g$  baždarnu konstantu vezanja, dok su  $f^{abc}$  strukturne konstante baždarne grupe koje tvore potpuno antisimetričan tenzor. Poseban slučaj *Abelove grupe* se dobiva stavljajući da je  $f^{abc} = 0$ ; te u ovom slučaju odgovarajući baždarino predstavlja baždarni singlet. Konvencije su takve za *QED*, gdje prema relaciji  $A^\mu = (V, \vec{A})$ ,  $V$  i  $\vec{A}$  predstavljaju obični električni potencijal i vektorski potencijal, s električnim i magnetskim poljima koja su zadana relacijama  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_0 \vec{A}$  i  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Stupnjevi slobode *on-shell* sheme na granici za  $A_\mu^a$  i  $\lambda_\alpha^a$  predstavljaju sumu dva *bozonska* i dva *fermionska helicitetska stanja* (za svako  $a$ ), na način na koji to zahtijeva *supersimetrija*. Međutim, *off-shell* shema  $\lambda_\alpha^a$  sadrži dva kompleksna, ili četiri realna fermionska stupnja slobode, dok  $A_\mu^a$  sadrži samo tri realna *bozonska* stupnja slobode; jedan stupanj slobode je uklonjen pomoću nehomogenih *baždarnih transformacija* u (8.80). Dakle, sada bi bilo važno definirati jedno *realno bozonsko* pomoćno polje, koje se tradicionalno naziva  $D^a$ , kako bi supersimetrija bila konzistentna *off-shell* shemi. Ovo polje se također transformira kao adjungirana baždarna grupa, te zadovoljava uvjet  $(D^a)^* = D^a$ . Poput kiralnih pomoćnih polja  $F_i$ , pomoćno baždarno polje  $D^a$  ima dimenzije  $[\text{mase}]^2$  i nema kinetički član, tako da može biti eliminirano na *on-shell* shemi rabeći njenu vlastitu algebarsku jednadžbu gibanja. Sumiranje stupnjeva slobode sažeto je prikazano u *tablici 8.2*.

	$A_\mu$	$\lambda$	$D$
on-shell ( $n_B = n_F = 2$ )	2	2	0
off-shell ( $n_B = n_F = 4$ )	3	4	1

Tablica 8.2. Brojanje realnih stupnjeva slobode za svaki *baždarni supermultiplet*

Stoga bi *lagranžijanova gustoća* za *baždarni supermultiplet* trebala glasniti:

$$L_{\text{baždarina}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \quad (8.82)$$

gdje je:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (8.83)$$

obično predstavljeno kao *Yang-Millsovo* jakosno polje, dok je:

$$\nabla_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + gf^{abc}A_\mu^b \lambda^c, \quad (8.84)$$

kovarijantna derivacija *baždarskog polja*. Da bi se još jednom izvršila provjera, te da bi se dokazalo da je (8.82) doista supersimetrična, moraju se odrediti specifičnosti supersimetrične transformacije polja. Oblici od ovih specifičnosti proističu iz zahtjeva da bi trebali biti linearni u infinitezimalnim parametrima  $\epsilon$ ,  $\epsilon^\dagger$  koji imaju dimenzije mase [mase]<sup>1/2</sup>, te da je  $\delta A_a^\mu$  realno,  $\delta D^a$  realno i proporcionalno jednadžbama polja za baždarno, što bi trebalo biti u analognosti s svrhom pomoćnog polja F u slučaju kiralnog supermultipleta. Tako se može pretpostaviti, sve do multiplikativnih faktora, da je<sup>22</sup>:

$$\delta A_a^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda^a + \epsilon \sigma^\mu \lambda^{\dagger a}), \quad (8.85)$$

$$\delta \lambda_\alpha^a = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_\alpha D^a, \quad (8.86)$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + -\epsilon \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^{\dagger a}). \quad (8.87)$$

Faktori  $\sqrt{2}$  su odabrani tako da je akcija koja je uporabljena pomoću integrirajućeg  $L_{\text{baždar}}$  doista invarijantna, dok je faza  $\lambda^a$  prikazana za buduću konvenciju u prezentiranju *MSSM-a*.

#### 8.7.4. Kombinirani kiralni i baždarni supermultipleti

Prirodno je da polja u kiralnim i baždarnim supermultipletima interagiraju jedni s drugima. Interakcije između baždarnog polja  $A_{\mu\nu}^a$  i skalarnih i Weylovih fermiona  $\phi_i, \psi_i$  u kiralnim supermultipletima su uvedene zamjenjujući uobičajene derivacije iz (8.75) *baždarno kovarijantnim derivacijama*:

$$\partial_\mu \phi_i \rightarrow D_\mu \phi_i = (\partial_\mu + ig_\nu A_{\mu\nu}^a T_\nu^a) \phi_i, \quad (8.88)$$

$$\partial_\mu \psi_i \rightarrow D_\mu \psi_i = (\partial_\mu + ig_\nu A_{\mu\nu}^a T_\nu^a) \psi_i. \quad (8.89)$$

<sup>22</sup> Transformacije (8.85) - (8.87) nisu supersimetrične transformacije, već kombinacija supersimetričnih transformacija i supersimetričnih baždarnih transformacija koje čuvaju *Wess-Zumino baždarenje*. Nelinearne su za *ne-Abelove baždarne simetrije*, budući da postoje baždarna polja u kovarijantnim derivacijama koja djeluju na baždarska polja i polje jakosti polja  $F_{\mu\nu}^a$ . Dodavanjem još više pomoćnih polja osim  $D^a$  mogu se načiniti linearne supersimetrične transformacije u poljima; to je najlakše uraditi kod superpolja.

Da li bi se moglo dogoditi da "*D-polje*" i baždardini također interagiraju u kiralnim supermultipletima? Baždarna invarijantnost i renormalizabilnost dozvoljavaju sljedeće interagirajuće izraze u *lagranžijanu*:

$$\phi_i^\dagger T_V^a \psi_i \cdot \lambda_V^a + \text{h. c.}, \quad \phi_i^\dagger T_V^a \phi_i \cdot D_V^a. \quad (8.90)$$

Zahtijevanje invarijantnosti akcije pod supersimetričnim transformacijama korigira koeficijente ovih izraza za interakcije. Kombiniranjem prethodnih relacija dobija se izraz za *renormalizacijski supersimetrični lagranžijan*:

$$L_{\text{SUSY}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i\lambda_V^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda_V)^a + (D_\mu \phi_i)^\dagger (D_\mu \phi_i) + i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \phi_i - \sqrt{2} (g_V \phi_i^\dagger T_V^a \psi_i \cdot \lambda_V^a + \text{h. c.}) - |W^i|^2 - \frac{1}{2} (W^{ij} \psi_i \psi_j + \text{h. c.}) - \frac{1}{2} g_V^2 (\phi_i^\dagger T_V^a \phi_i)^2. \quad (8.91)$$

Važno je spomenuti da ovaj *lagranžijan* više ne sadrži nikakva pomoćna polja; "*D-polja*" su eliminirana rabljenjem njihovih jednadžbi gibanja koje su zadane kao:

$$D_V^a = -g_V \phi_i^\dagger T_V^a \phi_i. \quad (8.92)$$

*Lagranžijan* koji je zadan pomoću (8.91) predstavlja najopćenitiji *lagranžijan* koji zadovoljava *renormalizabilnost, baždarnu invarijantnost i invarijantnost pod supersimetričnim transformacijama*. Da bi se potpuno odredio *lagranžijan* za specifičnu supersimetričnu teoriju, važno je uvesti specifične *baždarne grupe, sadržaj polja i superpotencijal*.

### 8.7.5. Gustoća lagranžijana za opći model

Još jednom razmotrimo model koji sadrži multiplet *kiralnih super-polja*  $\Phi$  i multiplet *vektorskog polja*  $V = T^a V^a$ . Invarijantna, supersimetrična i renormalizirana *gustoća lagranžijana* je predstavljena pomoću sljedeće relacije:

$$L = \int d^4 \left( \bar{\Phi} e^{2gV} \Phi + \frac{1}{16g^2} (W^{a\alpha} W_\alpha^a \delta^2(\bar{\theta}) + \text{h. c.}) + (W \delta^2(\bar{\theta}) + \text{h. c.}) \right). \quad (8.93)$$

Superpotencijal  $W$  predstavlja polinom trećeg stupnja u kiralnim superpoljima:

$$W(\Phi) = c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \quad (8.94)$$

Veze  $m_{ij}, g_{jk}$  su potpuno simetrične.

Eliminacijom pomoćnih polja  $D^a$  i  $F_i$  za koje *lagranžijanova funkcija* ne sadrži kinetičke izraze elimiraju se i odgovarajući kanonski impulsi. Pristup koji je ispravan za rabljenje rješenja jednadžbi za pomoćna polja u *lagranžijanovoj funkciji* i time eliminira pomoćna polja je sljedeći. Sumiranje svih izraza koji uključuju  $D^a$  je predstavljeno sljedećom relacijom:

$$L_D = \frac{1}{2} D^a D^a + A^\dagger g T^a D^a A. \quad (8.95)$$

Stoga je rješenje jednadžbe gibanja za  $D^a$  predstavljeno jednadžbom  $D^a = -A^\dagger g T^a A$ . Uvrštanje tih rješenja jednadžbi u *lagranžijansku gustoću* daje za (8.95) izraz:

$$L_D = -\frac{1}{2} (A^\dagger g T^a A)^2. \quad (8.96)$$

Sumiranje svih izraza koji uključuju  $F_i$  i  $F_i^\dagger$  je:

$$L_F = F_i^\dagger F_i + \left( c_i F_i + m_{ij} F_i A_j + \frac{g_{ijk}}{2} F_i A_j A_k + h. c \right) = F_i^\dagger F_i + \left( \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} F_i + h. c \right). \quad (8.97)$$

Rješenje jednadžbi polja su  $F_i^\dagger = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}$ . Uvrštavanjem tih rješenja u (8.97) dobiva se:

$$L_F = - \left| \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \right|^2. \quad (8.98)$$

Kako izraz  $L_D + L_F$  sadrži samo sve članove pomoćnih polja, to bi značilo da može da sadrži i druge članove. Prvo se može izvršiti kovarijantna derivacija na osnovu sljedeće relacije:

$$D_\mu = \partial_\mu + i g T^a v_\mu^a, \quad (8.99)$$

te se u primjeni na baždarine  $\lambda^a$  mora uporabiti adjungirana reprezentacija, tako da se dobijaju konjugirani  $L_{SP}$  i  $L_{GF}$  koji odgovaraju članovima *Kahlerovog potencijala* i superpotencijala koji nisu u  $L_D + L_F$ , te *lagranžijanu baždarnog* i *baždarinskog* polja:

$$L_{MC} = (D^\mu A)^\dagger (D_\mu A) + \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu i D_\mu \psi - \sqrt{2} g (i \bar{\psi} \bar{\lambda} A - A^\dagger i \lambda \psi), \quad (8.100)$$

$$L_{SP} = -\frac{m_{ij}}{2} \psi_i \psi_j - \frac{g_{ijk}}{2} \psi_i \psi_j A_k + h. c = -\frac{1}{2} \psi_i \psi_j \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i \partial A_j} + h. c, \quad (8.101)$$

$$L_{GF} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2} \lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \bar{\lambda})^a. \quad (8.102)$$

Nakon eliminacije pomoćnih polja, *lagranžijanova gustoća* ovog modela bi trebala imati oblik:

$$L = L_{MC} + L_{SP} + L_{GF} + L_D + L_F. \quad (8.103)$$

*Lagranžijanova gustoća* sadrži *Weylov fermion*  $\psi_{i\alpha}$  i kompleksna skalarna polja  $A_i$ , vektorska polja  $v_\mu^a$  i baždarine  $\lambda^a$ . Interakcije svih polja (uključujući i *baždarine* i *vektorska polja*) s vektorskim poljima su već jasna.  $L$  je baždarno invarijantan i supersimetrično invarijantan. Određena je *baždarna invarijantnost*. Supersimetrija također određuje interakcije baždarina s  $\psi_{i\alpha}$  i  $A_i$ , 4-skalarne interakcije u  $L_D + L_F$  (tzv. D i F pojmovi) i omjere između pojedinih superpotencijalnih uvjeta.

### 8.8. Supersimetrična QED

Supersimetrično proširenje QED-ja (SQED-ja) predstavlja jedan vrlo važan prototip supersimetrične teorije. SQED sadrži elektron i foton i njihov *superpartner*. On sadrži dva kiralna superpolja  $\Phi_L, \Phi_R$  s električnim nabojima  $Q_L = -1, Q_R = +1$  i jedno vektorsko superpolje  $V$ . Invarijantna, supersimetrična i renormalizacijska *gustoća lagranžijana* dana je sljedećim izrazom:

$$L_{\text{SQED}} = \int d^4\theta \left\{ \bar{\Phi}_L e^{2eV\theta_L} \Phi_L + \bar{\Phi}_R e^{2eV\theta_R} \Phi_R + \left[ \left( W + \frac{1}{16e^2} W^\alpha W_\alpha \right) \delta^2(\bar{\theta}) + \text{h. c.} \right] \right\}. \quad (8.104)$$

Jedini superpotencijal kompatibilan s simetrijama i renormalizabilnošću glasi:

$$W = m\Phi_L\Phi_R. \quad (8.105)$$

Skalarne i 2-spinorne komponente superpolja  $\Phi_L$  i  $\Phi_R$  se mogu napisati kao  $(\tilde{e}_L, \psi_{L\alpha})$  i  $(e_R^\dagger, \psi_{R\alpha})$ <sup>23</sup>. 4-spinor za elektron se može definirati na sljedeći način kao  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \bar{\psi}_R^\alpha \end{pmatrix}$ . Ovdje su odabrane sljedeće oznake: za antikiralno superpolje  $\bar{\Phi}_R$  su komponente  $\tilde{e}_R$ , za "legalni" *selektron* i  $\bar{\psi}_R^\alpha$  za desni elektron. Nezavisno o uvjetu supersimetrije, elektronski 4-spinor se sastoji od komponenti kiralnog i antikiralnog superpolja. Ako se definira naboj elektrona na način da je  $\theta_e = \theta_L = -\theta_R$ , onda polja  $\tilde{e}_L, \tilde{e}_R, \psi$ , to jeste *selektroni* i *elektron*, sadrže naboj  $\theta_e$ . Komponente vektora superpolja  $V$  se mogu napisati u obliku  $(\lambda, A_\mu)$ , te se *Majorana spinor* za *fotino* definira kao  $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} -i\lambda_\alpha \\ i\bar{\lambda}^\alpha \end{pmatrix}$ . Također je ispunjen uvjet da je  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^C$ .

U komponentnim poljima, *lagranžijanska gustoća* glasi:

$$L_{\text{SQED}} = |D_\mu \tilde{e}_L|^2 + |D_\mu \tilde{e}_R^\dagger|^2 + \bar{\psi}_L i\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_R - \sqrt{2}e\theta_e (\overline{i\psi_L \lambda \tilde{e}_L} + i\psi_R \lambda \tilde{e}_R - i\tilde{e}_L^\dagger \lambda \psi_L - i\tilde{e}_R^\dagger \bar{\lambda} \bar{\psi}_R) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\lambda} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - m(\psi_L \psi_R + \bar{\psi}_R \bar{\psi}_L) + m(F_R \tilde{e}_L + F_L \tilde{e}_R^\dagger + \text{h. c.}) + |F_L|^2 + |F_R|^2 + D(e\theta_e |\tilde{e}_L|^2 - e\theta_e |\tilde{e}_R|^2)^2 + \frac{1}{2} D^2, \quad (8.106)$$

te će rješenja za polja  $F$  i  $D$  izgledati:

$$F_L^\dagger = -m\tilde{e}_R^\dagger; \quad F_R^\dagger = -m\tilde{e}_L^\dagger; \quad D = -(e\theta_e |\tilde{e}_L|^2 - e\theta_e |\tilde{e}_R|^2). \quad (8.107)$$

Tenzor jačine polja  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A_\nu - \partial^\nu A_\mu$ . Za  $\psi_L, \bar{\psi}_R$  (a time i za  $\psi$ ),  $\tilde{e}_L$  i  $\tilde{e}_R$  u uporabi je kovarijantna derivacija:

<sup>23</sup> Ako bi se moglo odabrati  $(\tilde{e}_L, \psi_{R\alpha})$ , onda bi to sadržavalo jedan drugi električni naboj  $\tilde{e}_R$  različit od  $\tilde{e}_L$  i tada bi to bilo tumačenje *spozitrona*, a ne *selektrona*; ponekad se također odabira  $(\tilde{e}_R^c, \psi_{R\alpha})$  ili  $(\tilde{e}_R^c, \psi_{L\alpha}^c)$ .

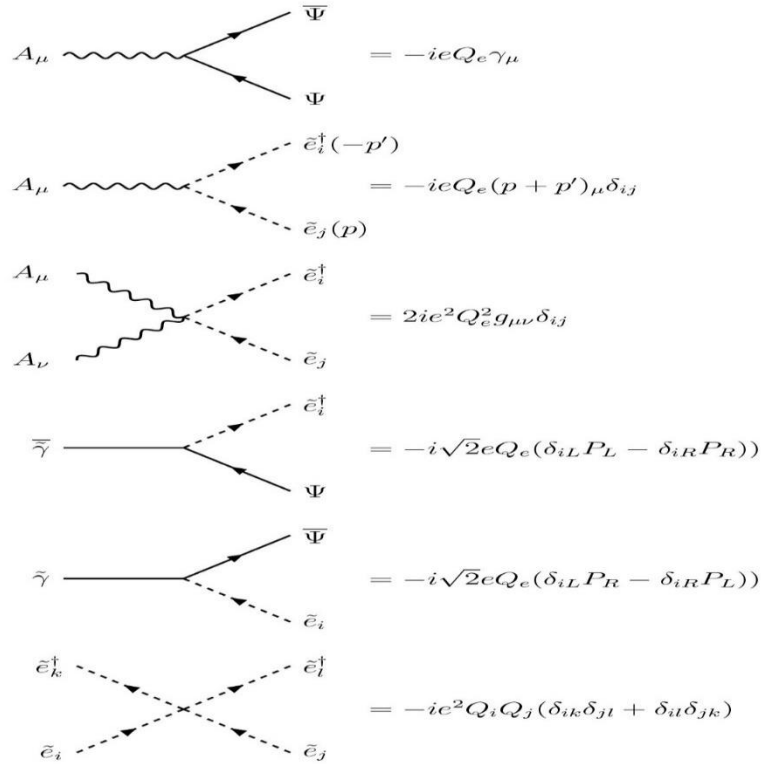
$$D_\mu = \partial_\mu + ie\theta_e A_\mu, \quad (8.108)$$

dok je za  $\tilde{e}_R^\dagger$  i  $\psi_R$  kovarijantna derivacija oblika  $D_\mu = \partial_\mu + ie\theta_R A_\mu$ , a ove relacije vode do toga da je  $|D_\mu \tilde{e}_R^\dagger|^2 = |D_\mu e_R|^2$  i  $\bar{\psi}_R i\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_R = \psi_R i\sigma^\mu D_\mu \bar{\psi}_R$ .

U 4-spinornoj notaciji i s umetnutim F i D poljima, ova *lagranžijanska gustoća* postaje:

$$L_{\text{SQED}} = |D_\mu \tilde{e}_L|^2 + |D_\mu \tilde{e}_R^\dagger|^2 + \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - \sqrt{2}e\theta_e (\bar{\psi}_R \tilde{\gamma} \tilde{e}_L - \bar{\psi}_L \tilde{\gamma} \tilde{e}_R + \tilde{e}_L^\dagger \tilde{\gamma} P_L \psi - \psi_R^\dagger \tilde{\gamma} P_R \psi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma} i\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\gamma} - m\bar{\psi}\psi - (|\tilde{e}_L|^2 + |\tilde{e}_R|^2) - \frac{1}{2} (e\theta_e |\tilde{e}_L|^2 - e\theta_e |\tilde{e}_R|^2)^2. \quad (8.109)$$

Ova *lagranžijanska gustoća* tako opisuje uobičajene kinetičke pojmove uključujući kovarijantne derivacije za polja *elektrona* i *selektora* (1. red), interakcije *elektrona* / *selektora* s *baždarinima* (2. red), kinetičkim izrazima za *foton* i *fotino* (3. redak), izraze za masu *elektrona* i *selektora* iz *superpotencijala* (4. red), i D- izraze (5. red), kvartične veze između *selektora*. Sve je ovo prikazano na slici 8.4.



Slika 8.4 . Feynmanova pravila za SQED. Ulazni impulsi su p i (-p'), dok su i, j, k  $\in$  {L, R} indeksi selektora

Na slici 8.4. su posebno zabilježeni različiti znakovi baždarno vezanja na  $\tilde{e}_L$  i  $\tilde{e}_R$ . Znakovi su posljedica naboja  $Q_{L,R}$  odgovarajućih kiralnih superpolja, a ne izravno naboja  $\tilde{e}_L$  (*komponenta*  $\Phi_L$ ) i  $\tilde{e}_R$  (*komponenta antikiralnog polja*  $\bar{\Phi}_R$ ).

### 8.9. Supersimetrična QCD

Supersimetričnu QCD (*SQCD*) vrlo je jednostavno definirati analogno *SQED*-ju. Ovdje ćemo izvesti izraz za *gustoću lagranžijana SQCD-ja* i *Feynmanova pravila za SQCD*. *SQCD* nije realna bez loma supersimetrije, ali su bitne značajke, pogotovo one vezane za *Feynmanova pravila* koja su izvedena ovdje, nepromijenjene čak i u nazočnosti loma supersimetrije i dio su *MSSM-a*. S teoretskog gledišta, *SQCD* je vrlo zanimljiva. Kao i obična QCD, vrlo je bogata fizikom, te se *ne-teoretski fenomeni* mogu objasniti zbog većeg udjela simetrije jednostavnije nego u *QCD*-ju.

Ovdje će se *SQCD* razmatrati u malo općenitijem obliku s  $N_C$  boja i jednom vrstom kvarka. *SQCD* je stoga uzeta kao *SUSY teorija* s baždarnom grupom  $SU(N_C)$ . *Kvark* i pripadajući *skvarkovi* su opisani s dva *kiralna superpolja*  $L_i, R_i$  koja sadrže bojne indekse  $i \in \{1, \dots, N_C\}$ , analogno superpoljima  $\Phi_L, \Phi_R$  u *SQED*-ju. Komponente L i R su označene su s  $(\tilde{q}_L, \Psi_{L\alpha})$  i  $(\tilde{q}_R^\dagger, \Psi_{R\alpha})$ , a bojni indeksi nisu naznačeni. Kvarkovski 4-spinor se može definirati na analogan način kao u *SQED*-ju,  $q = \begin{pmatrix} \Psi_{L\alpha} \\ \bar{\Psi}_{R\alpha} \end{pmatrix}$ .

Osim kiralnih super polja, *SQCD* još uvijek sadrži  $(N_C^2 - 1)$  vektorska superpolja  $V^a$  s komponentama  $(\lambda^a, G_\mu^a)$ , koje opisuju *gluine* i *gluone*. 4-Majorana spinori za gluine se definiraju sljedećim izrazom koji glasi  $\tilde{g}^a = \begin{pmatrix} -i\lambda_\alpha^a \\ i\bar{\lambda}^{a\alpha} \end{pmatrix}$ .

Sada je važno definirati reprezentacije baždarne grupe, pod kojima se polja transformiraju. Za spinore se uzimaju kvarkovski 4-spinori koji se transformiraju kao u običnoj *QCD*-ju, tj. pod *fundamentalnom reprezentacijom*. Odgovarajući generatori ove reprezentacije  $SU(N_C)$  su  $T^a$ . Zahtijeva se *baždarna invarijantnost* na transformacije:

$$q_i \rightarrow (e^{-igT^a\theta_a})_{ij} q_j, \quad (8.110)$$

s transformacijskim parametrima  $\theta_a$  i indeksima boja  $i, j$ . To također implicira da se *Weylovi spinori*  $\Psi_L, \bar{\Psi}_R$  i *squark polja*  $\tilde{q}_{L,R}$  transformiraju fundamentalnom reprezentacijom. Također to implicira na to da se komponente "*desne komponente*" moraju transformirati s kompleksno konjugiranim i reprezentacijom s generiranim  $-T^{*a}$  :



$$\Psi_{Ri} \rightarrow \left( e^{-ig(-T^{*a})\theta_a} \right)_{ij} \Psi_{Rj}, \quad (8.111)$$

Reprezentacija koja se izražava pomoću  $(-T^{*a})$  naziva se *antifundamentalna reprezentacija* i to je ista reprezentacija po kojoj se transformira *kompleksno konjugirano kvarkovsko polje*  $\bar{q}$ . Matrice  $-T^{*a}$  tvore reprezentaciju, jer zbog  $T^a = T^{a\dagger}$  one ispunjavaju iste komutacijske omjere kao  $T^a$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } G_a^\mu(p_a) \text{ (wavy line) splits into } G_b^\nu(p_b) \text{ and } G_c^\rho(p_c) \text{ (wavy lines).} \\
 & \qquad = -gf_{abc} [g_{\mu\nu}(p_a - p_b)_\rho + g_{\nu\rho}(p_b - p_c)_\mu + g_{\rho\mu}(p_c - p_a)_\nu] \\
 & \text{Diagram 2: } G_a^\mu \text{ and } G_b^\nu \text{ (wavy lines) cross at a four-gluon vertex, producing } G_e^\rho \text{ and } G_f^\sigma \text{ (wavy lines).} \\
 & \qquad = -ig^2 [ f_{abc}f_{efc}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\
 & \qquad \qquad \qquad + f_{aec}f_{fbc}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) \\
 & \qquad \qquad \qquad + f_{afc}f_{bec}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}) ] \\
 & \text{Diagram 3: } G_a^\mu \text{ (wavy line) splits into } \tilde{g}_b \text{ and } \tilde{g}_c \text{ (solid lines with arrows).} \\
 & \qquad = -gf_{abc}\gamma_\mu
 \end{aligned}$$

Slika 8.5. Feynmanova pravila za SQCD: Za SUSY-Yang-Millsove dijagrame (s gluonima i gluinima). Svi impulsi označavaju ulazne impulse. Indeksi boja su u adjungiranoj reprezentaciji označeni s a, b, c ..., u fundamentalnoj reprezentaciji s i, j ..., dok su indeksi skvarkova A, B ...  $\in \{L, R\}$ .

U daljnjem zahtijevamo da je SQCD invarijantna na SUSY baždarne transformacije, tj.  $V \rightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda')$ , gdje u slučaju  $\Phi = L$  moraju uzeti generatori fundamentalne reprezentacije, a u slučaju  $\Phi = R$  generatori antifundamentalne reprezentacije. Baždarno invarijantni, supersimetrični i renormalizabilni lagranžijan dan je s (8.104): Superpotencijal je oblika  $W = mL_i R_i$  i sadrži produkt fundamentalne i antifundamentalne reprezentacije, te je stoga baždarno invarijantan. Zbog jednostavnosti će se uzeti da je  $W = 0$ , te je izraz za QCD prikazan pomoću (8.112) i glasi:

$$\begin{aligned}
& G_\mu \text{ (wavy)} \rightarrow \bar{q} \text{ (solid)} + q \text{ (solid)} & = -igT_{ij}^a \gamma_\mu \\
& G_\mu \text{ (wavy)} \rightarrow \tilde{q}_{Ai}^\dagger(-p') \text{ (dashed)} + \tilde{q}_{Bj}(p) \text{ (dashed)} & = -ig(p+p')_\mu \delta_{AB} T_{ij}^a \\
& G_a^\mu \text{ (wavy)} + G_b^\nu \text{ (wavy)} \rightarrow \tilde{q}_{Ai}^\dagger \text{ (dashed)} + \tilde{q}_{Bj} \text{ (dashed)} & = ig^2 g_{\mu\nu} \delta_{AB} \{T^a, T^b\}_{ij} \\
& \bar{g}_a \text{ (solid)} \rightarrow \tilde{q}_{Ai}^\dagger \text{ (dashed)} + q_j \text{ (solid)} & = -i\sqrt{2}gT_{ij}^a (P_L \delta_{AL} - P_R \delta_{AR}) \\
& \tilde{g}_a \text{ (solid)} \rightarrow \bar{q}_i \text{ (solid)} + \tilde{q}_{Aj} \text{ (dashed)} & = -i\sqrt{2}gT_{ij}^a (P_R \delta_{AL} - P_L \delta_{AR}) \\
& \tilde{q}_{Ck}^\dagger \text{ (dashed)} + \tilde{q}_{Ai} \text{ (dashed)} \rightarrow \tilde{q}_{Dl}^\dagger \text{ (dashed)} + \tilde{q}_{Bj} \text{ (dashed)} & = -ig^2 [T_{ki}^a T_{lj}^a (\delta_{AL} \delta_{CL} - \delta_{AR} \delta_{CR}) (\delta_{BL} \delta_{DL} - \delta_{BR} \delta_{DR}) \\
& & \quad + T_{kj}^a T_{li}^a (\delta_{BL} \delta_{CL} - \delta_{BR} \delta_{CR}) (\delta_{AL} \delta_{DL} - \delta_{AR} \delta_{DR})]
\end{aligned}$$

Slika 8.6. Feynmanova pravila za SQCD: Tvar. Svi impulsi označavaju ulazne impulse. Indeksi boja su u adjungiranoj reprezentaciji označeni s  $a, b, c \dots$ , u fundamentalnoj reprezentaciji s  $i, j \dots$ , dok su indeksi skvarkova  $A, B \dots \in \{L, R\}$ .

$$L_{\text{SQED}} = \int d^4\theta \left\{ \bar{L} e^{2gT^a v^a} L + \bar{R} e^{2g(-T^{*a})v^a} R + \left[ \left( W + \frac{1}{16g^2} W^{\alpha\alpha} W_\alpha^a \right) \delta^2(\bar{\theta}) + \text{h. c.} \right] \right\}. \quad (8.112)$$

Nalaženje *gustoće lagranžijana* u komponentnim poljima je analogno kao i u slučaju SQED-ja. Dobija se rezultat koji je izražen s 4-spinorom za kvarkove i gluine i može se prikazati sljedećom formulom:

$$L_{\text{SQCD}} = |D^\mu \tilde{q}_L|^2 + |D^\mu \tilde{q}_R|^2 - \sqrt{2}q(\bar{q}P_R \tilde{q}_L - \bar{q}P_L \tilde{q}_R + \tilde{q}_L^\dagger \bar{q}P_L q - \tilde{q}_R^\dagger \bar{q}P_R q) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} \bar{\tilde{g}}_a i \gamma^\mu D_\mu \tilde{g}_a - \frac{1}{2} D_a D_a, \quad (8.113)$$

te definicijama,

$$D^\mu = \partial^\mu + igT^a G_a^\mu, \quad F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - gf_{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \\ D_a = -g(\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger T^a \tilde{q}_R), \quad (8.114)$$

gdje se  $T^a$  u kovarijantnom izvodu prikazuje kao  $(-T^{*a})$  ili  $-if_{abc}$  te kada se primjenjuje na objekte u *antifundamentalnoj ili adjungiranoj reprezentaciji*. Isto vrijedi i za  $\tilde{g} = \tilde{g}^a T^a$ , gdje je gornja *gustoća lagranžijana* tako formulirana da se  $\tilde{g}$  uvijek javlja samo u fundamentalnoj reprezentaciji. Ovo također objašnjava različite predznake *gluino-kvark-skvark* interakcija, koje su analogne odgovarajućim znakovima u *SQED*-ju.

### 8.10. SUSY interakcije između čestica

U realnim supersimetričnim teorijama i *SM*-u javljaju se miješanja između polja, npr. miješanje *fotona i Z bozona*, *CKM* interakcije, interakcija između *baždarina i higgsina*, *chargina* i *neutralina*, te interakcije između različitih *sfermiona*.

