VAR pristup: Creditmetrics

Bokšić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Bokšić

VAR PRISTUP: CREDITMETRICS

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Boris Podobnik

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

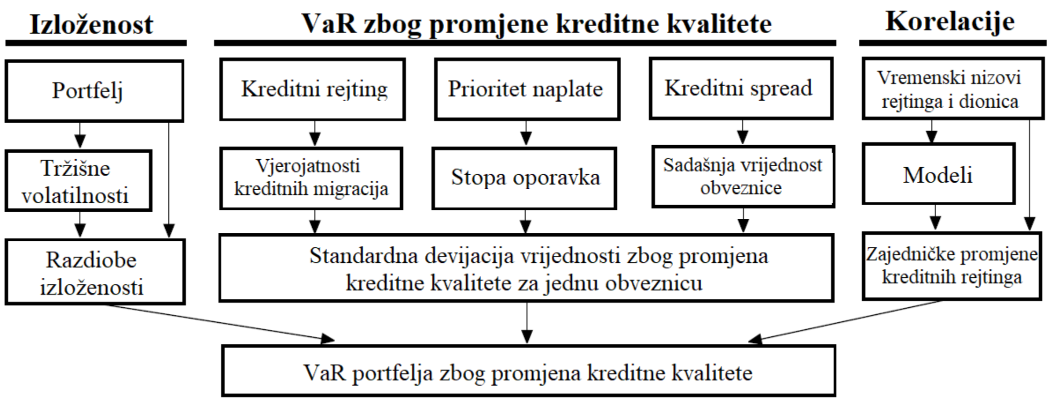
1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Sadržaj

Uvod

Tradicionalne banke smatraju se institucijama koje primaju kratkoročne depozite i njima financiraju dugoročne zajmove (kredite poduzećima i kućanstvima). Tada bilanca banke potpuno reflektira djelatnosti banke. Depoziti se na bilanci nalaze na strani obveza, dok imovina sadrži izdane kredite. Kako tradicionalne banke drže kredite do dospijeća, one su odgovorne za analizu rizičnosti dužnika, prije i nakon što je kredit dogovoren. Upravo zbog toga, banka je suočena s rizikom da će se kreditna kvaliteta dužnika pogoršati tijekom života kredita. Najgori slučaj je *default* koji označava nemogućnost ispunjenja svih dospjelih obveza. Alternativna definicija je bazirana na bilanci poduzeća: default se događa kada je vrijednost imovine manja od vrijednosti duga, tj. vlasnički kapital je nula ili ima negativnu vrijednost. Kreditni rizik prema tome definiramo kao rizik ekonomskog gubitka zbog defaulta, promjene rejtinga dužnika ili nekog drugog kreditnog događaja.

Mjerenje rizika podrazumijeva svođenje distribucije gubitaka financijskog instrumenta na jedan broj. Najčešće upotrebljavane mjere kreditnog rizika su kvantili (VaR) i očekivani manjak razdiobe gubitaka. Držanjem kapitalnih rezervi koje se računaju iz upravo navedenih mjera rizika, banke se mogu zaštititi od insolventnosti zbog potencijalnih gubitaka.



Slika 0.1: Analitički okvir CreditMetrics-a. [12]

U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove vezane za kreditni rizik i povijest kapitalnih zahtjeva za banke. Drugo poglavlje bavi se CreditMetrics-om, metodologijom računanja rizika kreditnog portfelja koja se bazira na korelacijama dužnika. U trećem poglavlju uvodimo teoriju ekstremnih vrijednosti i koristimo generaliziranu Pareto distribuciju za dobivanje procjene repa distribucije gubitaka. U zadnjem poglavlju dana je metodologija koja koristi Monte Carlo simulaciju povrata imovine poduzeća kako bismo dobili razdiobu gubitaka portfelja. Naposljetku su dani i rezultati simulacije provedene na hipotetskom portfelju obveznica.

Poglavlje 1

Kreditni rizik

1.1 Osnovni pojmovi

Kreditni rejting

Kreditni rejting je alfanumerička ocjena kreditnog rizika potencijalnog dužnika (osobe, poduzeća, države) koja opisuje njegovu sposobnost podmirivanja dospjelih obveza i implicitno predviđa vjerojatnost neizvršenja istih. Rejting predstavlja mišljenje kreditnih rejting agencija temeljeno na kvantitativnim i kvalitativnim informacijama potencijalnog dužnika. Najveće kreditne rejting agencije su *Standard & Poor's*, *Moody's* i *Fitch Ratings*. Više ocjene predstavljaju nižu vjerojatnost defaulta, ali ocjene ne označavaju konkretne vjerojatnosti već se svakoj kreditnoj kategoriji pridaje opis (vidi tablicu 1.2).

Rejting	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Vjerojatnost prijelaza (%)	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18

Tablica 1.1: Jednogodišnje vjerojatnosti prijelaza za dužnika BBB rejtinga. [12]

Za svaku kreditnu kategoriju, na temelju prikupljenih povijesnih podataka o trgovanju obveznicama (kreditima) kreditne agencije procjenjuju i vjerojatnosti da tijekom jedne godine obveznica ostane u istom kreditnom razredu, da se pogorša ili poboljša, te da dužnik defaultira. Te ishode nazivamo *kreditni događaji*. Procjene vjerojatnosti dane su matricom prijelaza. Promatrat ćemo osam kreditnih razreda (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC i Default). Uzmimo za primjer obveznicu rejtinga BBB koja dospijeva za pet godina. U tablici 1.1 su dane vjerojatnosti svih mogućih ishoda na kraju prve godine ako polazimo od obveznice rejtinga BBB.

Agencija / **Interpretacija**	**Moody's**	**S&P**	**Fitch Ratings**
Investicijski razred rejtinga			
Najviša kreditna kvaliteta	Aaa	AAA	AAA
Visoka kreditna kvaliteta, rizičnije nego prethodne	Aa1 Aa2 Aa3	AA+ AA AA-	AA+ AA AA-
Snažna sposobnost plaćanja, ekonomska situacija utječe na plaćanje	A1 A2 A3	A+ A A-	A+ A A-
Adekvatna sposobnost plaćanja, srednja kategorija, zadovoljavajuće Posljednji rejting u investicijskom razredu	Baa1 Baa2 Baa3	BBB+ BBB BBB-	BBB+ BBB BBB-
Spekulativni razred rejtinga			
Razvija se spekulativni kreditni rizik zbog ekonomskih promjena	Ba1 Ba2 Ba3	BB+ BB BB-	BB+ BB BB-
Prisutan visok spekulativni kreditni rizik, nije pogodno za investiranje, varira financijska situacija	B1 B2 B3	B+ B B-	B+ B B-
Visok rizik, sposobnost ovisi o povoljnim poslovnim odlukama, financijskim i ekonomskim uvjetima tržišta	Caa1 Caa2 Caa3	CCC+ CCC CCC-	CC+ CCC CCC- CC
Default, mogućnost parcijalnog oporavka	Ca, C	C, D	C, D

Tablica 1.2: Simboli kreditnog rejtinga tri najpoznatije svjetske rejting agencije. [10]

Kreditni spread

Kreditni rizik se na jedan način može izraziti preko spreada, razlike između (u kreditnom smislu) rizične i bezrizične kamatne stope. Tržište uglavnom zahtijeva kompenzaciju za kreditni rizik, pa se rizični vrijednosni papiri vrednuju drugačije nego papiri koji obećavaju iste novčane tokove, ali bez kreditnog rizika. Diskontiraju se uz premiju koja se naziva kreditni spread, a ovisi o tome kako tržište percipira rizik – prihvaća li ga ili izbjegava.

Vrijednosni papiri koji sa sobom nose kreditni rizik uključuju:

- *korporativne dužničke vrijednosne papire*, jedini tip koji može defaultirati u najužem smislu riječi. Najčešće su obveznice s fiksnim i promjenjivim kuponom te krediti banke,
- *javni dug*, denominiran u domaćoj ili stranoj valuti, izdan od strane države,
- *kreditne izvedenice*, ugovori čija cijena ovisi o cijenama drugih rizičnih vrijednosnih papira, npr. credit default swap (CDS),
- *strukturirane kreditne proizvode*, obveznice pokrivene udruženim računom hipoteka, kreditnih kartica pojedinaca, i ostalih tipova pokrića. Rizične su u tom smislu da ukoliko dovoljno kredita na udruženom računu defaultira, vjerovnik je na gubitku.

Svi ovi tipovi vrijednosnih papira imaju zajedničko to da njihova kamatna stopa uključuje kreditni spread, pa su stope više od onih bezrizičnih (u kreditnom smislu) iako obećavaju jednak budući novčani tok.

Osiguranje, pokriće, prioritet

Kredit može biti osiguran ili neosiguran. Razlika je u slučaju defaulta. Neosigurani kredit ima općenito potraživanje na imovinu poduzeća kod bankrota. Osigurani kredit ima potraživanje prema određenoj imovini, kolateralu. Kolateral se daje na prodaju od čega se isplati dug kreditoru. Ako neki kredit ima prioritet, pri defaultu se prvo namiruju vjerovnici tog kredita, a tek onda vjerovnici kredita nižeg prioriteta. Osigurani kredit ima prioritet naplate nad neosiguranim. Čak i unutar ovih dviju klasa mogu postojati različiti prioriteti.

Gubitak pod uvjetom defaulta

Izloženost u vrijeme defaluta (*exposure at default*, EAD) je količina novca koju vjerovnik može potencijalno izgubiti u defaultu. Taj iznos može biti jednostavno izražen kao što je nominalna vrijednost obveznice, a može ga biti puno teže utvrditi, kao što je neto sadašnja vrijednost swap ugovora.

Ako je V_t vrijednost neke imovine u trenutku t, onda je gubitak $X_{t,\tau}$ za interval $[t, t+\tau]$ definiran s

$$X_{t,\tau} = -(V_{t+\tau} - V_t).$$

Razdiobu slučajne varijable X zovemo razdiobom gubitka.

