Konika devet točaka

Berić, Tajana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tajana Berić

KONIKA DEVET TOČAKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Neizmjerno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na tolikom trudu i pomoći pri pisanju ovog rada. Veliko mu hvala na ogromnoj količini izdvojenog vremena i noćnog rada da bi ovaj rad bio dovršen.

Najveće hvala mojoj obitelji, mojim roditeljima i bratu koji su mi omogućili studiranje i bili velika podrška.

Nadalje hvala mojim nećacima Lovri i Karli koji su me uveseljavali kada mi je bilo teško.

Veliko hvala mojim prijateljima koji su stalno uz mene, koji su mi bili ogromna podrška kroz dane studiranja, koji mi nikada nisu dali da odustanem.

Na kraju, hvala svima koji su bili uz mene na ovom putu do titule magistre edukacije matematike.

Sadržaj

Uvod

Kružnica devet točaka jedan je od najpoznatijih pojmova u geometriji trokuta. Često se naziva i Eulerovom ili Feuerbachovom kružnicom, no otkrivanje te kružnice i brojnih zanimljivih s njom povezanih svojstava odvijalo se u više etapa, uglavnom potkraj 18. i u prvoj polovici 19. stoljeća, kroz radove mnogih matematičara, tako da ostaje upitno može li se ta kružnica pripisati samo jednom ili dvama imenima. Tvrdnja je osnovnog teorema da se za svaki trokut sljedećih devet točaka nalazi na jednoj kružnici: polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta sa sjecištem visina, ortocentrom. Neka od daljnjih važnijih svojstava glase da se središte kružnice devet točaka nalazi u polovištu spojnice ortocentra i središta kružnice opisane trokutu (dakle na Eulerovom pravcu), da joj je polumjer dvostruko kraći od polumjera opisane kružnice te da kružnica devet točaka dodiruje izvana tri kružnice pripisane trokutu, a s kružnicom upisanom trokutu ima unutarnji dodir.

Osim L. Eulera, za koga se čini da ipak nigdje nije izričito spomenuo devet točaka te kružnice, nego samo šest (1765.), u povijesti istraživanja kružnice devet točaka istaknute uloge imali su još neki slavni matematičari kao Poncelet (1821.) i Steiner (1828.), kao i neki manje poznati poput Bevana, Butterwortha i Daviesa. Svakako su značajni doprinosi Feuerbacha (1822.), a sam naziv "kružnica devet točaka" prvi je službeno uveo Terquem koji je također analitički dokazao neka od bitnih svojstava (1842.), no raznovrsna imena za istu kružnicu zadržala su se i dalje, zahvaljujući bogatstvu svojstava i brojnosti doprinosa različitih autora.

U ovom radu ne bavimo se toliko samom kružnicom devet točaka, nego njezinim poopćenjem - konikom devet točaka, za koju je karakteristično da četvrta istaknuta točka, uz tri vrha trokuta, nije nužno ortocentar nego bilo koja točka u ravnini tog trokuta koja ne pripada nijednoj od spojnica vrhova. Na taj način osnovna figura nije trokut (s ortocentrom) nego općeniti četverovrh. Mogućnosti različitih poopćenja pojavljivale su se u literaturi usporedno s istraživanjem svojstava kružnice devet točaka. Pritom, poopćenja prirodno navode na izlazak iz okvira euklidske geometrije, najprije u afinu ravninu pa zatim u projektivnu ravninu. Ulogu kružnica preuzimaju krivulje 2. reda, koje kratko nazivamo konikama.

U prvom poglavlju rada prikazat ćemo dokaz teorema o konici devet točaka primjenom afinih transformacija, polazeći od kružnice devet točaka kao poznate činjenice. Afine transformacije općenito ne čuvaju relaciju okomitosti pravaca tako da se ortocentar trokuta ne preslikava u ortocentar slike tog trokuta. No, izborom pogodne afine transformacije četverovrh u ravnini može se dobiti kao slika ortocentričnog četverovrha, a njemu pridružena kružnica devet točaka preslikat će se onda u koniku devet točaka s odgovarajućim svojstvima, jer polovište jest invarijanta afinosti.

Drugo poglavlje ostaje u području afine geometrije, no konika devet točaka interpretira se kao geometrijsko mjesto centara beskonačne familije konika (pramena konika) koje prolaze vrhovima zadanog četverovrha. Primjenjuje se analitička metoda, u kojoj koordinatni sustav nije nužno Kartezijev, to jest koordinatne osi ne moraju biti okomite. Kada se ustanovi da svi centri konika jednog pramena pripadaju jednoj konici, a centar je pritom definiran pomoću simetrije, kao afini pojam, dokaže se da svih devet promatranih točaka pripadaju konici čija je jednadžba prethodno izvedena.

Najopsežnije je treće poglavlje, gdje se tvrdnja teorema o konici devet točaka iz drugog poglavlja poopćuje u terminima projektivne geometrije. Realna afina ravnina proširuje se do projektivne ravnine, a "beskonačno daleki pravac" u njoj više nema posebno istaknutu ulogu. Konika koju čine centri konika jednog pramena ovdje postaje specijalni slučaj tzv. polarne konike bilo kojeg pravca, koji ne prolazi singularnim točakama pramena, a završni teorem onda govori o konici jedanaest točaka. Posebni izbor početnog četverovrha kao specijalni slučaj daje kružnicu, jer kad je taj četverovrh ortocentrički onda pramen konika inducira involuciju međusobno okomitih smjerova na beskonačno dalekom pravcu. Kao pripremu za ovaj teorem sažeto izlažemo potrebno predznanje iz realne projektivne geometrije. To obuhvaća izomorfizam proširene euklidske ravnine s "analitičkim", zapravo linearnoalgebarskim modelom $PG(2,\mathbb{R})$ projektivne ravnine. Time se praktično prelazi na homogene koordinate. Jedan od bitnih potrebnih rezultata odnosi se na generiranje konike pomoću dvaju pramenova pravaca povezanih projektivnom transformacijom, čime se i dobiva polarna konika.

U prvom poglavlju rad slijedi knjigu [6], u drugom članak [5], a treće poglavlje temelji se na knjizi [4].

Poglavlje 1

Dokaz teorema o konici devet točaka pomoću afinih transformacija

Teorem o konici devet točaka, kao poopćenje poznatog teorema o Eulerovoj (ili Euler - Feuerbachovoj) kružnici pripada afinoj geometriji budući da se u njegovom iskazu ne koristi pojam okomitosti pravaca, kao ni metrički pojmovi poput udaljenosti točaka ili mjere kutova koji su važni u euklidskoj geometriji. Pojam polovišta pripada afinoj geometriji jer se može uvesti bez mjerenja udaljenosti, a krivulje 2. reda (konike) također se mogu promatrati unutar afine geometrije.

U prvom dokazu promatranog poopćenja polazimo ipak od teorema o kružnici devet točaka kao poznate tvrdnje, koju ovdje nećemo dokazivati. Pojam kružnice nije karakterističan za afinu geometriju, jer afine transformacije općenito neće preslikati kružnicu također u kružnicu. No, afine transformacije čuvaju svojstvo kolinearnosti točaka, paralelnosti pravaca i još neka važna svojstva.

Prisjetimo se najprije afinih transformacija i njihovih invarijanti, dakle svojstava koja ostaju nepromijenjena tim preslikavanjima. Poopćenje teorema o kružnici devet točaka dobit ćemo zapravo kao "sliku" kružnice devet točaka.

Polazimo od vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ kojemu pridružujemo strukturu afinog, odnosno euklidskog prostora. Izborom koordinatnog sustava točke možemo identificirati s uređenim parovima $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ te se služiti vektorima i matričnim zapisom na uobičajeni način.

Definicija 1.0.1. *Preslikavanje afine, odnosno euklidske ravnine zadano s*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ili $v \longmapsto Av + b$, *pri čemu je* $\det A \neq 0$, *naziva se afina transformacija. To je kompozicija regularnog linearnog operatora (transformacije)* $v \longmapsto Av$ *i translacije* $v \longmapsto v + b$. *Afina transformacija je stoga bijekcija.*

Navedimo ukratko važnija svojstva afinih transformacija:
- čuvaju kolinearnost (kolinearne točke preslikavaju se u kolinearne točke; ako točke nisu kolinearne, njihove slike također nisu kolinearne)
- čuvaju djelišni omjer: za kolinearne točke P, Q, R i njihove slike P', Q', R' vrijedi $(PQ, R) = (P'Q', R')$; posebno, polovište dužine preslikava se u polovište slike te dužine
- iz prethodnih svojstava slijedi npr. da se težište trokuta ABC afinom transformacijom preslika u težište trokuta $A'B'C'$
- afina transformacija ravnine jednoznačno je određena djelovanjem na tri nekolinearne točke
- slika konveksnog skupa u afinoj transformaciji je konveksan skup
- afina transformacija preslikava paralelne pravce u paralelne pravce.

Također, afina transformacija čuva omjer površina, iako ne čuva sam iznos površine. Precizno, afina transformacija $v \longmapsto Av + b$ preslikava trokut PQR u trokut $P'Q'R'$ čija je površina jednaka umnošku površine PQR i faktora $\det A$. Dakle, taj faktor konstantan je za omjer površina trokuta, a onda i za bilo koje skupove u ravnini koji se mogu rastaviti na trokute i skupove čija se površina može izraziti kao limes površina skupova rastavljenih u trokute.

Definicija 1.0.2. *Podskupove afine ravnine nazivamo afino ekvivalentnima ako postoji afina transformacija koja jednog od njih preslikava u drugi.*

U vezi s djelovanjem afinih transformacija na krivulje 2. reda (konike), bitni rezultati su sljedeći:
- slika nedegenerirane (neraspadnute) konike pod djelovanjem afine transformacije također je nedegenerirana konika
- dvije nedegenerirane konike afino su ekvivalentne ako i samo ako su one obje elipse, obje hiperbole ili obje parabole (kružnica je, dakako, posebni slučaj elipse).

Razmotrimo li u ravnini trokut koji nije pravokutan, njegovi vrhovi i ortocentar čine ortocentrički četverovrh. Naime, svaka od tih točaka je ortocentar trokuta kojeg tvore ostale tri točke. Zato možemo četiri točke označiti s A, B, C, D bez posebnog isticanja jednog ortocentra. Uočavamo da se jedna od četiri točke mora nalaziti unutar trokuta određenog ostalim trima točkama. Naime, ako je ABC šiljastokutan trokut, D je svakako unutar trokuta ABC. Ako trokut ima tupi kut, uzmimo pri vrhu A, onda se A nalazi unutar trokuta BCD.
Budući da afine transformacije čuvaju svojstvo konveksnosti skupa točaka u ravnini, vrijedi da ako je f afina transformacija koja ortocentrički četverovrh A, B, C, D preslika u

četverovrh A', B', C', D', onda se jedna od te četiri točke nalazi unutar trokuta određenog ostalim trima točkama. Ako je K kružnica 9 točaka trokuta ABC čiji je ortocentar točka D, onda je $f(K)$ elipsa koja prolazi sjecištima pravaca AB i CD, AC i BD, AD i BC te polovištima dužina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$. To slijedi iz navedenih svojstava afinih transformacija (elipsa se preslikava u elipsu).

Nama je važan obrnuti smjer tvrdnje, za koji treba i dodatna pretpostavka o međusobnom položaju zadane četiri točke. (Uočimo da je moguće izabrati četiri točke u ravnini tako da se nijedna od njih ne nalazi unutar trokuta čiji vrhovi su ostale tri točke).

Teorem 1.0.3. *Neka su A', B', C', D' četiri različite točke, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Tada postoji elipsa koja prolazi sjecištima $A'B'$ i $C'D'$, $A'C'$ i $B'D'$, $A'D'$ i $B'C'$ te polovištima dužina $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{B'D'}$, $\overline{C'D'}$ ako i samo ako se jedna od točaka A', B', C' i D' nalazi unutar trokuta određenog ostalim trima točkama.*

Dokaz. Bez gubitka općenitosti pretpostavimo da se točka D' nalazi unutar trokuta $A'B'C'$. Tražit ćemo trokut ABC čiji je ortocentar D unutar ABC i afinu transformaciju koja preslika A, B, C, D u A', B', C', D'.
Označimo sjecište $A'D'$ i $B'C'$ s P', a sjecište $A'C'$ i $B'D'$ s Q'. Budući da je točka D' unutar trokuta $A'B'C'$, točka P' nalazi se između B' i C', a točka Q' između A' i C'.
Počinjemo konstrukciju četverovrha koji će se preslikati u $A'B'C'D'$. Izaberimo pravac p i na njemu točke B, P i C tako da P bude između B i C te da vrijedi
$\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{B'P'} : \overline{P'C'}$. Neka je zatim m pravac točkom P, okomit na p, a S kružnica nad promjerom $\overline{BC}$. Primijenimo homotetiju (centralnu dilataciju) sa centrom u točki C i koeficijentom $k = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{Q'C'}}$. Primijetimo da je $k > 1$. Neka je S' slika kružnice S u toj homotetiji. S' prolazi točkom C, a promjer joj je dulji od promjera $\overline{BC}$ kružnice S.

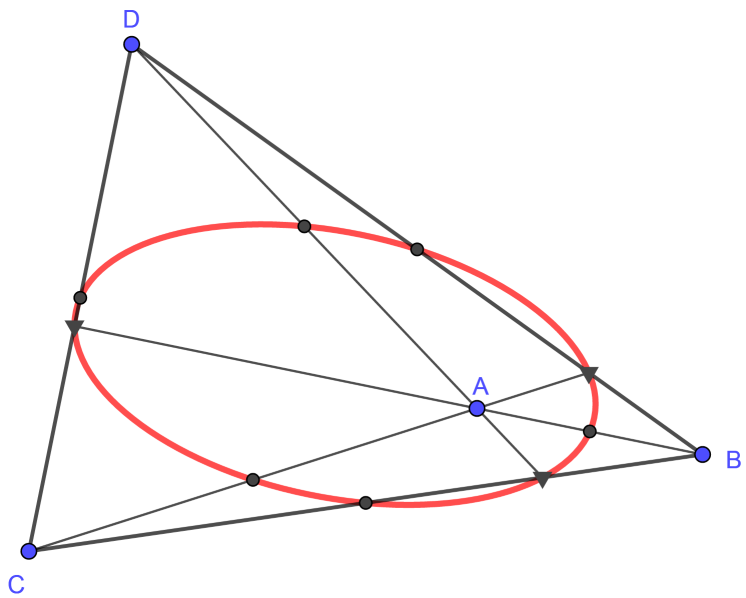
Sjecište kružnice S' i pravca m uzimamo za točku A, a sjecište dužine $\overline{AC}$ s kružnicom S označimo s Q. Tada vrijedi $\frac{\overline{AC}}{\overline{QC}} = k$, jer je točka A slika točke Q u izabranoj homotetiji. Stoga je $\overline{AQ} : \overline{QC} = \overline{A'Q'} : \overline{Q'C'}$. Pritom, kut $\angle BQC$ je pravi kut (Talesov poučak).
Neka je f afina transformacija koja trokut ABC preslikava u $A'B'C'$. Zbog čuvanja kolinearnosti i djelišnog omjera vrijedi $f(P) = P'$ i $f(Q) = Q'$. Nadalje, budući da se sjecište D pravaca AP i BQ preslika u sjecište $A'P'$ i $B'Q'$, imamo i $f(D) = D'$.