*Feynmanova pravila* za polja  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots n$  u interakcijskoj slici su dana na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \phi_j^\dagger \text{ --- } \blacktriangleright \text{ --- } \phi_i &= i[(p^2 - M^2)^{-1}]_{ij} \\ X \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \blacktriangleright \end{array} \right. \text{ --- } \phi_i &= ig_i \\ Y \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \blacktriangleright \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{--- } \phi_i^\dagger \\ \text{--- } \phi_j \end{array} &= ig_{ij} \end{aligned}$$

Slika 8.7. Feynmanova pravila za polja u interakcijskoj slici dana su lagranžijanom (8.115)

Neka su  $\phi_1, \dots, \phi_n$   $n$  kompleksna skalarna polja koja interagiraju međusobno i s drugim poljima. Odgovarajući izrazi za *gustoću lagranžijana* su:

$$L_\phi = \phi_i^\dagger (-\partial^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - M_{ij}^2) \phi_j + X g_i \phi_i + Y g_{ij} \phi_i^\dagger \phi_j, \quad (8.115)$$

gdje su  $X, Y$  polja (ili produkti polja), a  $g$  je baždarna konstanta vezanja. Primjeri su dijelovi *gustoće lagranžijana SQED-ja* ili *SQCD-ja* s  $\phi_i = \tilde{e}_i$  ili  $\phi_i = \tilde{q}_i$ ,  $i \in \{L, R\}$ , ukoliko se dodaju izrazi za masu za ta polja.

Odgovarajuća *Feynmanova pravila* se mogu izvesti na uobičajeni način. Ako matrica mase  $M_{ij}^2$  nije dijagonalna, polja interagiraju, te su interagirajući propagatori različiti od nule, što se može vidjeti iz sljedećeg izraza:

$$\langle 0 | T \phi_i \phi_j^\dagger | 0 \rangle^{\text{F.T.}} = i[(p^2 - M^2)^{-1}]_{ij}. \quad (8.116)$$

Nedijagonalne propagatorske matrice u praktičnim izračunima predstavljaju problem. Taj se problem može izbjeći transformacijom na nova polja  $\phi_i^M$ , koja odgovaraju masenim svojstvenim stanjima. U najvažnijim slučajevima transformacija se provodi jednom unitarnom matricom  $U$ , za koju važe sljedeće jednadžbe:

$$\phi_k^M = U_{ki} \phi_i, \quad (8.117)$$

$$U_{ki}^* U_{kj} = \delta_{ij}, \quad (8.118)$$

$$M_D^2 = U M^2 U^\dagger, \quad (8.119)$$

gdje je  $M_D^2$  dijagonalna matrica. Inverzna transformacija dana je sljedećom relacijom:

$$\phi_i = U_{ki}^* \phi_k^M, \quad (8.120)$$

a *gustoća lagranžijana* postaje:

$$L_\phi = \phi_i^{M\dagger} (-\partial^\mu \partial_\mu - (M_D^2)_{ii}) \phi_i^M + X g_i U_{ki}^* \phi_k^M + Y g_{ij} U_{ki} U_{lj}^* \phi_k^{M\dagger} \phi_l^M. \quad (8.121)$$

*Feynmanova pravila* za  $\phi^M$ -polja se mogu ponovno očitati. Budući da je  $M_D^2$  dijagonalna, i propagatori su dijagonalni. Ali vrhovi postaju kompleksniji i sastoje se od kombinacija konstanti vezanja. *Feynmanova pravila* prikazana su na slici 8.8.

$$\phi_k^{M\dagger} \text{ --- } \phi_l = \frac{i\delta_{kl}}{p^2 - (M_D^2)_l}$$

$$X \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ --- } \phi_k = iU_{ki}^* g_i$$

$$Y \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{--- } \phi_k^{M\dagger} \\ \text{--- } \phi_l^M \end{array} = iU_{ki} U_{lj}^* g_{ij}$$

Slika 8.8. Feynmanova pravila za polja masenih svojstvenih vrijednosti  $\phi^M$  prema zadanoj gustoći lagranžijana iz relacije (8.121)

Važno je izraziti riječima koliko je jakosno vezanje  $\phi_k^M$  na X:  $U_{k1}^*$  puta vezanje od  $\phi_1$  na X, plus  $U_{k2}^*$  vezanje od  $\phi_2$  na X itd. Grafički to odgovara prikazu na slici 8.9:

$$\left( X \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ --- } \phi_k^M \right) = U_{k1}^* \left( X \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ --- } \phi_1 \right) + \dots + U_{kn}^* \left( X \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ --- } \phi_n \right)$$

Slika 8.9 Jakosno vezanje  $\phi_k^M$  na X

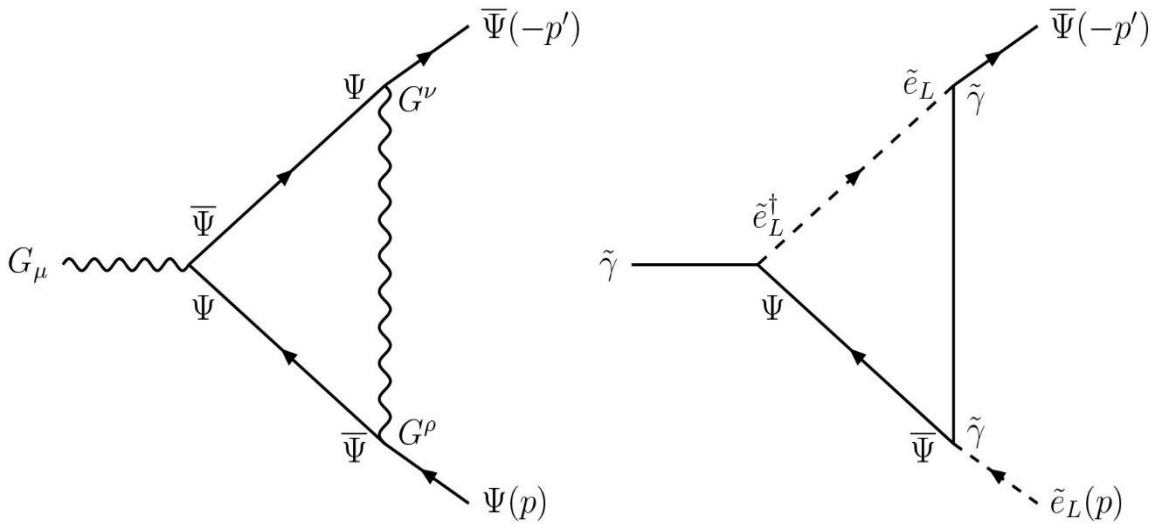
U ovom slučaju, pojavljuju se elementi matrice interakcije  $U_{ki}^*$  inverzne transformacije (8.120), koji uređuju doprinose za  $\phi_k^M$  u izvornim poljima  $\phi_i$ .

Dakle, Feynmanova pravila za selekton-, skvark-, chargino- i neutralino- se mogu shvatiti kao linearna kombinacija Feynmanovih pravila za vlastite interakcije ( $\tilde{e}_{LR}$ ,  $\tilde{q}_{LR}$ , baždarina, higgsina).

Slika 8.10 prikazuje dva dijagrama SQED-ja s jednom petljom. Lijevi dijagram je uobičajena korekcija vrha iz QED-ja. Njegov izračun je jasan: Feynmanova pravila za spinorne objekte (vertekse ili vrhove i propagatore) su množe u redosljedu suprotnom smjeru strjelice fermionske linije, a rezultat dijagrama je predstavljen sljedećom relacijom:

$$\gamma^\nu \frac{1}{\gamma^{\mu'} p'_{\mu} + \gamma^{\mu} k_{\mu} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma^{\mu} p_{\mu} + \gamma^{\mu} k_{\mu} - m} \gamma^\rho \frac{-g_{\nu\rho}}{k^2}, \quad (8.122)$$

gdje  $k$  predstavlja impuls fotonskih propagatora, dok su prefaktori kao što su  $i, e, Q$  i *integral petlje* izostavljeni.



Slika 8.10. Feynmanova pravila za SQED. Svi impulsi su ulazni.

Kontrakcija:

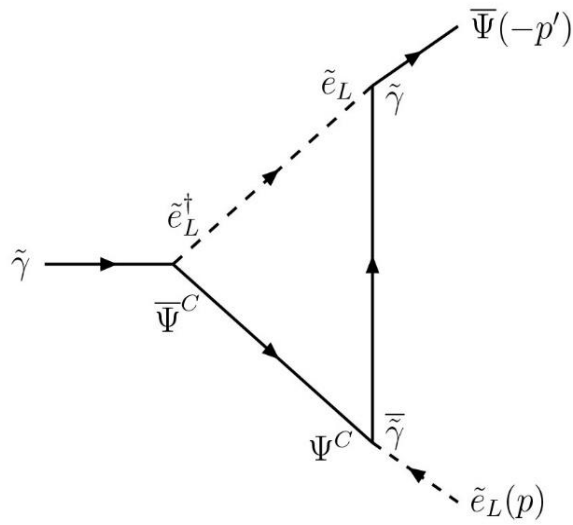
$$\bar{\Psi} P_R \tilde{\gamma} \tilde{e}_L, \quad \tilde{\gamma} P_R \Psi^C \tilde{e}_L, \quad \tilde{e}_L^\dagger \bar{\Psi}^C P_L \tilde{\gamma}, \quad (8.123)$$

predstavlja Feynmanov dijagram na sljedećoj slici 8.11.. Za rezultat analogan (8.122) se dobiva:

$$P_R \frac{1}{(-\gamma^\mu k_\mu)} P_R \frac{1}{(\gamma^\mu p_\mu - m)} P_L \frac{1}{(p+k)^2 - m^2}. \quad (8.124)$$

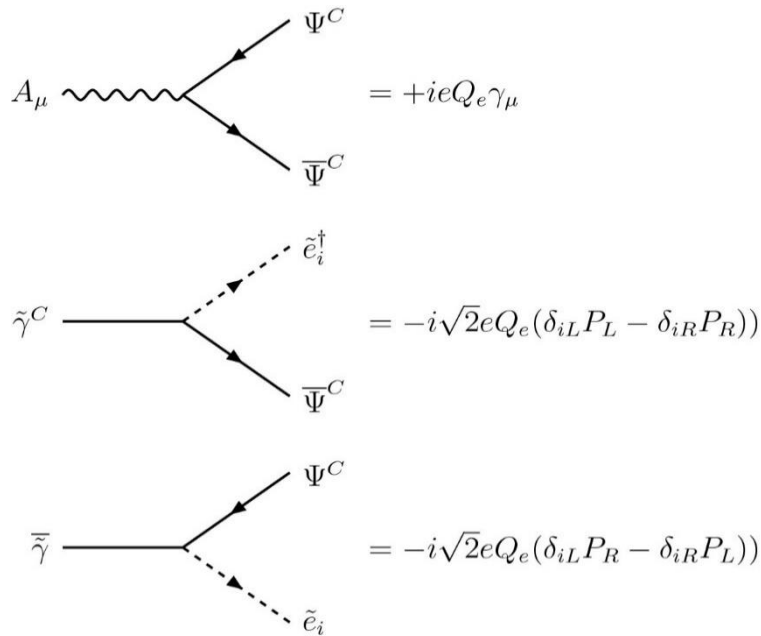
Dvije točke su odlučujuće za izračun (8.123) ili je dijagram na slici 8.11 jednostavno moguć, a točke su:

- Sve kontrakcije između 4-spinora imaju uobičajeni oblik  $\langle 0 | T \psi_1 \bar{\psi}_2 | 0 \rangle$ , izračunat u obliku  $\frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m}$ , s jednim "izlaznim" i jednim "ulaznim" spinorom
- Svi spinorni objekti (*propagatori i faktori vrhova*) množe se međusobno prema strukturi spinorne matrice.



Slika 8.11. Ekvivalentan oblik drugog dijagrama na slici (8.10), koji odgovara (8.123).

Ove dvije točke omogućavaju definiranje jednog „smjera strujanja”, koji je naznačen pomoću fermionskih strelica i na  $\tilde{\gamma}$  linijama na slici 8.11. Izračun dijagrama je tada kompatibilan s zahtjevom za množenje svih spinornih objekata u redosljedu koji je suprotan smjeru strujanja fermiona. Ovdje opisana metoda se može rabiti za sve dijagrame. Lako se može pokazati da se svaki dijagram može preobličiti tako da su zadovoljene gornje dvije točke. U praksi, rezultati sljedećih pravila izračuna su: u dijagramu, ukoliko kontrakcija  $\psi_1 \bar{\psi}_2$  ima pogrešan smjer strujanja fermiona, ili dolazi do kontrakcije kao što je  $\psi_1 \psi_2$ , se primjenjuju odgovarajuća pravila okretanja na uključene vrhove i kontrakcije se primjenjuju ekvivalentnim izrazima kao što su  $\psi_2^c \bar{\psi}_1^c$  ili  $\psi_1 \bar{\psi}_2^c$ . Kako bi se taj proces pojednostavio, moguće je također izvesti Feynmanova pravila koja su izvedena i dostupna. Primjerice, to ilustriramo pomoću Feynmanovih pravila za SQED. Obrnute verzije Feynmanovih pravila sa slike 8.4 prikazane su na slici 8.12..



Slika 8.12. Preokrenuta Feynmanova pravila SQED-ja, temeljena na flip pravilima

Svako od ovih pravila je ekvivalentno preobliciranju odgovarajućeg pravila iz slike 8.4 i može se uporabiti kao alternativa prema uporabi.

## 9. MSSM

### 9.1. Prvi primjer MSSM-a

MSSM je  $N = 1$  tip supersimetričnih teorija koje jedino mogu sadržati kiralne multiplete koji nemaju centralne naboje. Zbog toga SUSY transformacije ne djeluju na  $SU(3)_C, SU(2)_L$  ili  $U(1)_Y$  stupnjeve slobode. U daljnjem ćemo u koracima konstruirati lagranžijan MSSM-a. Krenimo od lijevorukih leptonskih polja, npr. elektrona jednog  $e_L$ . Polje  $e_L$  s poljem  $\nu_{eL}$ , lijevog elektroslabog neutrina tvori dublet hipernaboja -1:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

U SUSY teoriji, oni se moraju udružiti s bozonima spina-0 koji formiraju  $SU(2)$  dublet hipernaboja -1. Higgsov dublet:

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

ima hipernaboj +1, međutim njemu nabojsko-konjugirani dublet ima hipernaboj -1:



$$\begin{pmatrix} \overline{\phi^0} \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Međutim, ovaj *Higgsov dublet* (9.3) ne sadrži leptonski broj. Supersimetrične reprezentacije imaju jedinstvene aditivne kvantne brojeve. Kako lijevi *leptonski dublet* i *Higgsov dublet* nemaju isti leptonski broj, ne mogu tvoriti supersimetričnu reprezentaciju. Zbog toga se moraju uvesti nove čestice  $(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$  koje imaju hipernaboj -1:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \text{ udružen s } \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{eL} \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

gdje  $\tilde{\nu}$  predstavlja skalarni partner za neutrino ('*sneutrino*'), dok je  $\tilde{e}$  skalarni partner za elektron ('*selektron*'), a  $\nu_L, e_L, \tilde{\nu}_L, \tilde{e}_L$  i pripadna pomoćna  $F_{\nu_L}, F_{\nu_R}$  tvore lijevi inverzni supersimetrični multiplet. Slično tome, uvodimo *smione* i *stauone*, kao i njihove pripadajuće *sneutrine*, te od njih tvorimo lijeve kiralne multiplete. Na identičan način konstruiraju se lijevi kvarkovski multipleti. Komponente tog multipleta tvore  $SU(3)_C$  triplet. Supersimetrični partneri kvarkova nazivaju se *skvarkovi*. Pripadni dubleti su:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_u \\ F_d \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Elektroslabе interakcije leptona i kvarkova su '*kiralne*', što znači da 'L' i 'R' dijelovi polja različito interagiraju. 'L' dijelovi tvore  $SU(2)_L$  dublete, dok 'R' dijelovi tvore  $SU(2)_L$  singlete. Desni supersimetrični supermultipleti koji odgovaraju desnim leptonima i kvarkovima su izvedeni od *pripadnog desnog leptona (kvarka), pripadnog sleptona (skvarka) i pripadnog pomoćnog F*  $(e_R, \tilde{e}_R, F_{eR}), (u_R, \tilde{u}_R, F_{uR}), (d_R, \tilde{d}_R, F_{dR})$ . Analogno, kvantni brojevi *baždarne grupe* za *baždarine* moraju biti isti i za *baždarne bozone*, pa trebamo obojeni oktet '*gluina*' za  $SU(3)_C$  *baždarni sektor, tripletine* za  $SU(2)_L$  *baždarni sektor, te singletino* za  $U(1)_Y$  *baždarni sektor MSSM-a* i pripadno pomoćno D-polje  $(g, \tilde{g}, D_g), (W, \tilde{W}, D_w), (y, \tilde{y}, D_Y)$ .

Kao što smo pokazali, *Higgsovom dubletu* se ne može pridružiti niti jedan fermion iz *SM-a*. Nadalje, superpotencijal mora biti holomorfan, što znači da se u njemu ne mogu sadržati *Higgsov dublet* (9.2) i njegov nabojni konjugat iz (9.3), nego samo dva nezavisna *Higgsova dubleta*:

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \quad (9.6)$$

koji imaju hipernaboj +1 i -1. Tim dubletima se pridružuju dubleti pripadnih higgšina i

pripadnih pomoćnih polja koja s *Higgsovima dubletima* tvore *SUSY* multiplete  $(H_u, \tilde{H}_u, F_{H_u}), (H_d, \tilde{H}_d, F_{H_d})$ , gdje je za  $(H_u, \tilde{H}_u, F_{H_u})$ :

$$(H_u, \tilde{H}_u, F_{H_u}) = \left( \begin{pmatrix} H_u^\dagger \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^\dagger \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_u^\dagger \\ \tilde{F}_u^0 \end{pmatrix} \right), \quad (9.7)$$

i analogno za  $(H_d, \tilde{H}_d, F_{H_d})$ :

$$(H_d, \tilde{H}_d, F_{H_d}) = \left( \begin{pmatrix} H_d^\dagger \\ H_d^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^\dagger \\ \tilde{H}_d^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_d^\dagger \\ \tilde{F}_d^0 \end{pmatrix} \right). \quad (9.8)$$

*Kiralni i baždarni supermultipleti* uvedeni ovdje tvore "minimalno" proširenje sadržaja polja *SM-a* koje je potrebno da bi bilo supersimetrično. Potpuna teorija, uključujući supersimetrične interakcije, naziva se *Minimalni Supersimetrični Standardni Model (MSSM)*. U ovom trenutku je važno spomenuti da: niti jedan od 'superpartnera' još nije eksperimentalno opažan, posebice ne oni koji zasigurno nemaju istu masu kao njihovi partneri u *SM-u* (kao što bi inače bilo očekivano za simetrični multiplet), tako da se supersimetrija mora nekako slomiti u *MSSM-u*.

## 9.2. Specifikacija superpotencijala

Svi fermioni *SM-a* - tj. *kvarkovi i leptoni* - imaju svojstvo da njihovi  $L(\chi')$  dijelovi predstavljaju  $SU(2)_L$  dublete, dok njihovi  $R(\chi')$  dijelovi predstavljaju  $SU(2)_L$  singlete. Dakle, ova svojstva *baždarne podgrupe*  $SU(2)_L$  *MSSM-a* sugeriraju da moramo tretirati dijelove  $L$  i  $R$  odvojeno, a ne zajedno kao u *Diracovom 4-komponentnom spinoru*. Osnovni "blokovi" su stoga *kiralni supermultipleti*, koji su prikladno "baždareni".

U definiciji supermultipleta zbog njegove holomorfности se mogu rabiti ili samo lijeva ili samo desna kiralna superpolja.  $e_L^-, \mu_L^-, d_L^-$  su desna superpolja, dok se za superpolja koja odgovaraju  $H_u$  i  $H_d$  može reći da su lijeva. Superpolja koja odgovaraju  $e_R, u_R, d_R$  treba nabojno konjugirati da bi se dobili lijevi supermultipleti, drugim riječima oni sadrže nabojno konjugirana polja desnog supermultipleta, npr.  $e_R^c, u_R^c, d_R^c, \tilde{e}_R^* \tilde{u}_R^*, \tilde{d}_R^*$  itd.

Polje se uobičajeno označava nabojem čestice, odnosno dijela polja s operatorima eliminacije čestice,  $e^- = \psi_{e^-}$ . Međutim, ovo sadrži i antičestični dio u sebi s operatorima kreiranja antičestica. Ako je čestični dio lijevi, njemu pripadni antičestični je desni. Tako za lijevi *Diracov spinor* imamo da je:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \Phi_{Li} \\ \bar{\chi}_R^i \end{pmatrix}, \quad \Psi_L^\dagger = (\bar{\Phi}_{Li}, \chi_R^i), \quad \bar{\Psi}_L = (\chi_R^i, \bar{\Phi}_{Li}). \quad (9.9)$$

gdje je  $\tilde{\chi}_R^i$  nabojno konjugirani 2-spinori spinora  $\tilde{\chi}_R^i = \varepsilon^{ij}\tilde{\chi}_R^j = (i\sigma^2)^{ij}\chi_{Ri}$ . Zbog toga imamo npr.

$$\bar{\Psi}_{e^-} \cdot \Psi_{e^-} = \chi_R^i \phi_{Li} + \bar{\phi}_{Li} \bar{\chi}_R^i, \quad \bar{\Psi}_{e^-} \gamma_5 \Psi_{e^-} = -\chi_R^i \phi_{Li} + \bar{\phi}_{Li} \bar{\chi}_R^i. \quad (9.10)$$

Iako su reprezentacije *Lorentzove* (odnosno  $SU(2)_C$  grupe),  $\phi_i$  i  $\chi_i$  objekti nisu isti s obzirom na  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  kvantne brojeve.

Imena		<i>spin</i> 0	<i>spin</i> 1/2	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
skvarkovi, kvarkovi ( $\times$ 3 generacije)	$Q$	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	3	2	1/3
	$\bar{u}_i$	$\tilde{u}_L = u_R^\dagger$	$\tilde{u}_L = (u_R)^C$	$\bar{3}$	1	-4/3
	$\bar{d}_i$	$\tilde{d}_L = d_R^\dagger$	$\tilde{d}_L = (d_R)^C$	$\bar{3}$	1	2/3
sleptoni, leptoni ( $\times$ 3 generacije)	$L_i$	$(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$	$(\nu_{eL}, e_L)$	1	2	-1
	$\bar{e}_i$	$\tilde{e}_L = e_R^\dagger$	$\tilde{e}_L = (e_R)^C$	1	1	2
higgs, higgsini	$H_u$	$(H_u^\dagger, H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^\dagger, \tilde{H}_u^0)$	1	2	1
	$H_d$	$(H_d^0, H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	1	2	-1

Tablica 9.1. Polja kiralnih supermultiplata u *MSSM-u*

Imena	spin 1/2	spin 1	SU(3) <sub>C</sub>	SU(2) <sub>L</sub>	U(1) <sub>Y</sub>
gluini, gluoni	$\tilde{g}$	$g$	8	1	0
winoi, W bozoni	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$W^\pm, W^0$	1	2	0
binoi, B bozon	$\tilde{B}$	$B$	1	1	0

Tablica 9.2. Polja baždarnih supermultipleta u MSSM-u

U tablici 9.1 su navedeni kiralni supermultipleti koji se pojavljuju u MSSM-u. Važno je spomenuti da je "linija" nad poljima u ovoj tablici samo oznaka koja označava "antičesticu", a ne Diracovu konjugaciju. Imenima u tablici bi se mogao označavati indeks generacija  $i = 1, 2, 3 \dots$ : na primjer,  $u_{1L} = u_L, u_{2L} = c_L, u_{3L} = t_L$ , i slično za leptone. U tablici 9.2, su na sličan način navedeni i baždarni supermultipleti MSSM-a. Nakon loma elektroslabe simetrije,  $W^0$  i  $B$  polja se transformiraju ortogonalnom transformacijom fizikalnih  $Z^0$  i  $\gamma$  polja. Iz gornjeg primjera vidimo da poznavanje baždarne grupe sadržaja čestica i svojstava baždarnih transformacija predstavljaju sve što je važno znati da bi se dobio bilo koji specifični predloženi model koji definira superpotencijal  $W$ . MSSM je specificiran sljedećim superpotencijalom:

$$W_{\text{MSSM}} = y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u - y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d - y_e^{ij} \bar{e}_i L_j \cdot H_d + \mu H_u \cdot H_d. \quad (9.11)$$

Polja koja se pojavljuju u (9.11) su kiralna superpolja koja su navedena u stupcu "imena" u tablici 9.1. Kiralni dio lagranžijana modela se dobiva nalaženjem  $F$  komponente superpotencijala, konkretno  $W_{\text{MSSM}}$ . Oznaka ' $\cdot$ ' predstavlja  $SU(2)_L$  invarijantno vezanje dva dubleta<sup>24</sup>:  $a \cdot b = \epsilon_{ij} a^i b^j$ ,  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ , te su indeksi boja potisnuti, tako da je ' $\bar{u}_i \theta_j$ ', na primjer, stvarno  $\bar{u}_{\alpha i} \theta_j^\alpha$ , gdje je gornji  $\alpha = 1, 2, 3$  indeks boje 3 (triplet), a donji  $\alpha$  indeks boje  $\bar{3}$  (antitriplet). Ta vezanja daju mase kvarkovima i leptonima kada Higgsova polja  $H_u^0$  i

<sup>24</sup> Uzmimo elementarni primjer: razmotrimo dio izospina valne funkcije deuteronu. Kada je  $I = 0$ ; to se pretvara u  $SU(2)$  –invarijantno spajanje dvaju dubleta  $N^{(1)} = \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ n^{(1)} \end{pmatrix}, N^{(2)} = \begin{pmatrix} p^{(2)} \\ n^{(2)} \end{pmatrix}$ . Ova  $I = 0$  valna funkcija je, kao i obično oblika,  $\frac{1}{\sqrt{2}} (p^{(1)} n^{(2)} - p^{(2)} n^{(1)})$  koji (padajući  $1/\sqrt{2}$ ) možemo napisati kao  $N^{(1)T} i \tau_2 N^{(2)} = N^{(1)} \cdot N^{(2)}$ . Jasno je da je ovo izospinsko-invarijantno vezanje u osnovi isto kao i Lorentz-invarijantna spinorno vezanje ' $\chi^{(1)} \cdot \chi^{(2)}$ ', zbog čega se za boju rabi ista oznaka.

$H_d^0$  dobivaju *vakuumski očekivane vrijednosti*: za fermione ne postoje "*lagranžijanske*" mase, jer bi one eksplicitno slomile  $SU(2)_L$  *baždarnu simetriju*.

U sažetku, dakle, po cijeni samo jednog novog parametra  $\mu$ , i jednog dubleta  $H_d$  upravo smo dobili supersimetrično proširenje *SM-a*. Izračun je:

$$\begin{aligned} y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u &\supset -y_u^{ij} \bar{u}_i \varepsilon_{ab} g_j^a g_i^b \equiv -y_u^{ij} \bar{u}_i \varepsilon_{12} g_j^1 \cdot v_u \supset -v_u y_u^{ij} \varepsilon_{12} \bar{u}_{iR} u_{jL} = -m_u^{ij} \bar{u}_{iR} u_{jL}, \\ -y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d &\supset +y_d^{ij} \bar{d}_i q_j \cdot h_d \equiv +y_d^{ij} \bar{d}_i \varepsilon_{ab} g_j^a \cdot h_d^b \supset +y_d^{ij} \bar{d}_{iR} \varepsilon_{21} q_j^2 v_d = -v_d y_d^{ij} \bar{d}_{iR} d_{jL} = \\ &-m_d^{ij} \bar{d}_{iR} d_{jL}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Fermionske mase su očito proporcionalne relevantnom parametru  $y$ , tako da su *vršni, dubinski i tau kvark* najteži fermioni u *SM-u*, tako da je ponekad važno razmotriti aproksimaciju u kojoj su samo nenulti  $y$ -loni:

$$y_u^{33} = y_t; \quad y_d^{33} = y_b; \quad y_e^{33} = y_\tau. \quad (9.13)$$

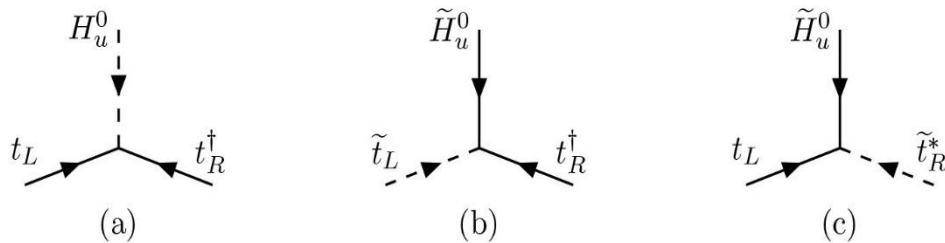
U izrazima za  $SU(2)_L$  slaba izospinska polja, ta aproksimacija definira novu relaciju za dio superpotencijala  $W$  (za skalarna polja i izostavljanje  $\mu$  izraza):

$$\begin{aligned} W \Big|_{\theta=0} &\supset -y_t [\bar{t}_R (t_L H_u^0 - \bar{b}_L H_u^+) ] + y_b [\bar{b}_R (t_L H_d^- - b_L H_d^0) ] + \\ &y_\tau [\bar{\tau}_R (v_{\tau L} H_d^- - \tau_L H_d^0) ] - y_t [\bar{t}_R (\tilde{t}_L \tilde{H}_u^0 - \tilde{b}_L^+ \tilde{H}_u^+) ] + y_b [\bar{b}_R (\tilde{t}_L \tilde{H}_d^- - \tilde{b}_L \tilde{H}_d^0) ] + \\ &y_\tau [\bar{\tau}_R (\tilde{v}_{\tau L} \tilde{H}_d^- - \tilde{\tau}_L \tilde{H}_d^0) ] - y_t [\tilde{t}_R^+ (t_L H_u^0 - \bar{b}_L H_u^+) ] + y_b [\tilde{b}_R^+ (\tilde{t}_L \tilde{H}_d^- - b_L \tilde{H}_d^0) ] + y_\tau [\tilde{\tau}_R (\tilde{v}_{\tau L} \tilde{H}_d^- - H_d^0) ] + \\ &y_t [F_{tR}^+ (\tilde{t}_L H_u^0 - \tilde{b}_L H_u^+) ] - y_b [F_{bR}^+ (\tilde{t}_L H_d^- - \tilde{b}_L H_d^0) ] - y_\tau [F_{\tau R} (\tilde{v}_{\tau L} H_d^- - \tilde{\tau}_L H_d^0) ] + \\ &y_t [\tilde{t}_R^+ (F_{tL} H_u^0 - F_{bL} H_u^+) ] - y_b [\tilde{t}_R^+ (F_{tL} H_d^- - F_{bL} H_d^0) ] - y_\tau [\tilde{t}_R^+ (F_{v_{\tau L}} H_d^- - F_{tL} H_d^0) ] + \\ &y_t [\tilde{t}_R^+ (\tilde{t}_L F_{H_u^0} - \tilde{b}_L F_{H_u^+}) ] - y_b [\tilde{t}_R^+ (\tilde{t}_L F_{H_d^-} - \tilde{b}_L F_{H_d^0}) ] - y_\tau [\tilde{t}_R^+ (\tilde{v}_{\tau L} F_{H_d^-} - \tilde{\tau}_L F_{H_d^0}) ] + \\ &\mu [(H_u^+ F_{H_d^-} - F_{H_u^+} H_d^-) - \tilde{H}_u^+ \tilde{H}_d^-]. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Znakovi minus u  $W$  su odabrani tako da izrazi  $y_t \tilde{t}_L \tilde{t}_L$ ,  $y_b \tilde{b}_L \tilde{b}_L$  i  $y_\tau \tilde{\tau}_L \tilde{\tau}_L$  sadrže ispravan znak za generiranje masenih izraza za *vršne, dubinske i tau kvarkove* kada je  $\langle H_u^0 \rangle \neq 0$  i  $\langle H_d^0 \rangle \neq 0$ .