Ukoliko dođe do defaulta kreditor općenito ne gubi cijeli iznos svoje izloženosti. Poduzeće će vjerojatno još imati imovine koja ima neku vrijednost. Imovina će se prodati ili će se poduzeće reorganizirati i nastaviti s poslovanjem. U svakom slučaju vjerojatno će postojati dio koji investitor neće izgubiti: oporavak će biti veći od nule, ali manji od 100% izloženosti. Gubitak pod uvjetom defaulta ili *loss given default* (LGD) je iznos gubitaka za kreditora u slučaju defaulta. Oporavak i LGD se sumiraju do iznosa izloženosti. Oporavak se obično izražava kao stopa oporavka $R \in [0, 1]$:

$$R = \frac{\text{oporavak}}{\text{EAD}},$$

a LGD kao stopa gubitka: $LR = 1 - R$.

LGD i oporavak su u principu slučajne varijable. Također, moguće je da LGD bude koreliran s vjerojatnosti defaulta, što model čini još složenijim. Neke metode procjene LGD-a nalaze se u [1]. LGD je u primjenama ipak često tretiran kao poznati parametar.

1.2 Mjere kreditnog rizika

VaR

Value at Risk (VaR) mjeri minimalnu vrijednost neke imovine tijekom nekog vremenskog perioda za danu vjerojatnost (95%, 99%, itd.).

Definicija 1.2.1. (Generalizirani inverz i kvantil distribucije)

(i) Generalizirani inverz *funkcije distribucije $F : \Omega \to [0, 1]$ definira se kao*

$$F^{\leftarrow}(y) := \inf\{x \in \Omega : F(x) \geq y\}.$$

*(ii) Za $\alpha \in (0, 1)$, α-*kvantil *od F je dan s*

$$q_\alpha(F) := F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \Omega : F(x) \geq \alpha\}.$$

Definicija 1.2.2. (Value at Risk)
Neka je X gubitak s razdiobom F_X. VaR *za razinu pouzdanosti $\alpha \in (0, 1)$ je najmanji broj x takav da vjerojatnost da gubitak X prijeđe x nije veća od α.*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \geq x) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$

VaR je zapravo α-kvantil razdiobe gubitaka. Kreditni gubitci mogu se razložiti na tri komponente: očekivani gubitak, neočekivani gubitak, i gubitak u repu, iznad neočekivanog.

Očekivani gubitak (eng. *expected loss*, EL) je očekivana vrijednost kreditnog gubitka. To je dio gubitka s kojim kreditor treba postupati kao s troškom na računu dobiti i gubitka i prema tome imati rezerve kako bi ga pokrio. U terminima vrijednosti kredita računat ćemo ga kao razliku referentne vrijednosti (nije se dogodio kreditni događaj) i očekivane vrijednosti kredita nakon vremena τ.

Prema [14], neočekivani gubitak (eng. *unexpected loss*, UL) je kvantil gubitka veći od očekivanog. Nekada se definira kao standardna devijacija razdiobe gubitka, a nekad kao razlika VaR-a i očekivane vrijednosti gubitka na kraju promatranog vremenskog intervala. Neočekivani gubitak se još naziva i *kreditni VaR*.

$$UL_\alpha = VaR_\alpha - EL$$

Koncept VaR-a najlakše je objasniti na primjeru utrživog financijskog instrumenta kao što je dionica.

Primjer 1.2.3. (Tržišni VaR dionice)
Pretpostavimo da je danas cijena dionice $P = \$80$*, a procijenjena dnevna standardna devijacija* $\sigma = \$10$*. Zbog toga što se dionicama trguje u relativno kratkom vremenskom horizontu, broker ili upravitelj rizicima može se zapitati: „Ako sutra bude „loš“ dan, koliki je moj VaR (veličina gubitka vrijednosti) na nekoj razini pouzdanosti? “*

Pretpostavimo da je broker zabrinut s gubitkom vrijednosti na loš dan koji se, u prosjeku, događa jednom u sto dana, te da su dnevni povrati normalno distribuirani oko trenutne cijene od \$80*. Statistički, vjerojatnost da sutra bude loš dan iznosi* 1%*. Promotrimo funkciju gustoće normalne razdiobe. Znamo da* 98% *opaženih gubitaka leži između* $+2.33$ *i* -2.33 *standardne devijacije od očekivanja. Tada postoji* 1% *šanse da sutra vrijednost dionice padne ispod* $\$80 - 2.33\sigma = \$56.70$*. Alternativno, postoji* 99% *šanse da će vlasnik dionice izgubiti manje od* \$23.3 *u vrijednosti dionice. Tih* \$23.3 *se može promatrati kao VaR uz razinu pouzdanosti* 99%*. Pod pretpostavkom normalnosti, na loš dan (1 od 100) vrijednost dionice može biti bilo što ispod* \$56.70.

Ono što razlikuje kreditni od tržišnog VaR-a je promatrani vremenski period, nazvan horizont rizika (eng. *risk horizon*). Horizont rizika za procjenu kreditnog rizika općenito je duži, najčešće jedna godina. Pitanje koje se postavlja sada glasi: „Ako iduća godina bude „loša“ godina, koliki je kreditni VaR na nekoj razini pouzdanosti?“

Glavne ulazne varijable za računanje kreditnog VaR-a financijskog instrumenta su njegova cijena i volatilnost tj. standardna devijacija njegove tržišne vrijednosti (σ). Za dani horizont rizika i razinu pouzdanosti, kreditni VaR se može direktno izračunati ukoliko znamo razdiobu gubitaka.

Primjena ove metodologije kod kredita ima neposredne probleme. Prvo, trenutna tržišna cijena kredita se ne može direktno uočiti jer većina kredita nije utrživa. Drugo, jer cijena nije uočljiva, nemamo ni vremenski niz kako bismo procijenili σ. U najboljem slučaju, pretpostavka normalnosti povrata na neku utrživu imovinu je gruba aproksimacija, a aproksimacija postaje još manje precizna kad se primjeni na kredite.

Expected shortfall

VaR je kao mjera rizika oštro kritiziran zbog svojih loših agregacijskih svojstava. Kritike su potekle od Artznera i dr. ([3], [4]) koji su pokazali da VaR nije *koherentna* mjera rizika jer ne zadovoljava svojstvo subaditivnosti za koje su vjerovali da razumna mjera rizika treba zadovoljavati. Neka su F_{X_1} i F_{X_2} distribucije gubitaka za dva portfelja, te označimo s F_X distribuciju za sjedinjeni portfelj $X = X_1 + X_2$. Ne slijedi nužno da je $q_\alpha(F_X) \leq q_\alpha(F_{X_1} + F_{X_2})$, pa ne mora postojati korist od diverzifikacije. Artzner je popularizirao jednu koherentnu mjeru rizika: očekivani manjak.

Definicija 1.2.4. (Očekivani manjak)
Neka je X gubitak s razdiobom F_X. Očekivani manjak *ili* expected shortfall *za razinu pouzdanosti alpha* $\in (0, 1)$ *je očekivana veličina gubitaka koji premašuju VaR_α.*

$$ES_\alpha = \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\alpha].$$

1.3 Kapitalni zahtjevi

Basel regulativa propisuje pokrivanje rizika kojima su izložene financijske institucije kapitalom, a donosi ju Baselski odbor za nadzor banaka[1]. Baselski odbor sastaje se u Banci za međunarodna poravnavanja[2] u Baselu. BIS je osnovana 1930. i najstarija je međunarodna financijska institucija. Cilj Odbora je uskladiti nadzor banaka na međunarodnoj razini te stvarati preduvjete za jačanje međudržavne konkurencije banaka.

Odbor 1988. godine donosi skup minimalnih zahtjeva za banke, *Basel Capital Accord* (Basel I). Basel I bio je revolucionaran zbog toga što je tražio jedinstvene kapitalne zahtjeve za sve najveće središnje banke u svijetu. Glavni fokus Basel I regulative bilo je razlikovanje kreditnog rizika države, banke i stanovništva (manji rizik) od nebankarskog privatnog sektora i komercijalnih kredita (viši rizik). No, nije bilo pokušaja razlikovati izloženost kreditnom riziku unutar klase komercijalnih kredita (svi su imali jednake zahtjeve za stopu adekvatnosti kapitala u iznosu od 8%). Kako su zahtjevi postavljeni previše nisko za visokorizične/nekvalitetne kredite, a previše visoko za niskorizične/kvalitetne kredite, to

[1] *Basel Committee on Banking Supervision*
[2] *Bank for International Settlements*, BIS

je bio poticaj bankama da rebalansiraju portfelje tako da sadržavaju kredite podcijenjene od strane regulatora. Tako je Basel I imao neželjenu posljedicu dugoročnog pogoršanja ukupne kreditne kvalitete portfelja banaka.

Cilj novog regulatornog okvira Basel II konačno donesenog 2004. godine bio je ispraviti pogreške u vrednovanju kredita Basela I, ali i inkorporirati nove osjetljivije mjere rizika u kapitalne zahtjeve. No, globalna financijska kriza 2007.-2009. ipak je dovela do preispitivanja Basel II prijedloga.

Ukratko, Basel II nudi nova pravila u mjerenju i upravljanju rizicima kojima je banka izložena. Temelji se na tri stupa:

Stup I: Minimalni kapitalni zahtjevi

Stup II: Nadzor nad adekvatnošću kapitala

Stup III: Tržišna disciplina

Za izračunavanje kreditnog rizika koji je dio minimalnih kapitalnih zahtjeva banke imaju izbor pratiti:

- standardizirani pristup
- pristup temeljen na internim rejting sustavima – osnovni i napredni

Kod pristupa temeljenog na internim sustavima rejtinga sve paramtere za utvrđivanje kapitalnih zahtjeva banke mogu same procjenjivati. Kod standardiziranog pristupa parametre zadaje regulator.