Četverovrh $ABCD$ ortocentrički je po konstrukciji jer je pravac AD okomit na BC, a BD je okomit na AC. Dakle, f preslikava kružnicu 9 točaka trokuta ABC s ortocentrom D u elipsu 9 točaka s obzirom na četverovrh $A'B'C'D'$. Time je Propozicija dokazana.

□

Dodatnim razmatranjem pokazalo bi se da u slučaju kad se nijedna od točaka A', B', C' i D' ne nalazi unutar trokuta određenog ostalim trima točkama također postoji konika 9 točaka sa svojstvima iz Propozicije, ali tada je to hiperbola. Granični slučaj, ako uzmemo da se točka D' pomiče iz unutrašnjosti trokuta $A'B'C'$ prema njegovoj vanjštini tako da se pritom nađe, primjerice, na stranici $A'C'$, bit će par paralelnih pravaca, dakle degenerirana konika.

Pustimo li da se točka D' udaljava beskonačno daleko, s njom će zajedno u beskonačnost težiti i polovišta dužina $\overline{A'D'}$, $\overline{B'D'}$ i $\overline{C'D'}$, a limes konike 9 točaka bit će parabola 6 točaka.



Slika 1.1: Elipsa devet točaka

Poglavlje 2

Konika devet točaka kao geometrijsko mjesto centara pramena konika

Istaknuti američki matematičar Maxime Bôcher objavio je početkom 1892. godine, u dobi od 25 godina, kratku bilješku [1]. Veći dio tog članka u prijevodu glasi ovako:

Čini se da dosad nije primijećeno da nekoliko dobro poznatih činjenica, kada se ispravno iskažu, daju sljedeću izravnu generalizaciju poznatog teorema o kružnici devet točaka.
Ako je dan trokut ABC i točka P u njegovoj ravnini, može se povući konika kroz sljedećih devet točaka:
(1) polovišta stranica trokuta;
(2) polovišta dužina koje spajaju točku P s vrhovima trokuta;
(3) sjecišta pravaca prethodno navedenih spojnica sa stranicama trokuta.

Konika koja posjeduje ta svojstva jednostavno je geometrijsko mjesto središta konika koje prolaze kroz četiri točke A, B, C, P (cf. Salmon's Conic Sections, p.153, Ex. 3, and p.302, Ex. 15).

Štoviše, kada uočimo da polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ tvore vrhove paralelograma upisanog u gore spomenutu koniku devet točaka, onda odmah slijedi da pravci BC i PA, koji su paralelni s dvjema stranicama ovog paralelograma, imaju smjerove dvaju konjugiranih promjera te konike.

Dakle, bilo koja stranica trokuta i dužina koja spaja P s nasuprotnim vrhom određuju smjerove para konjugiranih promjera.

Ako se svaki od ovih parova konjugiranih promjera sastoji od međusobno okomitih dužina, konika mora biti kružnica. *Stoga, ako se točka P nalazi na sjecištu okomica iz vrhova trokuta ABC na nasuprotne stranice, konika devet točaka postaje obična kružnica devet točaka.*

(kraj prijevoda)

Na temelju ovog Bôcherovog tumačenja ovdje ćemo izložiti dokaz teorema o konici devet točaka polazeći od familije (pramena) svih konika koje prolaze kroz četiri čvrste točke u realnoj afinoj ravnini. Najprije ćemo odrediti skup centara svih takvih konika i pokazati da je to geometrijsko mjesto jedna konika. Zatim ćemo provjeriti da ta konika prolazi kroz devet točaka istaknutih s obzirom na polazni četverovrh.

Za tvrdnju o konici kao geometrijskom mjestu centara konika jednog pramena Bôcher je citirao Salmonovu knjigu *"Treatise on Conic Sections"*, koja je izvorno objavljena 1848. godine, a neka od ponovnih izdanja datiraju iz 1855. te 1879. i 1896. godine.

Ovdje ćemo slijediti dokaz iz rada [5]. Naglasimo da je to dokaz analitičkom metodom u realnoj afinoj ravnini, u kojem koordinatni sustav ne mora biti Kartezijev, to jest koordinatne osi nisu nužno okomite. To će pojednostaviti račun, a neće utjecati na općenitost tvrdnje teorema.

Teorem 2.0.1. *Neka su A, B, C i P četiri točke u realnoj afinoj ravnini, od kojih po tri nisu kolinearne. Centri svih konika koje prolaze točkama A, B, C i P pripadaju jednoj konici, a ta konika prolazi kroz sljedećih devet točaka:*
(1) šest polovišta dužina određenih parovima zadanih točaka,
(2) sjecišta pravaca AB i CP, AC i BP te AP i BC.

Dokaz. Napomenimo da se centrom konike smatra njezin centar simetrije, ako postoji (dakle, za elipse i hiperbole) te da se ovdje podrazumijevaju samo nesingularne (nedegenerirane) konike.

Bez gubitka općenitosti možemo izabrati osi koordinatnog sustava tako da se po dvije od zadane četiri točke nalaze na koordinatnim osima. Neka su $(\lambda, 0), (\lambda', 0), (0, \mu)$ i $(0, \mu')$ te četiri točke. Postavljamo uvjet da konika s općom jednadžbom

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

prolazi kroz te četiri točke. Dakle za $y = 0$ (sjecište s x-osi) dobivamo $ax^2 + 2gx + c = 0$. λ i λ' moraju biti rješenja ove jednadžbe.

Tada vrijedi: $\lambda + \lambda' = -\frac{2g}{a}$ $\qquad 2g = -a(\lambda + \lambda')$

$\lambda\lambda' = \frac{c}{a}$ $\qquad c = a\lambda\lambda'$

Analogno, za $x = 0$ dobivamo $by^2 + 2fy + c = 0$. μ i μ' moraju biti rješenja ove jednadžbe.

Dakle, $\mu + \mu' = -\frac{2f}{b}$ $\qquad 2f = -b(\mu + \mu')$

$\mu\mu' = \frac{c}{b}$ $\qquad c = b\mu\mu'$

Odavde imamo $c = a\lambda\lambda' = b\mu\mu'$. Uz $c \neq 0$ imamo $a, b \neq 0$. Bez gubitka općenitosti možemo uzeti $a = \mu\mu'$ pa je onda $b = \lambda\lambda'$. Sada jednadžba

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

poprima oblik

$$\mu\mu' x^2 + 2hxy + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Poznato je (v. npr. Lema 7.7. u [6]) da za centar konike (x, y) vrijedi

$$2\mu\mu' x + 2hy - \mu\mu'(\lambda + \lambda') = 0$$

$$2\lambda\lambda' y + 2hx - \lambda\lambda'(\mu + \mu') = 0.$$

Izrazimo h iz obje jednadžbe te izjednačimo:

$$h = \frac{\mu\mu'(\lambda + \lambda') - 2\mu\mu' x}{2y} = \frac{\lambda\lambda'(\mu + \mu') - 2\lambda\lambda' y}{2x}$$

odnosno

$$2\mu\mu' x^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x = 2\lambda\lambda' y^2 - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y.$$

Kada dobijemo jednadžbu

$$\mu\mu' x^2 + 2hxy + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0 \quad , \tag{2.1}$$

to je opća jednadžba svih konika kroz 4 točke $(\lambda, 0), (\lambda', 0), (0, \mu)$ i $(0, \mu')$ (tzv. pramen konika kroz 4 točke). Tu je još slobodni parametar h. Ako se izabere vrijednost h, dobije se jedna određena konika i ona ima svoj centar za čije koordinate (x, y) vrijede navedene jednadžbe. S druge strane, ako eliminiramo parametar h iz tih jednadžbi, za koordinate centra (x, y) neovisno o vrijednosti h dobiva se

$$2\mu\mu' x^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')x = 2\lambda\lambda' y^2 - \lambda\lambda'(\mu + \mu')y \quad . \tag{2.2}$$

To je također jednadžba jedne konike, označimo ju sa K, a na njoj se nalaze centri svih konika pramena (2.1). Jednadžbu (2.2) možemo napisati i u obliku

$$\mu\mu' x\left(x - \frac{\lambda + \lambda'}{2}\right) = \lambda\lambda' y\left(y - \frac{\mu + \mu'}{2}\right) \quad , \tag{2.3}$$

koji je pogodan za provjeru da konici K pripadaju sljedećih devet točaka: tri sjecišta suprotnih stranica i šest polovišta stranica četverokuta s vrhovima $(\lambda, 0), (\lambda', 0), (0, \mu)$ i $(0, \mu')$.

Točka $(0,0)$ je sjecište spojnica kroz $(\lambda, 0), (\lambda', 0)$ i $(0, \mu), (0, \mu')$, a očito za $x = y = 0$ vrijedi (2.3).
Izračunajmo sada sjecište spojnica kroz točke $(\lambda, 0), (0, \mu)$ i $(\lambda', 0), (0, \mu')$. Neka je traženo sjecište (σ, σ'). Vektori $(0, \mu) - (\lambda, 0) = (-\lambda, \mu)$ i $(\sigma, \sigma') - (\lambda, 0) = (\sigma - \lambda, \sigma')$ su kolinearni pa postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da $(\sigma - \lambda, \sigma') = \alpha(-\lambda, \mu)$. Analogno, postoji $\beta \in \mathbb{R}$ tako da $(\sigma - \lambda', \sigma') = \beta(-\lambda', \mu')$.

Odavde imamo $\sigma - \lambda = -\frac{\sigma'}{\mu}\lambda$

$$\sigma - \lambda' = -\frac{\sigma'}{\mu'}\lambda'$$

i dalje $\frac{\sigma-\lambda}{\sigma-\lambda'} = \frac{\lambda\mu'}{\lambda'\mu}$. Dobivamo $\sigma = \frac{\lambda\lambda'(\mu-\mu')}{\lambda'\mu-\lambda\mu'}$ i $\sigma' = \frac{\mu\mu'(\lambda'-\lambda)}{\lambda'\mu-\lambda\mu'}$.

Uvršavanjem σ, odnosno σ' u lijevu, odnosno desnu stranu jednadžbe (2.3) i sređivanjem dobivamo na obje strane $(\lambda - \lambda')(\mu - \mu')(\lambda\mu' + \lambda'\mu)$ čime je pokazano da točka (σ, σ') pripada konici K. Analogno se provjeri da i preostalo sjecište suprotnih stranica, a to je sjecište spojnica kroz $(\lambda, 0), (0, \mu')$ i $(\lambda', 0), (0, \mu)$ pripada konici K.

Preostaje provjeriti da i svih šest polovišta stranica pripada konici K. Očito je da za točke $\left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{\mu+\mu'}{2}\right)$ vrijedi (2.3). Uzmimo sada polovište $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ stranice koja spaja vrhove $(\lambda, 0)$ i $(0, \mu)$. Uvrštavanjem $x = \frac{\lambda}{2}, y = \frac{\mu}{2}$ u (2.3) na obje strane dobivamo $-\frac{1}{4}\lambda\lambda'\mu\mu'$ pa ovo polovište pripada konici K. Sasvim analogno pokazuje se da konici K pripadaju i polovišta $\left(\frac{\lambda'}{2}, \frac{\mu'}{2}\right), \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu'}{2}\right)$ i $\left(\frac{\lambda'}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$. Time je teorem dokazan.

$\square$

Poglavlje 3

Projektivno - geometrijski pristup

3.1 Proširena euklidska ravnina kao projektivna ravnina

Proširenjem euklidske odnosno afine ravnine može se konstruirati projektivna ravnina. Pristup pomoću projektivne geometrije omogućuje da se različiti slučajevi nekih teorema iz euklidske ili afine geometrije objedine u jedan teorem, a različiti afini slučajevi izvode se iz njega kao posljedice.

U projektivnoj geometriji promatraju se zakonitosti kod centralnog projiciranja (značajno različitog od paralelnog projiciranja). Kod takvog projiciranja ne mora se polovište dužine preslikati u polovište, slika jednog kuta je drukčiji kut itd, npr. težište jednog trokuta neće se općenito preslikati u težište drugog, ali neka svojstva ipak će ostati sačuvana (invarijantna). Osnovna je invarijanta tzv. incidencija: ako je točka incidentna s pravcem, slika točke bit će incidentna sa slikom pravca. Ostale invarijante nisu tako jednostavne.

Uvođenje novih, "beskonačno dalekih točaka" ili "točaka u beskonačnosti" te "beskonačno dalekog pravca" prirodno je proširenje euklidske ravnine koje pruža velike mogućnosti. Klasični primjer da se paralelne željezničke tračnice prividno sijeku u jednoj točki ovdje je iznimno važan: kod centralne projekcije paralelni pravci mogu se, uz određene realne pretpostavke, projicirati u pravce koji imaju sjecište. Vrijedi i obrnuto, da se pravci koji se sijeku mogu projicirati u paralelne pravce. Dok nema "proširenja", centralna projekcija nije bijektivna. Kad se načini proširenje, postaje bijektivna.

Pri aksiomatskom uvođenju projektivne geometrije ravnine, polazi se od dva skupa osnovnih elemenata, skupa točaka i skupa pravaca te relacije incidencije medu njima. "Točka je incidentna s pravcem" znači, u uobičajenoj terminologiji, da točka "leži na pravcu" odnosno da pravac "prolazi točkom".
I u euklidskoj i u projektivnoj ravnini uzima se aksiom da su svake dvije različite točke incidentne s jednoznačno određenim pravcem (njihovom "spojnicom"). Bitna razlika nas-

tupa kod aksioma o međusobnom odnosu dva različita pravca. U euklidskoj ravnini uzima se da točkom izvan nekog pravca prolazi točno jedan pravac koji nema zajedničkih točaka s tim pravcem tj. paralelan je s njim. To je zapravo aksiom afine ravnine, kao općenitije od euklidske. U projektivnoj ravnini aksiomatski se postavlja da svaka dva različita pravca imaju zajedničku točku (”sjecište”). Ta zajednička točka je jedinstvena, zbog prvog aksioma o jedinstvenosti spojnice dviju točaka.

Osnovni model projektivne ravnine definira se proširivanjem euklidske ravnine dodatnim točkama (obično se nazivaju ”neizmjerno dalekim” ili ”beskonačno dalekim” točkama) i jednim dodatnim pravcem koji je incidentan sa svim neizmjerno dalekim točkama te se obično naziva ”neizmjerno dalekim” pravcem ili pravcem u beskonačnosti. Ovo proširenje izvodi se jednostavno tako da se svakoj klasi (pramenu) paralelnih pravaca pridruži jedna ”nova” točka te se relacija incidencije proširuje na taj način od euklidske incidencije. Naime, svaki euklidski pravac p incidentan je (samo) s onom ”novom” točkom koja odgovara cijelom pramenu pravaca paralelnih s p (jednostavno rečeno, smjerom tog pravca). ”Novi” pravac, označimo ga s p_∞ , incidentan je sa svakom ”novom” točkom i ni s jednom točkom euklidske ravnine. Lako se provjeri da za ovakvo proširenje euklidske ravnine vrijede oba prije navedena aksioma: svake dvije točke (dvije euklidske, dvije neizmjerno daleke ili jedna euklidska i jedna neizmjerno daleka točka) spojene su jednim pravcem, a svaka dva pravca (dva euklidska ili jedan euklidski i novi pravac p_∞) imaju jedinstvenu zajedničku točku.