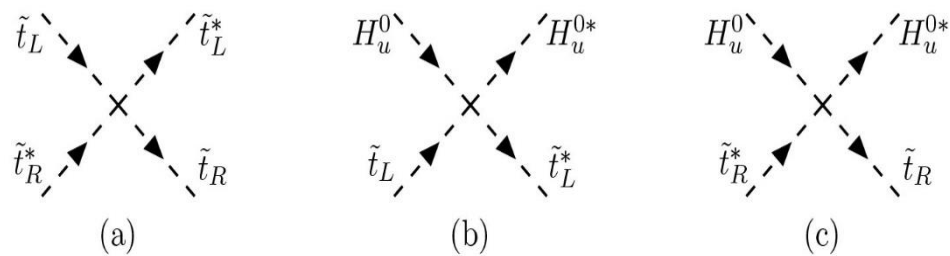
Budući da *Yukawine interakcije*  $y^{ijk}$  u općoj supersimetričnoj teoriji moraju biti potpuno simetrične pod permutacijama  $i, j, k$ , znamo da  $y_u, y_d$  i  $y_e$  podrazumijevaju ne samo *Higgs-kvark-skvark* i *Higgs-lepton-lepton* vezanja kao u *SM-u*, nego također i interakcije *skvark-Higgsino-kvark* i *slepton-Higgsino-lepton*. To je ilustrirano slikama 9.1.a,b,c koje prikazuju neke od interakcija koje uključuju *Yukawina vezanja*  $y_t$  vršnog kvarka. *Slika 9.1a* predstavlja vezanje vršnog kvarka s neutralnim kompleksnim skalarnim *Higgsivim bozonom*, što slijedi iz prvog člana u (9.14). Kao razlike su umjesto njihovih sinonima  $t$  i  $\bar{t}$  uporabljene oznake  $t_L$  i

$\bar{t}_R$ . Na slici 9.1b je prikazano povezivanje lijevog vršnog kvarka  $\tilde{t}_L$  s neutralnim Higgsovom poljem  $\tilde{H}_u^0$  i s desnim vršnim kvarkom, dok je na slici 9.1c prikazano desno gornje anti-skvark polje (također poznato kao  $\tilde{t}$  ili  $\tilde{t}_R^*$  ovisno o okusu) koje odgovara parovima  $\tilde{H}_u^0$  i  $t_L$ . Za svaku od ove tri interakcije, postoje i druge koje se dobivaju zamjenama  $H_u^0 \rightarrow H_u^+$  i  $t_L \rightarrow -b_L$  (s tildama gdje je prikladno), što odgovara drugom dijelu prvog člana u (9.14). Za sve ove interakcije supersimetrija daje istu jakost Yukawinog vezanja  $y_t$ . Ova vezanja su bezdimenzionalna i mogu se modificirati uvođenjem mekog loma supersimetrije koja se lomi samo kroz konačne (i male) radijativne korekcije, tako da ova jednakost jakosti interakcije također predstavlja predviđanje i mekano lomljene supersimetrije. Važna mnemonika je da svaka od slika 9.1a,b,c može biti sadržana u bilo kojoj od druge dvije, zamjenom dviju čestica u njihove superpartnere.



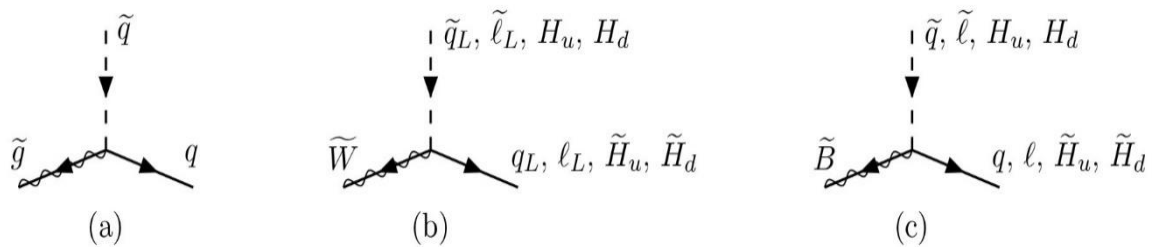
Slika 9.1: Yukavino vezanje s vršnim kvarkom (a) i njegove supersimetrije (b),(c), s svim jakostima  $y_t$ .

Tu su i skalarne kvadratne interakcije koje sadrže jakost proporcionalnu s  $y_t^2$ , kao što se može vidjeti iz slike 9.1c ili zadnjeg izraza u (9.14). Tri od njih prikazane su na slici 9.2. Rabeći (9.14), može se vidjeti da je dodano još pet, što je sadržano u zamjenama  $\tilde{t}_L \rightarrow \tilde{b}_L$  i  $H_u^0 \rightarrow H_u^+$  u svakom vrhu. To ilustrira iznimnu ekonomiju supersimetrije; postoji mnogo interakcija koje su određene samo s jednim parametrom. Na sličan način, postojanje svih drugih kvarkova i leptona Yukawinih vezanja u (9.14) ne dovodi samo do Higgs-kvark-kvarkovskih i Higgs-lepton-leptonskih lagranžijanskih izraza kao u običnom SM-u, već su tu uključeni i izrazi skvark- Higgsino- kvark i slepton- Higgsino- lepton, kao i skalarno kvadratno vezanje [(skva-



Slika 9.2: Neke od skalarnih interakcija s jakosti proporcionalnom  $y_t^2$

rk), (slepton), (skvark), (slepton), (skvark), (Higgs), i (slepton) (Higgs)]. Važno je istaknuti da se sva ova vezanja mogu pronaći u izrazima za Yukawine matrice  $y_u, y_e$  i  $y_d$ . Međutim, bezdimenzionalne interakcije koje određuje superpotencijal obično nisu najvažnije od izravnog interesa za fenomenologiju. To se događa zbog toga što je odavno poznato da su Yukawina vezanja vrlo mala, osim onih iz treće generacije (vršni, dubinski, tau kvarkovi). Umjesto toga, procesima nastajanja i raspada superpartnera u MSSM-u obično dominiraju supersimetrične interakcije jakosti baždarnih vezanja. Vezanja između baždarnih bozona SM-a (fotona,  $W^\pm$ ,  $Z^0$  i gluona) na čestice MSSM-a u potpunosti određuje baždarna invarijantnost kinetičkih pojmova u lagranžijanu. Baždarini se povezuju s parovima (skvark, kvark) i (slepton, lepton) i (Higgs, Higgsino) kao što je prikazano u općem slučaju na slici 9.3a., b.c.. Na primjer, svaka od kvark-skvark-gluino vezanja data su s  $\sqrt{2}g(\tilde{q}T^a q\tilde{q})_3$ , gdje su  $T^a = \lambda^a/2$  ( $a = 1, 2 \dots 8$ ) matrični generatori za  $SU(3)_C$ . Feynmanov dijagram za ovu interakciju prikazan je na slici 9.3a. Na slikama 6.3b,c su na sličan način prikazana vezanja (skvark, kvark), (lepton, slepton) i (Higgs, Higgsino) parova na winoe i binoe, s jakostima proporcionalnim elektroslabim baždarnim vezanjima  $g$  i  $g'$ . Za svaki od ovih dijagrama postoji još jedan s svim obrnutim strelicama. Treba imati na umu da se winoi vežu samo s lijevim skvarkovima i sleptonima, a (lepton, slepton) i da se (Higgs, Higgsino) parovi ne vežu s gluinom. Vezanje binoa s svakim (skalarnim, fermionskim) parom također je proporcionalno slabom hipernaboju  $Y$  kako je opisano u tablici 9.1.. Interakcije koje su prikazane na slici 9.3. su bitne, na primjer, za raspade  $\tilde{q} \rightarrow q\tilde{q}$  i  $\tilde{q} \rightarrow \tilde{W}q'$  i  $\tilde{q} \rightarrow \tilde{B}q$  kada se incijalna i finalna stanja nalaze na masenoj ljusci. Međutim, komplikacija je ta da  $\tilde{W}$  i  $\tilde{B}$  stanja nisu masena svojstvena stanja, zbog nedijagonalnih Yukawinih vezanja i nedijagonalnih članova koji meko lome supersimetriju.



Slika 9.3: Vezanje gluina, binoa i winoa u parovima u MSSM-u

U *MSSM*-u postoje i različite interakcije skalarnih kvadrata koje su jedinstveno određene pomoću *baždarne invarijantnosti* i *supersimetrije*.

Dimenzionalne konstante vezanja u supersimetričnom dijelu *lagranžijana MSSM-a* su ovisne o  $\mu$ . Izrazi za *fermionske mase higgsina* su predstavljeni pomoću sljedeće relacije:

$$-L_{\text{mase higgsina}} = \mu(\tilde{H}_u^+ \tilde{H}_d^- + \tilde{H}_u^0 \tilde{H}_d^0) + \text{c. c.}, \quad (9.15)$$

dok je *Higgsova kvadratna masa* u skalarnom potencijalu zadana kao:

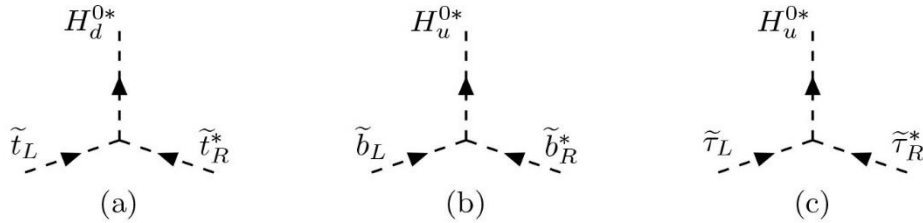
$$-L_{\text{supersimetrične Higgsove mase}} = |\mu|^2 (|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 + |H_d^0|^2 + |H_d^-|^2). \quad (9.16)$$

S obzirom na to da je (9.16) pozitivna s minimumom na  $H_u^0 = H_d^0 = 0$ , ne možemo razumjeti elektroslabi lom simetrije bez uključivanja negativnog supersimetričnog slomljenog kvadratnog masenog slabog izraza za *Higgsove skalare*. Precizno, definicija *Higgsovog skalarnog potencijala* ovisi o mekom lomu za *MSSM*. (9.20) ne predviđa vrijednost za  $\mu$ , a rješenje hijerarhijskog problema zaključuje da je reda  $10^2$  ili  $10^3$  GeVa, kako bi se omogućila *Higgsova vakuumska očekivana vrijednost* veličine  $v = 246$  GeV-a bez neprirodne eliminacije između  $|\mu|^2$  i negativne glatke kvadratne mase koju još nismo zapisali. Nije jasno zašto bi  $|\mu|^2$  moralo biti tako malo u usporedbi s, recimo,  $M_P^2$ . Također, nije jasno zašto bi moralo biti reda kao i  $m_{\text{meko}}^2$ ? Izgleda da skalarni potencijal *MSSM-a* ovisi o dva tipa dimenzionalnih parametara koji su konceptualno prilično različiti, jedan od njih je  $\mu$  čiji član čine *SUSY*, dok su drugi sadržani u izrazima mekog supersimetričnog loma. Ipak, promatrana vrijednost za skalu elektroslabog loma ukazuje na to da bi bez neprirodnih poništavanja, obje ove naizgled nepovezane masene skale trebale biti unutar reda veličine ili oko 100 GeVa. Ova zagonetka naziva se " $\mu$  problem". Predloženo je nekoliko različitih rješenja  $\mu$  problema, uključujući proširenja *MSSM-a* različite složenosti. Svi takvi problemi nastupaju na isti način; član  $\mu$  se pretpostavlja da je odsutan na granastoj razini prije loma simetrije, a zatim proizlazi iz *vakuumske očekivane vrijednosti* nekih novih polja. Ove *vakuumske očekivane vrijednosti* su zauzvrat određene minimiziranjem potencijala koji ovisi o uvjetima slabog loma supersimetrije. Na taj način, vrijednost efektivnog parametra  $\mu$  više nije konceptualno različita od mehanizma loma supersimetrije; ako možemo objasniti zašto je  $m_{\text{slabo}} \ll M_P$ , također ćemo moći razumjeti zašto je  $\mu$  istog reda. Izrazi za  $\mu$  i *Yukawina vezanja* u (9.14) se kombiniraju kako bi se dobila vezanja (skalarna) oblika:



$$L_{\text{supersimetrični skalari}} = \mu^* \left( \bar{\tilde{u}}_u \tilde{u} H_d^{0*} + \bar{\tilde{d}}_d \tilde{d} H_u^{0*} + \bar{\tilde{e}}_e \tilde{e} H_u^{0*} + \bar{\tilde{u}}_u \tilde{u} H_d^{+*} + \bar{\tilde{d}}_d \tilde{d} H_u^{+*} + \bar{\tilde{e}}_e \tilde{e} H_u^{+*} \right) + \text{c. c.} \quad (9.17)$$

Slika 9.4. prikazuje neke od ovih vezanja, proporcionalne  $\mu^* y_t$ ,  $\mu^* y_b$  i  $\mu^* y_\tau$ .



Slika 9.4: Neka od supersimetričnih vezanja proporcionalnih  $\mu^* y_t$ ,  $\mu^* y_b$  i  $\mu^* y_\tau$ . Kada  $H_u^0$  i  $H_d^0$  dobiju vakuumske očekivane vrijednosti, oni onda doprinose (a) interakciji  $\tilde{t}_L, \tilde{t}_R$ , (b) interakciji  $\tilde{b}_L, \tilde{b}_R$ , i (c) interakciji  $\tilde{\tau}_L, \tilde{\tau}_R$ .

### 9.3. Objedinjavanje baždarnog vezanja u MSSM-u

Ideju da tri ovisna o skali ("klizne")  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  baždarna vezanja  $SM$ -a treba konvergirati u zajedničku vrijednost - ili ujediniti - na nekoj vrlo visokoj energetske skali, zapravo, ne javlja za slučaj samog  $SM$ -a, ali se može prirodno ostvariti uvjerljivo u okviru  $MSSM$ -a. Evolucija baždarnih vezanja je određena tipovima i multiplicitetima baždarnih multiplata nazočnih u teoriji, koja je dana upravo za  $MSSM$ . Konstante vezanja  $\alpha_3$  i  $\alpha_2$  su definirana na sljedeći način:

$$\alpha_3 = g_s^2/4\pi, \quad \alpha_2 = g^2/4\pi, \quad (9.18)$$

gdje je  $g_s$   $SU(3)_c$ -baždarna konstanta vezanja  $QCD$ -ja, a  $g$  je ona elektroslaba  $SU(2)_L$  konstanta vezanja. Definicija treće konstante vezanja  $\alpha_1$  je malo složenija. Ona očito mora biti na neki način povezana s  $g_2'$ , gdje  $g$  predstavlja konstantu vezanja  $U(1)_Y$   $SM$ -a. Konstante  $g$  i  $g'$  se pojavljuju u  $SU(2)_L$  kovarijantnoj derivaciji i to na sljedeći način:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig(\tau/2) \cdot W_\mu + ig'(y/2)B_\mu. \quad (9.19)$$

Problem je u tome što je, strogo unutar okvira  $SM$ -a, skala  $g'$  proizvoljna: mogli bismo pomnožiti generator slabog hipernaboja  $y$  proizvoljnom konstantom  $c$ , i podijeliti  $g'$  sa  $c$ , i ništa se ne bi promijenilo. Za razliku od toga, normalizacija bilo koje multiplikacije vezanja tri generatora  $\tau^1, \tau^2$  i  $\tau^3$  iz (9.19) je fiksirana normalizacijom  $\tau'$  na sljedeći način:

$$\text{Tr} \left[ \frac{\tau^\alpha \tau^\beta}{2} \right] = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.20)$$

Budući da je svaki generator normaliziran na istu vrijednost, i ista konstanta  $g$  mora množiti svaku od njih; nisu moguća nikakva relativna odstupanja. Unutar "ujedinjenog" okvira, stoga, pretpostavljamo da je neki multiplikant  $y$ , recimo  $Y = c(y/2)$ , jedan od generatora veće grupe simetrija (SU(5) na primjer), koji također uključuje generatore grupa simetrija SU(3)<sub>C</sub> i SU(2)<sub>L</sub>, te da su svi podložni zajedničkom normalizacijskom uvjetu; tada postoji samo jedna (ujedinjena) *baždarna konstanta*. *Kvarkovi i leptoni* jedne generacije će pripadati jednoj reprezentaciji veće grupe, iako to ne mora nužno biti fundamentalna reprezentacija. Bitno je samo to da svi generatori imaju zajedničku normalizaciju. Na primjer, možemo zahtijevati sljedeći uvjet:

$$\text{Tr}(c^2(y/2)^2) = \text{Tr}(t_3)^2, \quad (9.21)$$

recimo, gdje je  $t_3$  treći SU(2)<sub>L</sub> generator (svaki generator će dati isti rezultat), a *trag* je po svim stanjima u reprezentaciji: ovdje,  $u, d, \nu_e$  i  $e^-$ . Tragovi jednostavno predstavljaju sumu kvadrata svojstvenih vrijednosti. Na desnoj strani (9.21) dobivamo:

$$3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2, \quad (9.22)$$

gdje faktor '3' proističe od bojnog faktora, dok se na lijevoj strani pomoću *tablice 9.1*. dobija da je:

$$c^2 \left( \frac{3}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3,4}{9} + \frac{3,1}{9} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) = c^2 \frac{20}{6}. \quad (9.23)$$

Iz toga slijedi da je:

$$c = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad (9.24)$$

tako da korektno normalizirani generator ima sljedeću vrijednost:

$$Y = \sqrt{\frac{3}{5}} y/2, \quad (9.25)$$

Izraz za  $B_\mu$  je tada:

$$ig' \sqrt{\frac{5}{3}} Y B_\mu, \quad (9.26)$$

što ukazuje da korektno normalizirana  $\alpha_1$  ima vrijednost:

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{g'^2}{4\pi} \equiv \frac{g_1^2}{4\pi}. \quad (9.27)$$

Jednadžba (9.27) može biti također interpretirana kao predviđanje za slab kut  $\theta_W$  na skali ujedinenja: budući da su  $g \tan\theta_W = g' = \sqrt{3/5} g_1$  i  $g = g_1$  pri ujedinenju, imamo da je  $\tan\theta_W = \sqrt{3/5}$ , ili da je:

$$\sin^2 \theta_W (\text{skala ujedinenja}) = \frac{3}{8}. \quad (9.28)$$

Za klizanje vezanja  $\alpha_i$  u petlji prvog reda, *renormalizacijska grupna jednažba ima oblik (RGE)*:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = -\frac{b_i}{2\pi} \alpha_i^2, \quad (9.29)$$

gdje  $t = \ln\theta$  i  $\theta$  predstavljaju "klizanje" energetske skale, dok su koeficijenti  $b_i$  određeni *baždarnom grupom* i imaju sustav multipleta na koji se vežu *baždarni bozoni*. Za  $SU(N)$  *baždarnu teoriju* s sustavom (*skalari i fermioni*) u multipletima koji pripadaju fundamentalnoj reprezentaciji se dobija da je:

$$b_N = \frac{11}{3}N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s, \quad (9.30)$$

gdje je  $n_f$  broj fermionskih multipleta (računajući dva kiralna stanja odvojeno), a  $n_s$  je broj (*kompleksnih*) skalarnih multipleta, koji se vežu s baždarnim bozonima. Za  $U(1)_Y$  *baždarnu teoriju* u kojoj čestice fermionskog sustava sadrže naboje  $Y_f$ , a skalari imaju naboje  $Y_s$ , odgovarajuća formula je:

$$b_1 = -\frac{2}{3}\sum_f Y_f^2 - \frac{1}{3}\sum_s Y_s^2. \quad (9.31)$$

Da bi se ispitalo ujedinenje, prikladno je preraditi (9.29) na način:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i^{-1}) = \frac{b_i}{2\pi}, \quad (9.32)$$

te (9.32) odmah nakon integriranja imala oblik:

$$\alpha_i^{-1}(\theta) = \alpha_i^{-1}(\theta_0) + \frac{b_i}{2\pi} \ln(\theta/\theta_0), \quad (9.33)$$

gdje  $\theta_0$  predstavlja skalu na kojoj započinje klizanje. Može se vidjeti da su inverzna vezanja ona koja kliču linearno s  $\ln\theta$ . Za  $\theta_0$  vrijednost se uzima  $m_Z$ , gdje su baždarnu konstante precizno izmjerene. "Ujedinenje" onda predstavlja hipotezu da su za neku višu skalu  $\theta_U = m_U$  vezanja identična:

$$\alpha_1(m_U) = \alpha_2(m_U) = \alpha_3(m_U) = \alpha_U. \quad (9.34)$$

To znači da (9.33), za  $i = 1, 2, 3$  postaju:

$$\alpha_U^{-1} = \alpha_3^{-1}(m_Z) + \frac{b_3}{2\pi} \ln(m_U/m_Z), \quad (9.35)$$

$$\alpha_U^{-1} = \alpha_2^{-1}(m_Z) + \frac{b_2}{2\pi} \ln(m_U/m_Z), \quad (9.36)$$

$$\alpha_U^{-1} = \alpha_1^{-1}(m_Z) + \frac{b_1}{2\pi} \ln(m_U/m_Z). \quad (9.37)$$

Eliminiranje  $\alpha_U$  i  $\ln(m_U/m_Z)$  iz ovih jednačbi daje jedan uvjet koji povezuje izmjerene konstante  $\alpha_i^{-1}(m_Z)$  i izračunate brojeve  $b_i$ , koji glasi:

$$\frac{\alpha_3^{-1}(m_Z) - \alpha_2^{-1}(m_Z)}{\alpha_2^{-1}(m_Z) - \alpha_1^{-1}(m_Z)} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}. \quad (9.38)$$

Lijeva strana jednačbe (9.38) se može nazvati  $B_{\text{exp.}}$ , a desna  $B_{\text{th.}}$ . Za  $B_{\text{exp.}}$  se mogu uporabiti sljedeći podaci:

$$\sin^2_{\theta_W}(m_Z) = 0,231, \quad \alpha_3(m_Z) = 0,118 \text{ ili } \alpha_3^{-1}(m_Z) = 8,46, \quad \alpha_{\text{em}}^{-1}(m_Z) = 128. \quad (9.39)$$

$\alpha_{\text{em}}$  je definirano kao  $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$ , gdje je  $e = g \sin\theta_W$ . Stoga slijedi da je:

$$\alpha_2^{-1}(m_Z) = \alpha_{\text{em}}^{-1}(m_Z) \sin^2_{\theta_W}(m_Z) = 29,6. \quad (9.40)$$

Konačno se dobiva da je,

$$g'^2 = g^2 \tan^2_{\theta_W}, \quad (9.41)$$

te je stoga:

$$\alpha_1^{-1}(m_Z) = \frac{3}{5} \alpha'^{-1}(m_Z) = \frac{3}{5} \alpha_2^{-1}(m_Z) \cot^2_{\theta_W}(m_Z) = 59,81. \quad (9.42)$$

Za te vrijednosti se dobija da je:

$$B_{\text{exp.}} = 0,72. \quad (9.43)$$

Za  $SU(3)_C$  se dobija da je:

$$b_3^{\text{SM}} = 11 - \frac{1}{3} \cdot 12 = 7. \quad (9.44)$$

Za  $SU(2)_L$  se dobija da je:

$$b_2^{\text{SM}} = \frac{22}{3} - 4 - \frac{1}{6} = \frac{19}{6}, \quad (9.45)$$

dok se za  $U(1)_Y$  dobija da je:

$$b_1^{\text{SM}} = -\frac{2}{3} \cdot 3 \sum_f (y_f/2)^2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \sum_s (y_s/2)^2 = -\frac{2}{5} \cdot 3 \frac{20}{6} - \frac{1}{5} \cdot 2 = -\frac{41}{10}. \quad (9.46)$$

Stoga, u  $SM$ -u desna strana daje sljedeću brojnu vrijednost:

$$B_{\text{th}} = \frac{105}{218} = 0,528. \quad (9.47)$$

Što je s *MSSM-om*? Izraz (9.30) se mora modificirati kako bi se uzela u obzir činjenica da su u svakoj SU(N) grupi *baždarni bozoni* popraćeni *baždarinima* u regularnoj reprezentaciji grupe. Njihov doprinos  $b_N$  je  $-2N/3$ . Osim toga, morali bi se uključiti skalarni partneri kvarkova i leptona u fundamentalnim reprezentacijama SU(3) i SU(2) grupa; i ne smije se zaboraviti da postoje dva *Higgsova dubleta*, oba popraćena *higgsinom*, i svi su sadržani u fundamentalnoj reprezentaciji SU(2) grupe. Ove promjene daju sljedeće vrijednosti:

$$b_3^{\text{MSSM}} = 7 - 2 - \frac{1}{6} 12 = 3, \quad (9.48)$$

i

$$b_2^{\text{MSSM}} = \frac{19}{6} - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} 12 - \frac{1}{3} 2 - \frac{1}{6} = -1. \quad (9.49)$$

Zanimljivo je da je predznak  $b_2$  promjenjiv. Za  $b_1^{\text{MSSM}}$  nema doprinosa *baždarnih bozona* i njihovih fermionskih partnera. *Lijevoruki fermioni* daju svoj doprinos kao u (9.46), i svaki je popraćen odgovarajućim skalarima, tako da je:

$$b_1^{\text{MSSM}}(\text{fermioni i sfermioni}) = -\frac{3}{5} 10 = -6. \quad (9.50)$$

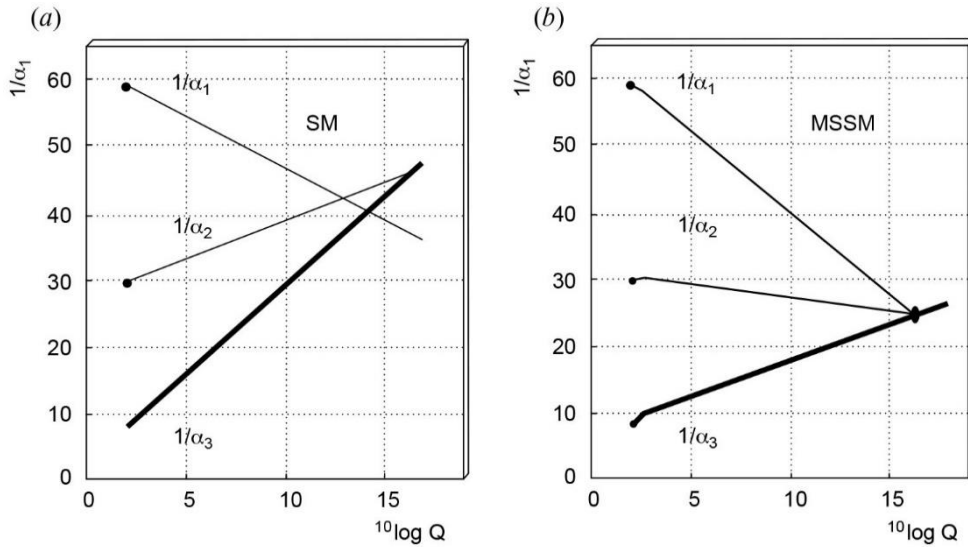
*Higgs i higgsino* doprinose na sljeći način:

$$b_1^{\text{MSSM}}(\text{Higgs i Higgsino}) = -\frac{3}{5} 4 \frac{1}{4} = -\frac{3}{5}. \quad (9.51)$$

Na kraju se dobija sljedeća vrijednost:

$$b_1^{\text{MSSM}} = -\frac{33}{5}, \quad (9.52)$$

dok se iz prethodnih relacija dobija teorijska vrijednost  $B_{\text{th}}^{\text{MSSM}} = 5/7 = 0,714$ , koja je u skladu s eksperimentalnom vrijednosti  $B_{\text{exp.}} = 0,72$ .



Slika 9.5: (a) Neuspjeh vezanja *SM*-a da se ujedine. (b) Objedinjavanje baždarnog vezanja u *MSSM*-u. Podebljana točka predstavlja korekciju traga ovisnu o modelu na GUT skali. [sur. Journal of Physics G33: 1-1232 (2006), str. 175, IOP Publishing Limited.]

Gornji teorem nije "*profesionalan*". Važno je uključiti korekcije na razini dvije petlje. Nadalje, *SUSY* se mora slomiti, vjerojatno na skali od 1TeV ili manje, dok bi se rezultirajuće razlike u masi između čestica i njihovih *s-partnera* mogle dovesti do korekcije zbog '*pragova*' reakcija. Detaljno teorijsko razmatranje na visokoj skali (posebice, njezin lom) bi moglo dovesti do *visokoenergetskih* korekcija zbog pragova reakcija.

Vraćajući se na (9.36) i (9.37) i uvrštavajući vrijednosti za  $\alpha_2^{-1}(m_Z)$  i  $\alpha_1^{-1}(m_Z)$ , može se odrediti procjena skale ujedinjenja  $m_U$ . Iz relacije:

$$\ln(m_U/m_Z) = \frac{10\pi}{28} [\alpha_1^{-1}(m_Z) - \alpha_2^{-1}(m_Z)] \approx 33.1, \quad (9.53)$$

se dobija da ta procjena iznosi:

$$m_U \approx 2,2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}. \quad (9.54)$$

Također se može navesti veliki broj modela koji daju eksperimentalnu vrijednost  $B_{\text{exp}}$ , ali se ne može poreći da predviđanje teorijske vrijednosti  $B_{\text{th}}^{\text{MSSM}}$  predstavlja neizbježnu posljedicu uglavnom sadržaja tvari *MSSM*-a, a slaganje s eksperimentalnom vrijednošću datoj u (9.43) očito nije bilo neizbježno. To joj danas daje potporu i za uključivanje supersimetričnih čestica u *RGE*, kao i za *baždarno ujedinjenje*.

#### 9.4. *R-paritet*

Još jedna značajka *MSSM-a* je očuvanje kvantnog broja nazvanog *R-paritet*. Preciziranje očuvanja *R-pariteta* ograničava pojmove koji su dopušteni u *superpotencijalu*. Superpotencijal *MSSM-a* bi mogao u načelu sadržati pojmove koji lome očuvanje barionskog broja (B) ili leptonskog broja (L). Međutim, procesi koji lome ove brojne vrijednosti nikada nisu zabilježeni u eksperimentima. Primjer takvog procesa bi mogao biti raspad protona (najjednostavniji kanal raspada bi mogao biti  $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$ , a zatim  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ). Budući da su eksperimenti nametnuli na ovo vrlo stroga ograničenja, pokušavamo izbjeći uvođenje B ili L lomeći izraze. S druge strane, znamo također da B i L ne predstavljaju fundamentalne prirodne simetrije jer je poznato da se one lome u nekim *ne-perturbacijskim elektroslabim procesima*. Iz tog razloga ne želimo precizno uvesti te simetrije u *MSSM*. S konstrukcijom *SM-a* nije bilo potrebe za *pretpostavkom* da su ti kvantni brojevi očuvani, budući da uvjeti B ili L u *lagranžijanu* jednostavno nisu bili mogući (zbog uvjeta renormalizacije). Da bi se riješio ovaj problem, u *MSSM* je uvedena nova simetrija nazvana *R-paritet*. Ovaj novi multiplikativni kvantni broj je definiran kao:

$$P_R \equiv (-1)^{3B-3L+2S}, \quad (9.55)$$

gdje je  $s$  spin čestice. Ovaj broj je jednak  $+1$  za čestice *SM-a* i dodatne skalare u *Higgsovom sektoru* i jednak je  $-1$  za supersimetrične partnerske čestice, i *MSSM* je definiran uz njegovo očuvanje. Očuvanje *R-pariteta* eliminira mogućnost da renormalizabilni B ili L lome članove u *superpotencijalu*. Štoviše, očuvanje *R-pariteta* izravno upućuje na to da se sve supersimetrične čestice stvaraju u parovima i da je najslabija supersimetrična čestica apsolutno stabilna kao supersimetrična čestica koja se raspada na neparan broj (*najmanje jedan*) supersimetričnih čestica.

#### 9.5. *Lagranžijan MSSM-a*

Da bi se u potpunosti odredio odgovarajući *lagranžijan*, potrebno je odrediti i *baždarno invarijantni superpotencijal*. Uključujući i zahtjev za očuvanjem *R-pariteta*, *superpotencijal MSSM-a* je definiran na sljedeći način:

$$W_{MSSM} = -\tilde{e}_R^\dagger y_e (\tilde{L}_1)^\alpha (H_d)_\alpha - \tilde{u}_R^\dagger y_u (\tilde{Q}_1)^\alpha (H_u)_\alpha - \tilde{d}_R^\dagger y_d (\tilde{Q}_1)^\alpha (H_d)_\alpha + \mu (H_u)^\alpha (H_d)_\alpha. \quad (9.56)$$

Važno je imati na umu da su u ovoj jednadžbi svi *baždarni i generacijski indeksi* potisnuti. *Yukawina vezanja*  $y_e, y_u, y_d$  su općenite bezdimenzionalne kompleksne  $3 \times 3$  matrice u generacijskom prostoru, dok je "član  $\mu$ " supersimetrična verzija mase *Higgsovog bozona*. Kako

superpotencijal treba biti holomorfan u skalarnim poljima (tj. za svako skalarno polje  $\phi$ , ne mogu se i  $\phi$  i  $\phi^*$  pojaviti u superpotencijalu), jedan *Higgsov dublet* nije dovoljan da bi dao svim fermionima masu. U *SM-u* se jednostavno rabi kompleksna konjugacija da bi se to postiglo, ali to ovdje nije dopušteno. Stoga se sve svodi na postojanje dva *Higgsova dubleta* unutar *MSSM-a*.