Osnovne komponente rizika su vjerojatnost defaulta (PD), gubitak uvjetovan defaultom (LGD), izloženost u vrijeme defaulta (EAD), te dospijeće kredita (M). Visoke vrijednosti ovih parametara vode ka višim kapitalnim zahtjevima i obratno. Razlika osnovnog i naprednog pristupa kod internih rejting sustava jest broj procijenjenih parametara. Kod osnovnog procijenjeni su samo PD i LGD, a kod naprednog svi gore navedeni.

Pod Basel II regulativom očekivani gubitak (EL) kredita određuje rezerve za gubitke. Kapitalna pričuva kao vrijednost vlastitog kapitala banke definira se kao veličina neočekivanih gubitaka.

$$\text{Kapitalne rezerve} = UL = VaR - EL$$

Prema tome bi zbroj rezervi i kapitalne pričuve trebao biti dovoljan za zaštitu financijske institucije od propasti za npr. sve osim jedne od tisuću godina (99.9% vremena).

Kao što je već spomenuto, nakon krize došlo je do preispitivanja Basel II modela i kao odgovor na nedostatke u financijskoj regulativi počela se razvijati treća inačica Basel-a. Trebala bi ojačati kapitalne zahtjeve povećavajući likvidnost i smanjujući polugu banke. Planirano uvođenje Basel-a III bilo je između 2013. i 2015. godine, no implementacija je produljena prvo do 2019., a onda i do početka 2022. godine.

Poglavlje 2

CreditMetrics

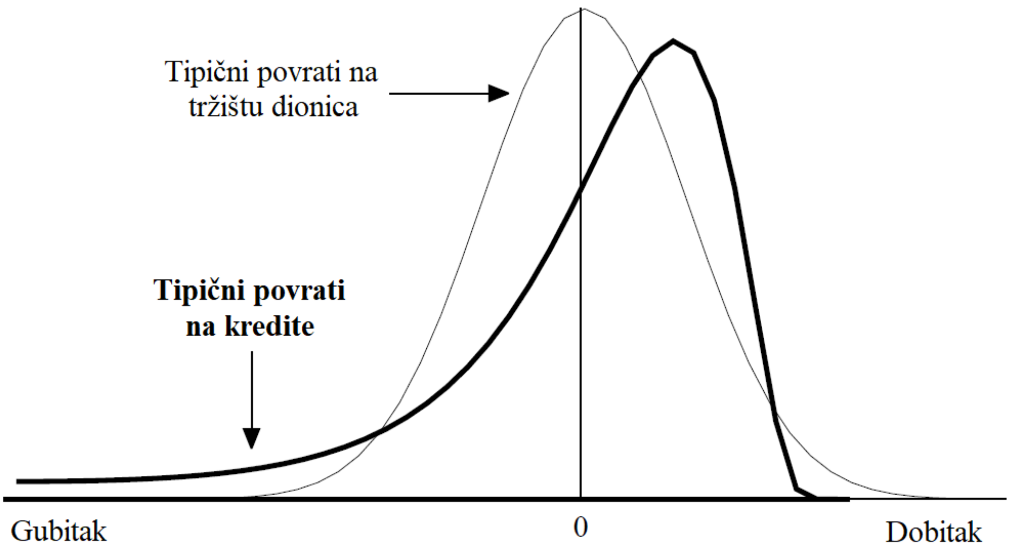
2.1 Uvod u CreditMetrics

CreditMetrics je prvi put predstavljen 1997.g. od strane J.P. Morgana i drugih (Bank of America, KMV, itd.) kao alat za procjenu kreditnog rizika neutrživih kredita i obveznica izdanih privatnom ponudom. Rizik se procjenjuje iz promjena vrijednosti duga zbog promjena kreditne kvalitete dužnika: neizvršenja novčanih obveza (default) te poboljšanja odnosno pogoršanja kreditnog rejtinga. Rizik se procjenjuje u kontekstu portfelja, uzimajući u obzir korelacije promjene kvalitete dužnika. To omogućava direktno računanje koristi diverzifikacije ili prevelike koncentracije portfelja, ali se koristi i za računanje kapitalnih pričuva. Naime, neki modeli za kapitalne zahtjeve od strane BIS-a ne razlikuju visoko kvalitetne i dobro diverzificirane portfelje od onih nekvalitetnih i koncentriranih. Zato su banke razvijale nove interne modele za bolje razumijevanje svoje izloženosti kreditnom riziku.

No, modeliranje rizika kreditnog portfelja nije analitički niti praktično lako. Znamo da je moderna teorija portfelja imala veliki značaj za primjenu na tržištu dionica (vidi [11]). Ipak, temeljne razlike između kreditnog rizika i rizika promjene cijene dionica čine teoriju portfelja dionica neadekvatnom za kreditni portfelj.

Prvo, povrati na dionice su relativno simetrični i dobro aproksimirani normalnom distribucijom. Tada su očekivanje i standardna devijacija vrijednosti portfelja dovoljne za razumijevanje tržišnog rizika i određivanje kvantila distribucije portfelja. Za razliku od toga kreditni povrati su asimetrični (iskrivljeni) i imaju težak donji rep (Slika 2.1). Teški rep je posljedica defaulta. Vjerojatnosti relativno male zarade su velike, ali postoji relativno mala šansa za gubitak znatnog dijela investicije.

Drugi problem je teškoća modeliranja korelacija. Kod dionica korelacije se procjenjuju promatranjem visoko frekventnih tržišnih cijena. Manjak istih podataka kod kredita čini procjenu temeljenu na povijesnim podacima jako lošom ili nemogućom.



Slika 2.1: Usporedba ditribucija povrata na kredite i dionice

CreditMetrics procjenjuje rizik portfelja obzirom na kreditne događaje. Odnosno, mjeri nesigurnost u forward cijeni portfelja uzrokovanu mogućnošću promjene kreditne kvalitete dužnika.

Kao što je prije spomenuto, zbog neutrživosti kredita ne znamo niti njegovu tržišnu vrijednost niti σ (standardnu devijaciju vrijednosti tijekom promatranog vremenskog intervala). No, koristeći:

- vjerojatnosti da će doći do promjene rejtinga (matrica prijelaza),
- zajedničke vjerojatnosti da će doći do promjene rejtinga (procjena korelacija),
- procjene vrijednosti portfelja na kraju horizonta uz danu rejting migraciju (koristeći kreditne spreadove i stope oporavka),

moguće je procijeniti distribuciju vrijednosti cijelog portfelja, a to će odrediti cjelokupni rizik uzrokovan promjenama kreditne kvalitete.

2.2 Izračun za jednu obveznicu

Sada ćemo izvesti metodologiju iz [12] koju CreditMetrics koristi za računanje kreditnog rizika „portfelja" koji se sastoji od jedne obveznice/kredita. Tri su koraka:

1. Kreditni rejting izdavatelja obveznice određuje vjerojatnosti promjene rejtinga,
2. Prioritet naplate duga određuje stopu oporavka u slučaju defaulta. Forward zero krivulja za svaku kreditnu kategoriju određuje vrijednost obveznice u slučaju pozitivne/negativne promjene.
3. Vjerojatnosti iz prvog i vrijednosti iz drugog koraka služe za računanje volatilnosti vrijednosti obzirom na kreditne promjene.

Promatramo nadređenu neosiguranu obveznicu[1] rejtinga BBB s dospijećem 5 godina, glavnicom $100 milijuna i fiksnim kuponom od 6%.

Korak 1

U ovom modelu izvor rizika nije samo mogućnost defaulta, već i promjene kreditnog rejtinga dužnika. Dakle, potrebno je procijeniti vjerojatnosti svih mogućih ishoda na kraju horizonta, u našem slučaju godinu dana. Neke metode procjene vjerojatnosti defaulta dane su u [1]. CreditMetrics se ne bavi procjenjivanjem matrice prijelaza, već je uzima kao ulazni parametar. Rejting agencije između ostalog objavljuju svoje procjene matrice prijelaza.

Početni	**Rejting nakon jedne godine (%)**							
rejting	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	91.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.01	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.21	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Tablica 2.1: Jednodogišnja matrica prijelaza (S&P). [12]

Korak 2

U prvom koraku smo dobili vjerojatnosti migracije iz jednog u bilo koje drugo stanje na kraju godine. U ovom koraku određujemo vrijednost imovine na kraju godine za sva moguća stanja. Te valuacije spadaju u dvije kategorije, ovisno radi li se o defaultu ili ne.

[1] eng. senior unsecured bond

U slučaju nemogućnosti izvršenja svih dospjelih obveza, procjenjuje se stopa oporavka koja se temelji na prioritetu naplate promatranog duga. Mi promatramo senior neosiguranu obveznicu (obveznica s najvišim prioritetom naplate, neosigurana nekom drugom imovinom) za koju je stopa oporavka u [5] procijenjena s očekivanjem 51.13% i standardnom devijacijom 25.45%.

Inače, radi se o migraciji u neko stanje osim defaulta. Tada računamo sadašnju vrijednost obveznice za godinu dana. Ako obveznica bude degradirana, traženi kreditni spread bi trebao porasti (pretpostavljamo da je kupon od 6% fiksan) tako da sadašnja vrijednost obveznice padne. Pozitivna promjena rejtinga ima obrnuti efekt. U našem slučaju petogodišnje obveznice s kuponom 6% i glavnicom $100 milijuna, nakon kreditnog događaja te godine imamo:

$$P = 6 + \frac{6}{(1 + r_1 + s_1)} + \frac{6}{(1 + r_2 + s_2)^2} + \frac{6}{(1 + r_3 + s_3)^3} + \frac{106}{(1 + r_4 + s_4)^4}$$

gdje su r_i očekivane bezrizične stope[2] na beskuponske trezorske zapise SAD-a za godinu dana unaprijed.