3.2 Koordinatizacija i analitički model

Projektivna ravnina ima različite modele tj. realizacije, ima i bitno različitih, no nas ovdje zanima ona klasična, dobivena proširivanjem euklidske ravnine.

Krenimo sad, međutim, od 3-dimenzionalnog euklidskog prostora. Izaberimo bilo koju točku prostora O (kao ishodište, recimo) te promatrajmo skup svih pravaca kroz točku O i skup svih ravnina kroz točku O.

Svaka dva različita pravca kroz O određuju točno jednu ravninu u kojoj su sadržani. No, također i svake dvije različite ravnine kroz O određuju točno jedan pravac, svoju presječnicu, koji se nalazi u obje ravnine. Ovo je ključno – čim dvije različite ravnine u prostoru imaju jednu zajedničku točku, onda imaju zajednički i cijeli jedan pravac kroz tu točku (nisu ni paralelne ni mimoilazne).

Za točke projektivne ravnine uzimamo pravce točkom O, a za pravce projektivne ravnine uzimamo ravnine kroz točku O. Dakle, idemo “jednu dimenziju više”. Na taj način ispunjeni su osnovni aksiomi projektivne ravnine: svake dvije točke određuju jedinstveni pravac kroz njih (incidentan s obje točke), ali i svaka dva pravca određuju jedinstvenu točku koja je incidentna s oba pravca.

Promatramo 3 - dimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ i u njemu jednodimenzionalne potprostore (to su nam pravci kroz ishodište – nulvektor $(0,0,0)$) i dvodimenzionalne potprostore (to su ravnine kroz $(0,0,0)$, kad gledamo i vektore i točke u prostoru).

Svaki 1 - dimenzionalni potprostor zadan je jednim vektorom različitim od nulvektora, naime 1 - dimenzionalni potprostor je linearna ljuska jednog ne-nulvektora. Ako je taj vektor npr. $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, onda je linearna ljuska $[(a_0, a_1, a_2)] = \{\lambda(a_0, a_1, a_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Praktično je zapisati ovu točku u obliku $(a_0 : a_1 : a_2)$ jer se međusobni omjeri ne mijenjaju promjenom faktora λ. (Jedan ili dva od brojeva a_0, a_1, a_2 mogu biti 0, ali nema "dijeljenja s 0".)

Pravci u projektivnom kontekstu su 2 - dimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$, dakle linearne ljuske linearno nezavisnih skupova od po 2 vektora, npr. $[(a_0, a_1, a_2)], [(b_0, b_1, b_2)]$. Rekli smo da će nam pravci (projektivno gledano) biti ravnine kroz ishodište. Opća jednadžba ravnine u 3 - dimenzionalnom euklidskom prostoru ima oblik $Ax + By + Cz + D = 0$, a ako ravnina prolazi kroz $(0,0,0)$ onda je $D = 0$. U svakom slučaju, (A, B, C) je vektor normale te ravnine. Mi promatramo model projektivne ravnine u kojem uloge točaka i pravaca igraju pravci kroz O i ravnine kroz O u 3 - dimenzionalnom euklidskom prostoru.

Tri točke $(a_0 : a_1 : a_2)$, $(b_0 : b_1 : b_2)$ i $(c_0 : c_1 : c_2)$ kolinearne su točno onda kad pripadni vektori čine linearno zavisan skup (izbor faktora λ ništa ne mijenja jer se "skrati"), a ekvivalentno i praktično – kad je determinanta sastavljena od tih vektora (retčano ili stupčano, svejedno) jednaka 0. Pravac određen točkama $(a_0 : a_1 : a_2)$ i $(b_0 : b_1 : b_2)$ možemo prikazati pomoću jednadžbi ravnine – u bilo kojem obliku – određene trima točkama ($(0,0,0)$, (a_0, a_1, a_2) i (b_0, b_1, b_2)), odnosno jednom točkom (ishodištem) i s dva nekolinearna vektora (jednako zadana). Za sve točke $(x_0 : x_1 : x_2)$ tog pravca vrijedi da je odgovarajući vektor neka linearna kombinacija vektora (a_0, a_1, a_2) i (b_0, b_1, b_2), odnosno da je determinanta matrice s retcima $(a_0 a_1 a_2)$, $(b_0 b_1 b_2)$ i $(x_0 x_1 x_2)$ jednaka 0.

Nadalje, izračunavanje sjecišta dva pravca svodi se na rješavanje sustava 2 homogene linearne jednadžbe s 3 nepoznanice, a rješenje je 1 - dimenzionalni potprostor, znači jedna točka u projektivnom kontekstu.

Budući da se ravnine mogu zadati pomoću vektora normale, račun se opet može svesti formalno na posve istu stvar kao što je "spojnica dviju točaka" – opet treba determinanta biti jednaka 0. Pitanje je: odgovara li sad sve ovo međusobnim položajima točaka (euklidskih i "novih", tj. smjerova ili "beskonačno dalekih točaka") kako smo to tumačili u proširenoj euklidskoj ravnini? (Jer, pripazimo, ovo sad nije bila proširena E^2 ravnina, nego određeni podskup pravaca i ravnina u E^3). Nije teško provjeriti da sve doista odgovara. Prisjetimo se "homogenizacije": euklidska točka (x, y) dobiva homogene koordinate $(1 : x : y)$. "Nova" točka, smjer pravaca s koeficijentom k dobiva homogene koordinate $(0 : 1 : k)$. Na pravcu $y = kx + l$ nalaze se sve odgovarajuće euklidske točke $(x, kx + l)$ i točka $(0 : 1 : k)$. Na pravcima $x = c$, koji su svi paralelni, nalaze se euklidske točke (c, y) i točka (∞). Homogenizacijom $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$ te $(0 : 0 : 1)$ za točku (∞) pravci dobivaju oblike koje smo izračunali:

$y = kx + l \to lx_0 + kx_1 - x_2 = 0$ na kojem je $(0 : 1 : k)$,

$x = c \to cx_0 + x_1 = 0$ na kojem je $(0 : 0 : 1)$.

Vidimo da svakoj točki proširene euklidske ravnine odgovara točno jedna točka iz "analitičkog modela" i obrnuto (dakle, bijekcija među skupovima točaka). Također, imamo bijekciju i među pravcima ta dva modela.

Osim bijektivnosti, za izomorfizam ovih modela bitno je još da je točka incidentna s pravcem u jednom modelu ako i samo ako su incidentni odgovarajuća točka i pravac u drugom modelu. To vrijedi jer smo tako i "podesili" koordinate. Naglasimo da je u modelu pomoću 3 - dimenzionalnog prostora korišteno da je presjek dva različita 2 - dim. potprostora uvijek jedan 1 - dim. potprostor; ovo je izravna posljedica poznate formule iz linearne algebre za dimenziju sume i presjeka potprostora $\dim L + \dim M = \dim L + M + \dim L \cap M$. U ovom slučaju dimenzija presjeka jednaka je 2 + 2 - 3 = 1.

Projektivna ravnina konstruirana pomoću potprostora vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ označava se s $PG(2, \mathbb{R})$ (kao projektivna geometrija dimenzije 2 nad poljem $\mathbb{R}$).

Također vidimo da se uvjet incidencije točke i pravca, dakle jednadžba pravca, piše u obliku

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0 \tag{3.1}$$

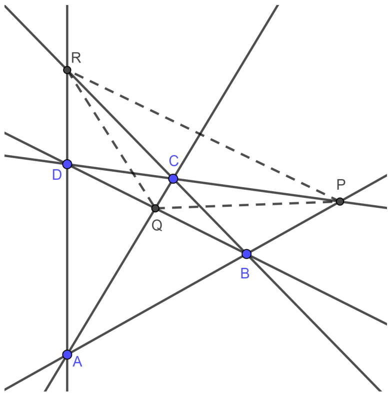
za neke u_0, u_1, u_2 koji nisu svi jednaki 0. Taj pravac možemo onda reprezentirati potprostorom $[(u_0, u_1, u_2)] = \{\lambda(u_0, u_1, u_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ te zapisivati s $(u_0 : u_1 : u_2)$ analogno kao za točke ili $[u_0 : u_1 : u_2]$, kako bismo različitim tipom zagrada naglasili da je riječ o pravcu, a ne o točki. No, radi jednostavnosti obično ćemo pisati također $(u_0 : u_1 : u_2)$.

Ako za vektore (u_0, u_1, u_2) i (x_0, x_1, x_2) uzmemo odgovarajuće stupčane matrice U i X, tada se (3.1) napiše kao $U^t X = 0$. Ove matrice U i X zovemo koordinatnim matricama pravca $[u_0 : u_1 : u_2]$ i točke $(x_0 : x_1 : x_2)$.

3.3 Potpuni četverovrh, harmonička četvorka i dvoomjer

U ovom ćemo odjeljku definirati potpuni četverovrh i harmoničku četvorku točaka te navesti neka svojstva.

Definicija 3.3.1. *Ravninsku figuru koja se sastoji od četiri točke A, B, C, D, od kojih po tri nisu kolinearne, te svih šest spojnica parova tih točaka zovemo potpunim četverovrhom. Točke A, B, C, D zovemo vrhovima potpunog četverovrha, a njihove spojnice stranicama potpunog četverovrha.*

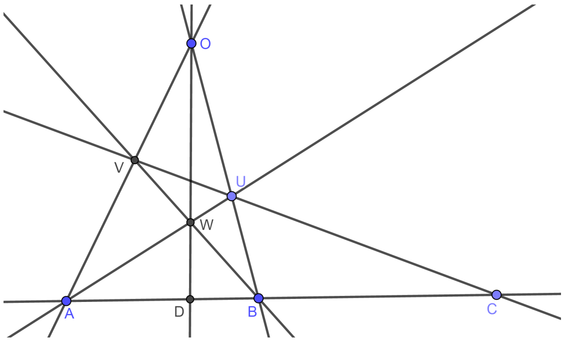


Slika 3.1: Potpuni četverovrh

Definicija 3.3.2. *Za točku D kažemo da je harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka A, B, što označavamo sa $H(AB,CD)$, ako su:*
(i) A i B vrhovi potpunog četverovrha, točka C je dijagonalna točka tog četverovrha na pravcu AB, a D je sjecište pravca AB i spojnice ostalih dviju dijagonalnih točaka, ili
(ii) A i B dvije dijagonalne točke potpunog četverovrha, a C i D sjecišta pravca AB s onim dvjema suprotnim stranicama tog četverovrha koje prolaze trećom dijagonalnom točkom.
Za točku D kažemo još da je četvrta harmonička točka za točke A, B, C. Četvorku točaka u takvom međusobnom odnosu zovemo i harmoničkom četverkom točaka $H(AB,CD)$.

Na temelju definicija mogu se dokazati sljedeće tvrdnje:

Propozicija 3.3.3. *Ako je točka D harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka A, B, tada je i C harmonički konjugirana točki D s obzirom na isti par točaka A, B.*
Ako vrijedi $H(AB,CD)$, tada vrijedi i $H(AB,DC)$. Možemo dakle reći da je par C, D harmonički konjugiran paru A, B.



Slika 3.2: Harmonička četvorka točaka

Propozicija 3.3.4. *Ako je par točaka C, D harmonički konjugiran paru A, B, tada je i par A, B harmonički konjugiran paru C, D.*

Važno je primijetiti da vrijedi sljedeći teorem koji pokazuje da četvrta harmonička točka ne ovisi o izboru "pomoćnog" četverovrha $ABUV$ za njezinu konstrukciju:

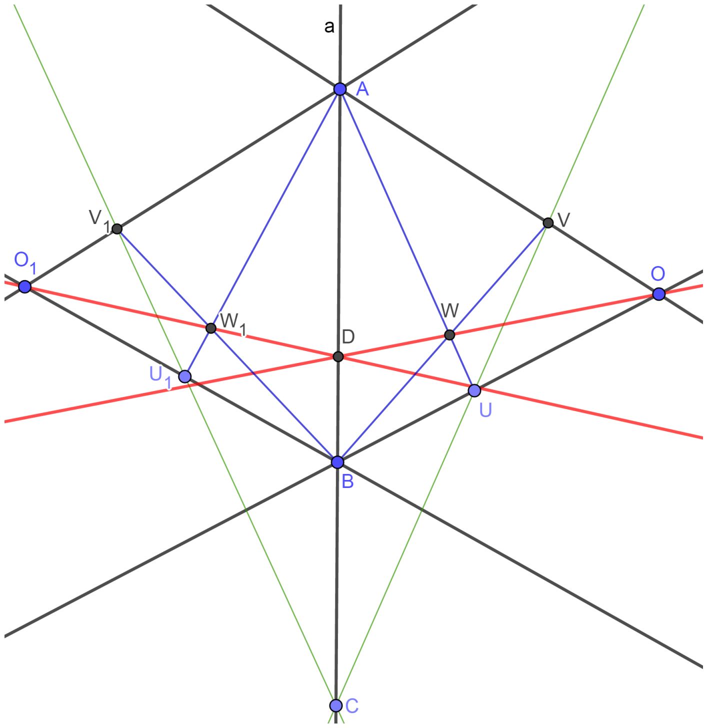
Teorem 3.3.5. *Ako su A, B, C tri različite točke pravca a, tada na tom pravcu postoji točno jedna točka D takva da vrijedi $H(AB, CD)$.*

Pomoću ovog teorema možemo dokazati važnu činjenicu kao posebni slučaj harmoničke četvorke u proširenoj euklidskoj ravnini:
Ako su A i B bilo koje dvije točke, a točka M polovište dužine $\overline{AB}$, onda su točka M i beskonačno daleka točka pravca AB harmonički konjugirane točke s obzirom na točke A i B.

Ovo se vidi npr. tako da se za četverovrh $ABUV$ na slici 3.2 odabere jednakokračni trapez jer će tada pravac OM biti simetrala dužine $\overline{AB}$ pa će točka M biti harmonički konjugirana beskonačno dalekoj točki pravca AB ("sjecište" pravca AB i pravca UV).

Ovdje ćemo još samo ukratko spomenuti važan pojam *dvoomjera*, koji ćemo definirati samo u kontekstu proširene euklidske ravnine.

Neka su A, B, C i D četiri kolinearne točke. Dvoomjer $R(AB, CD)$ definira se kao realni broj $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ pri čemu je s AB označena orijentirana dužina $\overline{AB}$, dakle duljina segmenta određenog točkama A i B, ali s predznakom koji odgovara odabranoj orijentaciji na pravcu. Primjerice, ako je C polovište dužine $\overline{AB}$, onda je $\frac{AC}{BC} = -1$, jer su $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednake duljine, a suprotne orijentacije. Posebno, ako je npr. C beskonačno daleka točka pravca AB, uzima se $\frac{AC}{BC} = 1$.