Sada se, kada je također specificiran *superpotencijal MSSM-a* ((9.56)) može zapisati *lagranžijan MSSM-a* u punom obliku:

$$L_{MSSM} = \left[ -\frac{1}{4} F_{\nu\mu\nu}^a F_V^{a\mu\nu} + i\lambda_\nu^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda_\nu)^a + (D^\mu \phi_i)^\dagger (D_\mu \phi_i) + i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i - \sqrt{2} (g_\nu \phi_i^\dagger T_V^a \cdot \psi_i \cdot \lambda_\nu^a + \text{h. c.}) - |W_i|^2 - \frac{1}{2} (W^{ij} \psi_i \cdot \psi_j + \text{h. c.}) - \frac{1}{2} g_V^2 (\phi_i^\dagger T_V^a \phi_i)^2 \right]_{MSSM}. \quad (9.57)$$

Ovaj *lagranžijan* se može podijeliti na dijelove. Za sada uvodimo dio *lagranžijana* koji odgovara kinetičkim izrazima za *baždarne supermultiplete* i *baždarne interakcije*, koji su prikazani sljedećim relacijama:

- **Kinetički izrazi za baždarne supermultiplete i baždarne interakcije**

$$\left[ -\frac{1}{4} F_{\nu\mu\nu}^a F_V^{a\mu\nu} + i\lambda_\nu^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda_\nu)^a \right]_{MSSM} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + i\tilde{g}^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \tilde{g})^a - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^{a'} W^{a'\mu\nu} + i\tilde{W}^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \tilde{W})^{a'} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + i\tilde{B}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{B}, \quad (9.58)$$

gdje se *baždarno kovariantne derivacije* za *baždarine* mogu prikazati na sljedeći način:

$$(D_\mu \tilde{g})^a = (\partial_\mu \delta^{ac} - g_s f^{abc} G_\mu^b) \tilde{g}^c, \quad (9.59)$$

$$(D_\mu \tilde{W})^{a'} = (\partial_\mu \delta^{a'c'} - g_s f^{a'b'c'} W_\mu^{b'}) \tilde{W}^{c'}, \quad (9.60)$$

Tenzori jakosti polja u *MSSM-u* su ekvivalentni onima u *SM-u* i predstavljeni su na sljedeći način:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (9.61)$$

$$W_{\mu\nu}^{a'} = \partial_\mu W_\nu^{a'} - \partial_\nu W_\mu^{a'} - g_s \varepsilon^{a'b'c'} W_\mu^{b'} W_\nu^{c'}, \quad (9.62)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (9.63)$$



## 9.6. Simetrije MSSM-a

MSSM sadrži (po konstrukciji) iste *Poincare'*-ove i *baždarne simetrije* kao SM, međutim nije ista situacija s okusnim simetrijama. Kao prvo, razmotrimo kinetičke izraze za opći kiralni supermultiplet. Iz (8.46) znamo da su ti izrazi zadani kao:

$$L_{\phi}^{\text{slobodni}} = -(\partial^{\mu}\phi_L)^{\dagger}(\partial_{\mu}\phi_L) + (\partial^{\mu}\phi_R^*)^{\dagger}(\partial_{\mu}\phi_R^*), \quad (9.64)$$

$$L_{\psi}^{\text{slobodni}} = i\psi_L^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L + i\psi_R^{c\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R^c, \quad (9.65)$$

gdje su eksplicitno uključena lijevoruka i desnoruka polja. Neka su  $M_{\phi}^L, M_{\phi}^R, M_{\psi}^L, M_{\psi}^R \in GL(3, C)$  linearne transformacije u prostoru generacija koje djeluju na fermionska i sfermionska polja na sljedeći način:

$$\phi_L \rightarrow M_{\phi}^L \phi_L, \quad \phi_R \rightarrow M_{\phi}^R \phi_R, \quad (9.66)$$

$$\psi_L \rightarrow M_{\psi}^L \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow M_{\psi}^R \psi_R. \quad (9.67)$$

Ovo znači da bi se jednadžbe (9.64) i (9.65) mogle transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &(\partial^{\mu}\phi_L)^{\dagger}(\partial_{\mu}\phi_L) + (\partial^{\mu}\phi_R^*)^{\dagger}(\partial_{\mu}\phi_R^*) \rightarrow (\partial^{\mu}\phi_L)^{\dagger} \left( M_{\phi}^{L\dagger} M_{\phi}^L \right) (\partial_{\mu}\phi_L) + \\ &(\partial^{\mu}\phi_R^*)^{\dagger} \left( M_{\phi}^{R\dagger} M_{\phi}^R \right) (\partial_{\mu}\phi_R^*), \end{aligned} \quad (9.68)$$

$$i\psi_L^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L + i\psi_R^{c\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R^c \rightarrow i\psi_L^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu} \left( M_{\psi}^{L\dagger} M_{\psi}^L \right) (\partial_{\mu}\psi_L) + i\psi_R^{c\dagger}\bar{\sigma}^{\mu} \left( M_{\psi}^{R\dagger} M_{\psi}^R \right) \partial_{\mu}\psi_R^c. \quad (9.69)$$

Zahtijevanje invarijantnosti u (9.68) i (9.69) pod transformacijama (9.66) i (9.67) dovodi do zaključka da  $M_{\phi}^L, M_{\phi}^R, M_{\psi}^L, M_{\psi}^R$  moraju biti unitarne. Sada se može definirati izraz za *lagranžijan* koji opisuje vezanje (lijevorukog) kiralnog supermultipleta s *baždarinima* koji pripadaju određenoj *baždarnoj grupi* s odgovarajućim infinitezimalnim generatorima  $T^a$  i konstantom vezanja  $g$ , i to na način na koji je:

$$L_{\text{kiralni}}^{\text{baždarino}} = -\sqrt{2}g(\phi_L^{\dagger}T^a\psi_L \cdot \lambda^a + \text{h. c.}). \quad (9.70)$$

Ovaj *lagranžijan* se transformira pod (9.66) i (9.67) kao (ispuštajući konstantni prefaktor kao i *Hermitski konjugirana vrijednost*):

$$\phi_L^{\dagger}T^a\psi_L \cdot \lambda^a \rightarrow \phi_L^{\dagger}T^a \left( M_{\phi}^{L\dagger} M_{\psi}^L \right) \psi_L \cdot \lambda^a. \quad (9.71)$$

Iz (9.68) i (9.69) je poznato da  $M_{\phi}^L, M_{\psi}^L$  moraju biti unitarni, tako da zahtijevajući invarijantnost (9.71) pod ovim transformacijama dobijamo da je:

$$M_{\phi}^L = M_{\psi}^L. \quad (9.72)$$

Također je realno da bi se mogla napraviti ista stvar za desnoruke kiralne supermultiplete i da bi se došlo do sličnog rezultata. Iz toga se može zaključiti da se kiralni superpartneri transformiraju identično. Da bi se odredila okusna grupa  $MSSM-a$ , mogli bismo uvesti različita miješanja okusa (samo miješanja kvarkova, budući da nema miješanja leptona). Izuzimanje okusnog miješanja podrazumijeva da je  $CKM$  matrica jedinična matrica.

Zbog toga *Yukawine matrice* moraju imati identičnu strukturu kao i u  $SM-u$ , tj. (barem za kvarkove) nisu dijagonalne u prostoru generacija. To implicira da bilo "korektno" učiniti identičnu stvar i za matrice u prostoru generacija u sektoru mekanog loma supersimetrije. Ustvari, to je upravo ono što se događa u fenomenološki održivim ograničenim supersimetričnim modelima kao što je fenomenološki  $MSSM$  ( $p-MSSM$ ). U  $p-MSSM-u$ , za trilinearne matrice vezanja se uzima da su proporcionalne *Yukawinim matricama vezanja*, dok se za *sfermionske* masene matrice po pretpostavci uzima da su dijagonalne.

Što se događa s okusnom grupom  $MSSM-a$  nakon što je uključeno miješanje okusa? To znači da vraćamo  $CKM$  matricni model i razmatramo da  $MSSM$  ima (uključujući meki lom glatke supersimetrije) najopćenitiji mogući oblik. Koliko je preostalo slobode za transformacije u prostoru generacija? Pa, ne previše, jer su trilinearne matrice vezanja potpuno kompleksne matrice oblika  $3 \times 3$  u prostoru generacija. To znači da su jedine moguće simetrije kompleksne faze, bez obzira na oblik masenog spektra. Kako se *fermioni* i *sfermioni* transformiraju identično i sektori (*s*)leptona i (*s*)kvarkova su razdvojeni (u smislu transformacija polja), iz toga slijedi da je prostor generacija opremljen s samo dvije  $U(1)$  simetrije. Ove simetrije odgovaraju očuvanju leptonskog i barionskog broja, koji imaju istu vrijednost kao i u  $SM-u$ .

## 10. Renormalizacijske grupne tehnike

Kada se nešto izmjeri u *Kvantnoj Teoriji Polja (KTP)*, na primjer naboj čestice, nalazi se da odgovor ovisi o impulsu čestica uključenih u proces, ili drugim riječima, o energetske skali promatrane interakcije. To se događa zbog nazočnosti virtualnih čestica. Iako se ove kratkoživuće čestice ne mogu izravno detektirati, one daju baždarni efekt<sup>25</sup>. Snaga ovih kvantnih fluktuacija ovisi o energetskej razmjeri, a to čini osnovu koncepta renormalizacije. U ovom odjeljku prikazani su koncepti *renormalizacije* i *renormalizacijske grupe (RG)*, kao i *RG tehnike* za ispitivanje fizike visoke skale ukoliko su dati podaci na niskim energijama.

---

<sup>25</sup> Npr. *Cazimirov efekt*

### 10.1. Što predstavlja renormalizacija?

Kada se računaju promjenjive u *Kvantnoj Teoriji Polja* (npr. *udarni presjek*), često se rabi *Feynmanov perturbacijski pristup*. U jeziku *Feynmanovih dijagrama*, klasična fizika odgovara dijagramima na granastoj razini, dok su kvantne korekcije predstavljene pomoću petlji koje opisuju virtualne (*off-shell*) čestice. Sve *četvero-impulsne petlje* su integrirane od negativne do pozitivne beskonačne vrijednosti, što često dovodi do divergencija. Čineći to, prešutno pretpostavljamo teoriju važeću na proizvoljnim visoko-energetskim skalama, ili ekvivalentno, proizvoljno nisko-energetskim skalama što nije jako realistično. Kako tumačiti te divergencije i doći do konačnih fizikalno relevantnih rezultata? Udarni presjek može se i eksperimentalno izmjeriti i teorijski odrediti. Da bi se udarni presjek teorijski odredio, važno je sumirati sve moguće *Feynmanove dijagrame* (kojih uglavnom postoji beskonačan broj), u skladu s načelom superpozicije. *Lagranžijan* je klasičan objekt i sadrži takozvane *gole* parametre. Iako ti parametri imaju nazive kao što su “*masa*” ili “*naboj*”, oni nisu izravno mjereni u *eksperimentima u sudarivačima* i odstupaju od fizikalnih masa i naboja. Renormalizabilnost je hipoteza da reparametrizacija teorije u izrazima fizikalnih (*baždarnih*) veličina, nazvanih renormalizirani parametri, pretvara singularnu perturbacijsku ekspanziju u dobro definiranu. Ova hipoteza implicira da divergencije ne proizlaze iz samog perturbacijskog razvoja, nego iz izbora parametara koji se rabe za njihovo izvođenje.

Prvi korak bilo kakve renormalizacije je postupak *regularizacije*. To je postupak koji je važan za kvantificiranje singularnosti. Reguliranje ekspanzije znači da je uvedeno ograničenje. Dobro poznati primjeri postupaka regulacije uključuju uvođenje *cut-off skale* ili dimenzionalnu regularizaciju. U prvom slučaju, integracija preko impulsne petlje se ne provodi sve do beskonačnosti, nego do neke (*proizvoljne*) *cut-off skale*  $\Lambda$ . Ovaj se postupak naziva *cut-off regularizacija*. Fizikalno značenje *cut-off skale*  $\Lambda$  je eliminacija kvantnih fluktuacija na razdaljine skale kraće od  $\Lambda^{-1}$ . Drugi dobro poznati postupak regularizacije je onaj koji se, slobodno rečeno, sastoji od provođenja integracije preko impulsne petlje u  $4-\varepsilon$  dimenzijama (gdje je  $\varepsilon$  infinitezimalan broj). Taj se postupak naziva *dimenzionalna regularizacija*, a jedna od prednosti ove metode je u tome što čuva *Lorentzovu invarijantnost*, za razliku od *cut-off regularizacije*. Ideja regularizacije je da nakon renormalizacije izvorna ekspanzija bude vraćena kada se provedu limesi ( $\Lambda \rightarrow \infty$  ili  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Kada je to moguće, za teoriju se kaže da je *renormalizabilna*. Različite sheme regularizacije mogu dovesti do različitih međurezultata, ali u konačnici moraju dovesti do istog konačnog rezultata (pod uvjetom da postupak regularizacije nije prekršio nijednu relevantnu simetriju).

Renormaliziranje teorije znači da se ekspanzija opisuje u smislu fizikalnih (*renormaliziranih*) veličina. U tu svrhu, goli parametri se dijele na *renormalizirani dio* i tzv. *kontračlanove*. Kontračlanovi se podešavaju tako da se divergencije točno poništavaju. Divergencije u teoriji ne mogu potpuno nestati nakon opisane renormalizacijske procedure. U stvari, divergencije opisuju vezu između *golih parametara* i *renormaliziranih parametara*. Budući da su goli parametri nefizikalne veličine koje se rabe samo u međurezultatskim računima, njihovo pojedinačno ponašanje je bezopasno. Postupak renormalizacije se provodi red po red u perturbacijskoj teoriji i može se provesti samo ako divergencije imaju vrlo preciznu strukturu.

### 10.2. Renormalizacijske grupne jednačbe (RGE)

Renormalizirani parametri su definirani na nekoj referentnoj skali  $\mu$ . Ukoliko bi se fiksirale gole veze i *cutoff* skala, tada bi varirajuća vrijednost  $\mu$  značila da se renormalizirana vezanja moraju promijeniti. Ovaj fenomen je nazvan *klizanjem konstanti vezanja* i opisan je tzv. *RG jednačbama*. Prirodno, fizikalne opservable bi trebale biti nezavisne o proizvoljnoj skali renormalizacije. Ova činjenica se može uporabiti za određivanje  $\mu$  ovisnosti o različitim vezanjima. Recimo da postoji opservabla  $\Gamma$  (koja je izračunata po nekom redu petlje) koja ovisi o nekakvim vezanjima  $\{g_i(\mu)\}$  i masama  $\{m_j(\mu)\}$ . Zahtjev da  $\Gamma$  ne ovisi o  $\mu$ , prikazan je sljedećom relacijom:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma = \left( \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial g_i(\mu)}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_i(\mu)} + \frac{\partial m_j(\mu)}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_j(\mu)} \right) \Gamma = 0. \quad (10.1)$$

Kada se to primijeni na nekoliko opservable, dobija se skup vezanih diferencijalnih jednačbi, ili tzv. *RG jednačbi*. I opservable i jednačbe ovise o redu petlji. Često je prikladno pomnožiti *RG jednačbe* konstantom. Te nove jednačbe nazvane  $\beta$ -funkcije su definirane za parametar  $p$  u sljedećoj relaciji:

$$\beta(p) \equiv 16\pi^2 \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (10.2)$$

gdje  $t$  predstavlja  $t \equiv \log(\mu/\mu_0)$ , a  $\mu_0$  (proizvoljnu) energetska skalu koja čini argument logaritma bezdimenzionalnim. Tako  $\beta$ -funkcije opisuju ovisnost parametara o renormalizacijskoj skali.

### 10.3. Efektivne teorije polja

Kada se teorija renormalizacije razvila, preovladavajuće mišljenje je bilo da je granična skala samo matematički trik za uklanjanje divergencija. Nakon renormalizacije, provodi se limes  $\Lambda \rightarrow \infty$ , te je u slučaju renormalizabilnih teorija, rezultat konačan. *Wilson* je dao različitu

interpretaciju renormalizacije i *cut-off skale*<sup>26</sup>. S njegove točke gledišta svaka *Kvantna Teorija Polja* posjeduje *cut-off skalom* koja ima nekakvu fizikalnu važnost. Prema *Wilsonu*, *cut-off skala* treba biti interpretirana kao skala gdje nova fizika postaje relevantna. Kao primjer, može se razmotriti odsustvo gravitacije u *SM-u*. Kako gravitacijski efekti postaju usporedivi u jakosti s drugim silama na energetske skali od  $O(10^{19} \text{ TeV})$ , tj. *Planckovoj skali*, moglo bi se očekivati da *SM* prestane važiti i da će se nova fizika uključiti u igru; očito nam je potrebna *Kvantna Teorija Gravitacije*. Dakako, *SM* bi mogao prestati važiti već na mnogo nižim energetskim skalama zbog drugih fenomena nove fizike. Danas je najčešće prihvaćena interpretacija renormalizacije da se skala nove fizike identificira s konstantom  $\Lambda$ .

Iako fundamentalna teorija svega može u načelu opisati sve aspekte prirode, mi bismo je mogli rabiti samo za opisivanje fizike na najmanjoj duljini skala. Kako se smanjuju, određeni visoko-energetski efekti postaju nevažni i mogu se zanemariti. To je ono što se sve vrijeme radi u fizici. Na primjer, kvantna elektrodinamika se ne rabi za opisivanje kemijskih veza između atoma. Za to je mnogo efektivniji klasični anti-relativistički opis elektromagnetske sile. Efekti na razmjerama visokih energija se često mogu izostaviti u opisima s niskim energijama, ili uzeti u obzir kao male perturbacije. To je ideja koja stoji iza *efektivne teorije polja (ETP)*. Te su teorije samo dobro definirane do određene energetske skale  $\Lambda$ . Na toj skali nova fizika postaje relevantna i ne može se više rabiti učinkovita teorija "niske" energije. U *ETP-u* su pointegrirani visoki energetski efekti (dominantni efekti na skalama većim od  $\lambda$ ).

Pretpostavimo da razmatramo fiziku na energetske skali  $E$  u kontekstu nekog *ETP-a* s *cut-off skalom*  $\Lambda$ . Tada su efekti koji proističu iz *ne-renormalizabilnih operatora* (tj. operatori s dimenzijom mase većom od četiri) i koji opisuju teške čestice mase  $M$  (gdje je  $M \geq \lambda$ ), potisnuti pomoću (*pozitivnih*) potencija  $E/M$ . Ti efekti mogu biti zanemareni ili uporabljeni perturbacijski u potencijama  $E/M$ . Iz tog razloga nije problem uključiti ne-renormalizabilne interakcije u *ETP-a* bez loma njegove jakosti predviđanja. Opis prirode bi mogao biti smatran kao lanac *ETP-a*. Svako *ETP* daje fizikalni opis u određenom rasponu energetskih razmjera i sadrži određeni sadržaj čestica. Naravno, uzastopna *ETP* bi se trebala podudarati na odgovarajućim pragovima pojavljivanja čestica, gdje obje teorije moraju proizvesti ista fizikalna predviđanja. To je nazvano *uvjetom usklađivanja*. Svaka teorija ispod određenog praga je promatrana kao teorija niske energije *ETP-a* teorije iznad praga. To čini sve kvantne

---

<sup>26</sup> Za njegove ideje renormalizacije 1982. je dobio Nobelovu nagradu za fiziku

teorije polja efektivnim teorijama, kao i *SM*. Nedostaci *SM-a* ukazuju da mora postojati još fundamentalnija teorija. Primjer potencijalnog fundamentalnijeg *ETP-a* je *MSSM*.

#### **10.4. Renormalizirane grupne invarijante**

Ukoliko se otkriju supersimetrične čestice u *eksperimentima na sudarivačima*, moglo bi se saznati kakav je model loma supersimetrije u prirodi. Međutim, lom supersimetrije se (vjerojatno) odvija na vrlo visokoj energetske skali koja može biti (*daleko*) izvan eksperimentalnog dosjega u bliskoj budućnosti. Da li je to onda kraj priče? Odgovor je negativan, zahvaljujući teoriji renormalizacijske grupe. Prikladnim rabljenjem *RG jednadžbi* gibanja, postoji nekoliko načina za ispitivanje fizike na skalama visokih energija rabeći samo nisko-energetske podatke. Dvije najpoznatije *RG tehnike* za ispitivanje fizike visokih energija su *top-down* i *bottom-up* metode. Za obje metode klizni parametri gibanja moraju biti numerički evoluirani budući da povezane *RG jednadžbe* (općenito) ne mogu biti analitički riješene. U kontekstu supersimetrije, modeli visokih razmjera koji su ispitani na ovaj način tipično opisuju lom supersimetrije.

*Top-down* metoda započinje odabirom određenog modela na visokoj skali i identificiranjem nezavisnih parametara gibanja. Nakon odabira točke u prostoru za parametre, parametri gibanja mogu biti evoluirani sve do *eksperimentalne skale sudarivača* (*s njihovim RG jednadžbama*). Dobijene vrijednosti tada mogu biti uspoređivane s podacima i to bi moglo ograničiti prostor parametara odabranog modela. Primjeri velikih ograničenja su da fizikalni model na visokoj skali mora unaprijed biti pretpostavljen, te da je skeniranje cijelokupnog parametarskog prostora obično vrlo dugotrajno.

Drugi postupak, *bottom-up metoda*, se provodi u suprotnom smjeru: nezavisni parametri slobodnog klizanja teorije izvan *SM-a* koji su eksperimentalno izmjereni se evoluiraju prema gore do praga nove fizike (*s njihovim RG jednadžbama*). Rezultati se zatim mogu uspoređivati s uvjetima podudaranja različitih modela na niskoj skali, čime je provjerena njihova konzistentnost. I ovaj metod sadrži značajna ograničenja. Važno je, na primjer, poznavati *sve* vrijednosti parametara klizanja na *eksperimentalnoj skali sudarivača*, budući da su *RG jednadžbe* povezane diferencijabilne jednadžbe. Nadalje, i eksperimentalne pogreške se evoluiraju prema gore i mogu postati prevelike da bi se mogle rabiti izračunate vrijednosti parametara za nalaženje razumnih zaključaka o fizici na visokim skalama. Štoviše, ne znamo vrijednost nove fizike; ona se uvijek procjenjuje.

Srećom, postoji još jedan način za ispitivanje fizike visoke skale koja zaobilazi većinu ograničenja navedenih u *top-down* i *bottom-up* metodama. Ovaj metod rabi tzv. *RG invarijante*. Ove invarijante predstavljaju kombinacije *RG* *jednadžbi* koje su nezavisne o renormalizacijskoj skali (tj. one sadrže iščezavajuću  $\beta$ -funkciju). Uvid u to da *RG invarijante* mogu biti rabljene za ispitivanje fizike visokih skala, osobito modela za lomljenje supersimetrije se pojavio nedavno.

Da bi se ilustrirala uporaba *RG invarijanti* kao ispitivanje fizike visokih razmjera može se navesti primjer koji rabi *baždarne konstante SM-a*. Najprije ćemo izvesti dvije *RG invarijante* pomoću  $\beta$ -funkcija triju *baždarnih konstanti*, a nakon toga ćemo rabiti ove invarijante za testiranje hipoteze o ujedinjavanju *baždarnih konstanti* na nekoj visokoj energetska skali. Na razini jedne petlje  $\beta$ -funkcije *baždarnih konstanti SM-a*  $g_1 \equiv \sqrt{5/3} g'$ ,  $g_2 \equiv g$  i  $g_3 = g_s$  su zadane pomoću sljedeće relacije<sup>27</sup>:

$$\beta(g_1) = \frac{41}{10} g_1^3, \quad \beta(g_2) = -\frac{19}{6} g_2^3, \quad \beta(g_3) = -7g_3^3. \quad (10.3)$$

Da bi se pronašla renormalizacijska skala nezavisnih kombinacija tih  $\beta$ -funkcija, važno ih je preraditi na sljedeći način:

$$\beta(g_1^{-2}) = -\frac{41}{5}, \quad \beta(g_2^{-2}) = \frac{19}{3}, \quad \beta(g_3^{-2}) = 14. \quad (10.4)$$

Desne strane ove tri jednadžbe  $\beta$ -jednadžbe sadrže numeričke vrijednosti. Stoga se mogu konstruirati dvije (nezavisne) iščezavajuće  $\beta$ -funkcije, kao na primjer:

$$\beta\left(g_1^{-2} + \frac{123}{95} g_2^{-2}\right) = 0, \quad \beta\left(g_1^{-2} + \frac{41}{70} g_3^{-2}\right) = 0. \quad (10.5)$$

Konstruirana su dva objekta koja više ne ovise o renormalizacijskoj skali. To dovodi do definiranja sljedeće dvije *RG invarijante*:

$$I_1^{\text{SM}} = g_1^{-2} + \frac{123}{95} g_2^{-2}, \quad I_2^{\text{SM}} = g_1^{-2} + \frac{41}{70} g_3^{-2}. \quad (10.6)$$

Sada možemo pokazati kako se ove invarijante mogu rabiti za ispitivanje fizike visoke skale. Primjer pitanja koje se može postaviti o fizici visokih energija jest da li se *baždarne konstante* ujedinjuju na nekoj (visokoj) energetska skali. Moguća je tvrdnja da se takvo predviđanje može testirati pomoću *RG invarijanti* zadanim u (10.6) rabeći samo nisko-energetske podatke. Da bi se provjerilo da li je ujedinjavanje *baždarne konstante* u skladu s *SM-om*, postupa se na sljedeći

---

<sup>27</sup> Baždarna konstanta  $g_1$  je ispravno skalirana verzijom  $g'$  u kontekstu  $SU(5)$  ili  $SO(10)$  Teorije Velikog Ujedinjenja.

način: tvrdi se da se ujedinjavanje baždarnih konstanti odvija na određenoj energetska skali  $\mu = \mu_{\text{gcu}}$ .

$$g_1(\mu_{\text{gcu}}) = g_2(\mu_{\text{gcu}}) = g_3(\mu_{\text{gcu}}) = g_{\text{gcu}}. \quad (10.7)$$

Na skali  $\mu = \mu_{\text{gcu}}$ , *RG invarijante* u (10.6) imaju oblik:

$$I_1^{\text{SM}}(\mu_{\text{gcu}}) = \frac{218}{95} g_{\text{gcu}}^{-2}, \quad I_2^{\text{SM}}(\mu_{\text{gcu}}) = \frac{111}{70} g_{\text{gcu}}^{-2}. \quad (10.8)$$

Iz te jednadžbe se može zaključiti da te invarijante više nisu nezavisne jedna od druge, jer je preostao samo jedan parametar. Povezane su sljedećom jednadžbom:

$$-\frac{703}{82} I_1^{\text{SM}} + \frac{1526}{123} I_2^{\text{SM}} = 0. \quad (10.9)$$

(10.9) je nazvana *pravilo suma* za *RG invarijante*. Budući da *RG invarijante* (po definiciji) ne ovise o renormalizacijskoj skali, ovo pravilo također ovisi o njoj! Stoga je primjenjivo na svim energetskim skalama za koje je *SM* važeća efektivna teorija polja. U slučaju *baždarnih konstanti*, (10.9) glasi:

$$\frac{23}{6} g_2^{-1} - \frac{111}{10} g_2^{-2} + \frac{109}{15} g_3^{-2} = 0. \quad (10.10)$$

Ovo *pravilo suma* vrijedi samo ako se *baždarne konstante SM-a* ujedinjuju na nekoj visokoj energetskoj skali. To znači da slamanje ovog *pravila suma* podrazumijeva da ujedinjenje *baždarne konstante* nije konzistentno s *SM-om*. Da bismo pokazali da je to doista slučaj, mogle bi se razmotriti vrijednosti baždarnih veza na primjeru  $\mu = m_Z$  na način:

$$g_1(m_Z) = 0,46152 \pm 0,00004, \quad (10.11a)$$

$$g_2(m_Z) = 0,65170 \pm 0,00011, \quad (10.11b)$$

$$g_3(m_Z) = 1,219 \pm 0,004. \quad (10.11c)$$

Uključivanje tih vrijednosti u *pravilo suma* opisano u jednadžbi (10.10), daje:

$$\frac{23}{6} g_1(m_Z)^{-2} - \frac{111}{10} g_2(m_Z)^{-2} + \frac{109}{15} g_3(m_Z)^{-2} = -3,25 \pm 0,03. \quad (10.12)$$

Kako je brojna vrijednost -3,25 s mnogo standardnih devijacija (0,03) udaljen od nule zaključuje se da ujedinjenje *baždarne konstante* nije u skladu s *SM-om*, što ne bi trebalo biti iznenađenje. Unutar *MSSM-a*, vezanja se mogu ujediniti na skali  $O(10^{16}\text{GeV})$ . To je pokazano sljedećim relacijama:

$$\beta(g_1^{-2}) = -\frac{33}{5} /^{(-33/5)} = \beta\left(\frac{-5g_1^{-2}}{-33} - \frac{g_2^{-2}}{-1}\right) = 0 \quad I_1^{\text{MSSM}} = g_1^{-2} - \frac{33}{5} g_2^{-2} \Rightarrow -\frac{28}{5} g_{\text{gcu}}^{-2} I_4,$$



$$\beta(g_2^{-2}) = -1/\epsilon^{(-1)} = \beta\left(\frac{g_2^{-2}}{-1} - \frac{g_3^{-2}}{3}\right) = 0 \quad I_2^{\text{MSSM}} = g_3^{-2} + 3g_2^{-2} \Rightarrow 4g_{\text{gcu}}^{-2} I_5,$$

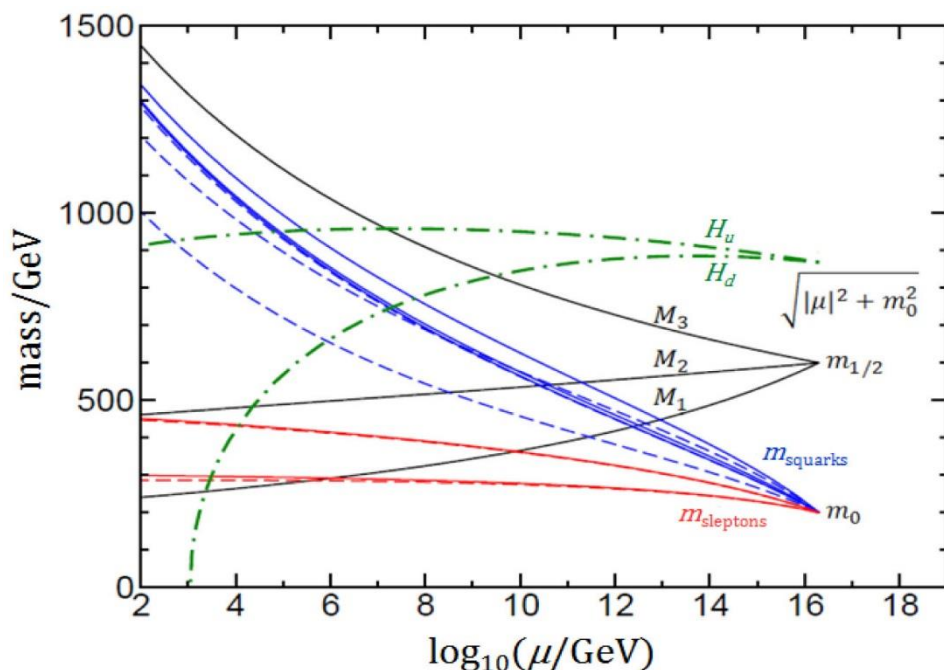
$$\beta(g_3^{-2}) = 3/\epsilon^{(3)} \Rightarrow 4I_2^{\text{MSSM}} + 4I_1^{\text{MSSM}} = 0 = 4g_1^{-2} + \frac{28}{5}g_3^{-2} + \left(\frac{-132+84}{5}\right)g_2^{-2} = 4g_1^{-2} - 9g_2^{-2} + 5g_3^{-2} = \frac{4}{(0,46152)^2} - \frac{48}{(0,65170)^2} + \frac{28}{(1,219)^2} = -0,656. \quad (10.13)$$

Ista strategija kao i za *SM* može biti primijenjena i za testiranje ove hipoteze za *MSSM*. Da bi se to postiglo, prvo bi se morale otkriti supersimetrične čestice. Nakon što su određeni parametri *MSSM*-a (ili neke druge supersimetrične teorije), vrijednosti koje su dobijene bi se mogle uključiti u *RG invarijantne* teorije (rabeći  $\beta$ -funkcije *MSSM*-a). Opet bi se *ujedinjenje baždarne konstante* na nekoj visokoj energetske skali moglo prevesti u *pravilo suma* za *RG invarijante*. Ako je *pravilo suma* zadovoljeno, onda je *ujedinjenje baždarne konstante* konzistentno s *MSSM*-om. U supersimetričnom kontekstu, predviđanja o fizici visoko-energetskih skala koja mogu biti testirana s metodom *RG invarijanti* predstavljaju uvjete podudaranja koji proizilaze iz različitih modela loma supersimetrije. Primjeri uvjeta podudaranja su *ujedinjenje baždarne konstante*, *ujedinjenje mase baždarina* i *ujedinjenje skalarne mase*. Kao ilustracija, *slika 10.1* prikazuje *RG evoluciju skalarne i baždarinove mase* koje zadovoljavaju granične uvjete *mSUGRA*<sup>28</sup> (tj. *skalarno i baždarino maseno ujedinjenje*) nametnute na energetske skali  $\Lambda \rightarrow 2 \times 10^{16}$  GeV.