Allen i Saunders u [1] izvode računanje jednogodišnjih forward zero stopa iz trenutne krivulje prinosa[3] na trezorske zapise. Nadalje, s_i su godišnji kreditni spreadovi na (beskuponske) obveznice određenog kreditnog rejtinga za dospijeća od jedne, dvije, tri i četiri godine. CreditMetrics model pretpostavlja determinističke kamatne stope. Jedan primjer krivulja dan je u tablici 2.2.

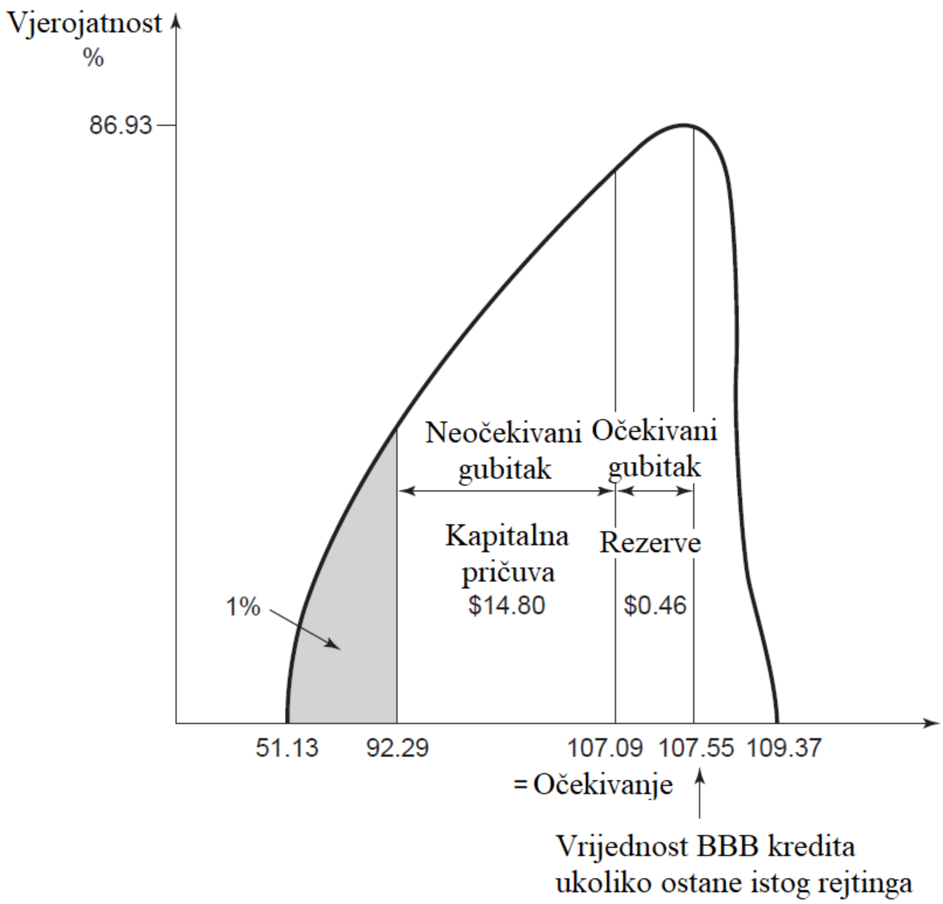
Kategorija	**1. godina**	**2. godina**	**3. godina**	**4. godina**
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Tablica 2.2: Jednogodišnje forward zero stope s kreditnim spreadovima po kreditnim kategorijama. [12]

Tablica 2.3 u trećem stupcu pokazuje ishode svih kreditnih događaja. Najmanja vrijednost koju obveznica može poprimiti je $51.13 mil. što proizlazi iz stope oporavka.

[2]eng. forward zero rates

[3]eng. spot yield curve



Slika 2.2: Distribucija vrijednosti petogodišnje obveznice rejtinga BBB nakon jedne godine (uključujući prvi kupon). [12]

U implementaciji ćemo pretpostaviti fiksnu bezrizičnu kamatnu stopu. Također, u stvarnosti je moguća bilo koja vrijednost između onih danih u tablici 2.3, pa je bolja procjena distribucije vrijednosti obveznice glatka i dana je slikom 2.2. Na slici su ilustrirani očekivani i neočekivani gubitci. Uočavamo asimetričnost distribucije.

Napomena 2.2.1. *Od sad nadalje ćemo gubitke izražavati kao razlike od referentne vrijednosti— vrijednosti koju bi obveznica imala ukoliko ne bi došlo do kreditne promjene. Iz slike 2.2 vidimo da je referentna vrijednost za BBB obveznicu \$107.55 mil. Sada je lako dobiti razdiobu gubitaka. Samo treba od dobivenih vrijednosti oduzeti referentnu vrijednost.*

Korak 3

Sada imamo sve informacije potrebne za procjenu volatilnosti vrijednosti jedne obveznice obzirom na promjene kreditne kvalitete. Za dobivanje kvantila pod pretpostavkom normalne distribucije računamo srednju vrijednost i standardnu devijaciju. Ako pretpostavimo distribuciju u tablici 2.3, VaR tj. kvantile računamo zbrajajući vjerojatnosti počevši od dna tablice. 1%-VaR dobili smo linearnom interpolacijom između dva susjedna kvantila.

Rejting nakon 1 godine	**Vjerojatnost stanja (%)**	**Nova vrijednost kredita ($ mil.)**	**Gubitak ($ mil.)**
AAA	0.02	109.37	(1.82)
AA	0.33	109.19	(1.64)
A	5.95	108.66	(1.11)
BBB	86.93	107.55	0.00
BB	5.30	102.02	5.53
B	1.17	98.10	9.45
CCC	0.12	83.64	23.91
Default	0.18	51.13	56.42

σ = st. devijacija = \$2.99
μ = srednja vrijednost = \$107.09
EL = \$107.09 − \$107.55 = \$0.46

Normalna distribucija
$$\begin{cases} 5\%UL = 1.65 \times \sigma = \$4.93 \\ 1\%UL = 2.33 \times \sigma = \$6.97 \end{cases}$$

Stvarna distribucija (gore)
$$\begin{cases} 6.77\%UL = 6.77\%VaR - EL = \$5.53 - \$0.46 = \$5.07 \\ 1.47\%UL = 1.47\%VaR - EL = \$9.45 - \$0.46 = \$8.99 \\ 1\%UL = 1\%VaR - EL = \$15.26 - \$0.46 = \$14.80 \end{cases}$$

Tablica 2.3: Izračun kreditnog VaR-a za BBB obveznicu (referentna vrijednost). [1]

2.3 Pogled na portfelj

Diverzifikacija označava smanjenje rizika zbog držanja različite financijske imovine. Proširimo metodologiju na portfelj od dvije obveznice:

- Rejting BBB, nadređena neosigurana (senior unsecured), godišnji kupon 6%, dospijeće za 5 godina
- Rejting A, nadređena neosigurana, godišnji kupon 5%, dospijeće za 3 godine

Promatramo dvodimenzionalni slučajni vektor čije su komponente vrijednosti obveznica. Shvaćanje zajedničke distribucije vrijednosti obveznica potrebno je za uočavanje posljedica diverzifikacije. Korelacije će utvrditi koliko često se događaju gubitci za više izloženosti u isto vrijeme. Zasad pretpostavljamo da su nam korelacije dane. U odjeljku 4.1 ćemo iznijeti jednu od metoda za određivanje zajedničke distribucije kreditnih migracija.

Zajedničke vjerojatnosti migracija

Promatramo temeljne rejtinge od AAA do CCC. Slijedi da postoji osam mogućih ishoda za kvalitetu jednog dužnika nakon godinu dana. Sada promatramo slučajni vektor od dva dužnika. Tada postoje 64 moguća stanja u koja vektor može prijeći u danom vremenu. Pretpostavka nepostojanja korelacije je nerealistična jer su migracije jednim dijelom uzrokovane istim makroekonomskim varijablama. Ovaj efekt ćemo pojasniti u odjeljku 4.1 kad uvedemo model koji spaja vrijednost imovine s kreditnim rejtingom poduzeća. Za Creditmetrics nije bitan postupak dobivanja vjerojatnosti migracija, već ih on uzima kao ulazne parametre. Neke metode procjene vjerojatnosti defaulta nalaze se u [1].

Ako imamo vezu između vrijednosti imovine i kreditnog rejtinga, možemo izgraditi zajedničke vjerojatnosti uz poznate korelacije između vrijednosti imovine dvaju dužnika. Tablica 2.4 je tablica razdiobe promatranog slučajnog vektora uz pretpostavku da korelacija iznosi 0.30. Uočimo da je najveća vjerojatnost da oba dužnika ostanu istog rejtinga.

Dužnik #1 (BBB)		**Dužnik #2 (A)**							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		106.59	106.49	106.30	105.64	103.15	101.39	88.71	51.13
AAA	109.37	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	109.19	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A	108.66	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
BBB	107.55	0.07	1.81	79.69	4.55	0.57	0.19	0.01	0.04
BB	102.02	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.01
B	98.10	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
CCC	83.64	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
Default	51.13	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

Tablica 2.4: Tablica razdiobe dva dužnika s 0.30 korelacijom (%). [12]

Kreditni rizik portfelja

Vrijednost portfelja definiramo kao zbroj slučajnih varijabli tj. zbroj komponenti slučajnog vektora. Iz gornje tablice imamo očekivanu vrijednost i standardnu devijaciju portfelja koji iznose: μ_p = \$213.63, σ_p = \$3.35.

Uočimo da račun za varijancu ignorira neizvjesnost stope oporavka. Dobivene brojeve možemo usporediti s pojedinačnim za svaku obveznicu. BBB obveznica ima srednju vrijednost \$107.09, a standardnu devijaciju \$2.99. Za A obveznicu to su \$106.55 i \$1.49 redom. Očekivane vrijednosti se direktno zbrajaju, ali zbroj standardnih devijacija veći je od devijacije portfelja.