Slika 3.3: Jedinstvenost točke D

Dakle, dvoomjer je omjer dvaju djelišnih omjera, (AB, C) i (AB, D). Najvažnije je svojstvo dvoomjera da je to projektivna invarijanta, što znači da se ne mijenja pod djelovanjem projektivnih transformacija, za razliku od djelišnog omjera, koji je afina, ali ne i projektivna invarijanta.

Nadalje, harmonička četvorka točaka karakterizirana je dvoomjerom vrijednosti -1, to jest, za kolinearne točke A, B, C i D vrijedi $H(AB, CD)$ ako i samo ako je $R(AB, CD) = -1$. Posebno, ako je D beskonačno daleka točka pravca AB, ovo znači da je ona harmonički konjugirana polovištu dužine $\overline{AB}$, kao što smo već prije zaključili.

3.4 Projektivne transformacije i polariteti

Za projektivnu ravninu karakteristična su preslikavanja koja proizlaze iz centralne projekcije, kao osnovnog načina preslikavanja. Riječ je ili o jednoj centralnoj projekciji ili o kompoziciji više takvih.

U realnoj projektivnoj ravnini – sažeto iskazano – projektivna transformacija je bijektivno preslikavanje skupa točaka na skup točaka i skupa pravaca na skup pravaca tako da je pritom sačuvana incidencija, što znači: neka točka incidentna je s nekim pravcem ako i samo ako je slika te točke incidentna sa slikom tog pravca.

Budući da su u toj projektivnoj ravnini točke zapravo 1 - dim. potprostori od $\mathbb{R}^3$, a pravci su 2 - dim. potprostori istog prostora, jasno je da bi projektivne transformacije mogle biti usko povezane s regularnim (bijektivnim) linearnim operatorima. Naime, takvi operatori preslikavaju potprostore u potprostore, a pritom čuvaju dimenziju – dakle, točke se preslikavaju u točke, a pravci u pravce. Pritom, sačuvana je incidencija, jer to je zapravo relacija "biti potprostor".

Ako je A regularni linearni operator, a L i M potprostori od $\mathbb{R}^3$, takvi da je $\dim L = 1$,
$\dim M = 2$ i $L < M$, onda su i $A(L)$ i $A(M)$ potprostori, $\dim A(L) = \dim L = 1$,
$\dim A(M) = \dim M = 2$ i $A(L) < A(M)$.

Dakle, sigurni smo da djelovanje regularnih linearnih operatora jest djelovanje projektivne transformacije ravnine, no pitanje je ima li možda i nekih drugačijih projektivnih transformacija, znači nekih koje ne bi bile zadane regularnim linearnim operatorima. Odgovor je da takvih nema (to je odgovor za realnu projektivnu ravninu, ali ne vrijedi za bilo koju projektivnu ravninu općenito).

Sve se to može jednostavno izraziti matricama, pa ako su X i X' koordinatne matrice za neku točku i njezinu sliku u projektivnoj transformaciji koja je zadana regularnom matricom A, onda vrijedi $X' = AX$.

Preciznije, budući da ovdje promatramo djelovanje ne na pojedine vektore nego na potprostore, regularna matrica A zadaje istu projektivnu transformaciju kao matrica kA, pri čemu je k bilo koji realni broj različit od 0. Cijela klasa proporcionalnih regularnih matrica zadaje istu projektivnu transformaciju, jer množenje vektora skalarom različitim od 0 ostavlja cijeli 1-dim. potprostor nepromijenjenim. Jedinična matrica I svakako zadaje identitetu kao projektivnu transformaciju, svaka točka očito se preslika sama u sebe, ali jednaki učinak ima bilo koja skalarna matrica kI , različita od nulmatrice.
Dakle, u matričnom zapisu $X' = AX$ pojavljuje se još jedan skalarni faktor pa imamo relaciju $\rho X' = AX$.

Za konike će nam naročito trebati drukčija vrsta bijektivnih preslikavanja projektivne ravnine, u kojoj je također sačuvana incidencija, ali se točke preslikavaju u pravce, a pravci u točke. Posebna vrsta projektivnih korelacija su polariteti, a to je pojam koji je usko povezan s konikama. Polaritet je projektivna korelacija koja ima svojstvo involutornosti, dakle komponirana sama sa sobom daje identitetu. Naime, projektivna korelacija preslika, recimo, točku T_1 u pravac p, a pravac p u neku točku T_2, koja može biti jednaka točki T_1, ali može biti i različita. U slučaju involutornosti je $T_1 = T_2$, za svaku točku T_1 . Dakle,

u polaritetu se svaka točka preslika u samu sebe kad se polaritet primijeni dvaput. Isto tako, svaki se pravac preslika sam u sebe kad se polaritet primijeni dvaput. Uočimo da je kompozicija bilo koje dvije projektivne korelacije projektivna transformacija, jer točke se preslikaju opet u točke, a pravci u pravce, tako da je sačuvana incidencija. Za polaritet, kompozicija sa samim sobom je identiteta.
Pogledajmo sad osnovni primjer polariteta, na kružnici u euklidskoj (odnosno proširenoj euklidskoj) ravnini.

Primjer 3.4.1. *Polaritet kružnice*
Promatramo bilo koju kružnicu K i u toj ravnini definiramo preslikavanje na sljedeći način. Ako je točka P izvan K, kroz nju prolaze dvije tangente na K. Spojnica dirališta tih tangenti je pravac, označimo ga s p, koji se naziva polara točke P. Ako je T neka točka na K, kroz nju prolazi jedinstvena tangenta t. Točki T pridružujemo tangentu t kao polaru. Obrnuto, ako neki pravac s siječe K u dvije točke, koje nisu dijametralno suprotne, tangente u tim točkama sijeku se u jednoj točki S izvan kružnice pa tu točku pridružimo pravcu s kao pol tog pravca. Očito, tada je pravac s polara točke S pa su S i s uzajamno pridruženi (pol – polara). Naravno, tangenti t kružnice pridružimo njezino diralište kao pol pa su i točka na K i pripadna tangenta uzajamno pridruženi pol i polara. (Ova uzajamna pridruženost zapravo je involutornost preslikavanja).

Ostale su još točke unutar K. Kroz njih ne prolaze tangente, ali možemo posredno definirati polaru takve točke. Bit će to određeni pravac koji nema zajedničkih točaka s K. S druge strane, pravcima koji nemaju zajedničkih točaka s K ("vanjskim" pravcima s obzirom na kružnicu) pridružit će se unutarnje točke kružnice. Neka je sad P unutarnja točka, ali različita od središta kružnice. Povucimo kroz P bilo koja dva pravca, ali da ne prolaze središtem. Ako su to pravci u i v, njihovi su polovi točke U i V određene kao prije (U je sjecište tangenti kroz sjecišta pravca u s kružnicom, analogno za v). Sada spojnica UV mora biti polara točke P, zbog uvjeta čuvanja incidencije. Naime, točka P je sjecište pravaca u i v pa polara od P mora biti spojnica polova tih pravaca.

Za pravac p koji je vanjski u odnosu na kružnicu postupamo "dualno": uzmimo na njemu neke dvije točke M i N, njima su pridružene polare m i n (kao prije), a onda sjecište pravaca m i n mora biti pol P pravca p.

Tako imamo bijekciju između točaka i pravaca koja je polaritet, u smislu prethodne definicije, osim što je zasad izuzeto središte kružnice K iz tog preslikavanja. Polara te točke je beskonačno daleki pravac. Naime, ako povučemo bilo koji pravac kroz to središte, on siječe K u dijametralno suprotnim točkama i tangente u tim točkama su paralelne. Njihovo "sjecište" je njihov zajednički smjer, tj. "beskonačno daleka točka". Kad isto načinimo za još neki pravac kroz središte, vidimo da su polovi tih pravaca njihovi smjerovi, tj. dvije beskonačno daleke točke, a njihova je spojnica beskonačno daleki pravac. Vidimo da je

definiran polaritet na proširenoj euklidskoj ravnini.
Ako je jednadžba kružnice $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, polara neke točke (x_1, y_1) ima jednadžbu $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b)^2 = r^2$.

Prelazimo sad na koordinatno – matrični zapis projektivne korelacije, odnosno posebno polariteta, jer upravo to će nam trebati kod konika.

Namjesto relacije $\rho X' = AX$ kao za projektivnu transformaciju, stavljamo $\rho U' = AX$. Pritom je U' koordinatna matrica pravca koji je slika točke X (posebno, u polaritetu, U' bit će pridružena polari točke X). Naime, primjena regularnog linearnog operatora bila je opravdana kad se preslikavalo potprostore tako da dimenzija ostaje sačuvana, ali ovdje imamo "obrnuti" zahtjev: točke u pravce i obrnuto, ali opet, naravno, tako da je sačuvana incidencija. No, sad imamo zapravo preslikavanje 1 - dim. potprostora u ortogonalni komplement 2 - dim. potprostora, a to je opet preslikavanje 1 - dim. potprostora u 1 - dim. potprostor.

Recimo sad da je $\dim L = 1$, tu je L za točku, i neka projektivna korelacija preslikava L u 2 - dim potprostor M, to jest pravac. Neka je A matrica regularnog linearnog operatora koji preslikava L u $M^{\perp}$, stavljamo $\rho U' = AX$, gdje U' umjesto "običnog" U naznačuje samo da je to pravac koji je slika (točke), a ne "original".

Odredimo sad matricu linearnog operatora koji djeluje na pravce. Označimo traženu matricu s B. Za djelovanje na pravce imamo onda analognu relaciju $\rho X' = BU$.

Čuvanje incidencije ostvareno je ako je $U^tX = 0$ ekvivalentno s $(BU)^tAX = 0$. Transponiranjem u drugoj jednakosti dobivamo $U^tB^tAX = 0$. Da bi ekvivalencija vrijedila za svaki X, nužno je i dovoljno da bude $B^tA = kI$ za neki skalar $k \neq 0$. Odatle odmah imamo da $B^t = kA^{-1}$, odnosno $B = k(A^{-1})^t$ što je također jednako $k(A^t)^{-1}$. Dakle, to je tražena veza matrica A i B pa sad imamo u potpunosti zadanu projektivnu korelaciju ako je zadano kako djeluje na točke (u koordinatno-matričnom obliku). Faktor $k \neq 0$ nije bitan, naime za matricu A bilo koja $k(A^t)^{-1}$ zadaje isto preslikavanje s pravaca na točke.

Još preostaje pronaći nužan i dovoljan uvjet na matricu A da bi pripadna projektivna korelacija bila involutorna, to jest polaritet. Uzastopnim množenjem X s A i $(A^t)^{-1}$ treba dobiti istu točku X, koordinatno moguće pomnoženo s nekim faktorom ρ. To treba vrijediti za svaki X. Sad iz $(A^t)^{-1}AX = \rho X$ vidimo da mora biti $(A^t)^{-1}A = kI$, opet uz $k \neq 0$. Odatle izravno slijedi $A = kA^t$. No, vidjet ćemo da onda mora biti $k = 1$ pa će uvjet zapravo biti vrlo jednostavan – matrica polariteta je simetrična.

Naime, izjednačimo determinante matrica na obje strane. Kako su to matrice reda 3, imamo $\det A = k^3 \det A$ pa kako je A regularna, mora biti $k^3 = 1$ i stoga $k = 1$.

Napokon, sad znamo da je projektivna korelacija zadana regularnom matricom A tako da na točke djeluje s $\rho U' = AX$, a na pravce s $\rho X' = BU$, pri čemu se matrica B dobiva iz A invertiranjem i transponiranjem. Posebno za polaritet, matrica A je simetrična.

3.5 Konike i polariteti konika

Promatrane krivulje praktično je kratko nazivati konike (čunjosječnice, jer se mogu dobiti presijecanjem konusa/stošca ravninama u različitim položajima). Algebarske 2. reda su zato što su definirane pomoću polinoma 2. stupnja, s tim što sad promatramo homogene polinome 2. stupnja u 3 varijable. Homogeni znači da su svi članovi stupnja 2 (tipa x^2 , y^2 i xy kad imamo uobičajene 2 varijable), a varijable će sad biti označene s x_0, x_1 i x_2 , tako da su osnovni monomi oblika x_0^2 , x_1^2 , x_2^2 , x_0x_1 , x_1x_2 i x_0x_2 te su u polinomu pomnoženi koeficijentima koji će biti označeni s a_{ij} (koeficijent uz x_ix_j , pri čemu je obuhvaćeno $i = j$, za $i, j = 0, 1, 2$). Dakle, takav polinom načelno se sastoji od 6 monoma, s tim da neki koeficijenti mogu biti 0, ali ne svi.

Definicija 3.5.1. *Konika u realnoj projektivnoj ravnini je skup svih točaka* $(x_0 : x_1 : x_2)$ *te ravnine takvih da je* (x_0, x_1, x_2) *nultočka homogenog polinoma* $f(x_0, x_1, x_2)$ *stupnja 2. Jednadžba konike glasi* $f(x_0, x_1, x_2) = 0$.

Važno je uočiti da je definicija dobra, naime zbog homogenosti polinoma za točku $(x_0 : x_1 : x_2)$ može se uzeti bilo koji predstavnik (tx_0, tx_1, tx_2) jer se uvrštavanjem u polinom iz svakog monoma izlučuje faktor t^2 , tj. $f(tx_0, tx_1, tx_2) = t^2 f(x_0, x_1, x_2)$. (Tu je t različit od 0). Dakle, polinom se poništava u projektivnoj točki $(x_0 : x_1 : x_2)$ ako i samo ako se poništava za bilo koji vektor (x_0, x_1, x_2) koji predstavlja tu točku.

Naglasimo da skup nultočaka može biti vrlo raznovrstan te ne mora "izgledati kao krivulja" nego se može sastojati npr. od jedne jedine točke, od skupa svih točaka incidentnih s nekim od dva pravca, a može to biti i prazan skup (npr. za $f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$).

Ako se krene od krivulje 2. reda u euklidskoj ravnini, njezina jednadžba homogenizira se na poznati način $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$ itd. Tada npr. jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ prelazi u oblik $x_1^2 + x_2^2 - r^2x_0^2 = 0$.

Konkretno, skup točaka određenih ovim dvjema jednadžbama jednak je u euklidskoj ravnini i u proširenoj euklidskoj ravnini, jer kružnica nema "beskonačno dalekih točaka", a to su koordinatno one točke za koje $x_0 = 0$, ali bar jedna od ostalih koordinata nije 0.

Drukčije je s parabolom $y = x^2$, odnosno $x^2 - y = 0$, jer homogenizacijom se dobiva $x_1^2 - x_0x_2 = 0$. Za $x_0 = 0$ mora biti i $x_1 = 0$, ali onda postoji rješenje $(0 : 0 : 1)$, što odgovara točki prije označenoj i s (∞).

Konika je nesingularna, ako je određena ireducibilnim polinomom $f(x_0, x_1, x_2)$. Bit će nam važne i singularne konike.

Dolazimo do matričnog zapisa jednadžbe konike $f(x_0, x_1, x_2) = 0$.

To će biti $X^tAX = 0$, pri čemu je X stupčana koordinatna matrica točke $(x_0 : x_1 : x_2)$.