Uporaba *RG invarijanti* za ispitivanje fizike visoke skale ima mnoge prednosti u odnosu na metode *top-down* ili *bottom-up*. Jedna od prednosti metode *RG invarijanti* je činjenica da ne moraju biti uključeni svi teorijski parametri gibanja (za razliku od *bottom-up* metode), jednostavno zbog toga što svi parametri ne uzrokuju *RG invarijante*. Nadalje, uporaba *RG invarijanti* je čisto algebarska operacija i ne zahtijeva nikakve brojne analize. To također znači da nije važno da se bilo kakve pogreške u eksperimentu razvijaju prema gore, kao što je slučaj s *bottom-up* metodom. Za razliku od *bottom-up* metode, u relativno maloj količini vremena mnogi modeli visokih razmjera mogu biti testirani metodom *RG invarijanata*. Još jedna dobra značajka ove metode je da *vrijednost* praga nove fizike uopće nije relevantna. Važno je, međutim, spomenuti da različiti modeli fizike visokih razmjera (koji daju određene uvjete podudaranja) mogu u načelu dovesti do istog *pravila suma* za *RG invarijante*. U tim slučajevima dvosmislenosti, metoda *RG invarijanata* daje neuvjerljive rezultate. To znači da je prava snaga *RG invarijanata* njihov *falsificirajući* potencijal.

---

<sup>28</sup> To je poseban supergravitacijski model, skraćenica od "minimalne supergravitacije".



Slika 10.1: RG evolucija skalarnih i baždarino masa s  $mSUGRA$  graničnim uvjetima postavljenim pri energetske skali na  $\Lambda \rightarrow 2 \times 10^{16} \text{GeV}$ . Mase baždarina su označene s  $M_{1,2,3}$ , a oznake  $H_u, H_d$  predstavljaju Higgsove mase  $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)^{1/2}$  i  $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)^{1/2}$ . (Ostale linije predstavljaju klizanje skvarkovske i sleptonske mase s isprekidanim linijama koje označavaju (kvadratne korijene) trećih parametara generacija  $m_{\tilde{d}_3}^2, m_{\tilde{Q}_3}^2, m_{\tilde{u}_3}^2, m_{\tilde{L}_3}^2, m_{\tilde{e}_3}^2$  (od vrha do dna) i čvrste linije koje ukazuju na prve dvije generacije sfermiona. Skalarni i baždarino mase na skali ujedinjenja označene su s  $m_0$ , odnosno  $m_{1/2}$ ).

Naravno, uporaba metode *RG invarijantna* nije potpuno neograničena. *RG jednadžbe* ovise o redu petlje u računu. To znači da *RG invarijante* vrijede samo do određenog reda u perturbacijskoj teoriji. Već pri redu dvije-petlje, *RG jednadžbe MSSM-a* su vrlo komplicirane i nije jasno da li se uopće mogu konstruirati *RG invarijante*.

Ukratko, *RG invarijantna* metoda je potpuna algebarska metoda koja se može rabiti za ispitivanje fizike na energetskim skalama koje su daleko izvan eksperimentalnog pristupa. Za ovaj metod se ne mora čak ni znati točna vrijednost skale na kojoj nova fizika dolazi u igru. Vidjeli smo da se predviđanja o fizici na skalama visoke energije (uvjeti podudaranja) mogu prevesti u pravila za *RG invarijante*. *RG invarijantne teorije* izvan *SM-a* se mogu procijeniti jednim od parametara izmjerenih na *eksperimentalnoj skali sudarivača*. Zatim se mogu izračunati i sva *pravila suma* koja su konstruirana. Ako pravilo suma nije ispunjeno, onda iz

toga slijedi da odgovarajuće predviđanje o uvjetima podudaranja nije u skladu s eksperimentalnim podacima i to eliminira odgovarajući model visoke skale. Ovaj metod je već rabljen za konstruiranje pravila suma za  $p$ - $MSSM$ -a i različite modele loma supersimetrije.

## 11. Higgsov sektor i elektroslabi lom simetrije u $MSSM$ -u

### 11.1. Skalarni potencijal i uvjeti za elektroslabi lom simetrije

Prvi zadatak je pronalazak potencijala za *skalarna Higgsova polja* u  $MSSM$ -u. Kao što se često naglašava, postoje dva kompleksna *Higgsova*  $SU(2)_L$  *dubleta* koji se označavaju s  $H_u = (H_u^+, H_u^0)$ , koji imaju slab hipernaboj  $Y = 1$  i  $H_d = (H_d^0, H_d^-)$  koji imaju hipernaboj  $Y = -1$ . Klasični (*na granastoj razini*) potencijal za ta skalarna polja je sastavljen iz nekoliko izraza. Prvo, tu su kvadratni izrazi koji proizlaze iz doprinosa *SUSY-invarijantnog* (" $F$ -izraza") koji uključuje  $\mu$  parametar, i iz *SUSY-slomljenih* uvjeta. Posljednja dva doprinosa su:

$$m_{H_u}^2 (|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + m_{H_d}^2 (|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2), \quad (11.1)$$

Mora se imati na umu da proizvoljni parametri ' $m_{H_u}^2$ ' i ' $m_{H_d}^2$ ' mogu imati bilo koji predznak, i da je:

$$b(H_u^+H_d^- - H_u^0H_d^0) + \text{h. c.} \quad (11.2)$$

Ovim doprinosima mora se dodati *kvartični SUSY-invarijantni "D-izraz"* oblika  $[Higgs]^2$ , kojeg treba izračunati za elektroslabi sektor  $MSSM$ -a.

Postoje dvije grupe  $G$ ,  $SU(2)_L$  s konstantom vezanja  $g$  i  $U(1)_Y$  s konstantom vezanja  $g'/2$ . Za prvu, matrice  $T^\alpha$  su jednake  $\tau^\alpha/2$ , i pripadni *Higgsov dio*  $D$ -doprinosa glasi:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha (H_u^\dagger(\tau^\alpha/2)H_u + H_d^\dagger(\tau^\alpha/2)H_d) (H_u^\dagger(\tau^\alpha/2)H_u + H_d^\dagger(\tau^\alpha/2)H_d) = (H_u^\dagger(\tau/2)H_u) \cdot \\ (H_u^\dagger(\tau/2)H_u) + (H_d^\dagger(\tau/2)H_d) \cdot (H_d^\dagger(\tau/2)H_d) + 2(H_u^\dagger(\tau/2)H_u) \cdot (H_d^\dagger(\tau/2)H_d). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Ako stavimo:

$$H_u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad H_d = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad (11.4)$$

izračun matričnih i točkastih produkata u (11.3) daje sljedeći rezultat:

$$\frac{1}{4} \{ [(|a|^2 + |b|^2) - (|c|^2 + |d|^2)]^2 + 4(ac^* + bd^*)(a^*c + b^*d) \}. \quad (11.5)$$

Stoga je  $SU(2)$  jednak (11.5) pomnoženom s  $g^2/2$ . Dopinos  $U(1)$  je zadan pomoću sljedeće relacije:

$$\frac{1}{2}(g'/2)^2 [H_u^\dagger H_u - H_d^\dagger H_d]^2 = \frac{g'^2}{8} [(|a|^2 + |b|^2) - (|c|^2 + |d|^2)]^2. \quad (11.6)$$

Zapisujući prethodne dvije jednačbe preko polja, te uključujući i kvadratne dijelove, ukupni potencijal za skalarna polja u *MSSM-u* iznosi:

$$V = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) (|H_u^\dagger|^2 + |H_u^0|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) (|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) + [b(H_u^\dagger H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{h. c}] + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} (|H_u^\dagger|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 + \frac{g^2}{2} |H_u^\dagger H_d^{0\dagger} + H_u^0 H_d^{-\dagger}|^2. \quad (11.7)$$

Bolje je ne zapisivati  $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)$  i  $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)$  kao  $m_1^2$  i  $m_2^2$ , kako bi se zadržala informacija da  $|\mu|^2$  proizlazi iz *SUSY-invarijantnog* izraza i nužno je pozitivan, dok  $m_{H_u}^2$  i  $m_{H_d}^2$  proizilaze iz članova koji lome *SUSY* i koji mogu imati bilo koji predznak.

Sada će se istražiti to da li, i pod kojim uvjetima - potencijal (11.7) može imati minimum (kao i jednostavni *Higgsov potencijal SM-a*) koji lomi  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  elektroslabu simetriju do  $U(1)_{em}$ .

Mogla bi se uporabiti *baždarna simetrija* da bi se pojednostavila algebra. Kao u *SM-u*,  $SU(2)_L$  transformacijom se može postići to da pojedine komponente polja  $H_u$  i  $H_d$  imaju nultu *vakummski očekivanu vrijednost*. U minimumu potencijala  $V$  se bira da je  $H_u^\dagger = 0$ . Uvjeti  $H_u^\dagger = 0$  i  $\partial V / \partial H_u^\dagger = 0$  tada impliciraju da u minimumu potencijala imamo da je:

$$H_d^- = 0, \quad (11.8)$$

ili

$$b + \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger} = 0. \quad (11.9)$$

Uvjet iz jednačbe (11.9) podrazumijeva da  $b$  član u jednačbi (11.7) postaje:

$$g^2 |H_u^0|^2 |H_d^0|^2, \quad (11.10)$$

što je definitivno pozitivno i nepovoljno za lomljenje simetrije. Kao što će se vidjeti, uvjet (11.8) dovodi do negativnog  $b$ -doprinosu. Prihvatajući alternativu uvjetu (11.8), slijedi da niti  $H_u^\dagger$  niti  $H_d^-$  nemaju *vakummski očekivanu vrijednost*, što znači (što je dobro) da elektromagnetizam nije spontano slomljen. Sada se mogu ignorirati nabojne komponente u (11.7) i koncentrirati se na potencijal za neutralna polja koji je definiran na sljedeći način:

$$V_n = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) |H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) |H_d^0|^2 - (b H_u^0 H_d^0 + \text{h. c}) + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \quad (11.11)$$

Možda je prikladno za spomenuti da koeficijent kvartičnog izraza *nije* slobodan parametar, nego je određen poznatim elektroslabim vezama  $((g^2 + g'^2)/8 \approx 0,065)$ . U *SM-u* su vezanja  $(g^2 + g'^2)/4$  za  $\lambda/4$  koji je slobodan parametar. Imajući na umu da je u *SM-u* masa *Higgsovog* bozona proporcionalna  $\sqrt{\lambda}$  za danu *Higgsovu vakuumski očekivanu vrijednost*, to sugerira da u *MSSM-u* treba postojati relativno laka *Higgsova čestica*. Kao što će se vidjeti, to je doista slučaj, iako veći sadržaj polja *Higgsovog sektora* u *MSSM-u* čini analizu kompliciranijom.

Sada se može razmotriti b-član iz (11.11), koji je jedini koji ovisi o fazama polja. Bez gubitka općenitosti, b se može uzeti realnim i pozitivnim, dok se svaka moguća faza b apsorbira u relativnu fazu  $H_u^0$  i  $H_d^0$ . U minimumu  $V_n$ , umnožak  $H_u^0 H_d^0$  također mora biti stvaran i pozitivan, što znači da *vakuumski očekivana vrijednost* od  $H_u^0$  i  $H_d^0$  mora imati identične i suprotne faze. Budući da ta polja sadrže identične i suprotne hipernaboje, može se kreirati  $U(1)_Y$  *baždarna transformacija* kako bi se obje njihove faze smanjile na nulu. Sve *vakuumski očekivane vrijednosti* i *konstante vezanja* se mogu odabrati realnima, što znači da *CP* nije spontano slomljena s *2-Higgsovim potencijalom MSSM-a*, ništa više nego što je slomljena u *1-Higgsovom potencijalu SM-a*.<sup>29</sup>

Skalarni potencijal sada poprima jednostavniji oblik:

$$V_n = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)x^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)y^2 - 2bxy + \frac{(g^2 + g'^2)}{8}(x^2 - y^2)^2, \quad (11.12)$$

gdje  $x = |H_u^0|$ ;  $y = |H_d^0|$  ovisi o tri parametra,  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$ ,  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  i b. Sada će se identificirati uvjeti koji su važni za stabilni minimum  $V_n$  koji bi se definirao na nenultim vrijednostima x i y. Prvo je važno primijetiti da će duž posebnog ("*ravnog*") pravca  $x = y$ , potencijal biti neograničen odozdo (bez minimuma) osim ako je:

$$2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 > 2b > 0. \quad (11.13)$$

Stoga izrazi  $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)$  i  $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)$  ne mogu biti negativni. To implicira pozivom na relaciju (11.12), da točka  $x = y = 0$  ne može biti maksimum od  $V_n$ . Ukoliko su izrazi  $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)$  i  $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)$  pozitivni, onda je ishodište u minimumu (što bi bilo neželjeno rješenje za očuvanom simetrijom) osim ako je:

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) < b^2, \quad (11.14)$$

---

<sup>29</sup> *CP-a* se ne lomi na granastoj razini, ali se može značajno slomiti posebice putem petlji koje uključuju treće generacije *skvarkova*; to bi značilo da tri neutralna *Higgsova svojstvena stanja* ne bi imala dobro definirane *CP kvantne brojeve*.

što predstavlja uvjet da ishodište bude sedlasta točka. Prethodna relacija je automatski zadovoljena ako su i  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  i  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  negativni.

b-izraz pogoduje *lom elektroslabe simetrije*, ali ne mora imati nenultu vrijednost. Što bi se moglo reći o  $m_{H_u}^2$  i  $m_{H_d}^2$ ? Pogled na uvjetne relacije (11.13) i (11.14) pokazuje da one ovdje ne mogu biti zadovoljene ako je  $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$ , tj. ne mogu zadovoljavati uvjet koji se obično uzima za visoku skalu  $\approx 10^{16}$  GeV. Međutim, parametar  $m_{H_u}^2$  je zapravo onaj čija evolucija renormalizacijske grupe može dovesti do njegovih negativnih vrijednosti na elektroslaboj skali. Jasno je da će negativna vrijednost  $m_{H_u}^2$  težiti zadovoljavanju uvjetne relacije (11.14), ali to nije niti nužno niti dovoljno ( $|\mu|$  može biti preveliko ili b premalo). "Velika" negativna vrijednost za  $m_{H_u}^2$  je jako bitan činjenični faktor, ali ona nije dovoljna da bi se pokazalo da će se kroz taj mehanizam ostvariti lom elektroslabe simetrije. Uspostavom uvjeta iz relacija (11.13) i (11.14) potrebnih za  $|H_u^0|$  i  $|H_d^0|$  koji imaju nenulte *vakuumske očekivane vrijednosti*, recimo  $v_u$  i  $v_d$ , mogu se napisati jednadžbe koje određuju ove *vakuumske očekivane vrijednosti* koji slijede iz uvjeta minimuma potencijala:

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = \frac{\partial V_n}{\partial y} = 0. \quad (11.15)$$

Provođenjem diferencijacije i uzimajući da je  $x = v_u$  i  $y = v_d$  dobija se:

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)v_u = bv_d + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2), \quad (11.16)$$

$$(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)v_u = bv_u - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2). \quad (11.17)$$

Jedna kombinacija  $v_u$  i  $v_d$  je određena eksperimentom, jer određuje mase W i Z bozona, kao u *SM-u*. Relevantni članovi u elektroslabom sektoru su:

$$(D_\mu H_u)^\dagger (D^\mu H_u) + (D_\mu H_d)^\dagger (D^\mu H_d), \quad (11.18)$$

gdje je:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig(\tau/2) \cdot W_\mu + i(g'/2)yB_\mu. \quad (11.19)$$

Maseni izrazi za vektorske čestice proizilaze (u unitarnom *baždarenju*) umetanjem *vakuumske očekivane vrijednosti* za  $H_u$  i  $H_d$  definirajući:

$$Z^\mu = \cos\theta_W W_3^\mu - \sin\theta_W B_\mu, \quad (11.20)$$

$$A^\mu = \sin\theta_W W_3^\mu + \cos\theta_W B_\mu, \quad (11.21)$$

s

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad (11.22)$$

te se dobijaju:

$$m_Z^2 = \frac{(v_u^2+v_d^2)(g^2+g'^2)}{4}, \quad m_A = 0. \quad (11.23)$$

Za slabe nabijene bozone, omjeri između interakcije mase i fizičkih svojstvenih vrijednosti odgovarajućih  $W^\pm$  masa su zadani pomoću sljedećih relacija:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), \quad m_W^2 = \frac{g^2(v_u^2+v_d^2)}{4}, \quad (11.24)$$

Nakon ovoga iz (11.23) slijedi:

$$(v_d^2 + v_u^2)^{1/2} = \left(\frac{2m_W^2}{g^2}\right)^{1/2} = 174\text{GeV} = V_{\text{SM}}. \quad (11.25)$$

Uvodeći parametar  $\beta$  relacijom:

$$\tan\beta = \frac{v_d}{v_u} = \frac{v\sin\beta}{v\cos\beta}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad (11.26)$$

jednadžbe (11.16) i (11.17) postaju:

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2) = b\cot\beta + m_Z^2/2 \cdot \cos 2\beta, \quad (11.27)$$

$$(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) = b\tan\beta - m_Z^2/2 \cdot \cos 2\beta. \quad (11.28)$$

Njihovu sumu i umnožak daju:

$$2|\mu|^2 + m_u^2 + m_d^2 = \frac{2b}{\sin 2\beta} > 2b > 0, \quad (11.29)$$

$$(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) = \frac{-m_Z^4}{4} \cos^2 2\beta < 0 < 2b, \quad (11.30)$$

pa su uvjeti (11.13) i (11.14) ispunjeni rješavanjem ekstremalnih uvjeta (11.27) i (11.28), pa se po  $|\mu|^2$  i  $b$  nalazi da je:

$$\mu^2 = \frac{m_{H_u}^2 \sin^2 \beta - m_{H_d}^2 \cos^2 \beta}{\cos 2\beta} - \frac{m_Z^2}{2}, \quad (11.31)$$

$$B_\mu = \frac{(m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2) \tan 2\beta + m_Z^2 \sin 2\beta}{2}. \quad (11.32)$$

Drugim riječima  $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$  i  $\tan \beta$  poznate, tada su vrijednosti  $B$  i  $|\mu|$  određene, ali predznak parametra  $|\mu|$  nije određen.

## 11.2. Mase Higgsovih bozona u MSSM-u

Dva Higgsova dubleta MSSM-a sadrže 8 realnih skalarnih polja. Tri od njih su bezmasena i kroz Higgsov mehanizam se apsorbiraju u  $W^\pm$  i  $Z$  bozone koji pri tome dobivaju masu.

Preostalih 5 stupnjeva slobode će nakon miješanja dati pet fizikalnih *Higgsovih stanja*. *Higgsova polja* i njihove povezane mase se dobivaju dijagonalizacijom pseudoskalara nabijenog i skalarnog dijela *Higgsve matrice mase* izračunate iz skalarnog potencijala  $M_{ab}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial H_a \partial H_b}$ .

Prije dijagonaliziranja tih matrica, potrebno je razviti dva dubletna skalarna *Higgsova polja* oko njihovih *vakuumske očekivanih vrijednosti* u realna komponentna polja na sljedeći način:

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_u^\dagger \\ v_u + h_u^0 + iP_u^0 \end{pmatrix}, \quad H_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_d + h_d^0 + iP_d^0 \\ h_d^\dagger \end{pmatrix}, \quad (11.33)$$

- *U slučaju CP-neparnih Higgsovih bozona*

Iz skalarnog potencijala se može izdvojiti kvadratna matrica na osnovu interakcije na način:

$$V \supset \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_u^0 & P_d^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu & B_\mu \\ \tan\beta & B_\mu \tan\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_d^0 \\ P_u^0 \end{pmatrix}. \quad (11.34)$$

U masenoj bazi, svojstvene vrijednosti mase predstavljaju neutralne *Goldstoneove bozone*  $G_0$  (apsorbirani Z bozonom) i fizikalni *CP-neparni Higgsov bozon* A. Ova masena baza je povezana s interakcijskom bazom sljedećom ortogonalnom transformacijom:

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_d^0 \\ P_u^0 \end{pmatrix}. \quad (11.35)$$

Svojstvene vrijednosti su:

$$M_{G_0}^2 = 0, \quad M_A^2 = \frac{2B_\mu}{\sin 2\beta}. \quad (11.36)$$

- *U slučaju nabijenih Higgsovih bozona*

Iz skalarnog potencijala se dobija kvadratni član s masenom matricom oblika:

$$V \supset \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_u^\dagger & h_d^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M_A^2 + m_W^2) \cos^2\beta & (M_A^2 + m_W^2) \cos\beta \sin\beta \\ (M_A^2 + m_W^2) \cos\beta \sin\beta & (M_A^2 + m_W^2) \sin^2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u \\ h_d \end{pmatrix}. \quad (11.37)$$

U masenoj bazi, svojstvene vrijednosti predstavljaju dva neutralna *Goldstoneova bozona*  $G^\pm$  (apsorbirani Z bozonima) i dva fizikalno nabijena *Higgsova bozona*  $H^\pm$ . Ova masena baza je povezana s interakcijskom bazom sljedećom ortogonalnom transformacijom:



$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_d^\pm \\ h_u^\pm \end{pmatrix}. \quad (11.38)$$

Svojtstvene vrijednosti su:

$$M_{G^\pm}^2 = 0, \quad M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + m_W^2. \quad (11.39)$$

- U slučaju CP-parnih Higgsovih bozona

Iz skalarnog potencijala se dobija kvadratni član s masenom matricom oblika:

$$V \supset \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_u^0 & h_d^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_Z^2 \sin^2 \beta + M_A^2 \cos^2 \beta & -(m_Z^2 + M_A^2) \cos \beta \sin \beta \\ -(m_Z^2 + M_A^2) \cos \beta \sin \beta & m_Z^2 \sin^2 \beta + M_A^2 \cos^2 \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_u^0 \\ h_d^0 \end{pmatrix}. \quad (11.40)$$

U masenoj bazi, svojstvene vrijednosti predstavljaju najlakši Higgsov bozon  $h$  i najteži Higgsov bozon  $H$ . Ova masena baza je povezana s interakcijskom bazom sljedećom ortogonalnom transformacijom:

$$\begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_u^0 \end{pmatrix}. \quad (11.41)$$

Svojtstvene vrijednosti su:

$$M_{h/H}^2 = \left[ M_A^2 + m_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + m_Z^2)^2 - 4M_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta} \right], \quad (11.42)$$

s kutem miješanja  $\alpha$  zadanim sljedećim relacijama:

$$\cos 2\alpha = -\cos 2\beta \frac{M_A^2 - m_Z^2}{M_H^2 - m_h^2}, \quad \sin 2\alpha = -\sin 2\beta \frac{M_A^2 + m_Z^2}{M_H^2 + m_h^2}, \quad (11.43)$$

ili što je ekvivalentno sljedećoj relaciji:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left( \tan 2\beta \frac{M_A^2 + m_Z^2}{M_H^2 - m_h^2} \right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0. \quad (11.44)$$

Stoga se Higgsov spektar MSSM-a može opisati samo s dva parametra na granastoj razini (npr.  $\tan \beta$  i  $M_A$ ). Postoje i jaka ograničenja, konkretno:  $M_{H^\pm} > m_W$ ,  $M_H > \max(m_Z, M_A)$ , i ona koja se odnose na najlakši Higgsov bozon zadana relacijom:

$$M_h \leq |\min(m_Z, M_A) \cos 2\beta| \leq m_Z. \quad (11.45)$$

Ova zadnja gornja granica je u suprotnosti s nedavnim opažanjem Higgsovog bozona mase 125 GeVa. Ipak, masa najlakšeg Higgsovog bozona dobija velike kvantne korekcije, osobito kroz efekte petlje top kvarka i skvarka.

## 12. Prikaz i izračun raspada Higgsovog bozona u SM-u i MSSM-u

### 12.1. Higgsov raspad na fermione

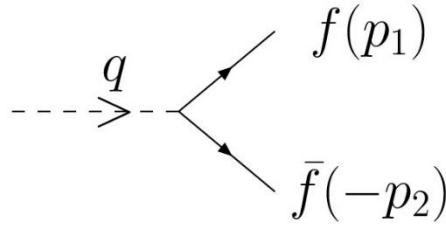
Opći izraz za brzinu raspada dvaju tijela se može definirati pomoću sljedeće formule:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{32\pi^2 s} |\vec{p}_f| S, \quad (12.1)$$

gdje  $|M|$  predstavlja matrični element,  $|\vec{p}_f|$  iznos impulsa nastalih čestica u sustavu centra mase i  $S = \frac{1}{n!}$  za  $n$  identičnih čestica. Za raspad dva tijela imamo da su  $\sqrt{s} = m_H$  i  $|\vec{p}_f| = \frac{1}{2}\beta\sqrt{s}$ .

Matrični element raspada *Higsovog bozona* dan je matričnim elementom:

$$\begin{aligned} -iM &= \bar{u}^{s_1}(p_1) \frac{im_f}{v} v^{s_2}(-p_2), \\ iM^\dagger &= \bar{v}^{s_2}(-p_2) \frac{-im_f}{v} u^{s_1}(p_1). \end{aligned} \quad (12.2)$$



Slika 12.1: Higsov raspad na fermione:  $H \rightarrow f\bar{f}$

Budući da ne postoje polarizacije za skalarni *Higsov bozon*, izračun kvadrata matričnog elementa je "jednostavan":

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \sum_{s_1, s_2} (\bar{v})_{s_2}(-p_2) u_{s_1}(p_1) (\bar{u})_{s_1}(p_1) v_{s_2}(-p_2) \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \sum_{s_1} u_{s_1}(p_1) (\bar{u})_{s_1}(p_1) \sum_2 \bar{v}_{s_2}(-p_2) (v)_{s_2}(-p_2) \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} p_{\mu_1} + m_f) \text{Tr}(-\gamma^{\mu_2} p_{\mu_2} - m_f) \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [-\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} p_{\mu_1} \gamma^{\mu_2} p_{\mu_2}) - m_f^2 \text{Tr}(1)] \\ &= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [-4p_1 p_2 - 4m_f^2], \end{aligned}$$

gdje se uzima da je  $s = (p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2$ , te budući da je  $p_1^2 = p_2^2 = m_f^2$  i da je  $s = M_H^2$  dobiva se da je sljedeća relacija:  $M_H^2 = 2m_f^2 - 2p_1 \cdot p_2$ . S  $\beta$  se definira brzina posljednjeg fermiona i to na način:  $\beta_f = 2|p_f|/M_H = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_H^2}}$ , pa se (12.3) dalje razvija na način:

$$= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 [2m_H^2 - 8m_f^2]$$

$$= \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 2m_H^2 \beta^2. \quad (12.3)$$

Uključujući bojni broj (za kvarkove) konačno se dobija da je:

$$|M|^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 2m_H^2 \beta^2 N_C. \quad (12.4)$$

Diferencijalna širina raspada je tada data kao:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{32\pi^2 s} |p_f| S = \frac{N_C m_H}{32\pi^2} \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \beta^3. \quad (12.5)$$

Kada se razvije integracija po kutnom impulsu  $\int \partial\Omega = 4\pi$ , dobija se konačna relacija:

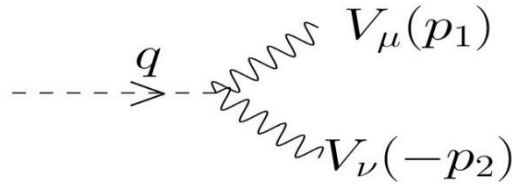
$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_C}{8\pi v^2} m_f^2 m_H \beta_f^3. \quad (12.6)$$

H se pretežito raspada na najteži fermion i s širinom raspada proporcionalnoj *Higgsovoj masi*  $\propto M_H$ .