Sada ćemo izračunati mjere rizika — kvantil i kreditni VaR portfelja. Za dobivanje 99%-kvatnila počinjemo od najlošijeg rejtinga obveznice i zbrajamo vjerojatnosti iz tablice dok ne dođemo do broja većeg od 1. Slijedi da je 99%-kvantil za vrijednost portfelja \$204.40. Kreditni VaR iznosi \$213.63 − \$204.40 = \$9.23.

Možemo uočiti da je kapitalni zahtjev za portfelj od \$9.23/\$200 = 4.16% manji od zahtjeva za samo jednu obveznicu od \$8.99/\$100 = 8.99%. Za veće portfelje nije moguće izračunati kvantile analitički već moramo provesti simulaciju.

Marginalni rizik

U praksi će odluka o držanju obveznice ovisiti o nekom već postojećem portfelju. Dakle, zanima nas granično povećanje kreditnog rizika ukoliko portfelju dodamo novu obveznicu. Općenito, marginalni rizik se može promatrati za bilo koju statistiku. Računa se kao razlika statistike cijelog portfelja i statistike portfelja bez promatrane imovine.

Prisjetimo se da je obveznica rejtinga BBB imala srednju vrijednost \$107.09 i kreditni VaR \$8.99. Kada dodamo A obveznicu portfelj ima srednju vrijednost \$213.63 i kreditni VaR \$9.23. Dakle marginalni VaR A obveznice je \$9.23 − \$8.99 = \$0.24. Kada promatramo samo A obveznicu njen kreditni VaR iznosi \$3.40 (= \$106.55 − \$103.15). Razlika između rizika (\$3.40) i graničnog rizika (\$0.24) posljedica je diverzifikacije.

2.4 Različite vrste izloženosti

Metodologija CreditMetrics-a nije ograničena samo na obveznice. Naime, ona je sposobna procijeniti kreditni rizik gotovo bilo kojeg tipa izloženosti, a ograničena je samo dostupnosti podataka potrebnih za vrednovanje kod poboljšanja (pogoršanja) rejtinga te defaulta. Neki od mogućih tipova su:

- beskamatna potraživanja,
- obveznice i krediti,

- zajmovi uz obveze,
- kreditno pismo (akreditiv),
- tržišni instrumenti (swap, forward, itd.).

Razlika ostalih tipova instrumenata od obveznica ili kredita je određivanje distribucije izloženosti koja ovisi o tržištu. Metode za različite instrumente mogu se naći u [12].

2.5 Tehnički problemi

Ovaj odjeljak osvrće se na neke od glavnih problema CreditMetrics-a. Neki problemi i pretpostavke mogu se lako inkorporirati u osnovni model, dok su drugi teži za riješiti.

Rejting migracije

Računanje vjerojatnosti u matrici prijelaza uključuje usrednjenje kreditnih prijelaza u jednoj godini iz povijesnih podataka. Važna pretpostavka je kako se događaju prijelazi i defaulti. Specijalno, CreditMetrics pretpostavlja Markovljev proces prvog reda, što znači da vjerojatnost prijelaza u bilo koju kreditnu kategoriju ovisi samo o prethodnom stanju, i nezavisno je od ostale prošlosti. Međutim, obveznica ili kredit koji je degradiran u prošlom periodu ima veću vjerojatnost (u odnosu na prethodno nepromijenjenu kvalitetu) da opet bude degradiran (vidi [17]).

Također, postoji prilično mnogo dokaza u [17] koji sugeriraju da industrijski faktori, poslovni ciklusi i dr. utječu na rejting migracije. Ipak, CreditMetrics koristi jedinstvenu tranzicijsku matricu neovisno o vremenu i industriji dužnika.

Vrednovanje

U računanju VaR-a prikazanom ranije, stopa oporavka u slučaju defaulta, forward zero stope (r_i) i kreditni spreadovi (s_i) nisu stohastički. Ukoliko pretpostavimo da jesu, izračun VaR-a i kapitalnih zahtjeva postao bi značajno složeniji. Kreditni spreadovi i kamatne stope općenito variraju kroz vrijeme tijekom kreditnih ciklusa i općenito nisu deterministički.

Kod stope oporavka, ako je standardna devijacija \$25.45 oko srednje vrijednosti \$51.13 na \$100 nominale, može se pokazati da će se kreditni 99%-VaR za BBB obveznicu iz našeg primjera pod pretpostavkom normalnosti gubitaka povećati na $2.33 \times \$3.18$ mil.= \$7.41 mil. (u usporedbi s \$6.97 mil. pod pretpostavkom fiksirane stope oporavka). Odnosno, kapitalni zahtjev će iznositi 7.41% glavnice i to samo za neočekivane gubitke.

Mark-to-market i Default model

Dopuštanjem da promjena kreditnog rejtinga (pa onda i spreada) utječe na vrijednost kredita kao i default, na CreditMetrics može se gledati kao na *mark-to-market* (MTM) model — model usklađen prema tržištu. Drugi modeli kreditni spread smatraju dijelom tržišnog rizika i više se koncentriraju na očekivane i neočekivane gubitke nego na očekivane i neočekivane promjene vrijednosti (VaR) kao CreditMetrics. Taj alternativni pristup naziva se još i *default model* (DM). DM kreditne promjene smatra samo defaultima.

Korisno je usporediti izračun očekivanih i neočekivanih gubitaka iz tih modela na istom primjeru, BBB obveznici. Neka slučajna varijabla D opisuje buduće stanje obveznice. D ima Bernoullijevu razdiobu s parametrom $p = 0.18\%$. Označimo s LR LGD stopu, a s EAD izloženost.

Postoje dvije mogućnosti:

- D će poprimiti vrijednost 1 (default) s vjerojatnošću p. Tada je gubitak

$$L = LR \cdot EAD = D \cdot LR \cdot EAD$$

- D će poprimiti vrijednost 0 s vjerojatnošću $1 - p$. Tada je

$$L = 0 = D \cdot LR \cdot EAD$$

Dakle gubitak L možemo zapisati kao umnožak tri slučajne varijable: D, LR i EAD. Uvedimo neke pretpostavke.

Neka su LR i D nezavisne. Dakle ekonomski faktori koji utječu na veličinu gubitka nezavisni su s faktorima koji utječu na događaj defaulta. Neka je izloženost dana fiksnim iznosom, bila to knjigovodstvena vrijednost obveznice ili očekivana izloženost izvedenice. Neka je stopa oporavka odnosno LR fiksna.

U tablici 1.1 vjerojatnost defaulta iznosi 0.18%, a vjerojatnost da ne dođe do defaulta je 99.82%. Gubitak ukoliko dođe do defaulta je \$48.87 na \$100 nominale. Knjigovodstvena vrijednost izloženosti na obveznicu je \$100 mil.

Očekivani gubitak:

$$\begin{aligned} E[L] &= E[EAD \cdot D \cdot LR] \\ &= EAD \cdot p \cdot LR \\ &= \$87,966 \end{aligned}$$

Neočekivani gubitak:

$$Var(L) = E[L^2] - (EL)^2$$

$$
\begin{aligned}
E[L^2] &= E[EAD^2 \cdot D^2 \cdot LR^2] = EAD^2 \cdot E[D^2] \cdot E[LR^2] \\
&= EAD^2 \cdot \left(1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)\right) \cdot \left(Var(LR) + E[LR]^2\right) \\
&= EAD^2 \cdot p \cdot LR^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(L) &= EAD^2 \cdot p \cdot LR^2 - EAD^2 \cdot p^2 \cdot LR^2 = \\
&= EAD^2 \cdot LR^2 \cdot p \cdot (1-p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
UL &= \sqrt{Var(L)} \\
&= EAD \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot LR^2 \\
&= \$2,071,512
\end{aligned}
$$

Kako bismo ove brojke usporedili s onim izračunatim u CreditMetrics-u pod pretpostavkom normalnosti, sjetimo da je gubitak od jedne standardne devijacije \$2.99 mil. naprema \$2.07 mil. kod DM-a. DM pristup fiksira maksimalnu vrijednost obveznice na njenu knjigovodstvenu vrijednost od \$100 mil. Zato je ekonomski kapital pod tim pristupom više povezan uz knjigovodstvenu vrijednost, dok je pod MTM pristupom vrijednost vezana uz tržište.

Poglavlje 3

Teorija ekstremnih vrijednosti

Zanimljivo je usporediti dobivene vrijednosti za kreditni VaR s međunarodnim bankovnim kapitalnim zahtjevima pod Basel regulativom. Za \$100 mil. BBB obveznice, kapitalni zahtjev pod standardiziranim pristupom Basel II bio bi \$8 mil. Kreditni VaR pod pretpostavkom normalnosti iznosi \$7.43 mil.(\$6.97 za neočekivane i \$0.46 za očekivane gubitke). Koristeći interpoliraciju VaR-a stvarne distribucije za dobivanje 1%-VaR-a dolazimo do brojke od \$14.80 mil. za neočekivane gubitke, plus rezerve za očekivane gubitke od \$0.46 mil., što je puno više od kapitalnog zahtjeva.

Korištenje CreditMetrics-a za postavljanje kapitalnih zahtjeva ništa nam ne govori o potencijalnoj veličini gubitaka koji premašuju kreditni VaR — minimalni gubitak koji će se dogoditi s određenom vjerojatnošću.

3.1 Općeniti uvod u ekstremni rizik

Neovisno o kojem tipu rizika se radi (tržišni, kreditni, operacijski, rizik u osiguranju), u praksi je potrebna implementacija modela koji će dozvoljavati rijetke događaje s veoma štetnim posljedicama. U našem slučaju to su dakako defaulti. Alat koji ćemo koristiti je teorija ekstremnih vrijednosti (EVT[1]) na temelju [15].