Matrica $A = [a_{ij}]$ reda 3, napisano po retcima, izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Izračunavanjem X^tAX dobiva se 1x1 matrica [0], dakle skalar 0. Matrica A ovdje nije nužno simetrična, ali možemo zapis polinoma f modificirati tako da pripadna matrica bude simetrična.

Ovdje, u homogenim koordinatama, ako se u polinomu nalazi monom $a_{01}x_0x_1$ (i to je jedini član s umnoškom x_0x_1) napišemo ga kao $2\frac{a_{01}}{2}x_0x_1$ te isto učinimo za članove s x_1x_2 i x_0x_2. U matrici onda dolaze simetrično koeficijenti $\frac{a_{01}}{2}$, $\frac{a_{01}}{2}$ i $\frac{a_{01}}{2}$ na odgovarajućim pozicijama izvan dijagonale pa kod izračunavanja X^tAX pojavi se $\frac{a_{01}}{2}x_0x_1 + \frac{a_{01}}{2}x_1x_0 = a_{01}x_0x_1$, kao što i jest u polinomu f. Dakle, možemo odmah pretpostaviti da je matrica pridružena polinomu, odnosno konici, simetrična, samo kod pisanja matrice treba pripaziti na "raspolavljanje" koeficijenata u "mješovitim" članovima kad polazimo od polinoma (kod "čistih kvadratnih" članova, čiji koeficijenti dolaze na dijagonalu, ništa se ne mijenja). Ovo sve odgovara pisanju u euklidskoj ravnini, npr. za $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ pripadna matrica je $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Odsad ćemo jednadžbu konike najčešće pisati u tom matričnom obliku $X^tAX = 0$, uz pretpostavku da je A simetrična matrica. Primijetimo da se transponiranjem dobiva jednako: $(X^tAX)^t = X^tAX$ zato što je $A^t = A$.

Nadalje, navedimo važnu činjenicu da je konika nesingularna ako i samo ako je pripadna matrica A nesingularna, to jest regularna (invertibilna), ekivivalentno: $\det A \neq 0$.

Potražimo sve konike koje sadrže točke $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ i $(1 : 1 : 1)$. To su točke s najjednostavnijim koordinatama, zapravo temeljne točke u koordinatizaciji. Te točke čine četverovrh, jer nikoje tri od njih nisu kolinearne. Možemo odmah uočiti da će među traženim konikama biti i nekih singularnih, a to će biti one koje se sastoje od po dvije spojnice zadanih točaka. Npr. pravac kroz $(0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 1)$ – koji služi obično kao izbor za "beskonačno daleki" pravac, ovdje zasad nebitno – ima jednadžbu $x_0 = 0$, a pravac kroz $(1 : 0 : 0)$ i $(1 : 1 : 1)$ jednadžbu $x_1 - x_2 = 0$.

Polinom $x_0(x_1 - x_2) = x_0x_1 - x_0x_2$ je reducibilni homogeni polinom stupnja 2, a određuje singularnu koniku koja se sastoji od dva pravca, sa sjecištem u točki $(0 : 1 : 1)$. To je jedna od tri dijagonalne točke potpunog četverovrha. Ostala dva para suprotnih stranica čine daljnje dvije singularne konike među promatranima, a sijeku se u ostalim dvjema dijagonalnim točkama.

Primjer 3.5.2. *Sad potražimo sve konike kroz zadane 4 točke, jednostavno uvrštavanjem koordinata tih točaka, odakle dobivamo sustav od 4 linearne jednadžbe s koeficijentima matrice A (ima ih 6) kao nepoznanicama.*

Jednadžba konike se može izraziti kao:

$$a_{02}x_0(x_1 - x_2) + a_{12}x_1(x_0 - x_2) = 0. \tag{3.2}$$

Sad, svaka konika koja prolazi kroz zadane 4 točke ima jednadžbu ovakvog oblika, za neki izbor koeficijenata a_{02} i a_{12} . Prethodno spomenute singularne konike dobivaju se ako se uzme 1 i 0, odnosno 0 i 1 za te koeficijente, te 1 i -1 za treću. Lako se vidi da su to jedine tri singularne konike, jer je inače $\det A \neq 0$. Naravno, ne mogu oba koeficijenta biti 0 jer bi onda A bila nulmatrica (isključeno, jer je onda f nulpolinom).

Za nesingularne konike među ovima moraju oba koeficijenta biti različita od 0 pa se onda jednadžba može pojednostavniti tako da se podijeli s jednim od tih koeficijenata i onda imamo oblik npr. $cx_0(x_1-x_2)+x_1(x_0-x_2) = 0$. Ostao je 1 slobodni parametar, dakle imamo jednadžbu 1-parametarske familije konika kroz vrhove jednog četverovrha (za drukčije koordinate tih vrhova dobili bismo opet 1 - parametarsku familiju konika, samo drukčijeg oblika opće jednadžbe).

Svaka nesingularna konika te familije određena je izborom vrijednosti parametra c, ali mogli bismo ju izabrati i izborom još jedne, pete točke (koja nije kolinearna ni s koje dvije od četiri početne). Vidimo stoga da je nesingularna konika jednoznačno određena s bilo kojih svojih 5 točaka "u općem položaju" (što znači da nikoje tri nisu kolinearne).

Teorem 3.5.3. *Neka je K nesingularna konika u realnoj projektivnoj ravnini. Pravac može imati ili dvije različite zajedničke točke s tom konikom ili jednu zajedničku točku ili nema zajedničkih točaka s konikom.*

Dokaz. Dokaz se svodi na rješavanje kvadratne jednadžbe s tri poznata moguća slučaja.

□

Polariteti konika

Jednadžba konike (u matričnom obliku) glasi $X^tAX = 0$. Kako možemo smatrati da je A simetrična matrica, ovu jednadžbu napišimo u obliku $(AX)^tX = 0$. Shvatimo li AX kao sliku točke X u polaritetu zadanom matricom A (uzmimo sad da je A regularna matrica), ova jednadžba izražava incidenciju točke X i njezine polare, pravca koji joj je pridružen u tom preslikavanju ($U = AX$, dakle $U^tX = 0$).

Gledano na taj način, nesingularna konika zadaje polaritet, a točke konike su upravo one točke ravnine koje su incidentne s vlastitom polarom. Polara točke na konici je tangenta konike u toj točki (naime, očito je zbog bijektivnosti preslikavanja da ne mogu dvije točke konike biti incidentne s jednom polarom koja bi im onda bila zajednička).

Obrnuto, ako je zadan polaritet ravnine, konika se može zadati kao skup točaka koje su incidentne sa svojom polarom. Dakle, to je ta jednostavna, a jako korisna veza
konika $\leftrightarrow$ polaritet.

Definicija 3.5.4. *Autopolarni trovrh je trovrh, ujedno i trostran, takav da su svaki vrh i suprotna stranica uzajamno pridruženi kao pol i polara u zadanom polaritetu.*

Definicija 3.5.5. *Točke X i Y su konjugirane u nekom polaritetu (tj. u odnosu na neku koniku) ako jedna od njih leži na polari druge.*

To je simetrična relacija, naime X je incidentna s polarom od Y ako i samo ako je Y incidentna s polarom od X. Ova uzajamnost (simetričnost) slijedi odatle što polaritet čuva incidenciju i k tome je involutoran. U matričnom zapisu: ako je $(AX)^tY = 0$ onda je (transponiranjem) i $(AY)^tX = 0$. Malo pojednostavljeno: $X^tAY = Y^tAX = 0$.

Točka konike je incidentna s vlastitom polarom, dakle sama sebi je konjugirana. Također, i svaka druga točka tangente konjugirana je s diralištem tangente. Dualno za pravce: dva pravca su konjugirana u nekom polaritetu ako svaki od njih prolazi polom drugog. Tangenta konike je pravac koji je sam sebi konjugiran.

Teorem 3.5.6. *Neka pravac s siječe koniku K u dvjema različitim točkama, S_1 i S_2 . Ako je P bilo koja točka pravca s različita od sjecišta s konikom, a Q točka na pravcu s koja je konjugirana s P, onda vrijedi $H(S_1S_2, PQ)$. Dakle, konjugirane točke na pravcu s ujedno su i harmonički pridružene s obzirom na sjecišta pravca s konikom.*

Dokaz. Ovo se može dokazati izračunavanjem dvoomjera, za koji izlazi vrijednost -1, što znači harmonitet četvorke točaka (v.3.3). Uočimo da doista postoji točno jedna točka Q na pravcu s koja je konjugirana točki P, jer Q je sjecište pravca s i polare od P.

□

3.6 Pramen konika i polarna konika pravca

Ograničit ćemo se na skup svih konika (nesingularnih i singularnih) koje prolaze vrhovima jednog četverovrha. Dakle, imaju zajedničke 4 točke, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Tu su 3 singularne konike, koje se sastoje od po dva pravca (suprotnih stranica četverovrha, dakle onih koje nemaju zajednički vrh, a njihova sjecišta su 3 dijagonalne točke četverovrha).

U prethodnom odjeljku zapravo smo već izračunali jednadžbu (3.2) takvog pramena, uz posebni izbor koordinata te 4 točke (to su temeljne točke pramena). Kad se izostavi singularna konika $x_0(x_1 - x_2) = 0$, jednadžba se može pisati i ovako:

$$cx_0(x_1 - x_2) + x_1(x_0 - x_2) = 0.$$

Kod pramena konika zapravo je uvijek riječ o 4 zajedničke točke, samo one ne moraju biti različite niti sve realne. Definicija pramena konika polazi od linearne kombinacije jednadžbi dviju konika, što je opet jednadžba neke konike:

$$\lambda X^t A_1 X + \mu X^t A_2 X = X^t(\lambda A_1 + \mu A_2)X = 0.$$

Linearnim kombinacijama dviju simetričnih matrica dobivaju se različite, opet simetrične matrice (no, ne mogu se dobiti sve simetrične matrice reda 3, jer to je potprostor dimenzije 6 u vektorskom prostoru svih matrica reda 3 pa dvije matrice ne čine njegovu bazu).

No, ako je pramen zadan konikama $X^t A_1 X = 0$ i $X^t A_2 X = 0$ kao osnovnima, također bilo koje dvije konike te familije mogu poslužiti kao osnovne. Uočimo da ni A_1 ni A_2 ne smije biti nulmatrica, a također ni njihova linearna kombinacija ne može biti nulmatrica jer za različite konike pripadne matrice nisu proporcionalne, tj. linearno su nezavisne.

Dakle, gledano matrično, pramen konika određen je linearno nezavisnim skupom dviju simetričnih matrica $\{A_1, A_2\}$. Isti pramen određen je bilo kojim dvjema linearnim kombinacijama ovih matrica, ako su i te dvije matrice linearno nezavisne.

Uvjet je lako izraziti algebarski: ako je $\{A_1, A_2\}$ linearno nezavisan, onda će skup $\{\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda' A_1 + \mu' A_2\}$ biti također linearno nezavisan ako i samo ako je $\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0$.

Gledajući konike, pramen je određen bilo kojim dvjema različitim konikama koje mu pripadaju. Zato može biti praktično uzeti npr. dvije singularne konike pramena kao temeljne, što smo dobili u (3.2).

Svaki pravac ima svoj pol s obzirom na neku koniku (uzimamo nesingularnu, zasad). Pogledajmo što je pol "beskonačno dalekog" pravca, u proširenoj euklidskoj ravnini. Bit će to centar konike. Pol bilo kojeg pravca možemo odrediti kao sjecište polara nekih dviju točaka tog pravca. Ako je to beskonačno daleki pravac, iz svake njegove točke tangente na koniku su paralelne (ako iz točke postoje dvije tangente, a može biti i samo jedna, kad je točka na konici, za hiperbolu i parabolu).

Dirališta paralelnih tangenti krajnje su točke jednog dijametra (promjera) konike, kao posebnog slučaja tetive. Dakle, polara beskonačno daleke točke sadrži krajnje točke jednog dijametra. Kad uzmemo dvije beskonačno daleke točke i iz svake dvije paralelne tangente na koniku (zamislimo za elipsu), te četiri tangente određuju jedan paralelogram. Spojnice polovišta stranica tog paralelograma su dva promjera konike i oni se sijeku u centru.

Gledamo li hiperbolu, tangente u njezinim sjecištima s beskonačno dalekim pravcem ujedno su i polare tih sjecišta. To su asimptote i sijeku se u centru hiperbole, dakako.

Dakle, za svaku pojedinu (nesingularnu) koniku, njezin centar je pol beskonačno dalekog pravca. Računom možemo potvrditi da se ovako definirani centar konike podudara s centrom konike čije su koordinate određene drukčijim pristupom u afinoj geometriji.
Ako je konika zadana jednadžbom $X^t AX = 0$, onda pripadni polaritet djeluje na pravce po formuli $\rho X = A^{-1}U$. Za beskonačno daleki pravac $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pa je njegov pol određen s $A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, a to je prvi stupac matrice A^{-1}. Projektivne koordinate centra su stoga

$$(a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 : a_{02}a_{12} - a_{01}a_{12} : a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}),$$

što prijelazom na afine koordinate daje najprije

$$(ab - h^2 : fh - gb : gh - fa)$$

i zatim

$$x_0 = \frac{fh - gb}{ab - h^2}, \qquad y_0 = \frac{gh - fa}{ab - h^2}.$$

Lako se vidi da je (x_0, y_0) upravo rješenje sustava

$$ax + hy + g = 0, \qquad hx + by + f = 0$$

kojim je određen centar simetrije konike u afinoj ravnini.

Sad razmotrimo pramen konika. Prema Bôcheru, skup centara svih konika tog pramena također čini jednu koniku.

Promatrani pravac u projektivnom pristupu ne mora biti neki posebni pravac (onaj "beskonačno daleki" u proširenoj euklidskoj ravnini) pa onda niti pridruženi polovi nisu baš centri konika pramena. No, zaključak je opet taj da sve te točke pripadaju jednoj konici, tzv. polarnoj konici promatranog pravca.

Teorem 3.6.1. *Za svaku točku postoji jedna točka ravnine koja je s njom konjugirana s obzirom na sve konike promatranog pramena.*

Dokaz. Dokaz s jednadžbama polara je jednostavan. Neka su A_1 , A_2 pripadne matrice za bilo koje dvije konike pramena, a odabranu točku označit ćemo s Y. Sad za svaku točku X koja se nalazi na obje polare od Y vrijedi: $X^t A_1 Y = X^t A_2 Y = 0$. Za linearnu kombinaciju (to jest za bilo koju koniku pramena) onda izravno zbrajanjem imamo: $X^t(\lambda A_1 + \mu A_2)Y = 0$. Dakle, ista točka X koja je sjecište dviju polara, također je na svim polarama i time je teorem dokazan, s izuzetkom nekih posebnih točaka.