## 12.2. Higgsov raspad na masivne baždarne bozone

Matrični element raspada *Higgsovog bozona* u  $ZZ$  i  $W^+W^-$  dan je matričnim elementom:

$$\begin{aligned} -iM &= \varepsilon_\mu^*(p_1) (-2iM_V^2/vg^{\mu\nu}) \varepsilon_\nu^*(-p_2), \\ iM^\dagger &= \varepsilon_{\mu'}(p_1) (-2iM_V^2/vg^{\mu'\nu'}) \varepsilon_{\nu'}(-p_2). \end{aligned} \quad (12.7)$$



Slika 12.2: Higgsov raspad na masivne baždarne bozone

Budući da ne postoje polarizacije za skalarni *Higgsov bozon*, izračun kvadrata matričnog elementa je "jednostavan":

$$\begin{aligned} \sum_{\text{pol}} |M|^2 &= \frac{4M_V^4}{v^2} g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} \sum_{\text{pol}} \varepsilon_\mu^*(p_1) \varepsilon_{\mu'}(p_1) \sum_{\text{pol}} \varepsilon_\nu^*(-p_2) \varepsilon_{\nu'}(-p_2) \\ &= (v^2/4M_V^4) \Sigma = g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} (g_{\mu\mu'} - p_{1\mu} p_{1\mu}' / M_V^2) (g_{\nu\nu'} - p_{2\nu} p_{2\nu}' / M_V^2) \\ &= (g_{\mu\mu'} - p_{1\mu} p_{1\mu}' / M_V^2) (g^{\mu\mu'} - p_2^\mu p_2^{\mu'} / M_V^2) \\ &= 4 - p_1^2 / M_V^2 - p_2^2 / M_V^2 + (p_1 \cdot p_2)^2 / M_V^4 \\ &= (M_H^4 / 4M_V^4) [1 - 4M_V^4 / M_H^2 + 12M_V^4 / M_H^4]. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Diferencijalna širina raspada je tada dana kao:  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega} = \frac{1}{2M_H} \times |M|^2 \times \frac{1}{32\pi^2} \frac{2|p_V|}{M_H} \times S$ , s  $S = \delta_V = \frac{1}{2}$ , odnosno 1 za dva identična Z bozona, kao i za  $W^+W^-$  bozone u finalnom stanju. Konačna relacija je (kada je  $\int \partial \Omega = 4\pi$ ):

$$\Gamma(H \rightarrow V\bar{V}) = \frac{\delta_V M_H^3}{16\pi v^2} \left(1 - 4 \frac{M_V^2}{M_H^2}\right)^{1/2} \left(1 - 4 \frac{M_V^2}{M_H^2} + 12 \frac{M_V^4}{M_H^4}\right). \quad (12.9)$$

Ovisnost o  $M_V$  je skrivena, jer su uporabljene jednakosti  $v = 2M_W/g_2 = 2M_Z c_W/g_2$ . Za dovoljno veliku vrijednost  $M_H$  [podsjećanje da je  $H \rightarrow f\bar{f} \propto M_H$ ], dobija se sljedeća relacija:

$$\Gamma(H \rightarrow V\bar{V}) = \delta_V M_H^3 / (8\pi v^2) \Rightarrow \Gamma(H \rightarrow WW) \cong 2\Gamma(H \rightarrow ZZ). \quad (12.10)$$

Širina raspada raste kako je  $M_H^3$ , te je vrlo velika za  $M_H \gg M_V$ . Za malu vrijednost  $M_H$ , jedan ili dva V bozona mogu biti na *off-shell shemi*, tako da je širina predstavljena sljedećim relacijama:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\pi^2} \int_0^{M_H^2} \frac{dq_1^2 M_V \Gamma_V}{(q_1^2 - M_V^2)^2 + M_V^2 \Gamma_V^2} \int_0^{M_H^2 - q_1^2} \frac{dq_2^2 M_V \Gamma_V}{(q_2^2 - M_V^2)^2 + M_V^2 \Gamma_V^2},$$

$$\Gamma_0 = \frac{\delta_V M_H^3}{8\pi v^2} \lambda^{1/2} \left(\lambda - \frac{12q_1^2 q_2^2}{M_H^4}\right), \quad \lambda = \left(1 - \frac{q_1^2}{M_H^2} - \frac{q_2^2}{M_H^2}\right)^2 - \frac{4q_1^2}{M_H^2} \times \frac{q_2^2}{M_H^2}. \quad (12.11)$$

### 12.3. Higgsov raspad na fotone i gluone: $H \rightarrow \gamma\gamma, gg$

H se ne veže s česticama bez masa na granastoj razini. Zbog toga se uvodi petlja s masivnim česticama. Imamo dijagrame vrhova s fermionskom (gornjom) i W izmjenom za raspad  $H \rightarrow \gamma\gamma(Z\gamma)$ ; te samo vrh za  $H \rightarrow gg$ , prilikom čega je izračun kompliciran. Međutim, to je jednostavno ako je impuls H mali (tj.  $M_H \ll M_{\text{petlje}}$ ), te je sve predstavljeno pomoću sljedeće slike 12.3:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \frac{i}{\not{p}-m} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \frac{i}{\not{p}-m} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} q=0 \text{---} \\ \frac{im}{v} \end{array} \equiv \frac{\partial}{\partial m} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \frac{i}{\not{p}-m} \end{array} \right) \times \left( \frac{-m}{v} \right) \\
 \\ 
 -i\mathcal{M}_{\mu\nu}^{H\gamma\gamma} = & \text{---} H \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \equiv \left( \frac{im}{v} \right) \frac{\partial}{\partial m} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p+k \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = -i \left( \frac{-m}{v} \right) \frac{\partial}{\partial m} \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}
 \end{aligned}$$

Slika 12.3: Higgsov raspad na fotone i gluone:  $H \rightarrow \gamma\gamma, gg$

Sada će se izračunati derivacija fermionske vlastite energije fotona:

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\mu\mu}^{\gamma\gamma}(p^2) &= N_C \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}(-iee_f\gamma_\mu) \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - m} (-iee_f\gamma_\nu) \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\mu k_\mu - m}, \\
 \Pi_{\mu\mu}^{\gamma\gamma}(p) &= -iN_C e^2 e_f^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\gamma_\mu(\gamma^\mu k_\mu + m)\gamma_\nu(\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\mu k_\mu + m)}{[(p+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)}. \tag{12.12}
 \end{aligned}$$

Uzimajući pravila za dirakologiju i izračun za integral petlje, dobija se da je:

$$D = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + 2pkx + p^2x - m^2)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(k+px)^2 + p^2x(1-x) - m^2]^2}, \tag{12.13}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma^\mu k_\mu \gamma_\nu (\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\mu k_\mu) + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] = k^\rho (k+p)^\sigma \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
 &= 4[2k_\mu k_\nu + (m^2 - k^2 - pk)g_{\mu\nu}]. \tag{12.14}
 \end{aligned}$$

Zamjenom  $k \rightarrow k + px$ , uporabom integralne relacije  $\int d^4k k_\mu k_\nu F(k^2) = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \int d^4k k^2 F(k^2)$ , te uporabom Wickove rotacije  $k_0 \rightarrow ik_0$  kojom se dobijaju zamjene za prijelaz u Euklidski prostor  $k^2 \rightarrow -k^2$  i  $d^4k \rightarrow id^4k$  i simetričnim integralom s  $\int_{-\infty}^{+\infty} d^4k F(k^2) = \pi^2 \int_0^\infty dy \cdot y \cdot F(y)$ ,  $y = k^2$ , nalazi se:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(p) &= -iN_C e^2 e_f^2 \times 4 \times \pi^2 \times \frac{i}{16\pi^4} \times \\
 &\int_0^1 dx \int_0^\infty y dy \frac{[\frac{1}{2}k^2 + m^2 - x(1-x)p^2]g_{\mu\nu} + 2x(1-x)[g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu]}{[y + m^2 - p^2x(1-x)]^2}. \tag{12.15}
 \end{aligned}$$

Zbog baždarne invarijantnosti, foton je transverzalan ( $\propto g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu$ ): stoga prvi izraz ( $\propto g_{\mu\nu}$ ) treba iščezavati, pa se za  $M_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}$  dobiva:

$$\Pi_{\mu\mu}^{\gamma\gamma}(p) = \frac{N_c e_f^2 e_f^2}{4\pi^2} [g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu] \int_0^1 dx \int_0^\infty y dy \frac{2x(1-x)}{[y+m^2-p^2x(1-x)]^2}. \quad (12.16)$$

Sada se može izračunati  $H\gamma\gamma$  vrh: [ fotoni koji simetriziraju, što daje faktor 2, na masenoj ljusci su, impuls  $p$  nije jednak impulsima  $p_1, p_2$  u higgsinu, ali je  $p^2 = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} M_H^2$ ] i to na način na koji je:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}^{H\gamma\gamma} &= -2 \frac{m}{v} \frac{\partial}{\partial m} \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(p_1, p_2) = -\frac{4m^2}{v} \frac{\partial}{\partial m^2} \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(p_1, p_2) \\ &= -\frac{2m^2}{v} \frac{N_c e_f^2 e_f^2}{\pi^2} \Pi_{\mu\nu}^{\gamma\gamma}(g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_{1\mu} p_{2\nu}) \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{-2x(1-x)y dy}{[y+m^2-p^2x(1-x)]^3}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Unutar integrala se može pretpostaviti da je  $m^2 \gg p^2 (M_H^2)$  i onda se može razviti integracija putem  $x$  i  $y$  [ $\int x(1-x)dx = 1/6$  i  $\int y/(y+m^2)^3 dy = 1/2m^2$ ], te se dobija sljedeća relacija:

$$M_{\mu\nu}^{H\gamma\gamma} = \frac{2}{3v} N_c e_f^2 \frac{\alpha}{\pi} (g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_{1\mu} p_{2\nu}). \quad (12.18)$$

Za raspad se rabi isti postupak kao i za raspade u masivne *baždarne bozone*:

$$|M|^2 = \frac{4}{9v^2} N_c e_f^4 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{M_H^4}{2} \sum |g^{\mu\nu} \epsilon_\mu^*(p_1) \epsilon_\nu^*(p_2)|^2 = \frac{2M_H^4}{9v^2} N_c e_f^4 \frac{\alpha^2}{\pi^2}. \quad (12.19)$$

Integracijom po faznom prostoru (s faktorom 1/2 za identične fotone dobija se:

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{M_H^3}{9v^2} N_c^2 e_f^4 \frac{\alpha^2}{16\pi^3}. \quad (12.20)$$

Komentari:

- amplituda je konačna,
- jedino *top kvarkovi* doprinose, jer ostali fermioni imaju zanemarivu *Yukawinu konstantu vezanja*,
- beskonačno teški fermioni daju doprinos amplitudi: time se dobija metoda brojanja teških fermiona koji se vežu na *Higgsovu masu*,
- doprinosi *W bozona* također postoje i u limesu  $M_H \ll M_W$ , koji vrijedi za  $M_H \sim 140$  GeV, te vrijedi da je:

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{M_H^3}{9v^2} \frac{\alpha^2}{16\pi^3} \left| \sum_f N_c e_f^2 - \frac{21}{4} \right|^2. \quad (12.21)$$

- doprinos *W bozona* je oko 4 puta veći od *top-kvarkovskog doprinosa* i interferencija je destruktivna.
- istim računom se dobija amplituda za  $H \rightarrow Z\gamma$ . Doprinos *W bozona* je 10 puta veći od *top-kvarkovskog doprinosa*.

- gornji račun je primjenjiv i na gluone uz zamjene:  $\theta_e e \rightarrow g_s T_a$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_s N_c \rightarrow \text{Tr} T^a T^a = 2$ ;

$$\Gamma(H \rightarrow gg) = \frac{M_H^3 \alpha_s^2}{9v^2 8\pi^2}. \quad (12.22)$$

Širina raspada i omjeri na granastoj razini:

Ukupna širina raspada *Higgsovog bozona* predstavlja sumu svih parcijalnih širina i definira se na način da je:

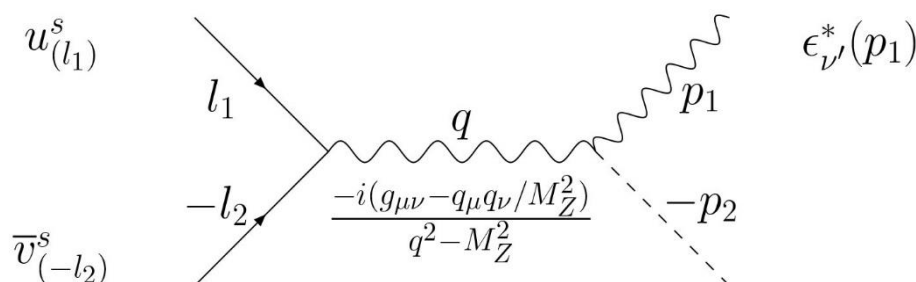
$$\Gamma_{\text{tot}}(H \rightarrow \text{all}) = \sum_f \Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) + \sum_V \Gamma(H \rightarrow VV), \quad (12.23)$$

dok je omjer na granastoj razini za *Higgsov raspad* u dano finalno stanje jednak:

$$\text{BR}(H \rightarrow X) = \Gamma(H \rightarrow X) / \Gamma_{\text{tot}}(H \rightarrow \text{all}). \quad (12.24)$$

#### 12.4. Nastanak Higgsovog bozona u $e^-e^+$ sudarima:

Higgsov zakočni proces:



Slika 12.4: Higgsov zakočni proces

Matrični element je zadan u pojednostavljenom obliku:

$$-iM = \bar{v}^s_{(-l_2)} (-i\varepsilon) \gamma_\mu (v_e - \alpha_e \gamma_5) u^s_{(l_1)} \frac{-i(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2} \left( \frac{-2iM_Z^2}{v} g_{\nu\nu'} \right) \varepsilon_{\nu'}^*. \quad (12.25)$$

Prvo što se rabi za pojednostavljenje je *Diracova jednadžba* u obliku  $\gamma^\mu l_\mu u(l) = m_e \sim 0$ , te se dobija da je:

$$\bar{v}^s_{(-l_2)} \gamma_\mu q^\mu u^s_{(l_1)} = \bar{v}^s_{(-l_2)} [-\gamma^{\mu 2} l_{\mu 2} + \gamma^{\mu 1} l_{\mu 1}] u^s_{(l_1)} = 2m_e \sim 0 \Rightarrow q_\mu q_\nu \rightarrow 0, \quad (12.26)$$

gdje se za  $m_e$  pretpostavlja da je mnogo manja od  $\sqrt{s} = \sqrt{q^2}$ . Tada je:

$$|M|^2 = \frac{4e^2 M_Z^4 v^{-2}}{(q^2 - M_Z^2)^2} \varepsilon_{(p_1)}^\nu \varepsilon_{(p_1)}^{*\mu} \bar{v}^s_{(-l_2)} \gamma_\mu (v_e - \alpha_e \gamma_5) u^s_{(l_1)} \bar{u}^s_{(l_1)} \gamma_\nu (v_e - \alpha_e \gamma_5) v^s_{(-l_2)}. \quad (12.27)$$

Presjek preko polarizacije  $e^\pm$  i sume ovih fotona iznosi:

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = \frac{k^2}{4} \text{Tr} \gamma^{\mu_1} l_{\mu_1} (v_e - \alpha_e \gamma_5) \gamma_{\mu_2} (-\gamma^{\mu_2} l_{\mu_2}) (v_e - \alpha_e \gamma_5) \gamma_{\nu} \left( -g^{\mu\nu} + \frac{p_1^\mu p_1^\nu}{M_Z^2} \right) - \text{Tr} = (v_e^2 + a_e^2) \text{Tr} \gamma^{\mu_1} l_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} l_{\mu_2} \gamma_{\nu} - 2a_e v_e \text{Tr} \gamma^{\mu_1} l_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} l_{\mu_2} \gamma_{\nu} = 4(v_e^2 + a_e^2) [l_{1\mu} l_{2\nu} + l_{2\mu} l_{1\nu} - l_1 l_2 g_{\mu\nu}] - 8i a_e v_e l_1^\alpha l_2^\beta \varepsilon_{\alpha\mu\mu\beta\nu}, \quad (12.28)$$

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 = k(v_e^2 + a_e^2) \left[ 2(l_1 \cdot l_2) - 2 \frac{(l_1 \cdot p_1)(l_2 \cdot p_1)}{M_Z^2} - 4(l_1 \cdot l_2) + (l_1 \cdot l_2) \frac{p_1^2}{M_Z^2} \right] = k(v_e^2 + a_e^2) [- (l_1 \cdot l_2) - 2/(l_1 \cdot p_1)(l_2 \cdot p_1)/M_Z^2], \quad (12.29)$$

gdje je uporabljena činjenica da je  $(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu})g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_1^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  antisimetričan, a  $g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M_Z^2}$  simetričan na zamjenu Lorentzovih indeksa. U sustavu centra mase  $E_{1,2}^2 = M_{Z,H}^2 + |p|^2$  i  $|p| = \lambda\sqrt{s}/2$ , dobija se sljedeća relacija:

$$l_{1,2} = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, \pm 1) \text{ i } p_{1,2} = (E_{Z,H}, 0, \pm |p| \sin\theta, \pm |p| \cos\theta) \Rightarrow k(v_e^2 + a_e^2) \left[ \frac{s}{2} + \frac{s(E_Z^2 - |p|^2 \cos^2\theta)}{2M_Z^2} \right] = k(v_e^2 + a_e^2) \frac{s^2}{M_Z^2} \left[ \frac{M_Z^2}{s} + \frac{1}{8} \lambda^2 \sin^2\theta \right]. \quad (12.30)$$

Diferencijalni udarni presjek je zadan na:

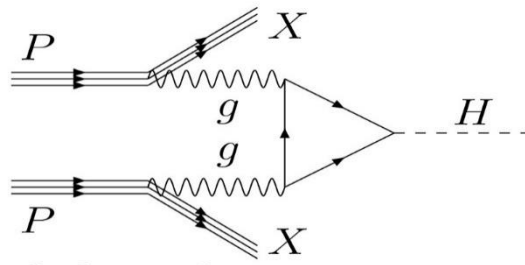
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \frac{1}{2s} \left[ \frac{4e^2 M_Z^4 (v_e^2 + a_e^2) s}{v^2 (s - M_Z^2)^2 M_Z^2} \left( \frac{M_Z^2}{s} + \frac{1}{8} \lambda^2 \sin^2\theta \right) \right] \frac{\lambda}{32\pi^2}, \quad (12.31)$$

gdje je  $\int d\phi = 2\pi$  i  $\int \sin^2\theta \cos\theta = 4/3$ , tako da to daje izraz za udarni presjek:

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow HZ) = \frac{\alpha M_Z^2}{12v^2} \frac{v_e^2 + a_e^2}{s(1 - M_Z^2/s)^2} \lambda (\lambda^2 + 12M_Z^2/s). \quad (12.32)$$

### 12.5. Nastanak Higsovog bozona u hadronskim sudarima:

Gluon-gluonski fuzijski proces:



Slika 12.5: Gluon-gluon fuzijski proces

Udarni presjek za ovaj podproces,  $gg \rightarrow H$ , dan je s:



$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{2s} \times \frac{1}{2 \cdot 8} \times \frac{1}{2 \cdot 8} |M_{H_{gg}}|^2 \frac{d^3 p_H}{(2\pi)^3 2E_H} (2\pi)^4 \delta^4(q-P_H). \quad (12.33)$$

Uzimajući činjenicu da je  $\int d^3 p_H / (2E_H) = \int d^4 p_H \delta(p_H^2 - M_H^2)$  i da je  $|M_{H_{gg}}|^2 = 32\pi M_H \Gamma(H \rightarrow gg)$  koji je već ranije razmatran, za  $\hat{\sigma}$  se dobiva:

$$\hat{\sigma} = \frac{\pi^2 M_H}{8\hat{s}} \Gamma(H \rightarrow gg) \delta(\hat{s} - M_H^2). \quad (12.34)$$

Konvoluiranjem tog izraza s gustoćama gluona, dobija se da udarni presjek iznosi:

$$\sigma = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{\pi^2 M_H}{8\hat{s}} \Gamma(H \rightarrow gg) g(x_1) g(x_2) \delta(\hat{s} - M_H^2), \quad (12.35)$$

gdje je  $\hat{s} = s x_1 x_2$ , implicirajući:  $\hat{s} - M_H^2 = s(x_1 x_2 - \tau_H)$  s  $\tau_H = M_H^2/s$ , te je konačna relacija predstavljena sljedećom formulom:

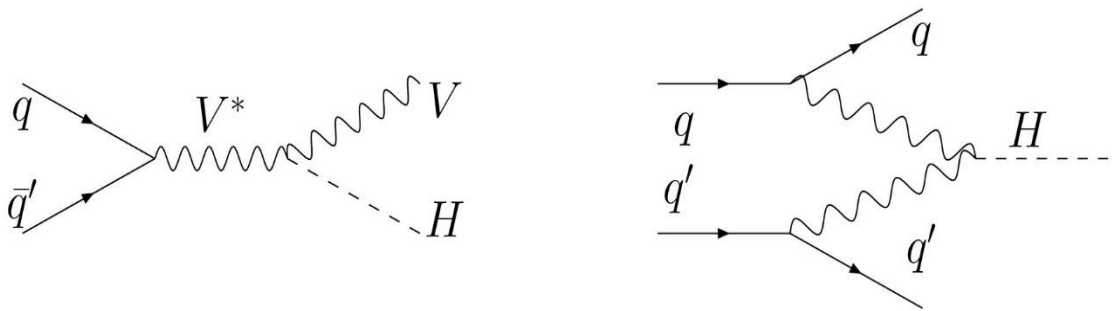
$$\sigma = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{\pi^2}{8M_H} \Gamma(H \rightarrow gg) g(x_1) g(x_2) \delta[s(x_1 x_2 - \tau_H)]. \quad (12.36)$$

Sada se može provesti integral za  $x_2$  [ $\int \delta[f(x)] dx = |f'(x)|_{x=x_0}^{-1}$  s  $f(x_0) = 0$ ], dajući za udarni presjek izraz:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{8M_H^3} \Gamma(H \rightarrow gg) \tau_H \int_{\tau_H}^1 \frac{dx}{x} g(x) g(x/\tau_H) = \frac{1}{576v^2} \frac{\alpha_s^2}{\pi} \tau_H \frac{dL_{gg}}{d\tau_H}, \quad (12.37)$$

gdje integracijske granice predstavljaju  $x_1^{\max} = 1$ ,  $x_1^{\min} = x_1$  za ( $x_2 = 1 = \tau$ ). Na *LHC-u* luminoznost je velika i  $gg \rightarrow H$  predstavlja dominantan proces!

Higgsov zakočni i Higgsov fuzijski proces:



Slika 12.6: Higgsov zakočni i Higgsov fuzijski proces vektorskog bozona

Udarni presjek je isti kao za  $e^-e^+$  sudare, ako se naprave sljedeće zamjene:

- ukupna energija  $\sqrt{s}$  se zamjenjuje s energijom podprocesa  $\hat{s}$ ,
- radi se usrednjenje po boji faktorom  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ ,
- u procesu zakočnog zračenja postoji mogućnost da je  $q\bar{q}' \rightarrow W^* \rightarrow WH$ . Vezanja elektrona su zamijenjena kvarkovima: u  $q\bar{q} \rightarrow VH$ :  $a_e^2 + v_e^2 \rightarrow a_q^2 + v_q^2$ .

$$qq \rightarrow Hqq: g_{SA} \rightarrow [(v^2 + a^2)(v'^2 + a'^2) \pm 4(av)(a'v')]. \quad (12.38)$$

Udarni presjeci za dano početno stanje su dani s:

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow VH) = \frac{1}{9} \frac{\alpha M_V^2}{12v^2} \frac{v_q^2 + a_q^2}{\hat{s}(1 - M_V^2/\hat{s})^2} \hat{\lambda}(\hat{\lambda} + 12M_V^2/\hat{s}), \quad (12.39)$$

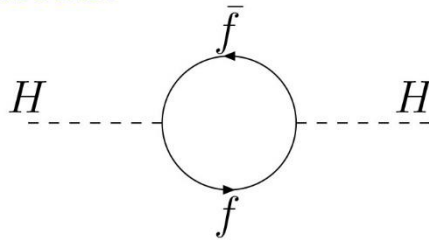
$$\sigma(qq \rightarrow qqH) = \frac{1}{9} \frac{\alpha^3}{2M_V^2 s_W^2} (g_S + g_A) \left[ (1 + \tilde{\tau}_H) \log \frac{1}{\tilde{\tau}_H} - 2(1 - \tilde{\tau}_H) \right]. \quad (12.40)$$

Sumiranjem svih mogućih vrijednosti za incijalna *kvark /antikvark* stanja i njihovom konvolucijom s odgovarajućim gustoćama, dobija se da ukupni udarni presjeci iznose:

$$\sigma[pp \rightarrow H + X] = \sum_{q\bar{q}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) \hat{\sigma}[q\bar{q}' \rightarrow H + X]. \quad (12.41)$$

## 12.6. Vlastita energija Higgsovog bozona

Fermionski doprinosi se mogu prikazati pomoću sljedeće relacije:



Slika 12.7: Dijagram vlastite energije Higgsova bozona za fermionski doprinos

$$-i \Sigma_H(p^2) = N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left( \frac{-i\lambda_f}{\sqrt{2}} \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - m} \left( \frac{-i\lambda_f}{\sqrt{2}} \right) \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu + \gamma^\mu k_\mu - m} \right). \quad (12.42)$$

Slijedi uobičajen izračun. Za pojednostavljivanje je potrebno naznačiti da je:  $p^2 = M_H^2 \approx 0$  (masa teškog fermiona mnogo veća od  $M_H$ ). Rabljenjem  $\Lambda$  kao *cut-off* za integral na  $k^2$ , dobija se sljedeća relacija:

$$\Sigma_H(p^2 = 0) = 4N_f \left( \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{y(-y+m_f^2)}{(y+m_f^2)^2}. \quad (12.43)$$

Nakon trivijalnog integrala na  $x$  i jednog na  $y$  dobiva se:

$$\Delta M_H^2 = N_f \frac{\lambda_f^2}{8\pi^2} \left[ -\Lambda^2 + 6m_f^2 \log \frac{\Lambda}{m_f} - 2m_f^2 \right] + O(1/\Lambda^2). \quad (12.44)$$

Ovdje imamo kvadratnu divergenciju,  $\delta M_H^2 \sim \Lambda^2$ .

Divergencija je nezavisna za  $M_H$ , i ne iščezava kada je  $M_H = 0$ . Drugim riječima, izbor  $M_H = 0$  ne povećava simetriju  $L_{SM}$ . U ovom slučaju *cut-off* ne lomi nikakvu simetriju i problem nije riješen dimenzionalnom regularizacijom (iako postoje polovi u  $1/\epsilon$  i kvadratna divergencija nije vidljiva).

Ukoliko se fiksira *cut-off*  $\Lambda$  od  $M_{GUT}$  ili  $M_P$ :  $\Rightarrow M_H \sim 10^{14}$  do  $10^{17}$  GeV! Masa *Higsovog bozona* preferira da se nalazi blizu vrlo visoke skale.

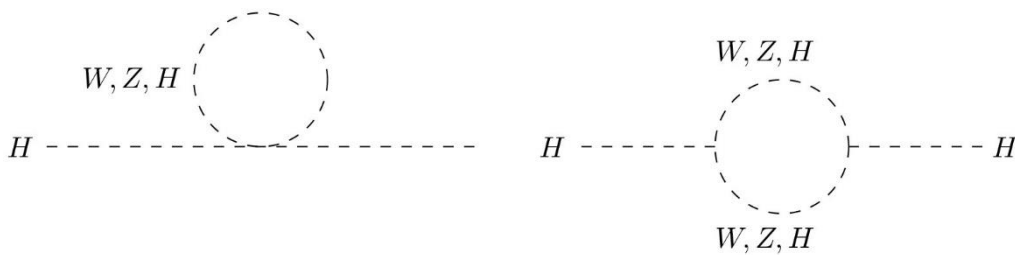
Ovo predstavlja *problem hijerarhije*. Međutim, želimo da dobijemo laki *Higgs* ( $\leq 1$  TeV) zbog razloga kao što su unitarnost itd., potrebno je kreirati sljedeću relaciju:  $M_H^2 :_{fizikalna} = M_H^2 :_0 + \Delta M_H^2$  + kontračlanovi, te prilagoditi kontračlanove s preciznošću od  $10^{30}$  (30 cifara)!

*Ovo predstavlja problem prirodnosti.*

U cjelokupnoj teoriji formalno nema problema: prilagođavaju se gola masa  $M_H$  i kontračlanovi koji su beskonačni, te imaju konačnu fizikalnu masu. Isti slučaj je s logaritamskom divergencijom  $m_e$  u *QED-ju*. Međutim, važno je dati fizikalno značenje *cut-off* od  $\Lambda$  i onda su logaritamske i kvadratne divergencije različite prirode.

*U SM-u:*

Osim fermionskih doprinosa  $M_H$ , također postoje doprinosi  $M_H$  od masivnih *baždarnih bozona* i samog *Higsovog bozona*:



*Slika 12.8: Dijagrami koji prikazuju ukupne doprinose fermiona i bozona u SM-u na razini jedne petlje*

Ukupni doprinosi fermiona i bozona u *SM-u* na razini jedne petlje se definiraju na sljedeći način:

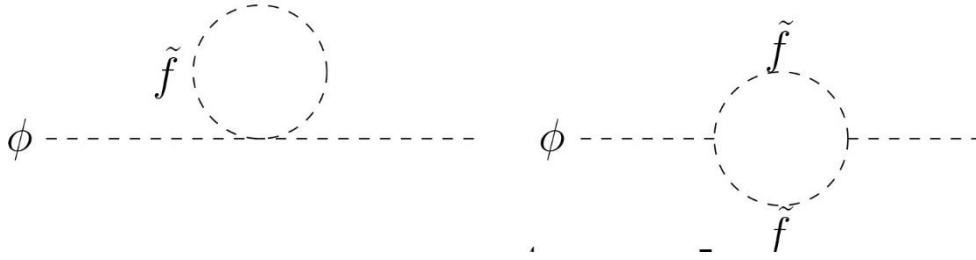
$$\Delta M_H^2 \propto \left[ 3 (M_W^2 + M_Z^2 + M_H^2)/4 - \sum m_f^2 \right] (\Lambda^2/M_W^2). \quad (12.45)$$

Nepoznata  $M_H$  može se prilagoditi tako da kvadratna divergencija nestaje (predviđanje za Higgsovu masu bi moglo iznositi oko,  $M_H \sim 200 \text{ GeV}$ ).

Međutim: ovo ne funkcionira na razini dvije petlje ili na razinama viših petlji....

Zaključak: Problem kvadratne divergencije  $M_H$  je da nema simetrije koja ju štiti u  $SM-u$ .

Skalarni doprinosi se mogu predstaviti pomoću sljedeće relacije:



Slika 12.9: Dijagrami koji prikazuju doprinose skalara

$$\Delta M_H^2 = \sum_H(p^2) = (i)N_s \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (i\lambda_s) \left[ \frac{i}{k^2 - m_1^2} + \frac{i}{k^2 - m_2^2} \right] + N_s (i\lambda_s v^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i}{k^2 - m_1^2} \cdot \frac{i}{(k+p)^2 - m_1^2} + m_1 \leftrightarrow m_2 \right]. \quad (12.46)$$

Nakon jednostavnog izračuna, nakon integriranja dobiva se:

$$\Delta M_H^2 = \frac{\lambda_s N_s}{16\pi^2} \left[ -2\Lambda^2 + 2m_1^2 \log\left(\frac{\Lambda}{m_1}\right) + 2m_2^2 \log\left(\frac{\Lambda}{m_2}\right) \right] - \frac{\lambda_s^2 v^2 N_s}{16\pi^2} \left[ -2 + 2\log\left(\frac{\Lambda}{m_1}\right) + 2\log\left(\frac{\Lambda}{m_2}\right) \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \quad (12.47)$$

Ponovno se javljaju skalarni divergencije. Pretpostavimo sada sljedeće: da su skalarna vezanja povezana s fermionskim i to pomoću relacije:  $\lambda_f^2 = -\lambda_s$ , da su multiplikacijski faktori identični,  $N_s = n_f$ , te da skalari imaju istu masu:  $m_1 = m_2 = m_s$ .

Sumiranjem fermionskih i skalarnih doprinosa dobiva se:

$$\Delta M_H^2 :_{\text{ukupno}} = \frac{\lambda_f^2 N_f}{4\pi^2} \left[ (m_f^2 - m_s^2) \log\left(\frac{\Lambda}{m_s}\right) + 3m_f^2 \log\left(\frac{m_s}{m_f}\right) \right]. \quad (12.48)$$

Kvadratne divergencije su iščezle iz sume! Logaritamska divergencija još uvijek postoji, ali čakako je  $\Lambda = M_p$ , doprinos je mali. I one nestaju ako se pretpostavi da je  $m_s = m_f$ !

## 12.7. Fermionske mase u MSSM-u

Što se tiče *SM-a* leptona i kvarkova, situacija je upravo ona kao u *SM-u*, tj. njihove masene matrice moraju biti dijagonalizirane u okusnom prostoru na način:

$$m_e^{ff} = y_e^{ff} v_u, \quad m_u^{ff} = y_u^{ff} v_u, \quad m_d^{ff} = y_d^{ff} v_d. \quad (12.49)$$

Ipak, mase gornjeg i donjeg tipa su sada generirane s dvije različite *vakuumske očekivane vrijednosti* :  $v_u$  i  $v_d$ .

Sada bi se trebalo koncentrirati na spektar novih *fermiona MSSM-a*, to jest na *baždarine i higgsine*. Na granastoj razini *masa gluina* poprima "*mekane*" mase, mekana veličina generirana je mekanim lomom *SUSY-ja* i definira se na sljedeći način:

$$m_{\tilde{g}} = M_3. \quad (12.50)$$

Zbog loma elektroslabe simetrije *winoi i binoi* će se miješati s *higgsinima*. Razdvajajući neutralna i nabijena stanja, prvo je potrebno fokusirati se na neutralna polja.

Masena matrica neutralnih stanja u  $(-i\tilde{B}, -i\tilde{W}_3, \tilde{h}_d^0, \tilde{h}_u^0)$  bazi glasi:

$$M_N = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & -m_Z \sin \theta_w \cos \beta & m_Z \sin \theta_w \sin \beta \\ 0 & M_2 & m_Z \cos \theta_w \cos \beta & -m_Z \cos \theta_w \sin \beta \\ -m_Z \sin \theta_w \cos \beta & m_Z \cos \theta_w \cos \beta & 0 & -\mu \\ m_Z \sin \theta_w \sin \beta & -m_Z \cos \theta_w \cos \beta & -\mu & 0 \end{bmatrix}. \quad (12.51)$$

Matrica  $M_N$  je realna i simetrična, pa bi stoga mogla biti dijagonalizirana sa unitarnom matricom  $N$  na sljedeći način:

$$N^T M_N N^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^0}, m_{\chi_2^0}, m_{\chi_3^0}, m_{\chi_4^0}). \quad (12.52)$$

Rezultirajuća masena svojstvena stanja  $\chi_i^0$  nazivaju se *neutralinima*. Obično se uzima da je jedan od  $\chi_i^0$  *najlakša supersimetrična čestica (LSP)*, ona koja je stabilna zbog pretpostavke očuvanja *R-pariteta*. Ona se utjelovljuje kao ozbiljan kandidat za tamnu tvar.