Uzmimo da su gubitci pozitivni, a profiti negativni brojevi. Mjerenje rizika podrazumijeva svođenje distribucije gubitaka na neki broj. Najjednostavnije je izračunati srednju vrijednost i varijancu, ali te mjere ne ukazuju na to što se događa u ekstremnim slučajevima. Neke od mjera koje opisuju rep distribucije gubitaka su VaR i očekivani manjak. Pokazuje se da VaR, za razliku od ES-a, nije koherentna mjera rizika jer diverzificirani portfelj može imati veći VaR od podijeljenog portfelja. ES se definira kao očekivana veličina gubitaka koji premašuju VaR. Kao i funkciju distribucije gubitaka F, teorijske veličine mjera rizika nećemo nikada znati. Cilj je naći procjene $\widehat{VaR}_\alpha$ i $\widehat{ES}_\alpha$ tih mjera.

[1] eng. *Extreme Value Theory*

3.2 Generalizirana Pareto distribucija

Postoji više modela za ekstremne vrijednosti. Mi ćemo pažnju pokloniti modelu baziranom na generaliziranoj Pareto distribuciji (GPD) prema [15].

GPD je razdioba s dva parametra čija je funkcija distribucije dana s:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

gdje je $\beta > 0$, i $x \geq 0$ za $\xi \geq 0$, te $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ za $\xi < 0$.

ξ je parametar *oblika* distribucije, a β je dodatni parametar *skaliranja*. Ako je $\xi > 0$ GPD se svodi na običnu Pareto distribuciju, a za $\xi = 0$ na eksponencijalnu. Za $\xi < 0$ radi se o tzv. tipu II Pareto distribucije. U upravljanju rizicima bitan je slučaj kada je $\xi > 0$ jer tada GPD ima *teški rep*. Za razliku od npr. normalne razdiobe koja ima momente svakog reda, za GPD ($\xi > 0$) se pokazuje da je $E[X^k] = \infty$, $\forall k \geq 1/\xi$.

Procjena uvjetne distribucije

Definicija 3.2.1. (Excess loss)
Za funkciju distribucije F definiramo distribuciju prekomjernih gubitaka *(excess loss) preko praga u s:*

$$F_u(y) := \mathbb{P}(X - u \leq x \mid X > u), \tag{3.1}$$

za $0 \leq y \leq x_0$, *gdje je* x_0 desna krajnja točka *od F.*

Ova distribucija predstavlja vjerojatnost da gubitak premaši u najviše za y, pod uvjetom da premaši u. Uočimo da se F_u može prikazati pomoću F:

$$F_u(y) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)}. \tag{3.2}$$

Može se pretpostaviti da F ima beskonačnu krajnju desnu točku x_0, tj. da distribucija dozvoljava po volji velike gubitke iako su vjerojatnosti neznačajne (npr. normalna ili t-distribucija). No, moguće je i da F ima konačnu krajnju desnu točku. Jedan primjer je *beta* distribucija na intervalu $[0, 1]$. Sada iznosimo jedan od dva ključna teorema teorije ekstremnih vrijednosti.

Teorem 3.2.2. (Pickands-Balkema-de Haan (1974))
Za široku klasu distribucija postoji pozitivna funkcija $\beta(u)$ takva da

$$\lim_{u \to x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} \left| F_u(y) - G_{\xi,\beta(u)}(y) \right| = 0.$$

Napomena 3.2.3. *Uočimo da teorem nije iskazan matematički precizno, to je napravljeno u [15] gdje je precizno definirana „široka "klasa. Sve uobičajene neprekidne distribucije (normalna, log-normalna, χ^2, t, F, gama, beta, itd.) pripadaju toj klasi.*

Dakle, za široku klasu distribucija F i za dovoljno veliki prag u, uvjetna distribucija F_u može se aproksimirati generaliziranom Pareto distribucijom s nekim parametrima ξ i β.

$$F_u(y) = G_{\xi,\beta}(y) \tag{3.3}$$

Odabir praga u i aproksimacija parametara ξ i β ovise o realizaciji uzorka gubitaka X_1, X_2,X_3,... Ako je N_u od ukupno n podataka iznad praga, nekom statističkom metodom GPD se prilagođava na tih N_u podataka kao bi se procijenili $\hat{\xi}$ i $\hat{\beta}$. Neki od procjenitelja dani u [6] su procjenitelj metodom maksimalne vjerodostojnosti (MLE), procjenitelj metodom momenata (MOM), procjenitelj vjerojatnosno ponderiranih momenata (PWM) .

Cilj je uzeti dovoljno veliki prag tako da se asimptotski rezultat teorema 3.2.2 može smatrati dovoljno dobrom aproksimacijom. S druge strane, poželjno je uzeti dovoljno mali prag tako postoji dovoljno podataka za adekvatnu procjenu parametara.

Procjena repa

Uz supstituciju $x = u + y$, iz (3.2) i (3.3) slijedi:

$$F(x) = (1 - F(u)) \cdot G_{\xi,\beta}(x - u) + F(u), \tag{3.4}$$

za $x > u$. Kako bismo procijenili rep distribucije koristeći (3.4), procjenjujemo još i $F(u)$ empirijski s $(n - N_u)/n$. Ta metoda se zove metoda povijesne simulacije (HS[2]). Koristeći HS i MLE za dobivanje parametara $\hat{\xi}$ i $\hat{\beta}$ dobivamo iduću procjenu repa za $x > u$:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}}. \tag{3.5}$$

Procjena VaR-a i ES-a

Za $\alpha > F(u)$ invertiramo formulu (3.5):

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right). \tag{3.6}$$

ES je povezan s VaR-om na sljedeći način:

$$ES_\alpha = VaR_\alpha + E[X - VaR_\alpha \mid X > VaR_\alpha], \tag{3.7}$$

[2] *historical simulation*

gdje je drugi sumand zapravo prekomjerni gubitak distribucije $F_{VaR_\alpha}(y)$ preko praga Var_α. Model (3.3) ima lijepo svojstvo stabilnosti. Ako uzmemo bilo koji veći prag npr. VaR_α, za $\alpha > F(u)$, distribucija iznad višeg praga će također biti GPD s istim ξ, ali drugačijim β. Lako se pokaže posljedica modela (3.3):

$$F_{VaR_\alpha}(y) = G_{\xi,\beta+\xi(VaR_\alpha-u)}(y). \tag{3.8}$$

Znači, imamo jednostavni model za gubitke iznad VaR-a i možemo računati njihove karakteristike. Uočimo da očekivanje distribucije u (3.8) za $\xi < 1$ iznosi $(\beta + \xi(VaR_\alpha - u))/(1 - \xi)$. Tada vrijedi:

$$\frac{ES_\alpha}{VaR_\alpha} = \frac{1}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1-\xi)VaR_\alpha}. \tag{3.9}$$

U slučaju beskonačne desne krajnje točke, izraz $1/(1-\xi)$ uvelike određuje omjer s lijeve strane (3.9). Drugi pribrojnik postaje zanemarivo malen kako α raste prema 1. Iz toga se vidi značaj parametra ξ. On određuje kako se ove dvije mjere rizika razlikuju na ekstremnim dijelovima distribucije gubitaka. ES se procjenjuje zamjenom nepoznatih parametara procijenjenima.

$$\widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}. \tag{3.10}$$

Primjer 3.2.4. (VaR i ES za BBB obveznicu)
Promotrimo opet BBB obveznicu. Teorija ekstremnih vrijednost proučava rep distribucije gubitaka uvjetno da gubitci premašuju VaR. Ti događaji su veoma rijetki, ali imaju katastrofalne posljedice. Pretpostavimo da GPD opisuje dio distribucije gubitaka koji premašuju $u = \$4.93$ *mil. što je bio procijenjeni 95%-VaR za normalnu distribuciju. Kad bismo imali* $n = 10,000$ *opservacija gubitaka od kojih je* 500 *većih od u, slijedilo bi* $N_u = 500$ *te* $F(u) = 0.95$*. Ako pretpostavimo da su parametri procijenjeni s* $\hat{\xi} = 0.5$ *i* $\hat{\beta} = 7$*, iz formule (3.6) uz* $\alpha = 0.99$ *dobivamo 99%-VaR GPD-a.*

$$\widehat{VaR}_{0.99} = \$22.23.$$

Iz (3.10) dobivamo procjenu za ES, očekivanu veličinu gubitaka koji premašuju VaR.

$$\widehat{ES}_{0.99} = \$53.53.$$

To je veličina kapitala za očekivanu vrijednost najekstremnijih događaja, onih u 1% repa distribucije.

Postoje argumenti o tome da korištenje EVT-a može rezultirati nerealistično visokim kapitalnim zahtjevima (vidi [7]). Suprotno tome, [9] sadrži argumente da EVT i VaR tehnike podcjenjuju kreditni rizik jer se baziraju na samo jednoj godini i ignoriraju autokorelacije ekonomskih ciklusa.

Poglavlje 4

Pregled modela

U ovom poglavlju predstavljamo metodologiju modela za izračun kreditnog rizika portfelja obveznica. Izvodimo modele za parametre korištene u simulaciji. Mjere koje ćemo procijeniti iz simulacije su očekivanje i kvantili razdiobe gubitaka. Gubitke smo definirali kao razliku buduće vrijednosti i referentne vrijednosti portfelja (nije došlo do kreditnih promjena).

4.1 Modeliranje parametara

Uvodimo model iz [12] koji povezuje volatilnost imovine poduzeća s kreditnim migracijama. Pokazat ćemo da je u tom modelu default specijalan slučaj općenitijeg procesa kreditnih migracija. Korelacije ćemo procjenjivati pomoću korelacija indeksa po državi i industriji. Stope oporavka ćemo uzimati kao fiksne vrijednosti. Naposljetku, iz vjerojatnosti defaulta aproksimirat ćemo tražene kreditne spreadove.