To su vrhovi i dijagonalne točke temeljnog četverovrha. Za vrhove temeljnog četverovrha je lako, jer svi pripadaju svakoj konici pramena pa je svaki konjugiran sam sebi s obzirom na svaku od tih konika. To znači da je svakom vrhu pridružen on sam kao točka kroz koju prolaze sve njegove polare – a to su, dakako, tangente u tom vrhu svih konika pramena. Drukčije je za 3 dijagonalne točke. Dijagonalne točke čine autopolarni trovrh za svaku koniku pramena, jer je temeljni četverovrh upisan svakoj od tih konika. Polara svake od dijagonalnih točaka jest spojnica ostalih dviju dijagonalnih točaka i to vrijedi za svaku koniku pramena. Dakle, pojedinoj dijagonalnoj točki pridružen je cijeli pravac, a ne jedna jedina točka, kao za prije razmatrane ("nesingularne") točke. To je iznimka (singularitet) koja nam neće dalje smetati. Za sve ostale točke vrijedi da im je pridružena točno jedna točka na opisani način. Za singularne točke ne dobiva se pramen pravaca kroz jednu točku nego se svi ti pravci podudaraju (tj. to je jedan jedini pravac, za svaku dijagonalnu točku). □

Definicija 3.6.2. *Neka je zadan pramen svih konika koje prolaze vrhovima jednog četverovrha (pretpostavljamo, dakle, da su temeljne točke pramena četiri realne točke od kojih po tri nisu kolinearne). Svakoj točki Y realne projektivne ravnine, s izuzetkom triju dijagonalnih točaka temeljnog četverovrha, pridružena je tada točka Y' koja je konjugirana točki Y s obzirom na svaku koniku pramena. Drukčije rečeno, točka Y' je vrh pramena pravaca kojeg čine polare točke Y s obzirom na sve konike pramena. Ovo preslikavanje označit ćemo s ϕ, dakle $\phi(Y) = Y'$.*

Preslikavanje ϕ definirano je za sve točke, osim one 3 singularne (dijagonalne). Možemo promatrati sliku od ϕ kad se ograničimo samo na točke nekog pravca, znači možemo se pitati kako izgleda skup svih $\phi(Y)$ kad Y prolazi samo točkama jednog pravca. Odgovor glasi: to je konika, pritom nesingularna uz pretpostavku da pravac p ne prolazi nekom singularnom točkom pramena. Ta konika nam je glavni cilj, kako je već najavljeno.

Teorem 3.6.3. *Neka je ϕ preslikavanje zadano Definicijom 3.6.2. i p pravac koji ne prolazi nekom singularnom točkom pramena konika. Tada je $\phi(p)$ konika, tzv. polarna konika pravca p. Pritom je s $\phi(p)$ označen skup svih $\phi(X)$, gdje je X točka pravca p.*

Dakle, izaberemo bilo koje dvije nesingularne konike iz pramena. Kako je već naglašeno, dvije konike određuju pramen i, štoviše, određuju točku $\phi(X)$ za bilo koju točku X. Neka su A_1 , A_2 pripadne matrice tih konika, kao i prije, a ϕ_1, ϕ_2 pripadni polariteti. Točka X ima svoje polare U_1 , U_2 u tim polaritetima. $\phi(X)$ je sjecište pravaca U_1 i U_2. Pritom, za svaku točku X pravca p njezina polara $U_1 = \phi_1(X)$ prolazi kroz pol $\phi_1(p)$ pravca p, analogno za pravac $U_2 = \phi_2(X)$ koji prolazi kroz pol $\phi_2(p)$.

Kad točka X varira na pravcu p, imamo jedan skup pravaca U_1 kroz točku $\phi_1(p)$ i drugi skup pravaca U_2 kroz točku $\phi_2(p)$.

Sada nam je važna veza navedenih pramenova pravaca kroz $\phi_1(p)$ i $\phi_2(p)$. Tvrdnja: ta veza, to jest pridruživanje "posredstvom" točaka X pravca p uspostavljena je jednom projektivnom transformacijom (kratko: projektivitetom) zato što je to kompozicija dva polariteta.

Podsjetimo se da je kompozicija bilo koje dvije projektivne korelacije projektivna transformacija, jer točke se preslikaju opet u točke, a pravci u pravce, tako da je sačuvana incidencija (ide točka $\rightarrow$ pravac $\rightarrow$ točka, odnosno pravac $\rightarrow$ točka $\rightarrow$ pravac, uz čuvanje incidencije). Za polaritet, kompozicija sa samim sobom je identiteta.

Naime, ovdje $U_1 = \phi_1(X)$ pa je $\phi_1(U_1) = X$. Također, $U_2 = \phi_2(X)$ pa je $\phi_2(U_2) = X$.
(ϕ_1, ϕ_2 su involutorna preslikavanja).

Sada relacija uspostavljena preko točaka pravca p izgleda jednostavno ovako:

$$U_2 = \phi_2(X) = \phi_2(\phi_1(U_1) = (\phi_2\phi_1)U_1$$

tj. kompozicijom polariteta, a to je projektivna transformacija, preslikavaju se pravci jednog pramena u pravce drugog pramena.

Ako želimo ovo izraziti matrično pripazimo na to da li matrica polariteta izražava preslikavanje točaka na pravce ili obrnuto, jer te dvije matrice su uzajamno inverzne.

Podsjetimo se da je projektivna korelacija zadana regularnom matricom A tako da na točke djeluje s $\rho U' = AX$, a na pravce s $\rho X' = BU$, pri čemu se matrica B dobiva iz A invertiranjem i transponiranjem. Posebno za polaritet, matrica A je simetrična. Imajući to u vidu, odgovarajući matrični izraz glasi:

$$U_2 = \phi_2(X) = \phi_2(\phi_1(U_1) = (A_2A_1^{-1})U_1.$$

Nama je cilj odrediti skup točaka $\phi(p)$ kao skup sjecišta pravaca U_1 i pravaca

$$U_2 = \phi_2(\phi_1(U_1) = (A_2A_1^{-1})U_1.$$

Kompozicija $\phi_2\phi_1$ preslikava točku $\phi_1(p)$ u točku $(\phi_2\phi_1)(\phi_1(p)) = \phi_2(p)$. Ovo je osnova za izvod tvrdnje kako se pridruženi pravci U_1 i pravci U_2 sijeku u točkama jedne konike, a ta

će konika $\phi(p)$ također prolaziti kroz točke $\phi_1(p)$ i $\phi_2(p)$.
Veza je zadana matrično - vektorski $U_2 = \phi_2(\phi_1(U_1) = (A_2 A_1^{-1})U_1$ i to se može izračunati, uzimajući pritom u obzir činjenice iz projektivne geometrije.

Budući da je dokaz tvrdnje o skupu sjecišta pridruženih pravaca nešto složeniji, izložit ćemo ga u zasebnom odjeljku 3.7.

Kod preslikavanja dvaju pramenova pravaca spojnica A i A' (a to je pravac koji pripada i jednom i drugom pramenu) ne preslikava se sama u sebe.

Naime, samo u tom slučaju sjecišta pridruženih pravaca ne tvore nesingularnu koniku ("pravu krivulju") nego su to kolinearne točke pa tvore pravac (singularnu krivulju).
Ako bi za neke nesingularne konike pramena i pripadne polaritete vrijedilo $\phi_1(p) = \phi_2(p)$, onda bi toj točki oba polariteta pridruživala isti pravac p. Prijeđimo na matrični prikaz. Bilo bi $A_1X = \mu A_2X$ za točku X (imamo u vidu da je X vektor - stupac različit od 0, a faktor $\mu \neq 0$ treba staviti zato što matrice A_1 i μA_2 zadaju isti polaritet, odnosno X i μX zadaju istu točku). Odavde $(A_1 - \mu A_2)X = 0$. Imamo zapravo homogeni sustav za koji tražimo netrivijalna rješenja, a da bi takva uopće postojala, matrica $A_1 - \mu A_2$ ne smije biti regularna. Tada je μ rješenje karakteristične jednadžbe det $(A_1 - \mu A_2) = 0$. Kad je matrica $A_1 - \mu A_2$ singularna, singularna je i pripadna konika pramena.

Takvih ima najviše 3 (jer je karakteristični polinom stupnja 3 pa najviše toliko može biti različitih rješenja za μ), a u našem slučaju znamo unaprijed da singularnih konika u pramenu ima točno 3 (prisjetimo se, to su 3 para suprotnih stranica temeljnog četverovrha pramena). Koje su onda točke X, kao rješenja sustava za odgovarajuće 3 vrijednosti parametra μ ? To su nužno tri dijagonalne točke četverovrha, zvane ujedno i singularne točke pramena, a to su dvostruke točke ovih triju singularnih konika – sjecišta pravaca koji čine singularne konike.

No, pretpostavka je u Teoremu 3.6.3. da pravac p ne prolazi nijednom singularnom točkom pramena. Vidimo da su jedini mogući izuzetci isključeni tom pretpostavkom, jer već prije smo zaključili da je polara dijagonalne (singularne) točke pravac koji spaja ostale dvije dijagonalne (singularne) točke.

Za upotpunjenje dokaza Teorema 3.6.3. ostao je prije spomenuti teorem koji će biti dokazan u sljedećem odjeljku.

3.7 Konika generirana projektivitetom

Teorem 3.7.1. *Neka su A i A' različite točke realne projektivne ravnine te neka je π projektivna transformacija ravnine koja točku A preslikava u A', ali pravac AA' ne preslikava sam u sebe. Tada skup svih sjecišta pravaca p koji prolaze točkom A i njihovih slika*

$\pi(p) = p'$ čini jednu nesingularnu koniku. Tangenta te konike u točki A preslikava se transformacijom π u pravac AA', a pravac AA' preslikava se u tangentu konike u točki A'.

Dokaz će biti analitički, a pojednostavit ćemo ga primjenom nekih već izračunatih relacija. Uzet ćemo neke (općenite) točke A i A' te točke B i C, tako da nikoje tri od ovih točaka nisu kolinearne (tj. da čine četverovrh). Odredit ćemo oblik projektivne transformacije koja preslikava točku A u A', pravac AB u pravac $A'B$ te pravac AC u pravac $A'C$. Kroz točke A, A', B i C prolaze konike jednog pramena. Da bi tvrdnja teorema bila istinita, potrebno je pokazati kako će za bilo koji daljnji pravac kroz točku A njegovo sjecište sa svojom slikom pripadati jednoj te istoj konici spomenutog pramena.
Uočimo da su sve 4 točke – A, A', B i C – sjecišta pridruženih pravaca u promatranoj projektivnoj transformaciji. B i C su tako izabrane, dok su A i A' također takva sjecišta zahvaljujući pretpostavci da se pravac AA' ne preslikava sam u sebe. Naime, pravac AA' pripada pramenu pravaca i kroz A i kroz A'. Kako je $\pi(A) = A'$ po pretpostavci, $\pi(AA')$ je neki pravac kroz A' pa se AA' i $\pi(AA')$ sijeku u točki A'. S druge strane, AA' je pravac kroz A' pa je on slika nekog pravca kroz točku A, tako da je A sjecište pravca AA' i njegove praslike, $\pi^{-1}(AA')$.

Postavit ćemo opću jednadžbu konike kroz navedene 4 točke (dakle, jednadžbu pramena kojem je taj četverovrh temeljni), odrediti oblik (matricu) projektivne transformacije π koja ispunjava zadane uvjete pa provjeriti da sjecište svakog pravca p s njegovom slikom $\pi(p) = p'$ pripada jednoj te istoj konici tog pramena. Dodatno ćemo moći provjeriti da se polara točke A s obzirom na tu koniku preslikava u spojnicu AA', a da je slika $\pi(AA')$ upravo polara točke A'.

Značajno pojednostavljenje računa postići ćemo izborom koordinata za 4 istaknute točke, tako da to budu $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ i $(1:1:1)$. Time ćemo već unaprijed znati oblik jednadžbe konike kakav bismo trebali dobiti, jer je otprije poznat:

$$a_{02}x_0(x_1 - x_2) + a_{12}x_1(x_0 - x_2) = 0.$$

No, važno je uočiti da se ovakav izbor koordinata može uzeti bez gubitka općenitosti. Naime, bilo koja dva četverovrha u realnoj projektivnoj ravnini mogu se preslikati jedan u drugi odgovarajućom projektivnom transformacijom, a onda se tom transformacijom prenose i sva projektivna svojstva (svojstva bazirana na incidenciji). Važno je i to da projektivna transformacija preslikava nesingularnu koniku u također nesingularnu koniku.

Dokaz. Izaberimo, dakle $A = (1:0:0)$, $A' = (0:1:0)$, $B = (0:0:1)$ i $C = (1:1:1)$. Označimo s M traženu matricu projektivne transformacije i prisjetimo se da ona nije jednoznačno određena, jer množenjem s faktorom različitim od 0 dobiva se matrica kojom je zadana ista projektivna transformacija. To možemo iskoristiti npr. tako da prvi stupac matrice M bude $[010]^t$. Naime, kako se točka $(1:0:0)$ treba preslikati u $(0:1:0)$, vektor $(1,0,0)$ preslikava se u vektor oblika $\alpha(0,1,0)$ za neki $\alpha \neq 0$ (jer, točke nisu pojedini vektori nego potprostori razapeti jednim vektorom, tako da $(1,0,0)$ ne mora imati sliku upravo $(0,1,0)$). No, izborom faktora kojim se množi matrica M možemo ipak u prvom stupcu napisati $[010]^t$, samo što to nećemo smjeti ponovno učiniti u ostalim stupcima (nakon što smo slobodu izbora iskoristili za prvi stupac).

Nadalje, pravac AB preslikava se u pravac $A'B$. To ne znači da se točka B preslika baš u samu sebe, nego u neku točku na pravcu $A'B$, različitu od A'. Na tom pravcu sve točke imaju prvu koordinatu 0, jer se dobivaju kao linearne kombinacije $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$. Možemo staviti da se B preslika u $(0:a:b)$, pri čemu a i b ne smiju oba biti 0. Štoviše, b ne smije biti 0 jer ta točka nije $(0:1:0)$ (točka A').

Slično, točka $C = (1:1:1)$ preslikava se u neku točku pravca $A'C$, različitu od A'. Taj pravac spaja $(0:1:0)$ i $(1:1:1)$ pa svaka točka na njemu ima prvu koordinatu jednaku trećoj. Možemo staviti $(c:d:c)$ za sliku točke C, a pritom je $c \neq 0$. Dakle, M mora biti takva matrica da vrijedi:

$$M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & a & d \\ 0 & b & c \end{bmatrix}$$

Odavde možemo izraziti

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & a & d \\ 0 & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Zapravo, trebat će nam inverz matrice M, jer za djelovanje na pravce matrica projektivne transformacije je $(M^{-1})^t$.

Imamo:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & a & d \\ 0 & b & c \end{bmatrix}^{-1}$$

Dobiva se:

$$M^{-1} = \frac{1}{bc}\begin{bmatrix} ac-bd+b & bc & -ac \\ b & 0 & 0 \\ b-c & 0 & c \end{bmatrix}$$

Faktor $\frac{1}{bc}$ možemo zanemariti (dolazi od determinante matrice koja se invertira).

Trebamo transponirati dobivenu matricu pa imamo:

$$M_1 = \begin{bmatrix} ac-bd+b & b & b-c \\ b & 0 & 0 \\ b-c & 0 & c \end{bmatrix}.$$

(M_1 će nam biti kratka oznaka za tu matricu).

Ovom matricom zadano je djelovanje promatrane projektivne transformacije na pravce. Nas zanimaju slike pravaca kroz točku A jer trebamo izračunati sjecište takvog pravca i njegove slike.