Masene matrice za nabijena stanja  $\varphi^+ = (-i\tilde{W}^+, \tilde{h}_u^+)$  i  $\varphi^- = (-i\tilde{W}^-, \tilde{h}_d^-)$  se također miješaju preko masene matrice  $\varphi^- M_{\pm} \varphi^+$ :

$$M_{\pm} = \begin{bmatrix} M_2 & \sqrt{2}m_W \sin \beta \\ \sqrt{2}m_W \cos \beta & \mu \end{bmatrix}. \quad (12.53)$$

$M_{\pm}$  je dijagonalizirana s dvije unitarne matrice  $U$  i  $V$ :

$$U^* M_{\pm} V^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^{\pm}}, m_{\chi_2^{\pm}}), \quad (12.54)$$

gdje su svojstvena stanja  $\chi_1^\pm$  i  $\chi_2^\pm$  nazvana *charginima* i njihova masa iznosi (uvođenjem pokreta  $c_{2\beta} \equiv \cos 2\beta$ ):

$$m_{\chi_{1/2}^\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( M_2^2 + \mu^2 + 2m_W^2 \pm \left[ (M_2^2 - \mu^2)^2 + 4m_W^2 (m_W^2 c_{2\beta}^2 + M_2^2 + \mu^2 + 2M_{2\mu s_{2\beta}})^2 \right]^{1/2} \right). \quad (12.55)$$

## 12.8. Vezanja Higgsovog bozona u MSSM-u

### ➤ Vezanja Higgsovog bozona i vektorskog bozona

Izrazi koji predstavljaju vezanja između Higgsovih polja i baždarnih bozona u MSSM-u su dobijeni iz uobičajenog Higgsovog kinetičkog lagranžijana:

$$L_{EW} = D_\mu H_u^\dagger D^\mu H_u + D_\mu H_d^\dagger D^\mu H_d, \quad (12.56)$$

nakon eksplicitnog raspisa kovarijantne derivacije i provođenja kanonske rotacije skalarnih i vektorskih polja na način da se dobiju fizikalna polja. Najpoznatija vezanja su trilinearna i kvadrilinearna, i prikazana su pomoću sljedećih relacija (rabimo pokrete:  $g_Z = g/\cos \theta_W$  i  $g_W = g$ ):

$$\begin{aligned} W_\mu^\dagger W_\nu^\dagger h: & ig_W m_W \sin(\beta - \alpha) g_{\mu\nu}, & W_\mu^\dagger W_\nu^\dagger H: & ig_W m_W \cos(\beta - \alpha) g_{\mu\nu}, \\ Z_\mu Z_\nu h: & ig_Z m_Z \sin(\beta - \alpha) g_{\mu\nu}, & Z_\mu Z_\nu H: & ig_Z m_Z \cos(\beta - \alpha) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (12.57)$$

$$W_\mu^\pm H^\pm h: \pm i \frac{g_W}{2} \cos(\beta - \alpha) (p + p')_\mu, \quad W_\mu^\pm H^\pm H: \pm i \frac{g_2}{2} \sin(\beta - \alpha) (p + p')_\mu$$

$$W_\mu^\pm H^\pm A: \frac{g_W}{2} (p + p')_\mu,$$

$$Z_\mu h A: + \frac{g_Z}{2} \cos(\beta - \alpha) (p + p')_\mu, \quad Z_\mu H A: -i \frac{g_2}{2} \sin(\beta - \alpha) (p + p')_\mu,$$

$$Z_\mu H^\dagger H^-: -\frac{g_Z}{2} \cos 2\theta_W (p + p')_\mu, \quad \gamma^\mu H^\dagger H^-: -ie(p + p')_\mu. \quad (12.58)$$

Neka od ovih vezanja su izražena u izrazima sa dva kuta  $\beta$  i  $\alpha$ , te se mogu napisati kao funkcija fizikalnih masa rabeći sljedeću formulu:

$$\cos^2(\beta - \alpha) = \frac{M_h^2(m_Z^2 - M_h^2)}{M_A^2(m_H^2 - M_h^2)}. \quad (12.59)$$

### ➤ Vezanja Higgsovog bozona i fermiona

Vezanja između Higgsovog bozona i fermiona se mogu izvesti iz izraza za superpotencijal na osnovu relacije:

$$L_{\text{Yukawin}} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \bar{\Psi}_{iL} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Psi_{jL} + \text{h. c.} \right). \quad (12.60)$$

Uključivanjem superpotencijala i rabljenjem kiralnog projektora  $P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$  možemo ponovno napisati *Yukawin lagranžijan* dane fermionske generacije kao:

$$L_{\text{Yukawin}} = -\lambda_u (\bar{u}_L u H_u^0 - \bar{u}_L d H_u^\dagger) - \lambda_d (\bar{d}_L d H_d^0 - \bar{d}_L u H_d^-) + \text{h. c.} \quad (12.61)$$

Nakon slamanja elektroslabe simetrije, generiraju se fermionske mase. One su povezane s fermionskom *Yukawa interakcijom* i odgovarajućom *Higgsom vakuumske očekivanom vrijednosti*, kako je prikazano u sljedeća dva izraza:

$$\lambda_u = \frac{m_u \sqrt{2}}{v \sin \beta}, \quad \lambda_d = \frac{m_d \sqrt{2}}{v \cos \beta}. \quad (12.62)$$

Konačno, rotirajući polja  $H_u$  i  $H_d$  u njihova fizikalna stanja, može se dobiti sljedeći *Yukawin lagranžijan*:

$$L_{\text{YUKAWA}} = -\frac{m_u}{v \sin \beta} [\bar{u} u (H \sin \alpha + h \cos \alpha) - i \bar{u} \gamma^5 u A \cos \beta] - \frac{m_d}{v \sin \beta} [\bar{d} d (H \sin \alpha - h \cos \alpha) - i \bar{d} \gamma^5 d A \sin \beta] + \frac{1}{v \sqrt{2}} \left[ H^\dagger \bar{u} \left( \frac{m_u}{\tan \beta} (1 - \gamma^5) + m_d \tan \beta (1 + \gamma^5) \right) d + \text{h. c.} \right], \quad (12.63)$$

gdje  $V_{ud}$  u slučaju kvarkova predstavlja *CKM* matrični element. *Higgsova vezanja* koja se odnose na fermione su zadana putem sljedećih relacija:

$$G_{\text{huu}} = i \frac{m_u \cos \alpha}{v \sin \beta}, \quad G_{\text{Huu}} = i \frac{m_u \sin \alpha}{v \sin \beta}, \quad G_{\text{Auu}} = \frac{m_u}{v} \cot \beta \gamma^5, \\ G_{\text{hdd}} = i \frac{m_d \sin \alpha}{v \cos \beta}, \quad G_{\text{Hdd}} = i \frac{m_d \cos \alpha}{v \cos \beta}, \quad G_{\text{Add}} = \frac{m_d}{v} \tan \beta \gamma^5, \quad (12.64)$$

$$G_{\text{H}^\dagger \text{u}\bar{d}} = -\frac{i}{\sqrt{2}v} V_{ud} \left[ \frac{m_u}{\tan \beta} (1 + \gamma^5) + m_d \tan \beta (1 - \gamma^5) \right], \\ G_{\text{H}^\dagger \text{u}\bar{d}} = -\frac{i}{\sqrt{2}v} V_{ud}^* \left[ \frac{m_u}{\tan \beta} (1 - \gamma^5) + m_d \tan \beta (1 + \gamma^5) \right]. \quad (12.65)$$

➤ *Vezanja Higgsovog bozona s samim sobom*

Vezanja između tri ili četiri polja *Higgsovog bozona* se dobijaju iz skalarnog potencijala prođenjem uzastopnih derivacija, koje su prikazane pomoću sljedećih relacija:

$$\lambda_{ijk} = \frac{\partial^3 V}{\partial H_i \partial H_j \partial H_k} \Big|_{\langle h_u^0 \rangle = v_u/\sqrt{2}, \langle h_d^0 \rangle = v_d/\sqrt{2}, \langle h_{u/d}^\pm \rangle = 0},$$

$$\lambda_{ijkl} = \frac{\partial^4 V}{\partial H_i \partial H_j \partial H_k \partial H_l} \Big|_{\langle h_u^0 \rangle = v_u/\sqrt{2}, \langle h_d^0 \rangle = v_d/\sqrt{2}, \langle h_{u/d}^\pm \rangle = 0}, \quad (12.66)$$

i izražavanja *Higgsovih stanja* preko linearnih kombinacija fizikalnih stanja  $h, H, A, H^\pm$ . Neutralne trilinearne veze *Higgsovog bozona* mogu biti zapisane u jedinicama  $\lambda_0 = -im_Z^2/v$ , kao:

$$\begin{aligned} \lambda_{hhh} &= 3\cos 2\alpha \sin(\beta + \alpha), \\ \lambda_{Hhh} &= 2\sin 2\alpha \sin(\beta + \alpha) - \cos 2\alpha \cos(\beta + \alpha), \\ \lambda_{HHH} &= 3\cos 2\alpha \cos(\beta + \alpha), \\ \lambda_{HHh} &= -2\sin 2\alpha \cos(\beta + \alpha) - \cos 2\alpha \sin(\beta + \alpha), \\ \lambda_{HAA} &= \cos 2\beta \cos(\beta + \alpha), \\ \lambda_{hAA} &= \cos 2\beta \sin(\beta + \alpha). \end{aligned} \quad (12.67)$$

Trilinearne konstante vezanja koje uključuju  $H^\pm$  bozone,  $\lambda_{HH^+H^-}$  i  $\lambda_{hH^+H^-}$ , su u relaciji s konstantama vezanja  $H^\pm$  pseudoskalaranog *Higgsovog bozona* i s konstantama vezanja *neutralnog CP-paranog Higgsovog bozona* i s konstantama vezanja elektroslabih bozona i to na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \lambda_{HH^+H^-} &= -\cos 2\beta \cos(\beta + \alpha) + 2c_W^2 \cos(\beta - \alpha) = \lambda_{HAA} + 2c_W^2 g_{HVV}, \\ \lambda_{hH^+H^-} &= \cos 2\beta \sin(\beta + \alpha) + 2c_W^2 \sin(\beta - \alpha) = \lambda_{hAA} + 2c_W^2 g_{hVV}. \end{aligned} \quad (12.68)$$

Prilično su brojna kvartična vezanja između *Higgsovih bozona u MSSM-u*. Kvadrilinearna vezanja između  $h$  ili  $H$  bozona, u jedinicama,  $\lambda_0/v = -im_Z^2/v^2$ , su predstavljena pomoću sljedeće relacije:

$$\lambda_{hhhh} = \lambda_{HHHH} = 3\cos^2 2\alpha. \quad (12.69)$$

### 12.9. Radijativne korekcije u MSSM-u

Kao što se do sada moglo vidjeti, *MSSM* sadrži prošireni *Higgsov sektor* u usporedbi s *SM-om*, koji se može opisati s nekoliko parametara na granastoj razini i osim toga njegov je spektar različito ograničen. Točnije, pokazali smo da se za najlakši neutralni parni *CP Higgsov bozon* očekuje da ima masu manju od  $Z$ -bozona. Može se približiti ovoj gornjoj granici  $M_h \approx m_Z$  kada je  $M_A > m_Z$  i  $|\cos 2\beta| \approx 1$  koji podrazumijevaju velike vrijednosti za  $\tan\beta$  ( $\beta \approx \pi/2$ ). U ovom



konkretnom slučaju gdje je pseudoskalarni *Higgsov bozon* težak, te gdje je  $M_A > m_Z$ , kut miješanja  $\alpha$  se približava vrijednosti  $\alpha \approx \beta - \pi/2$  koja ima veliki utjecaj zbog smanjene konstante vezanja najlakšeg parnog *CP Higgsovog bozona s fermionima*, te teži ka jedinici, tj.  $h$  ima sličnu vrijednost kao i u *SM-u*: tako da se ovaj režim naziva granicom razdvajanja. Ovaj najlakši *Higgsov bozon u MSSM-u* s masom približnom  $m_Z$  trebao je biti otkriven već u *LEP2*. Međutim, učinci kvantne petlje mogu potisnuti prema gore svoju masu znatno iznad gornje granice na granastoj razini. Ove radijativne korekcije objašnjavaju zašto *LEP2* nije uočio najlakše *parno CP Higgsovo stanje*. Zapravo,  $h$ -stanje slično kao u *SM-u* sadrži značajno povezivanje s top kvarkom i njegovim adjungiranim supersimetričnim skalarom. Stoga očekujemo potencijalno velike učinke petlje koji bi mogli biti uključeni u opis *Higgsovog sektora MSSM-a*. Kvantne korekcije za koje su stop skvarkovi degenerirani u masi je lako izračunati uz sljedeće pretpostavke- u limesu  $M_A \gg m_Z$ ,  $\tan \beta > 1$ :

- i ako su mase stop skvarkova degenerirane,

-i ako se stop skvarkovi ne miješaju, što je ispunjeno ako je:  $X_t = A_t - \mu \cot \beta \ll M_s$ , gdje je supersimetrična skala definirana kao  $M_s = \sqrt{m_{\tilde{\tau}_1}/m_{\tilde{\tau}_2}}/2$ ,

- i ako je  $M_h \ll m_\tau, m_{\tilde{\tau}_1}$ , te bi se tada mogao zanemariti vanjski impuls njegove *vlastite energije* i u zaključku bi se mogli rabiti dijagrami petlji prikazani na *slici 12.10* prilagođavajući ih do gornjih petlji.

Također bi trebalo uočiti još nekoliko pojedinosti:

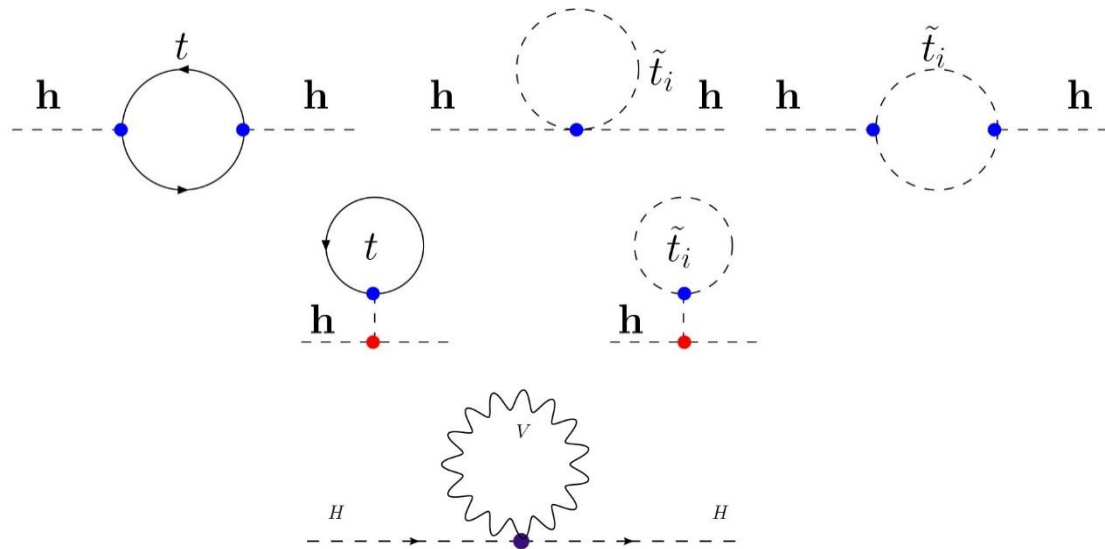
- da se za graničnu vrijednost uzme da  $M_A \rightarrow 0$  i da je  $\tan \beta \gg 1$  ( $M_h^{\max}$ ),

- da važi da je  $m_{\tilde{\tau}_1} = m_{\tilde{\tau}_2} = m_{\tilde{\tau}}$ ,

- da se odrede jednostavna vezanja za:  $h\tilde{t}\tilde{t} \rightarrow h\tilde{t}\tilde{t} \sim \lambda_t$ ,  $h\tilde{t}\tilde{t}^* \tilde{t} \sim \lambda_t^2$  s  $\lambda_t = \sqrt{2}m_t/v$ ,

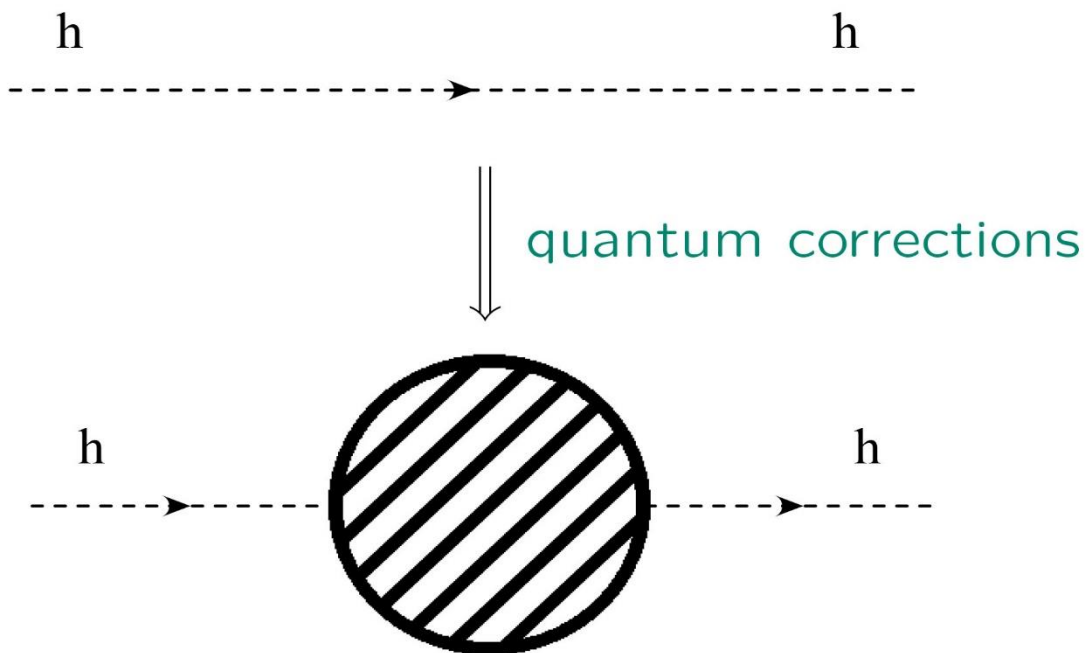
- te da se radi u graničnim vrijednostima  $M_h \ll m_t, m_{\tilde{\tau}}$ .

Osim funkcija s dvije točke, koje uključuju *fermionske / skalarne petlje*, postoje i *tadpole* doprinosi (*korekcije kontračlanova*), te se prikazuju i definiraju na istoj *slici 12.10.*, kao i pomoću relacija (12.74) i (12.75) na sljedeći način:



Slika 12.10: Korekcije kontračlanova

Ukupni Higgsov propagator se dobija uključenjem svih kvantnih korekcija Higgsovog propagatora, što je prikazano slikom 12.11:



Slika 12.11. Higgsov propagator

Stoga inverzni propagator ima oblik:

$$-i(q^2 - m^2) \rightarrow -i(q^2 - m^2 + \tilde{\Sigma}_h(q^2)), \quad (12.70)$$

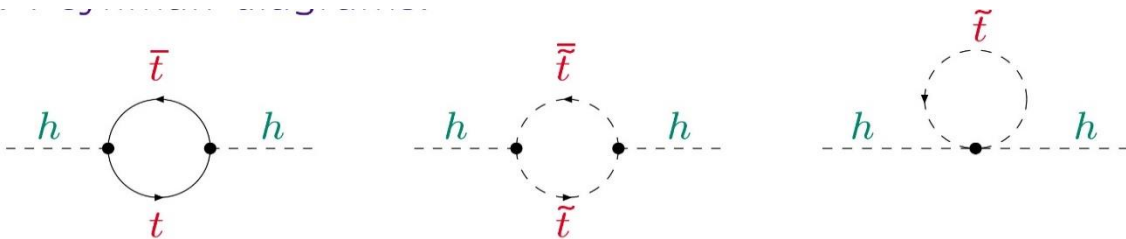
gdje  $\tilde{\Sigma}_h(q^2)$  predstavlja renormaliziranu *Higgsovu vlastitu energiju*.

Doprinosi radijativnih korekcija sadrže doprinose *SM-a* i *MSSM-a* prikazane na slici (12.71):

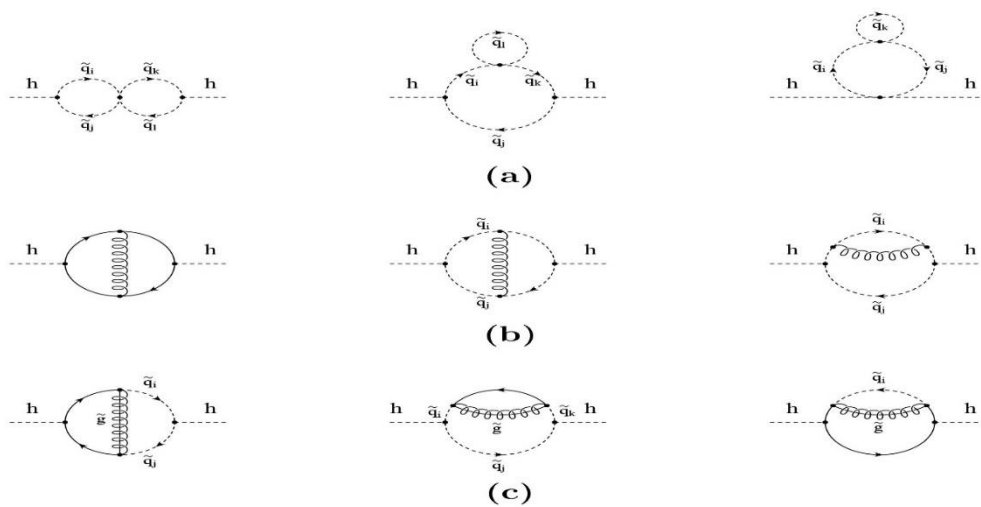
$$\text{[Hatched Circle]} = \Sigma_h q^2 = \Sigma_h(q^2)^{(1)} + \Sigma_h(q^2)^{(2)} + \dots \quad (12.71)$$

$\text{[Hatched Circle]}$  sve *MSSM-e* čestice doprinose; najveći doprinosi dolaze od  $t/\tilde{t}$  sektora

Vodeći doprinosi na razini prve i druge petlje dani su dijagramima na slikama 12.12. i 12.13.:



Slika 12.12. Feynmanovi dijagrami na razini prvog reda petlje



Slika 12.13. Feynmanovi dijagrami na razini drugog reda petlje. Pod a) su prikazani čisti skalarni dijagrami, pod b) dijagrami s razmjenom gluona i pod c) dijagrami s razmjenom gluina

Miješanje CP parnog Higgsovog bozona:

Propagator i masena matrica na granastoj razini je dijagonalan:

$$\begin{pmatrix} q^2 - m_H^2 & 0 \\ 0 & q^2 - m_h^2 \end{pmatrix}, \quad (12.72)$$

Propagator i masena matrica višeg reda dobija off-dijagonalne članove:

$$M_{hH}^2(q^2) = \begin{pmatrix} q^2 - m_H^2 + \Sigma_{HH}(q^2) & \Sigma_{Hh}(q^2) \\ \Sigma_{hH}(q^2) & q^2 - m_h^2 + \Sigma_{HH}(q^2) \end{pmatrix}, \quad (12.73)$$

$\Sigma_{ij}(q^2)$  predstavlja renormaliziranu *Higgsovu vlastitu energiju*.

Zbog toga se *CP*-parna polja  $h$  i  $H$  miješaju. Svojstvena stanja masene matrice označimo s  $h_i$ . Svojsvene vrijednosti masene matrice pridružene poljima  $h_i$  imaju kompleksne korijene čiji realni dijelovi predstavljaju mase  $h_i$  polja, a imaginarni dijelovi njihove širine raspada,  $M_i^2 = M_i^2 - iM_i\Gamma_i$ .

Sada se možemo vratiti na korekcije kontračlanova na *slici 12.10.*, te prikazati izračun za funkciju dvije točke na način na koji je:

$$\Delta M_h^2 \Big|_2 = \frac{3\lambda_t^2}{4\pi^2} \left[ (m_t^2 - m_{\tilde{t}}^2) \log\left(\frac{\Lambda}{m_t}\right) + 3m_t^2 \log\left(\frac{m_{\tilde{t}}}{m_t}\right) \right]. \quad (12.74)$$

Za *tadpole* doprinose, izračun je veoma jednostavan i prikazan je pomoću sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \Delta M_h^2 \Big|_1 &= iN_f \left( \frac{-iM_H^2}{v} \right) \frac{i}{-M_H^2} \left( -i \frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \right) (-4m_i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_f^2} + \\ &iN_s \left( \frac{-iM_H^2}{v} \right) \frac{i}{M_H^2} (iv\lambda_s) i(-4m_i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_s^2} = \frac{4N_f m_f \lambda_f}{\sqrt{2}v16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{y}{y+m_f^2} + \frac{N_s \lambda_s}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{y}{y+m_s^2}. \end{aligned} \quad (12.75)$$

Uzimajući da je  $\lambda_s = -\lambda_f^2 = -2m_f^2/v$  i da je  $\int \dots = \Lambda^2 - m^2 \log(\Lambda^2/m^2)$ , dobija se da je:

$$\Delta M_h^2 \Big| := -\frac{3\lambda_t^2}{4\pi^2 v^2} \left[ m_t^2 \log\left(\frac{\Lambda}{m_t}\right) - m_{\tilde{t}}^2 \log\left(\frac{\Lambda}{m_{\tilde{t}}}\right) \right]. \quad (12.76)$$

Ukupna korekcija mase  $h$  bozona je tada zadana kao:

$$\Delta M_h^2 = \frac{3m_t^4}{2\pi^2 v^2} \log \frac{m_{\tilde{t}}}{m_t} = \frac{3g^2}{2\pi^2} \frac{m_t^4}{M_W^2} \log \frac{m_{\tilde{t}}}{m_t}. \quad (12.77)$$

Ona ovisi o  $m_t^4$  i od  $\log(m_{\tilde{t}}^2/m_t^2)$ , te je velika za  $M_h^{\max} \rightarrow M_Z + 40 \text{ GeV}$ ! To objašnjava zašto  $h$  bozon nije primjećen u *LEP2 (Lorentzovom invarijantnom faznom prostoru)*.

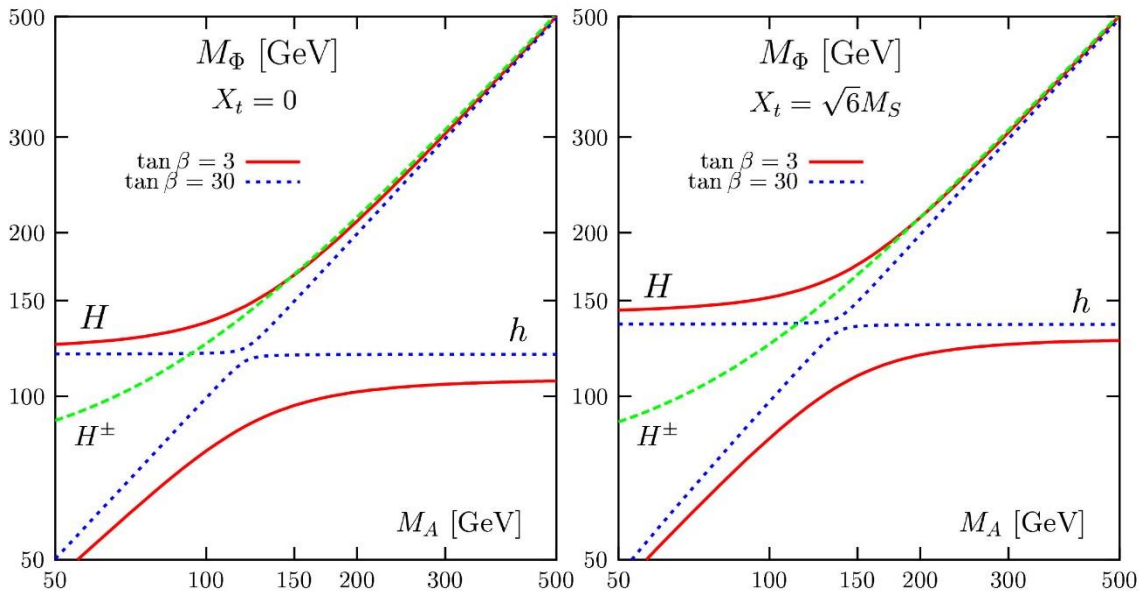
Radijativne korekcije (RC) su veoma važne u Higgsovom sektoru MSSM-a:

Velika aktivnost za račun RC u posljednjih 15 godina

- U potpunosti su izračunate korekcije na razini jedne petlje:
  - parametri  $\mu$ ,  $A_t$  i  $A_b$  se pojavljuju na *subleading* razini
  - masa  $h$  bozona je maksimalna (minimalna) za  $A_t \sim 2M_{\tilde{Q}}(0)$ .
- Približni izračun za dominantnu *QCD-ju* RC-ola na razini dvije petlje:
  - dominantna *QCD-ju* RC-ija je velika, ali apsorbirana zamjenom  $m_t^{\text{pole}} \rightarrow m_t^{\overline{\text{MS}}}$
  - *Yukawine korekcije* su prilično male i u granici su vrijednosti od  $M_h = 0$ .

Nedavno su dovršene korekcije u pristupu efektivnog potencijala:

- $O(\alpha_t \alpha_s)$ : uključujući miješanje *skvarkova* i *gluino petlje*.
- $O(\alpha_t^2)$ : uključujući miješanje i  $O(\alpha_b, \alpha_s)$  i  $O(\alpha_\tau, \alpha_s)$ .



Slika 12.14.. Radijativne korekcije

### Renormalizacijske grupne metode:

Rabi se metoda *renormalizacijsko- grupne (RG) evolucije*. Kada je supersimetrična skala,  $M_S$ , daleko iznad elektroslabe skale, za *kvartično skalarno vezanje* uzima se vrijednost:

$$\lambda(M_S) = \frac{1}{32} \cos^2 2\beta \left( g'^2(M_S) + g^2(M_S) \right). \quad (12.78)$$

Masa Higgsova  $h$  se standardnom metodom računa iz njegovog kvartičnog vezanja na elektroslaboj skali, koja se dobija *RG evolucijom*  $\lambda(M_s)$  do *SM skale* *RG jednadžbama SM-a*. Te tehnike pružaju učinkovit metod za identifikaciju najvažnijih doprinosa radijativno korigiranih *Higgsovih masa*.

Metode efektivnog potencijala:

Pristup učinkovitom potencijalu u jednoj petlji:

Skalarni potencijal jedne petlje na općenitoj skali  $\theta$  iznosi:

$$V^{(1)}(Q) = V^{(0)}(Q) + \delta V^{(1)}(Q),$$

$$\delta V^{(1)}(Q) = \frac{1}{64\pi^2} s_{Tr} M^4(h) \left( \ln \frac{M^2(h)}{\theta^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (12.79)$$

gdje je  $M$  masena matrica koja ovisi o *Higgsovom polju*.

Radijativne korekcije bez stop-miješanja

Dobijaju se sljedeće relacije za *mase top i stop kvarka*:

$$m_t = \lambda_t^2 |h_u^0|^2,$$

$$m_{\bar{t}} = \lambda_{\bar{t}}^2 |h_u^0|^2 + \tilde{m}^2, \quad (12.80)$$

gdje  $\tilde{m}$  predstavlja supersimetrični izraz mekog loma masenog izraza, dok se  $D$ -izrazi mogu zanemariti budući da se množe s baždarnim elektroslabim vezanjima. Nakon ovoga, razmatramo samo propagiranje *vršnog kvarka* i degeneriranih stop u petlji u (12.79). Množeći faktore, dobijaju se sljedeće korekcije:

$$\delta V_{+t,\bar{t}}^{(1)} = \frac{2}{16\pi^2} \left( -(\lambda_t^2 |h_u^0|^2)^2 \left[ \ln \frac{\lambda_t^2 |h_u^0|^2}{\theta^2} - \frac{3}{2} \right] + (\lambda_{\bar{t}}^2 |h_u^0|^2 + \tilde{m}^2)^2 \left[ \ln \frac{(\lambda_t^2 |h_u^0|^2 + \tilde{m}^2)^2}{Q^2} - \frac{3}{2} \right] \right). \quad (12.81)$$

Očito da u slučaju egzaktno supersimetrije radijativne korekcije nestaju. Imajući sada drugačiji skalarni potencijal, da bi se izračunala manja masa *Higgsovog bozona*, važno je izvršiti točno ono što smo prethodno radili, tj. *minimalizirati* skalarni potencijal tako da se javlja elektroslaba simetrija i izračunava skalarna masa.