Default i kreditne migracije

Temeljni izvor rizika je mogućnost promjene kreditne kvalitete dužnika tijekom promatranog vremenskog intervala. Motivacija za idući pristup je praktične prirode (manjak podataka o zajedničkim defaultima), pa je teško procijeniti zajedničke vjerojatnosti direktno. Ovaj pristup je indirektan i sastoji se od dva koraka:

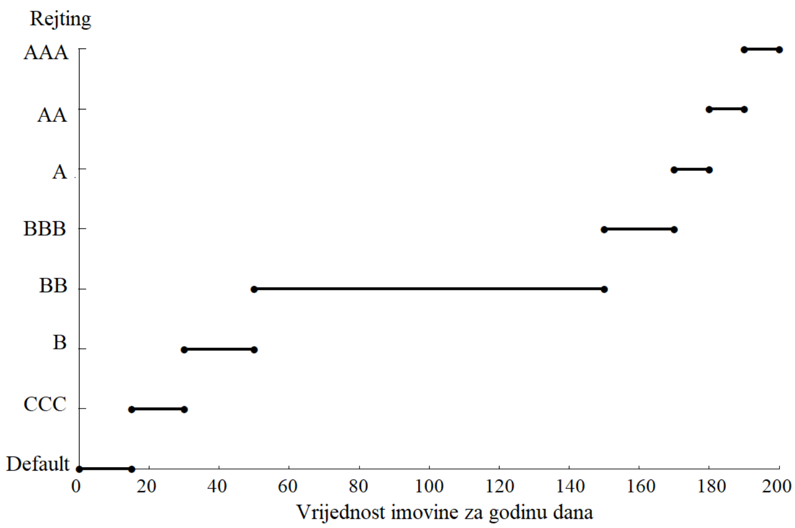
1. Pretpostavimo proces koji uzrokuje promjene kreditnog rejtinga. To će uspostaviti vezu između događaja koje u konačnici želimo opisati (kreditne promjene) ali koji nisu lako uočljivi, i procesa koje razumijemo i možemo uočiti,

2. Procjenjujemo parametre gornjeg procesa. Ukoliko je model iz prvog koraka dobar, procjena parametara trebala bi biti jednostavnija od procjene zajedničkih vjerojatnosti direktno.

Pretpostavljamo da poduzeće ima temeljnu vrijednost (vrijednost svoje imovine) i da promjene te vrijednosti sugeriraju na promjenu kreditne kvalitete tog poduzeća. Ovaj model je u suštini temeljen na Mertonovom modelu (vidi [16]).

Očito je da vrijednost imovine poduzeća određuje njegovu sposobnost podmirivanja obveza vjerovnicima. Možemo pretpostaviti da postoji razina takva da ako vrijednost imovine padne ispod te razine u idućih godinu dana, poduzeće neće uspjeti podmiriti obveze i dogodit će se default. Proširimo ovakav pristup i pretpostavimo da postoji niz razina vrijednosti imovine koji će odrediti rejting poduzeća na kraju perioda. Te vrijednosti nazvat ćemo *pragovi*.

Za primjer uzmimo da je imovina poduzeća rejtinga BB vrijednosti \$100 mil. Dakle, postoje pragovi takvi da možemo konstruirati relaciju između vrijednosti imovine i kreditnog rejtinga (slika 4.1).



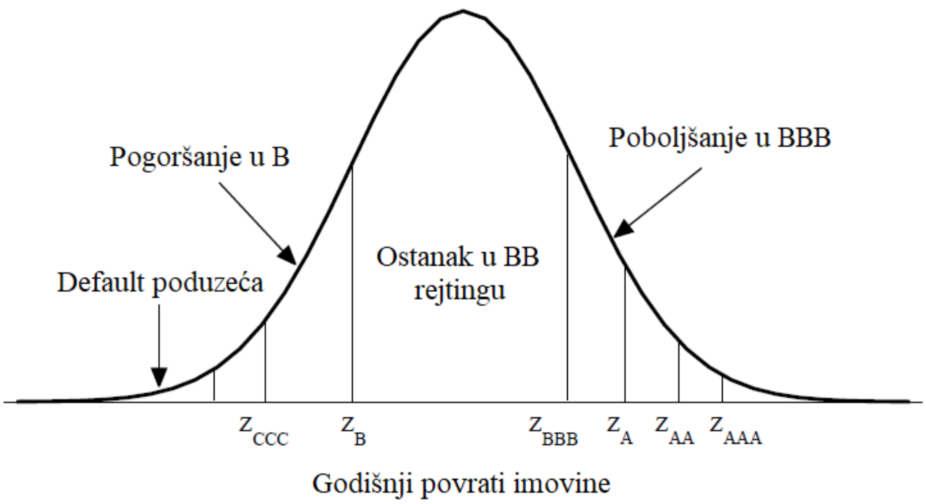
Slika 4.1: Kreditne migracije uzrokovane vrijednošću imovine BB poduzeća. [12]

Ukoliko su nam poznati pragovi za određeno poduzeće, jedino što moramo jest modelirati promjene vrijednosti imovine poduzeća kako bismo opisali njegovu kreditnu evoluciju. Pretpostavit ćemo da su povrati (postotne promjene, r) na imovinu normalno distribuirani s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Uočimo da ovaj σ nije volatilnost vrijednosti kreditnog instrumenta, već volatilnost povrata na imovinu određenog poduzeća. Radi jednostavnosti uzmimo da je μ=0. Nastavljajući primjer BB dužnika, sjetimo se vjerojatnosti migracija koje su dane u tablici 4.4. Znamo da postoje pragovi Z_{Def}, Z_{CCC}, $Z_{BBB}, \ldots$ takvi da ako $r < Z_{Def}$, onda dužnik ide u default; ako $Z_{Def} \leq r < Z_{CCC}$, onda je dužnik degradiran u CCC itd. Na primjer, ukoliko je $Z_{Def} = -70\%$, onda bi 70%-tno smanjenje vrijednosti imovine značilo default.

Kako je po pretpostavci r normalno distribuirana slučajna varijabla, možemo izvesti vjerojatnosti svih ishoda u ovom modelu (tablica 4.1). Veza se može prikazati i grafički. Na slici 4.2 je prikazana funkcija gustoće povrata imovine. Površina između susjednih pragova jednaka je vjerojatnosti da se dogodi određena kreditna migracija.

Rejting	**Vjerojatnost iz matrice prijelaza (%)**	**Vjerojatnost iz modela imovine**	**Prag**	**Vrijednost**
AAA	0.03	$1 - \Phi(Z_{AA}/\sigma)$		
AA	0.14	$\Phi(Z_{AA}/\sigma) - \Phi(Z_{A}/\sigma)$	Z_{AA}	3.43σ
A	0.67	$\Phi(Z_{A}/\sigma) - \Phi(Z_{BBB}/\sigma)$	Z_{A}	2.93σ
BBB	7.73	$\Phi(Z_{BBB}/\sigma) - \Phi(Z_{BB}/\sigma)$	Z_{BBB}	2.39σ
BB	80.53	$\Phi(Z_{BB}/\sigma) - \Phi(Z_{B}/\sigma)$	Z_{BB}	1.37σ
B	8.84	$\Phi(Z_{B}/\sigma) - \Phi(Z_{CCC}/\sigma)$	Z_{B}	-1.23σ
CCC	1.00	$\Phi(Z_{CCC}/\sigma) - \Phi(Z_{Def}/\sigma)$	Z_{CCC}	-2.04σ
Default	1.06	$\Phi(Z_{Def}/\sigma)$	Z_{Def}	-2.30σ

Tablica 4.1: Jednogodišnje vjerojatnosti prijelaza za dužnika BB rejtinga. [12]



Slika 4.2: Distribucija povrata imovine s pragovima promjene rejtinga. [12]

Izjednačimo vjerojatnosti u prvom i drugom stupcu tablice 4.1 kako bismo dobili pragove u zadnjem stupcu. Slijedi:

$$Z_{Def} = \Phi^{-1}(1.06\%)\sigma = -2.30\sigma, \tag{4.1}$$

gdje Φ označava funkciju distribucije standardne normalne razdiobe. Slično dobijemo i ostale vrijednosti. Analogno se računaju pragovi za svaki kreditni rejting. Neka je druga obveznica u portfelju rejtinga A. Kako bismo opisali zajedničko kretanje dvaju rejtinga, pretpostavljamo da su povrati imovine iz bivarijantne normalne razdiobe.

Definicija 4.1.1. (Bivarijantna normalna razdioba)
Za dvije slučajne varijable X i Y kažemo da imaju bivarijantnu normalnu razdiobu *s parametrima μ_X, ${\sigma_X}^2$, μ_Y, ${\sigma_Y}^2$, i ρ ako im je zajednička funkcija gustoće dana s*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}.$$

Označimo s $(')$ vrijednosti za poduzeće rejtinga A. Pretpostavili smo $\mu = \mu' = 0$. Sada imamo kovarijacijsku matricu za bivarijantnu normalnu razdiobu:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & \sigma'^2 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\rho \neq 0$, računamo:

$$\mathbb{P}(Z_B < r < Z_{BB}, Z'_{BBB} < r' < Z'_A) = \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} f(s, s', \rho)\, ds\, ds', \tag{4.2}$$

gdje je f funkcija gustoće bivarijantne normalne razdiobe s matricom kovarijacije Σ.

Uočimo da nije nužno pretpostaviti normalnu distribuciju već bilo koju višedimenzionalnu razdiobu gdje se zajedničko kretanje vrijednosti imovine može u potpunosti iskazati pomoću jednog parametra korelacije.