Kad pravac $(u_0 : u_1 : u_2)$ sadrži točku $(1 : 0 : 0)$ vrijedi $u_0 = 0$. Možemo uzeti da u_1 nije 0, jer pravac $(0 : 0 : 1)$ je AA', a njega ćemo razmotriti posebno. Stoga za pravac kroz A možemo staviti $(0 : 1 : u)$ ($u = u_2/u_1$, dovoljan je jedan parametar). Sliku pravca $(0 : 1 : u)$ dobivamo kao

$$M_1\,[\,0\ \ 1\ \ u\,]^t = [\,b{+}(b{-}c)u\ \ 0\ \ cu\,]^t$$

Preostaje izračunati sjecište pravaca $(0 : 1 : u)$ i $(b + (b - c)u : 0 : cu)$. Točka $(x_0 : x_1 : x_2)$ incidentna je s oba pravca ako su odgovarajući vektori ortogonalni (vektor točke na vektore normala) pa ukratko taj homogeni sustav možemo riješiti i tako da jednostavno izračunamo vektorski produkt vektora $(0, 1, u)$ i $(b + (b - c)u, 0, cu)$.

Dobiva se: $x_0 = cu$, $x_1 = u(b + bu{-}cu)$, $x_2 = -(b + bu{-}cu)$. Provjerimo da li ove koordinate zadovoljavaju jednadžbu (3.2) koju znamo otprije. Račun daje:

$$x_1(x_0 - x_2) : x_0(x_1 - x_2) = b : c,$$

dakle

$$bx_0(x_1 - x_2) - cx_1(x_0 - x_2) = 0.$$

Variranjem pravca, to jest parametra u, uvijek se dobije točka ove konike (parametar u "iščezne", tj. rezultat ne ovisi o njegovoj vrijednosti).

Matrica ove konike je

$$\begin{bmatrix} 0 & b{-}c & -b \\ b{-}c & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$$

Pogledajmo još pravac AA', tj. $(0 : 0 : 1)$. Njegova slika je

$$M_1\,[\,0\ \ 0\ \ 1\,]^t = [\,b{-}c\ \ 0\ \ c\,]^t$$

Lako vidimo da je to doista polara točke $A' = (0 : 1 : 0)$, jer je to drugi stupac matrice konike. Polara točke $A = (1 : 0 : 0)$ je pravac $(0 : b - c : -b)$ (iz prvog stupca matrice konike). Sada

$$M_1\,[\,0\ \ b{-}c\ \ -b\,]^t = [\,0\ \ 0\ \ -bc\,]^t$$

i to je doista pravac $AA' = (0 : 0 : 1)$. Time je teorem dokazan.

$\square$

Napomena.
Ako tražimo projektivnu transformaciju T koja točke $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$ preslikava redom u vrhove nekog zadanog četverovrha (nikoje tri točke kolinearne), recimo da su to $(a_0:a_1:a_2)$, $(b_0:b_1:b_2)$, $(c_0:c_1:c_2)$, $(d_0:d_1:d_2)$, možemo postupiti ovako

$$T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_0&\mu b_0&\kappa c_0\\\lambda a_1&\mu b_1&\kappa c_1\\\lambda a_2&\mu b_2&\kappa c_2\end{bmatrix}$$

pri čemu su λ,μ,κ koeficijenti koje treba odrediti tako da bude još i $T[\,1\;\;1\;\;1\,]^t=[\,d_0\;\;d_1\;\;d_2\,]^t$.

Treba "podesiti" vektore iz odgovarajućih potprostora, jer zbroj vektora

$$(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=(1,1,1)$$

pa kako je T linearni operator:

$$T((1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1))=T((1,1,1)),$$

$$(\lambda a_0,\lambda a_1,\lambda a_2)+(\mu b_0,\mu b_1,\mu b_2)+(\kappa c_0,\kappa c_1,\kappa c_2)=(d_0,d_1,d_2).$$

Kad se ovo raspiše dobiva se jedinstveno rješenje za λ, μ, κ jer zbog nekolinearnosti trojki točaka vrijedi linearna nezavisnost pripadnih vektora pa je sustav Cramerov, s nepoznanicama λ, μ i κ.

3.8 Teorem o 11 točaka polarne konike

Neka je $T_1T_2T_3T_4$ temeljni četverovrh pramena, njegove dijagonalne točke su D_1, D_2, D_3 (npr. D_1 je sjecište stranica T_1T_3 i T_2T_4), a sjecište stranice T_iT_j i pravca p označeno je s T_{ij} (naravno, tih sjecišta ima 6, ako pravac p ne prolazi nijednim od vrhova, a sad ćemo uzeti da je tako).

Želimo za neke određene točke, koje imaju istaknutu ulogu u položaju pravca p prema temeljnom četverovrhu pramena, ustanoviti da pripadaju polarnoj konici pravca p. (Za svaku točku X pravca p pridružena točka $\phi(X)$ nalazi se na toj konici, a nekih 9, odnosno 11 točaka, bit će pritom istaknuto).

Bitna je pretpostavka da p ne prolazi nijednom od dijagonalnih točaka. Tada postoje tri sjecišta pravca p s pravcima D_1D_2, D_2D_3 i D_3D_1 . Uzmemo li za X sjecište p s pravcem D_1D_2, a budući da je pol pravca D_1D_2 upravo dijagonalna točka D_3 (to znamo otprije, naime dijagonalni trovrh četverovrha upisanoj bilo kojoj konici pramena je autopolaran) vidimo da je $\phi(X)=D_3$. Naime, kako polara točke X za svaku koniku pramena prolazi kroz D_3 , ta točka je konjugirana točki X za svaku koniku pramena pa je $\phi(X) = D_3$. Zato se D_3 nalazi na polarnoj konici, analogno to vrijedi i za D_1 i za D_2 .

Daljnjih 6 točaka koje treba uočiti su četvrte harmoničke točke s obzirom na vrhove T_i , T_j te sjecište stranice T_iT_j i pravca p, označeno s T_{ij} . Neka je, dakle, Q_{ij} točka na pravcu T_iT_j takva da vrijedi $H(T_i, T_j; T_{ij}, Q_{ij})$. Svih 6 točaka Q_{ij} nalaze se na konici $\phi(p)$, jer kad se na pravcu p uzme točka T_{ij} pravac T_iT_j siječe sve konike pramena u točkama T_i , T_j tako da polare točke T_{ij} s obzirom na sve te konike prolaze točkom Q_{ij}. Stoga je $\phi(T_{ij}) = Q_{ij}$, pa se ta točka nalazi na polarnoj konici $\phi(p)$.
Ovime zasad imamo projektivno-geometrijsko tumačenje konike 9 točaka kao poopćenje odgovarajućeg afinog teorema.
Za razmatranje preostalih dviju istaknutih točaka potrebne su još neke činjenice, povezane s važnim Desarguesovim teoremom o involuciji.

Krenimo ponovno od pramena konika koje prolaze vrhovima jednog četverovrha i od pravca p koji ne prolazi nijednim od ta 4 vrha. (Opet, možemo pretpostaviti da p ne prolazi niti jednom od tri dijagonalne točke, kao i prije, iako na početku to nije bitno). Svaka pojedina konika pramena može imati najviše dvije zajedničke točke s pravcem p, posebno može imati zajedničku dvostruku točku – ako konika dira pravac p koji joj je tada tangenta. Neka konika pramena ne mora uopće imati zajedničkih (realnih, naravno) točaka s pravcem p. No, ako izaberemo bilo koju točku pravca, tom točkom i temeljnim točkama pramena (ukupno 5 točaka) jednoznačno je određena konika pramena. (Singularne konike pramena, sastavljene od po dva pravca, također sijeku pravac p u dvjema točkama).

Na skupu točaka pravca p možemo stoga promatrati ovakvo preslikavanje: točki X pridružena je točka X' ako je X' drugo sjecište pravca p s konikom pramena koja prolazi točkom X. Općenito će po dvije točke X i X' biti pridružene uzajamno, a posebno može biti $X = X'$ ako konika pramena koja prolazi točkom X dira pravac p u toj točki, kao svoju tangentu. Označimo ovo preslikavanje s τ. Ono je bijektivno, a vrijedi $\tau^{-1} = \tau$ odnosno $\tau^2 = 1$ pa je i involutorno. Pritom, neka točka pravca p je fiksna u preslikavanju τ ako i samo ako je ta točka dirålište jedne konike pramena s pravcem p (to je onaj slučaj $X = X'$).

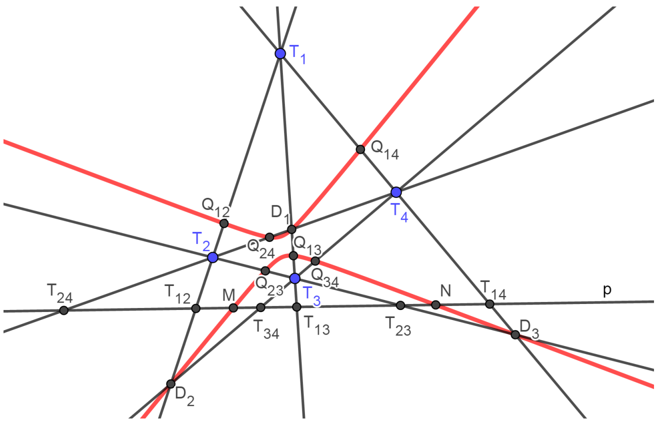
Spomenuti Desarguesov teorem ustvrđuje da je preslikavanje τ involutorni projektivitet (da je involutorno, to smo upravo zaključili, ali projektivitet – to znači da se može dobiti kao kompozicija perspektiviteta, odnosno centralnih projekcija). Ako se zna da je to involutorni projektivitet, a pritom nije identičko preslikavanje (što sigurno nije, jer čim postoje konike pramena koje sijeku pravac u dvjema različitim točkama), onda se (otprije iz projektivne geometrije) zna da ima ili točno dvije ili nijednu fiksnu točku.

Posljedica je ove činjenice da u pramenu konika postoje ili točno dvije konike ili nijedna takva da dira pravac koji ne prolazi nijednom temeljnom konikom pramena. (Primjerice, u terminima afine geometrije, u svakom pramenu konika kroz vrhove jednog četverovrha nalaze se ili dvije ili nijedna parabola; pritom je za pravac p očito izabran "beskonačno daleki pravac" jer parabola je konika koja tangira taj pravac).

U slučaju da su dvije takve konike, koje diraju pravac p, označimo dirališta sa Z_1 i Z_2. To će biti deseta i jedanaesta točka polarne konike.

Pogledajmo najprije zašto Z_1 i Z_2 pripadaju polarnoj konici. To je vrlo jednostavno, jer u preslikavanju ϕ te su točke pridružene međusobno, tako da je $\phi(Z_1) = Z_2$ i $\phi(Z_2) = Z_1$. Obje se nalaze na konici $\phi(p)$. Naime, svaka točka tangente konjugirana je diralištu tangente pa su dirališta zajedničke tangente p dviju konika pramena međusobno konjugirana s obzirom na te dvije konike pramena, a onda i s obzirom na svaku koniku pramena.

Dakle, fiksne točke involucije koju pramen konika zadaje na pravcu p također pripadaju polarnoj konici i u tom slučaju uočeno je 11 točaka na polarnoj konici. Ako nema realnih fiksnih točaka involucije, algebarski gledano postoje dvije fiksne točke s konjugirano kompleksnim koordinatama – te točke ne postoje u realnoj projektivnoj ravnini, ali se ipak mogu interpretirati geometrijski.



Slika 3.4: Primjer konike 11 točaka

Prethodnim razmatranjem dokazan je glavni teorem ovog rada:

Teorem 3.8.1. *Presiječemo li stranice nekog potpunog četverovrha pravcem p u šest različitih točaka, onda sljedećih jedanaest točaka leži na jednoj nesingularnoj konici:*

a) tri dijagonalne točke tog potpunog četverovrha;
b) na svakoj od šest stranica potpunog četverovrha točka koja sa sjecištem te stranice i pravca p te s parom vrhova na toj stranici čini harmoničku četvorku;
c) dirališta dviju konika koje prolaze vrhovima četverovrha i diraju pravac p.
Ta konika poznata je pod nazivom konika jedanaest točaka.

Radi potpunosti izlaganja, dajemo i skicu dokaza Desarguesovog teorema o involuciji, koji je bio potreban za dokaz tvrdnje (c) u prethodnom teoremu. Dokaz neće biti potpun utoliko što ćemo iskoristiti prikaz projektiviteta na pravcu u obliku razlomljene linearne transformacije, što je poznata činjenica iz projektivne geometrije.

Skica dokaza Desarguesovog teorema o involuciji
Izračunat ćemo sjecišta konika jednog pramena s pravcem koji ne prolazi nijednom od temeljnih točaka tog pramena te odrediti relaciju između tih parova sjecišta. Bez gubitka općenitosti možemo za temeljni četverovrh opet uzeti točke $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ i $(1:1:1)$, čime se jednadžba pramena može napisati u obliku

$$\lambda x_0(x_1 - x_2) + \mu x_1(x_0 - x_2) = 0.$$

Tada više ne možemo uzeti posebni izbor za pravac (npr. $x_0 = 0$) nego opću jednadžbu, stavimo $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$, pri čemu su koeficijenti α, β i γ različiti od 0, a također je i njihov zbroj $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ jer pravac ne prolazi nijednom od temeljnih točaka. Stoga možemo u jednadžbi pravca izabrati npr. $\alpha = 1$ ili $\alpha = -1$ tako da bude $x_0 = \beta x_1 + \gamma x_2$.

Sjecišta s konikama pramena tražimo tako da uvrstimo x_0 u jednadžbu pramena. Sređivanjem dobivene jednadžbe izlazi

$$(\lambda + \mu)\beta x_1^2 + (\lambda\gamma + \mu\gamma - \lambda\beta - \mu)x_1x_2 - \lambda\gamma x_2^2 = 0.$$

Ako bi u jednom rješenju bilo $x_1 = 0$, moralo bi biti $\lambda = 0$, jer $\gamma \neq 0$ i nije moguće $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. To se onda svodi na singularnu koniku $x_1(x_0 - x_2) = 0$ pramena i njezino sjecište $(\gamma x_2 : 0 : x_2)$, dakle $(\gamma : 0 : 1)$ s pravcem $x_0 = \beta x_1 + \gamma x_2$. Drugo sjecište određeno je s $x_0 = x_2$ pa tu mora biti $x_1 = (1-\gamma)/\beta$ i onda sjecište možemo zapisati s $(\beta : 1-\gamma : \beta)$.

Dalje uzmimo $x_1 \neq 0$ pa možemo jednadžbu za sjecišta rješavati kao kvadratnu jednadžbu u nepoznanici $t = x_2/x_1$. Ne moramo pisati rješenja pojedinačno, dovoljno je primijeniti Vietine formule, a rješenje ćemo, umjesto s t_1 i t_2 označiti s t i t'. Uočimo još da je sada $\lambda \neq 0$ (za $\lambda = 0$ već smo našli sjecišta s pravcem) pa se kvadratna jednadžba može pomnožiti s $1/\lambda$ i uvesti jedan parametar $k = \mu/\lambda$ što će pojednostavniti rješavanje.