Prvo se može uvesti relacija  $\partial V / \partial h_u^0$  u ovo ekstremno ograničenje ovisnosti na uopćenju skali  $\theta$ , koja će se nakon renormalizacije apsorbirati od strane  $M_{H_u}$ . Nakon toga možemo izračunati drugu derivaciju skale s jednom petljom poboljšanog skalarnog potencijala koji daje skalarnu matricu kvadrata mase. Opet, rotirajući i razvijajući *Higgsova dubletna polja* oko njihove *vakuumske očekivane vrijednosti*, dobijaju se sljedeće pozitivne korekcije:

$$\Delta M_{22} = \frac{3\lambda_t^2 m_t^2}{4\pi^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}}^2}{m_t^2}. \quad (12.82)$$

Radijativne korekcije s stop-miješanjem:

Sada se mogu uvesti ne-išezavajuća miješanja između  $\tilde{t}_R$  i  $\tilde{t}_L$  uvođenjem ne nulte vrijednosti  $X_t$ . Masene vrijednosti stop kvarkova sada ovise zajedno o  $h_u^0$  i  $h_d^0$ , te se mogu prikazati pomoću sljedeće relacije:

$$m_{\tilde{t}_{1/2}}^2 = \lambda_t^2 |h_u^0|^2 + \frac{1}{2} \left( m_{\tilde{t}_L}^2 + m_{\tilde{t}_R}^2 \pm \sqrt{(m_{\tilde{t}_L}^2 - m_{\tilde{t}_R}^2)^2 + 4\lambda_t^2 |A_t h_u^0 - \mu h_d^{0*}|^2} \right). \quad (12.83)$$

Adjungirani doprinosi efektivnog potencijala na razini jedne petlje su:

$$\delta V_{+t,\tilde{t}}^{(1)}(Q) = \frac{3}{32\pi^2} \left( -2(\lambda_t^2 |h_u^0|^2)^2 \left[ \ln \frac{\lambda_t^2 |h_u^0|^2}{Q^2} - \frac{3}{2} \right] + m_{\tilde{t}_1}^4(h) \left[ \ln \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{Q^2} - \frac{3}{2} \right] \right). \quad (12.84)$$

Dva uvjeta minimiziranja  $\partial V / \partial h_{u/d}^0$  su modificirana, dok druga derivacija u potencijalu s jednom petljom daje korekciju  $2 \times 2$  masene matrice.

$$\Delta M_S^2 = \begin{pmatrix} \Delta M_{11}^2 & \Delta M_{12}^2 \\ \Delta M_{21}^2 & \Delta M_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad (12.85)$$

s

$$\begin{aligned} \Delta M_{11}^2 &= \frac{3G_F m_t^4}{2\sqrt{2}\pi^2 \sin^2 \beta} \left[ \frac{\mu(X_t)}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} \right]^2 \left( 2 - \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 + m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} \right), \\ \Delta M_{12}^2 &= \frac{3G_F m_t^4}{2\sqrt{2}\pi^2 \sin^2 \beta} \frac{\mu(X_t)}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} + \frac{A_t}{\mu} \Delta M_{11}, \\ \Delta M_{22}^2 &= \frac{3G_F m_t^4}{2\sqrt{2}\pi^2 \sin^2 \beta} \left[ \ln \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^2}{m_t^2} + \frac{A_t X_t}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} \right] + \left( \frac{A_t}{\mu} \right)^2 \Delta M_{11}. \end{aligned} \quad (12.86)$$

Mase neutralnih parnih *CP Higgsovih bozona* će sada ovisiti o tim izrazima za korekcije petlje  $\Delta M_{ij}$ .

### 13. Zaključak

Predmet ovog diplomskog rada je stabilnost *Higgsove mase* u *SM-u* i *MSSM-u*.

U prvom dijelu rada izložena su osnove *SM-a*, Yang-Millsovih teorija, perturbativnog računa, spontanog loma simetrije, lagranžijan *SM-a* i pripadna *Feynmanova pravila*. Te razlozi zašto se smatra da *SM* ne može biti potpuna teorija.

U drugom dijelu rada data je motivacija za uvođenje supersimetrije, posebice problem baždarne hijerarhije, predviđanje gornje granice na *Higgsovu masu*, *ujedinjenje konstanti vezanja*. Dat je i kratak uvod u supersimetrije, odnosno *MSSM*, uključivši *Coleman-Mandulin no-go teorem* i njegovo zaoblaženje u supersimetrijama, opisana je u općem smislu supersimetrična algebra, zatim je opisano rješenje problema kvadratne divergencije *Higgsovog bozona*, te su definirane renormalizacijske grupne jednačbe, kao i analiza *SUSY* invarijantnosti za primjeru bezmasenog *Wess-Zumino modela*, te oblik interakcija u općem kiralnom supermultipletu, lagranžijan za baždarne supermultiplete, te na kraju opći oblik *SUSY* lagranžijana. Dati su i primjeri i opisi i lagranžijani i *Feynmanova pravila* *SUSY* teorija: za *SUSY QED*, za *SUSY QCD*, za *MSSM* (za *MSSM* nije dan potpun skup *Feynmanovih pravila*). Dat je opis renormalizacijskih grupnih jednačbi, te su uspoređeni rezultati renormalizacijskih grupnih jednačbi za *SM* i *MSSM*. Uveden je pojam renormalizacijskih grupnih invarijanti i objašnjena njihova uloga u praksi.

Treći dio se bavi *Higgsovim sektorom*. Detaljnije je opisan *Higgsov sektor* *MSSM-a*. Date su masene matrice *Higgsova* u *MSSM-u* na granastoj razini. Opisani su raspad *Higgsova* na fermione i baždarne bozone, na fotone i na gluone. Opisan je nastanak *Higgsovog bozona* u sudarivačima: u  $e^+e^-$  sudarima i u hadronskim sudarima. Opisana je vlastita energija *Higgsovog bozona*. Dat je popis *Higgsovih vezanja* u *MSSM-u*. Opisane su okvirno radijativne korekcije za *Higgsovu masu* u *SM-u* i *MSSM-u*. Naveden je i ukratko opisan niz metoda koje se mogu rabiti za izračun radijativnih korekcija, važnih za nalaženje *Higgsove mase*. Istaknuto je da glavni doprinosi tvorbi *Higgsova* i raspadu *Higgsova* dolaze u *SM-u* od procesa koji uključuju vezanja H na W i Z i *t*-kvarka na gluone. Procesi u kojima se H vezuje na fotone u petljama nisu dominantni. Što se tiče radijativnih korekcija *Higgsovoj masi* u *SM-u*, vodeći je *top-kvarkovski doprinos*.

Na kraju možemo zaključiti sljedeće:

U *SM-u* je *Higgsova masa* slobodan parametar koji se može prikazati preko kvartične konstante vezanja i vakuumske očekivane vrijednosti *Higgsovog polja*. Radijativne korekcije *Higgsovog*



*polja* su kvadratične, pa ako postoji fizika izvan *SM-a* s masivnim česticama koje se vezuju na *Higgs*, tada njegova masa dobija velike vrijednosti osim ako je zaštićena nekom dodatnom simetrijom. Većina proširenja *SM-a* ima takve čestice. *SM* sam za sebe nema problem *baždarne hijerarhije*.

*SM* očito nije potpuna teorija, na što ukazuju eksperimenti s neutrinjskim oscilacijama koje pokazuju da neutriini imaju masu, te kozmološke opservacije npr. koje ukazuju da pored normalne opservabilne tvari mora postojati jos 5 puta viša tzv. tamna tvar, koja predstavlja asimetriju tvari i antitvari, te koja zahtjeva da postoje dodatni izvori CP narušenja izvan *SM-a*, te tamna energija kojom se opisuje energija vakuuma i kojom se opisuje opažanje trenutačne akceleracije ekspanzije svemira. Nadalje, postoji nekoliko eksperimentalnih veličina čije eksperimentalne vrijednosti odstupaju nekoliko standardnih devijacija od predviđanja *SM-a*.

*SUSY* je jedan od kandidata koji bi mogao objasniti gore navedene nedostatke *SM-a*, međutim za sada nema eksperimentalnih naznaka da postoji.

Kako se *SUSY* teorija definira? Definira se obično na nekoj visokoj energiji, fizičari je vole definirati na energiji *ujedinjene konstante vezanja*  $g_s = g = g'$  na osnovu  $SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_C$ . Na toj skali se postavljaju zadani parametri *MSSM-a* (ili nekog drugog) *SUSY Modela*. Popularni modeli su i *m-SUGRA* i *CMSSM*.

Postupak je sljedeći:

- Prvo se krene od parametara *SM-a* na energiji  $E = M_Z$  (*Z* je masa *Z* bozona)
- Zatim se primjenjuju *Renormalizacijske Grupne Jednadžbe SM-a* do tipične skale *MSSM-a* od nekoliko TeVa
- Iz te skale se na parametre *SM-a* primjenjuju *RG jednadžbe* skale *MSSM-a* do skale *Ujedinjenja Konstante Vezanja* ( $g_s = g_2 = g_1'$ )
- Na toj skali se definiraju svi parametri *MSSM-a* ( $\Lambda \geq 0$ )
- Svi novi parametri *MSSM-a* i parametri *SM-a* koji su sada dio parametara *MSSM-a* se evoluiraju od skale *Ujedinjenja Konstante Vezanja* ( $\sim 2 \cdot 10^{16}$  GeVa) do *SUSY* skale  $\sim$  nekoliko TeVa i to nam definira kompletan skup parametara *MSSM-a*.
- Ispod skale *MSSM-a* do skale *Z* bozona primjenjuju se *Renormalizacijske Grupne Jednadžbe za SM*.

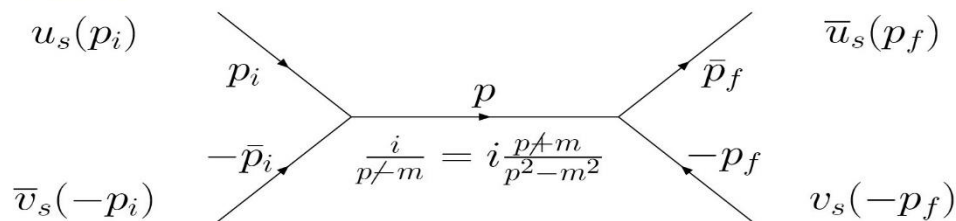
Iz ovoga se može zaključiti da je unutar *MSSM-a* Higgsova masa definirana preko supersimetričnih parametara. Glavni doprinosi radijativnih korekcija *Higgsovoj masi* su doprinosi top kvarka i stop skvarka.

U *MSSM-u* se hijerarijski problem, tj. problem stabilnosti *Higgsove mase* počinje javljati kada su supersimetrične čestice koje se vezuju na *Higgsov bozon* teže od  $\sim 10\text{TeV}$ . Drugim riječima, kada je supersimetrična skala veća od  $10\text{TeV}$ .

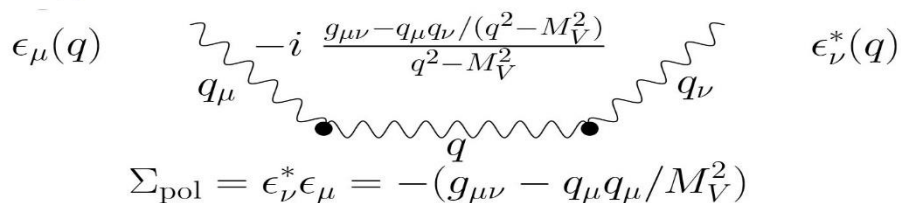
## Dodaci

### A Osnovna pravila u izračunu

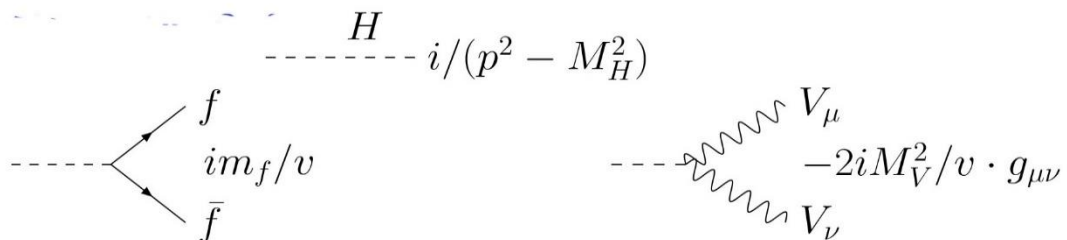
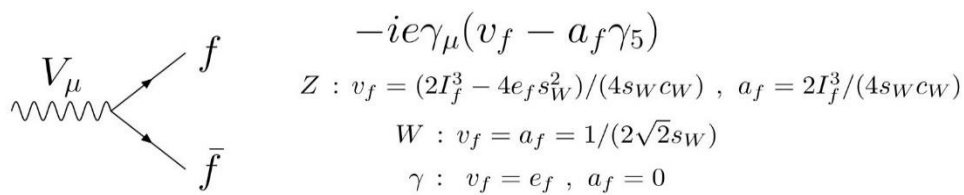
#### A1 Vrhovi (verteksi) i propagatori (pravila za fermione i za baždarne bozone)



$$\sum_s u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad , \quad \sum_s v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m$$



Slika A1.1. Feynmanovi dijagrami i pravila za fermione i baždarne bozone



Slika A1.2. Propagatori i vrhovi za fotone i Higgsov bozon

**A2 Udarni presjek i širina raspada:**

$$d\sigma = \frac{|M(i_1 i_2 \rightarrow f_1 \dots f_n)|^2}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \left( \prod_n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2e_f} \right) (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_i - \Sigma p_f) S$$

*Slika A2.1. Diferencijalni udarni presjek za  $2 \times n$  proces  $i_1 i_2 \rightarrow f_1 \dots f_n$*

$$dPS_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3 p_1}{e_1} \frac{d^3 p_2}{e_2} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2)$$

$$\int \frac{d^3 p_2}{e_2} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) = \frac{1}{e_2} \delta(e_a + e_b - e_1 - e_2)$$

with :  $|\vec{p}_2| = |\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1|$  and  $e_2^2 = |\vec{p}_2|^2 + m_2^2$

and  $d^3 p_1 = d\Omega |p_1|^2 d|p_1|$  with  $e_1^2 = |\vec{p}_1|^2 + m_1^2$

*Slika A2.2. Izračun faznog prostora za proces raspada dva tijela  $a + b \rightarrow f_1 + f_2$*

### A3 Dirakologija: Kontraksije i tragovi $\gamma$ matrica

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad \not{p} = p_\mu\gamma^\mu$$

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{and} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

$$\text{Tr}(\mathbf{1}) = 4, \quad \text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma_5) = 0$$

$$\text{Tr}(A_1A_2) = \text{Tr}(A_2A_1), \quad \text{Tr}(A_1A_2\cdots A_N) = \text{Tr}(A_2\cdots A_NA_1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\nu &= 2g_\mu^\nu - \gamma_\mu\gamma^\nu \Rightarrow \gamma^\mu\gamma_\mu = \delta_\mu^\mu = 4 \\ \gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu &= \gamma^\mu(2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu\gamma_\nu) = 2\gamma_\nu - 4\gamma_\nu = -2\gamma_\nu \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)(2g_\mu^\rho - \gamma_\mu\gamma^\rho) \\ &= 4g^{\nu\rho} - 2\gamma^\nu\gamma^\rho - 2\gamma^\nu\gamma^\rho + 4\gamma^\nu\gamma^\rho = 4g^{\nu\rho} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \text{Tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu}\text{Tr}(\mathbf{1}) - \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \Rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}) &= \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n} \gamma^5 \gamma^5) = (-1) \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^5 \gamma^{\mu_n} \gamma^5) \\ &= (-1)^n \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) \\ &\Rightarrow \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma_5) = \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_5) = \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = 0$$

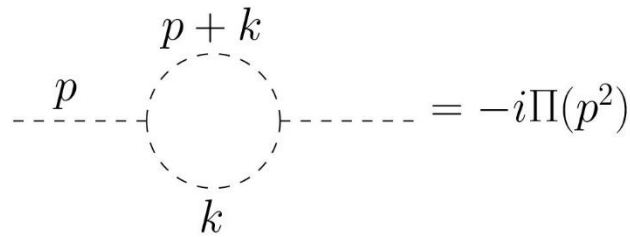
$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\alpha\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) = (1/4) \text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\alpha) \\ &= -(1/4) \text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma_5) = -\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$$

Slika A3.1. Dirakologija: Kontraksije i tragovi  $\gamma$  matrica

#### A4 Izračun integrala na razini petlje



Slika A4.1. Izračunavanje integrala petlje putem unutarnjeg impulsa :  $\int d^4 k/(2\pi)^4$

$$-i\Gamma = (ig)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma = ig^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} \frac{1}{k^2 - m^2}$$

$$\Gamma = ig^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2pkx + p^2x - m^2)^2}$$

$$\Gamma = ig^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + p^2x(1-x) - m^2)^2}$$

$$\Gamma = -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - p^2x(1-x) + m^2)^2}$$

$$\Gamma = -\frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty y dy \frac{1}{(y - p^2x(1-x) + m^2)^2}$$

Slika A4.2. Izračun integrala fermionskih petlji, uporaba Feynmanove parametrizacije, shift varijabli, Wickove rotacije i polarnih koordinata

## B Notacije i konvencije

### B1 Generatori u anti-fundamentalnim reprezentacijama

$$\psi'_D(\Lambda x) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\psi_D(x) .$$

$$\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) \\ \bar{\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\alpha^\beta &= \left( e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \right)_\alpha^\beta , \\ (M^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} &= \left( e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} \right)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} , \\ (M^{-1T})^\alpha_\beta &= \left( e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \right)_\beta^\alpha , \\ (M^{*-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= \left( e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}} \right)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} &= 2i\sigma_{\mu\nu} \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\sigma}^{\rho\sigma} &= -2i\bar{\sigma}_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Slika B1.1. Diracovi spinori, M matrice i  $\sigma^{\mu\nu}$  i  $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$  generatori Lorentzove grupe

## B2 Bilinearni kvantiteti

$$\psi_\alpha \chi_\beta = -\chi_\beta \psi_\alpha .$$

$$\psi \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = \psi^1 \chi_1 + \psi^2 \chi_2 = \psi_2 \chi_1 - \psi_1 \chi_2 .$$

$$\bar{\psi} \bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} .$$

$$\begin{aligned} \psi \sigma^\mu \bar{\chi} &= \psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} , \\ \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \chi &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \chi_\alpha , \\ \psi \sigma^{\mu\nu} \chi &= \psi^\alpha (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \chi_\beta , \\ \bar{\psi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \chi &= \chi \varphi , \\ \bar{\varphi} \bar{\chi} &= \bar{\chi} \bar{\varphi} , \\ \varphi \sigma^\mu \bar{\chi} &= -\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \varphi , \\ \varphi \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \chi &= \chi \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \varphi , \\ \bar{\varphi} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\chi} &= \bar{\chi} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \bar{\varphi} , \\ \varphi \sigma^{\mu\nu} \chi &= -\chi \sigma^{\mu\nu} \varphi , \\ \bar{\varphi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\chi} &= -\bar{\chi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\varphi} , \\ \varphi \sigma^{\mu\nu} \varphi &= 0 , \\ \bar{\varphi} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\varphi} &= 0 . \end{aligned}$$

Slika B1.1. Definicija Weylovih spinora, četvero-vektora i tenzora, te svojstva bilinearnih kvantiteta

$$(\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu})^* = \epsilon_{\dot{\alpha}\beta}\epsilon_{\beta\alpha}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} = \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\beta}^{\mu} = \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^{\mu} ,$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta})^* = \epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\dot{\delta}}(\sigma^{\mu})_{\gamma\dot{\delta}} = \sigma^{\mu\alpha\dot{\beta}} = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha} .$$

$$\begin{aligned} ((\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta})^* &= (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} , \\ ((\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}})^* &= (\sigma^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} . \end{aligned}$$

$$((\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta})^* = (\epsilon\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} ,$$

$$((\epsilon\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})^* = (\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\beta\alpha} .$$

$$(\psi\chi)^{\dagger} = (\psi^{\alpha}\chi_{\alpha})^{\dagger} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} .$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\bar{\chi})^{\dagger} &= \psi\chi , \\ (\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi})^{\dagger} &= \chi\sigma^{\mu}\bar{\psi} , \\ (\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\chi)^{\dagger} &= \bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\bar{\psi} , \\ (\psi\sigma^{\mu\nu}\chi)^{\dagger} &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\chi} , \\ (\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\chi})^{\dagger} &= -\psi\sigma^{\mu\nu}\chi . \end{aligned}$$

*Slika B1.2. Kompleksna konjugacija Paulijevih matrica i Lorentzovih generatora, te Hermitska konjugacija*



### B3 Fierzovi identiteti

$$\begin{aligned}\theta^\alpha\theta^\beta &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \\ \theta_\alpha\theta_\beta &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \\ \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\theta\phi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi), \\ (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}), \\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}), \\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\theta_\alpha &= -\frac{1}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}(\theta\theta), \\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2}\sigma^\mu_{\dot{\beta}\alpha}\theta^\beta(\bar{\theta}\bar{\theta}), \\ (\bar{\theta}\bar{\lambda})(\chi\sigma^\mu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\chi\sigma^\mu\bar{\lambda}), \\ (\theta\lambda)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\theta) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\lambda), \\ (\theta\sigma^\nu\bar{\psi})(\theta\sigma^\mu\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\lambda}),\end{aligned}$$

*Slika B3.* Fierzovi identiteti

## B4 Parcijalne derivacije

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}}.$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= -\epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta, \quad \partial^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &= -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}_{\dot{\beta}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha} = \partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \frac{\partial\theta_\beta}{\partial\theta^\alpha} = \partial_\alpha\theta_\beta = \epsilon_{\beta\alpha}$$

$$\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$

Slika B3. Derivacije za antikomutirajuće varijable

## C Supersimetrična algebra

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}), \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0, \\ [Q_\alpha, M_{\mu\nu}] &= i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \\ [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] &= i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}. \end{aligned}$$

Slika C1.1. Jednostavna Super-Poankareova algebra

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}), \\
\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} &= \epsilon_{\alpha\beta}Z^{AB}, \\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^B\} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z^{\dagger AB}, \\
\{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^B\} &= 2\delta^{AB}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu, \\
[Q_\alpha^A, P_\mu] &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A, P_\mu] = 0, \\
[Q_\alpha^A, M_{\mu\nu}] &= i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta^A, \\
[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A, M_{\mu\nu}] &= i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}}^A, \\
[B^r, B^s] &= if^{rst}B^t, \\
[B^r, Q_\alpha^A] &= -(b^r)^A{}_C Q_\alpha^C, \\
[B^r, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^A] &= \bar{Q}_{\dot{\alpha}C} (b^r)^C{}_A.
\end{aligned}$$

Slika C1.2. Proširena Super-Poankareova algebra

## D Superpolje

### D1 Klasično superpolje

$$F'(x, \theta, \bar{\theta}) = F(x + \delta x, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}).$$

$$\begin{aligned}
\delta F &= F'(x, \theta, \bar{\theta}) - F(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&= F(x + a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) - F(x, \theta, \bar{\theta}) \\
&= (a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu F + \xi^\alpha\partial_\alpha F + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} F \\
&= (a^\mu\partial_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})F,
\end{aligned}$$

Slika D.1.1. Izraz za klasično skalarno superpolje i infintezimalna varijacija superpolja

## D2 Kiralna i antikiralna superpolja

$$y^\mu = x^\mu - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) ,$$

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) .$$

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi ,$$

$$\delta_\xi\psi_\alpha = \sqrt{2}F\xi_\alpha - i\sqrt{2}\partial_\mu A\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} ,$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\xi .$$

$$D_\alpha\Psi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 .$$

$$\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^\dagger) .$$

$$\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = A^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* + i\partial_\mu A^*\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}\square A^*(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) .$$

Slika D.1.2.. Opći izraz za kiralno superpolje, kiralno superpolje u obliku kiralnih koordinata, zakoni za komponente kiralnog multiplleta, antikiralno superpolje i relacija za koordinate antikiralnog superpolja

## E Mase s-čestica

### E.1. Sfermioni

#### E.1.1. Skvarkovi

$$M_{\tilde{u}_{L,R}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}}^2 + m_u^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W\right) D & m_u(A_u - \mu \cot \beta) \\ m_u(A_u - \mu \cot \beta) & m_{\tilde{u}}^2 + m_u^2 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W D \end{pmatrix},$$

$$M_{\tilde{d}_{L,R}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}}^2 + m_d^2 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W\right) D & m_d(A_d - \mu \tan \beta) \\ m_d(A_d - \mu \tan \beta) & m_{\tilde{d}}^2 + m_d^2 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W D \end{pmatrix}.$$

Slika E.1.1. Masene matrice u L-R bazu za svaku generaciju top i bottom kvarkovskih skalara

$$M_{\tilde{\nu}}^2 = M_{\tilde{L}}^2 + \frac{1}{2} D$$

$$M_{\tilde{e}_{L,R}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{L}}^2 + m_e^2 - \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \theta_W\right) D & m_e(A_e - \mu \tan \beta) \\ m_e(A_e - \mu \tan \beta) & m_{\tilde{e}}^2 + m_e^2 - \sin^2 \theta_W D \end{pmatrix}.$$

Slika E.1.1. Mase sneutrina i masene matrice sleptona

### E.1.2. Chargini i Neutralini

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ & \tilde{h}_2^+ & \lambda^- & \tilde{h}_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_2 & -g_2 v_1 \\ 0 & 0 & g_2 v_2 & -\mu \\ M_2 & g_2 v_2 & 0 & 0 \\ -g_2 v_1 & -\mu & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \tilde{h}_2^+ \\ \lambda^- \\ \tilde{h}_1^- \end{pmatrix}.$$

$$M_{\tilde{C}_{1,2}} = \frac{1}{2} \left[ (M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2) \pm \sqrt{(M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2)^2 - 4(M_2\mu - M_W^2 \sin 2\beta)^2} \right].$$

$$\begin{pmatrix} i\tilde{B} & i\tilde{W}_3 & \tilde{h}_1^0 & \tilde{h}_2^0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -M_1 & 0 & g'v_1/\sqrt{2} & -g'v_2/\sqrt{2} \\ 0 & -M_2 & -g_2v_1/\sqrt{2} & g_2v_2/\sqrt{2} \\ g'v_1/\sqrt{2} & -g_2v_1/\sqrt{2} & 0 & \mu \\ -g'v_2/\sqrt{2} & g_2v_2/\sqrt{2} & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\tilde{B} \\ i\tilde{W}_3 \\ \tilde{h}_1^0 \\ \tilde{h}_2^0 \end{pmatrix}.$$

Slika E.1.2. Masene matrice i svojstvene vrijednosti za *chargine* koji nastaju miješanjem *nabojskih Higgsina i baždarina*, te masene matrice *neutralina* koji nastaju miješanjem *neutralnih Higgsina i neutralnih baždarina*

## 14. Literatura

[1] Csaba, C.. MSSM: Center for Theoretical Physics Laboratory for Nuclear Science and Department of Physics, Massachusetts: Institute of Technology Cambridge, MA 02139, USA, (04.11.2018.),

<https://cds.cern.ch/record/305686/files/9606414.pdf>

[2] Veselinović, S.. Elementarne Čestice. Završni rad. Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, 2014.

<http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/VESo7.pdf>

[3] Popara, M.. Leptoquarkovi u Fizici Elementarnih Čestica. Diplomski rad. Sarajevo: Prirodno-matematički Fakultet, Odsjek za Fiziku, 2008.

[www.pmf.unsa.ba/fizika/index.php/bs/e.../2-diplomski-radovi?...12:leptokvarkovi...](http://www.pmf.unsa.ba/fizika/index.php/bs/e.../2-diplomski-radovi?...12:leptokvarkovi...)

[4] Romanino, A.. The Standard Model of Particle Physics: SISSA/ISAS and INFN, I-34151 Trieste, Italy (25.10.2018.)

<http://www.slac.stanford.edu/econf/C0907232/pdf/001.pdf>

[5] Dine, A. Supersymmetry and String Theory: University of California, Santa Cruz, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2007.

[6] Stephen, P.M.. A Supersymmetry Primer: Department of Physics, Northern Illinois University, DeKalb IL 60115, 2016.

<https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9709356.pdf>

[7] Aitchison, I.. Supersymmetry in Particle Physics: Department of Physics, University of Oxford, The Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, 2007.

<http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-r-865.pdf>

[8] Van Vulpen, I.. The Standard Model Higgs Boson: Part of the Lecture Particle Physics II, UvA Particle Physics Master 2013-2014 (05.09.2018.)

[http://web.mst.edu/~hale/courses/Physics\\_357\\_457/Notes/Lecture.17.Higgs.Mechanism/HiggsLectureNote.pdf](http://web.mst.edu/~hale/courses/Physics_357_457/Notes/Lecture.17.Higgs.Mechanism/HiggsLectureNote.pdf)

[9] Van Daal, T.. Renormalization Group Invariants in the Minimal Supersymmetric Standard Model. Master Thesis. Nijmegen: Department of Theoretical High Energy Physics Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics Radboud University Nijmegen, 2014. (06.11.2018.)

[https://www.ru.nl/publish/pages/913395/thesis\\_tom\\_van\\_daal.pdf](https://www.ru.nl/publish/pages/913395/thesis_tom_van_daal.pdf)

[10] Quevillon, J.. Higgs Physics Beyond the Standard Model. Doctor Thesis. Paris: École Doctorale Physique en Île-de-France - ED 564, 2014. (05.09.2018.)

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01070196/document>

[11] Antunović, Ž. . Fizika elementarnih čestica. Standardni Model (12.01.2019.)

<http://mapmf.pmfst.unist.hr/~zeljko/SM.pdf>

[12] Radovanović, V.. Teorija Elementarnih Čestica. Beograd, 2018.

[http://qtpcenter.ff.bg.ac.rs/voja/TECo24\\_03\\_15.pdf](http://qtpcenter.ff.bg.ac.rs/voja/TECo24_03_15.pdf)

[13] Selimović, N.. Narušenje leptonske univerzalnosti u raspadu Higgsovog bozona u četiri leptona. Diplomski rad. Sarajevo: Univerzitet u Sarajevu, Prirodno-Matematički Fakultet Kolovoz 2017.

[www.pmf.unsa.ba/fizika/index.php/bs/e-radovi/.../2-diplomski-radovi?...59...](http://www.pmf.unsa.ba/fizika/index.php/bs/e-radovi/.../2-diplomski-radovi?...59...)

[14] Kumerički, K.. Standardni model elektroslabog međudjelovanja. Zagreb: Univerzitet u Zagrebu, Prirodoslovno-Matematički Fakultet, 2010. (07.08.2017.)

[15] Djouadi, A.. Higgs bosons searches at LHC Part IV (Exercices). Paris. Lab. de Physique Theorique (LPT Orsay) Univ. Paris-Sud XI, SCHOOL ON PHYSICS AT LHC:

"EXPECTING LHC" 11 - 16 September 2006, France,

<http://indico.ictp.it/event/a05225/session/28/contribution/16/material/o/o.pdf>

(05.09.2018.)

[16] Jerrero, M.H.. The Higgs sector of the MSSM. Madrid. TAE-UCM lectures, July 2012,

[http://teorica.fis.ucm.es/TAE2012/CHARLAS.DIR/HERRERO.DIR/TAE\\_Lecture4.pdf](http://teorica.fis.ucm.es/TAE2012/CHARLAS.DIR/HERRERO.DIR/TAE_Lecture4.pdf)

(10.11.2018.)

[17] Radovanović, V.. Uvod u supersimetrije. Beograd, 2015.,

<http://qtpcenter.ff.bg.ac.rs/voja/SUSY-1118.pdf> (08.02.2019.)