Vietine formule sada daju

$$t + t' = 1 - \beta/\gamma + k(1 - 1/\gamma)$$

$$tt' = -(1 + k)\beta/\gamma.$$

(Podsjetimo da su β i γ sada čvrste vrijednosti iz jednadžbe pravca, obje različite od 0).

Možemo eliminirati parametar k iz ovih relacija i tako dobiti relaciju koja izravno povezuje t i t'.

Dobiva se $t' = (t+\delta)/(\epsilon t-1)$, pri čemu su $\delta = (\beta-1)/\gamma$, $\epsilon = (1-\gamma)/\beta$ samo kraće oznake za navedene izraze. Izravno se provjeri da je pridruživanje t i t' involutorno, to jest da vrijedi i $t = (t' + \delta)/(\epsilon t' - 1)$.

Dakle, t' se dobiva kao razlomljena linearna funkcija od t. Tu je još važno primijetiti (a lako se izračuna) da je $\delta\epsilon+1 \neq 0$ (to proizlazi iz $1+\beta+\gamma \neq 0$), jer inače bi funkcija bila konstanta. Ta funkcija ima još posebni oblik koji osigurava involutornost: zbroj koeficijenta uz t u brojniku i slobodnog člana u nazivniku iznosi 0.

Budući da je $x_0 = \beta x_1 + \gamma x_2$, lako se provjeri da ista involutorna relacija vrijedi za točke sjecišta, kao što vrijedi za sam parametar $t = x_2/x_1$.

Također se vidi da su točke $(\gamma : 0 : 1)$ i $(\beta : 1 - \gamma : \beta)$, koje smo prethodno odredili kao sjecišta jedne singularne konike za $\lambda = 0$, međusobno pridružene istom relacijom.
To je analitički argument za Desarguesov teorem o involuciji.

Primjer 3.8.2. *Navedimo jedan primjer izračunavanja polarne konike.*
Temeljni četverovrh pramena neće biti ortocentrički, no ipak ćemo radi lakšeg računanja izabrati četverovrh s nekim posebnim svojstvom. Za pravac p uzet ćemo beskonačno daleki pravac, s tim da će u pramenu postojati dvije parabole, to jest pramen će inducirati involuciju s dvjema fiksnim točkama (hiperboličku involuciju) na beskonačno dalekom pravcu. Stoga će polarna konika pravca p s obzirom na taj pramen prolaziti dvjema točkama pravca p te neće biti kružnica, nego hiperbola.

Počnimo od kružnice s jednadžbom $x^2 + y^2 = 50$ u euklidskoj ravnini. Izabrat ćemo četiri točke s cjelobrojnim koordinatama na toj kružnici kao temeljni četverovrh pramena pa će ta kružnica ujedno pripadati pramenu. Oznake istaknutih točaka bit će kao u prethodnom razmatranju konike 9 odnosno 11 točaka.

Stavimo $T_1 = (7, 1)$, $T_2 = (5, 5)$, $T_3 = (-5, 5)$, $T_4 = (-7, -1)$. Primijetimo da je T_1T_4 promjer kružnice, tako da su kutovi $\angle T_1T_2T_4$ i $\angle T_1T_3T_4$ pravi kutovi.

Prelazimo sad na homogene koordinate u proširenoj euklidskoj ravnini: $T_1 = (1 : 7 : 1)$, $T_2 = (1 : 5 : 5)$, $T_3 = (1 : -5 : 5)$, $T_4 = (1 : -7 : -1)$. Odredimo jednadžbe svih šest stranica četverovrha $T_1T_2T_3T_4$, a zatim i dijagonalne točke kao sjecišta suprotnih parova stranica.
(i) $T_1T_2 \ldots 15x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$, $T_3T_4 ... 20x_0 + 3x_1 - x_2 = 0$ sa sjecištem $D_2 = (1 : -1 : 17)$
(ii) $T_1T_3 \ldots 10x_0 - x_1 - 3x_2 = 0$, $T_2T_4 ... 5x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ sa sjecištem $D_1 = (1 : 1 : 3)$
(iii) $T_1T_4 \ldots x_1 - 7x_2 = 0$, $T_2T_3 ... 5x_0 - x_2 = 0$ sa sjecištem $D_3 = (1 : 35 : 5)$.

Točke Q_{ij} lako ćemo odrediti kao polovišta (euklidskih) dužina T_iT_j, jer polovište je harmonički pridruženo beskonačno dalekoj točki pravca T_iT_j (ovo je i jedan od razloga zašto smo za p izabrali beskonačno daleki pravac, jer inače bismo imali znatno više posla za izračunavanje točaka Q_{ij}). Izravno dobivamo: $Q_{14} = (0, 0)$ (središte kružnice, očito), u homogenim koordinatama $Q_{14} = (1 : 0 : 0)$, zatim $Q_{23} = (1 : 0 : 5)$, $Q_{12} = (1 : 6 : 3)$, $Q_{34} = (1 : -6 : 2)$, $Q_{13} = (1 : 1 : 3)$, $Q_{24} = (1 : -1 : 2)$.

Tako imamo već 9 točaka konike, ali uočavamo da se podudaraju točke $D_1 = (1 : 1 : 3) = Q_{13}$. Dijagonalna točka D_1 ujedno je i polovište dužine T_1T_3. Stoga imamo 8 različitih točaka pa možemo odrediti jednadžbu konike pomoću nekih 5 od tih točaka i provjeriti da i ostale 3 pripadaju toj konici. Naravno, možemo najprije potražiti sjecišta konike s beskonačno dalekim pravcem, što može rezultirati ili s dvije ili nijednom daljnjom točkom.

Jednadžbu pramena možemo napisati kao linearnu kombinaciju npr dvije singularne konike pramena, poput (iz jednadžbi pravaca u (i) i (iii))

$$\lambda(15x_0 - 2x_1 - x_2)(20x_0 + 3x_1 - x_2) + \mu(x_1 - 7x_2)(5x_0 - x_2) = 0.$$

(Drukčije, za dvije temeljne konike pramena možemo uzeti početnu kružnicu i jednu singularnu koniku pramena).

Jednadžbu konike $\phi(p)$ možemo izračunati na više načina, odabirući najprije 5 od dosad određenih točaka. Dobiva se jednadžba

$$x_1^2 - x_2^2 + 35x_0x_1 - 14x_1x_2 + 5x_0x_2 = 0.$$

Afini dio ove konike ($x_0 = 1$) ima jednadžbu $x^2 - y^2 - 14xy + 35x + 5y = 0$.

Zanima nas još i involutorni projektivitet kojeg pramen konika zadaje na pravcu $x_0 = 0$. U tom involutornom preslikavanju međusobno su pridružena sjecišta pojedine konike pramena s pravcem $x_0 = 0$. Iz (i), (ii) i (iii) lako izračunamo ta sjecišta pa vidimo da su međusobno pridružene: $(0 : 1 : -2)$ i $(0 : 1 : 3)$, $(0 : 1 : -1/3)$ i $(0 : 1 : 1/2)$ te $(0 : 1 : 0)$ i $(0 : 1 : 1/7)$.

Znajući da se involutorni projektivitet može zadati u obliku $x' = (ax+b)/(cx–a)$, uvrštavanjem za x i x' redom -2 i 3 pa -1/3 i 1/2 odnosno 0 i 1/7 (za involuciju su dovoljna bilo koja dva od ovih parova) nalazimo $x' = (-7x + 1)/(x + 7)$. Fiksne točke ($x = x'$) određene su jednadžbom $x^2 + 14x–1 = 0$. To su $(0 : 1 : -7 + 5\sqrt{2})$ i $(0 : 1 : -7–5\sqrt{2})$. Za parabole koje pripadaju pramenu možemo dobiti jednadžbe tako da po jednu od ovih točaka pridodamo temeljnom četverovrhu. Možemo to izračunati i iz jednadžbe

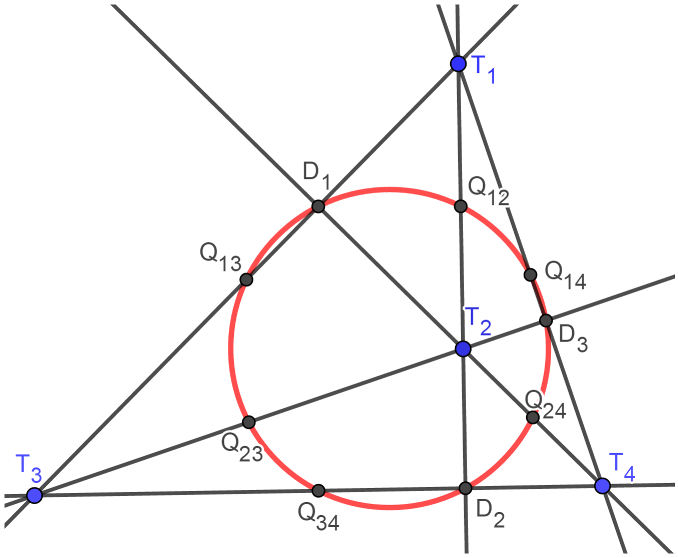
$$x_1^2 - x_2^2 + 35x_0x_1 - 14x_1x_2 + 5x_0x_2 = 0$$

uvrštavanjem $x_0 = 0$.

Zaključno, odredili smo koniku čija je jednadžba

$$x_1^2 - x_2^2 + 35x_0x_1 - 14x_1x_2 + 5x_0x_2 = 0$$

kao polarnu koniku pravca $x_0 = 0$ s obzirom na pramen konika čiji je temeljni četverovrh $T_1 = (1 : 7 : 1)$, $T_2 = (1 : 5 : 5)$, $T_3 = (1 : -5 : 5)$, $T_4 = (1 : -7 : -1)$.



Slika 3.5: Kružnica 9 točaka

Preostaje još razmotriti uvjete pod kojima konika devet, odnosno jedanaest točaka, postaje Eulerova (ili Euler-Feuerbachova) kružnica devet točaka. Ako je temeljni četverovrh pramena ortocentrički, to jest suprotne stranice su ortogonalne (u euklidskoj ravnini), polarna konika beskonačno dalekog pravca s obzirom na pramen zadan tim temeljnim četverovrhom prolazi kroz polovišta svih 6 dužina kojima su vrhovi krajnje točke te kroz tri dijagonalne točke (to su nožišta visina trokuta). Tri singularne konike pramena su međusobno okomiti pravci, tako da za njihove koeficijente smjera vrijedi $kk' = -1$ (i još su okomiti pravci s jednadžbama $x = 0$ i $y = 0$). Već dva para okomitih pravaca zadaju involutorni projektivitet na beskonačno dalekom pravcu u kojem su međusobno pridružene točke $(0 : 1 : k)$ i $(0 : 1 : -1/k)$ te, dodatno, $(0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 1)$. Ova involucija nema realnih fiksnih točaka (iz $k = -1/k$ slijedi $k^2 = -1$), dakle to je tzv. eliptička involucija. U kompleksnom proširenju dobili bismo točke $(0 : 1 : i)$ i $(0 : 1 : -i)$ na beskonačno dalekom pravcu, tzv. apsolutne točke.

Bibliografija

[1] Bôcher, M.: *On a Nine - point Conic*, Annals of Math. 6(5) (1892), p.132
http://www.jstor.org/stable/1967142

[2] De Villiers, M.: *The nine - point conic: a rediscovery and proof by computer*, Int. J. Math. Education in Science and Technology 37(1) (2006), 7-14.

[3] Milin Šipuš, Ž., Bombardelli, M.: *Analitička geometrija*, Zagreb, 2016.
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf

[4] Palman, D.: *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[5] Pierce, D.: *Thales and the Nine - point Conic*, The De Morgan Gazette 8 no. 4 (2016), 27-78.
http://mat.msgsu.edu.tr/ ˜dpierce/Mathematics/Geometry/Thales/nine-point-conic-2017-07-25.pdf

[6] Silvester, J. R.: *Geometry Ancient and Modern*, Oxford University Press, 2001.

Sažetak

Teorem o konici devet točaka poopćenje je poznatog teorema o kružnici devet točaka. U tom poopćenju ulogu ortocentra trokuta ABC preuzima bilo koja točka P u ravnini trokuta koja ne pripada spojnicama njegovih vrhova. Tvrdnja glasi da postoji konika koja prolazi kroz sljedećih devet točaka: polovišta stranica trokuta, polovišta dužina koje spajaju vrhove trokuta s točkom P te sjecišta pravaca tih spojnica sa suprotnim stranicama trokuta.

Prvi navedeni dokaz sastoji se u primjeni afine transformacije koja prikladno izabrani trokut i njegov ortocentar preslika u zadane točke A, B, C i P. Time se tražena konika dobiva kao afina slika jedne kružnice devet točaka. Nadalje, primjenom analitičke metode u realnoj afinoj ravnini dokazuje se da je konika devet točaka geometrijsko mjesto centara svih konika pramena određenog četverovrhom $ABCP$.

U trećem, najopsežnijem poglavlju, prethodne tvrdnje interpretiraju se i poopćavaju u terminima projektivne geometrije. U tu svrhu potrebno je primijeniti niz pojmova i ključnih rezultata projektivne geometrije. Umjesto geometrijskog mjesta centara konika jednog pramena promatra se, općenito, polarna konika pridružena bilo kojem pravcu p s obzirom na pramen zadan osnovnim četverovrhom. Polarna konika može prolaziti još dvjema istaknutim točkama pravca p, čime postaje konika jedanaest točaka. Klasični teorem o kružnici devet točaka odatle slijedi u slučaju kad su te dvije točke tzv. apsolutne točke realne projektivne ravnine.

Summary

The nine-point conic theorem is a generalization of the well-known nine-point circle theorem. In this generalization, the role of the orthocenter of the triangle ABC is taken over by any point P in the plane of the triangle, which does not belong to the lines joining the vertices of the triangle. The claim is that there is a conic that passes through the following nine points: the midpoints of the sides of the triangle, the midpoints points of the segments joining P to the vertices of the triangle and the points where the lines joining P to the vertices intersect the opposite sides.

The first proof consists of the application of an affine transformation which maps an appropriately chosen triangle and its orthocenter to the points A, B, C and P. The required conic is then obtained as the affine image of the nine-point circle. Furthermore, applying the analytical method in the real affine plane, it is proven that the nine-point conic is the locus of centers of the conics belonging to the pencil determined by the quadrilateral $ABCP$.

In the third, most comprehensive chapter, previous assertions are interpreted and generalized in terms of projective geometry. To this purpose, it is necessary to apply a number of concepts and key results of projective geometry. The locus of centers of conics belonging to a pencil is replaced, more generally, by the polar conic associated to any line p with respect to the observed pencil of conics. The polar conic may be incident with two more prominent points of the line p, thus becoming the eleven-point conic. The classical nine-point circle theorem then follows in the special case when these two points are the so called absolute points of the real projective plane.

Životopis

Rođena sam 19.11.1991. godine u Bjelovaru gdje sam pohađala II. osnovnu školu te nakon toga opću gimnaziju. Godine 2010., na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, inženjerski smjer te se iduće godine prebacila na nastavnički smjer. Na tom smjeru sam 2016. stekla titulu prvostupnice edukacije matematike, a zatim sam iste te godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.