Napomena 4.1.2. *Iz (4.2) i tablice 4.1 možemo uočiti da volatilnosti imovine σ i σ' zapravo ne utječu na zajedničke vjerojatnosti. Uzmimo dva dužnika istog rejtinga, pa stoga i istih vjerojatnosti prijelaza. Neka je volatilnost (σ) jednog deset puta veća od drugog. Znamo da je kreditni rizik za oba dužnika jednak. Jedan od njih ima volatilniji proces vrijednosti imovine, ali to samo znači da će njegovi pragovi biti po apsolutnoj vrijednosti veći nego kod drugog poduzeća. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti standardizirane povrate ($\sigma = 1$). Jedini parametri koji utječu na rizik portfelja su vjerojatnosti prijelaza svakog dužnika i korelacija među povratima imovine.*

Općenito, iz korelacije među povratima imovine možemo dobiti vjerojatnost da oba poduzeća defaultiraju. Tada je koeficijent *korelacije defaulta* ta dva poduzeća dan s:

$$\rho_D = \frac{p_{12} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}, \tag{4.3}$$

gdje su p_1 i p_2 vjerojatnosti defaulta prvog i drugog poduzeća redom, a p_{12} vjerojatnost dvostrukog defaulta dobivena iz prije pokazanog računa. Tipično se korelacije povrata na imovinu od oko 40% do 60% preslikavaju u korelacije defaulta od 2% do 4%.

Korelacije povrata imovine

Jedan od ulaznih parametara CreditMetrics-a su korelacije povrata imovine među poduzećima. Najjednostavnije bi bilo uzeti neku fiksnu vrijednost za sve parove u portfelju. No time se gubi mogućnost dohvaćanja rizika vezanog za preveliku koncentraciju u određenoj industriji.

Jedan od načina za lako dohvaćanje korelacija vezanih za poduzeće jesu povrati na dionice. Korelacija povrata na dionice služi kao aproksimacija korelacije povrata na imovinu. To je točnija aproksimacija od uzimanja neke fiksne vrijednosti, a bazira se na podacima koji su pristupačniji od onih za zajedničke promjene rejtinga. U najboljem slučaju mogli bismo procijeniti korelacije za par dužnika po volji. No nedostatak podataka za mnoge dužnike, kao i nemogućnost pohranjivanja potrebne matrice korelacije čine ovaj pristup neodrživim. Stoga ćemo ponuditi metodologiju koja se bazira na korelaciji među skupom tržišnih indeksa za određenu državu i industriju, a koja je izvedena u [12].

Prvo upotrijebimo industrijske indekse u određenoj državi za konstrukciju matrice korelacija. Tako npr. dobijemo korelaciju između njemačke kemijske industrije i američke industrije osiguranja. Zatim svakom individualnom dužniku pridajemo težine za industrije. Npr. poduzeće može biti označeno kao 80% njemačko i 20% američko, te 70% iz kemijske industrije i 30% iz financijske. Slijedi da poduzeće pripada 56% njemačkoj kemijskoj industriji, 24% njemačkom financijskom sektoru, 14% američkoj kemijskoj industriji i 6% američkom financijskom sektoru. Također moramo odrediti koliki dio promjene cijene dionica dužnika nije objašnjen relevantnim indeksima (rizik specifičan za to poduzeće). Koristeći težine i korelacije zemlja-industrija dobivamo korelacije među poduzećima.

Primjer 4.1.3. *Promatramo poduzeća A i Z. Neka poduzeće A sudjeluje samo u američkoj kemijskoj industriji, i 90% povrata na dionicu objašnjeno je američkim kemijskim indeksom, a ostatak je objašnjen kretnjama specifičnim za to poduzeće. Pretpostavljamo da su specifična kretanja nezavisna od kretanja indeksa i nezavisna od specifičnih kretanja za sva ostala poduzeća. Neka poduzeće Z sudjeluje u njemačkom osiguranju 75%, a u njemačkom bankarstvu 25%. Neka je 20% kretanja povrata objašnjeno specifično za poduzeće. Osim težina, u tablici 4.2 su dani ostali potrebni podaci.*

Indeks	**Volatilnost**	**Korelacije**		
		SAD Kem. ind.	Njem. Osiguranje	Njem. Bankarstvo
SAD: Kemijska ind. (*USC*)	2.03%	1.00	0.16	0.08
Njemačka: Osiguranje (*DeIn*)	2.09%	0.16	1.00	0.34
Njemačka: Bankarstvo (*DeBa*)	1.25%	0.08	0.34	1.00

Tablica 4.2: Volatilnosti i korelacije za parove država-industrija. [12]

Promatramo dvije nezavisne standardne normalne slučajne varijable r_{USC} *i* r'_A *koje predstavljaju standardizirane povrate u kemijskoj industriji i povrate specifične poduzeću A. Tada su standardizirani povrati za poduzeće A dani s*

$$r_A = w_1 r_{USC} + w_2 r'_A. \tag{4.4}$$

Znamo da je $w_1 = 0.9$*, pa je* $w_2 = \sqrt{1 - w1^2} = 0.44$*. Za poduzeće Z računamo volatilnost indeksa koji se sastoji od 75% bankarskog i 25% sektora osiguranja.*

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0.75^2 \cdot \sigma^2_{DeIn} + 0.25^2 \cdot \sigma^2_{DeBa} + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot \rho(DeIn, DeBa) \cdot \sigma_{DeIn} \cdot \sigma_{DeBa}} = 0.017.$$

Zatim skaliramo težine kako bi 80% volatilnosti povrata bilo objašnjeno indeksom. Dakle, težina za osiguranje je

$$0.8 \cdot \frac{0.75\sigma_{DeIn}}{\hat{\sigma}} = 0.74,$$

a za bankarski sektor je

$$0.8 \cdot \frac{0.25\sigma_{DeBa}}{\hat{\sigma}} = 0.15.$$

Nadalje, težina za specifični povrat iznosi $\sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$ *Dakle, povrati za poduzeća A i Z su dani s:*

$$r_A = 0.9 r_{USC} + 0.44 r'_A, \tag{4.5}$$

$$r_Z = 0.74 r_{DeIn} + 0.15 r_{DeBa} + 0.6 r'_Z. \tag{4.6}$$

Kako su specifični povrati r'_A *i* r'_Z *nezavisni od svih drugih povrata, korelaciju između poduzeća A i Z možemo računati kao:*

$$\rho(A, Z) = 0.9 \cdot 0.74 \cdot \rho(USC, DeIn) + 0.9 \cdot 0.15 \cdot \rho(USC, DeBa) = 0.11. \tag{4.7}$$

Gornji račun ilustrira računanje korelacije između para dužnika i lako se generalizira na dužnike koji su iz više industrija i zemalja. Uzmimo u obzir poduzeće koje sudjeluje u tri industrije s težinama $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$ i $\hat{w}_3$, gdje industrijski indeksi objašnjavaju α udjela u kretanju povrata poduzeća. Prvo izračunamo volatilnost novog težinskog indeksa za poduzeće:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{w}_1^2\sigma_1^2 + \hat{w}_2^2\sigma_2^2 + \hat{w}_3^2\sigma_3^2 + 2\hat{w}_1\hat{w}_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + 2\hat{w}_2\hat{w}_3\rho_{2,3}\sigma_2\sigma_3 + 2\hat{w}_1\hat{w}_3\rho_{1,3}\sigma_1\sigma_3} \tag{4.8}$$

Zatim skaliramo težine tako da predstavljaju samo α udjela u volatilnosti standardiziranih povrata poduzeća:

$$w_1 = \alpha\frac{\hat{w}_1\sigma_1}{\hat{\sigma}}, w_2 = \alpha\frac{\hat{w}_2\sigma_2}{\hat{\sigma}}, w_3 = \alpha\frac{\hat{w}_3\sigma_3}{\hat{\sigma}}. \tag{4.9}$$

Izračunamo težinu rizika specifičnog za poduzeće uzimajući $\sqrt{1-\alpha^2}$.

Promotrimo sad n različitih poduzeća sa standardnim težinama na m indeksa. Želimo pronaći korelacije među ovim poduzećima. Neka je matrica korelacija za indekse dana matricom C dimenzije $m{\times}m$. Konstruiramo blok-matricu $(m{+}n){\times}(m{+}n)$ koja će sadržavati i korelacije za specifične rizike.

$$\bar{C} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & C & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{0\ 0\ \dots\ 0}}_{m \text{ stupaca}} \quad \underbrace{\hphantom{0\ 0\ \dots\ 0}}_{n \text{ stupaca}} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} m \text{ redaka} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\end{array}}\right\} n \text{ redaka} \\ \vphantom{x} \end{array}$$

Zatim kreiramo $(m + n) \times n$ matricu težina W. Svaki stupac reprezentira različito poduzeće(n), a svaki redak predstavlja težine na: indekse(m) i komponente specifične svakom poduzeću(n). Dakle, u k-tom stupcu od W prvih m brojeva su skalirane težine w_i na indekse, a $(m{+}k)$-ti broj je težina za rizik specifičan k-tom poduzeću. Ostalo su nule. Ispod je matrica W za primjer 4.1.3 .

$$W = \begin{pmatrix} 0.90 & 0 \\ 0 & 0.74 \\ 0 & 0.15 \\ 0.44 & 0 \\ 0 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Tražena matrica korelacije $n \times n$ je dana s $W^T\bar{C}W$.

Stopa oporavka

Procjena stope oporavka kod defaulta ima mnogo praktičnih problema. Često ne postoji tržište koje izražava objektivne valuacije nekog duga, a ako i postoji, ono je krajnje nelikvidno. Čak i ako se taj problem riješi postoji pitanje kada procijeniti oporavak: odmah nakon objave defaulta, nakon nekog razumnog vremena dok informacije postanu dostupne (možda mjesec dana), ili nakon što je došlo do krajnje nagodbe što može trajati godinama. Saunders i Allen u [1] pokazuju da su stope oporavka također osjetljive na makroekonomske uvjete, industrijske faktore i prioritet naplate duga.

Stope oporavka korporativnih obveznica možemo pronaći u studiju agencije Moody's iz 1996. o stopama oporavka prema prioritetu naplate duga. Rad je baziran na dvama studijima (Carty i Lieberman (1996) te Altman i Kishore (1996)) koji su došli do sličnih procjena stopa oporavka. Tablica 4.3 prikazuje statistike za cijene defaultiranih obveznica (od 1970. do 1995.). U implementaciji ćemo pretpostaviti fiksnu stopu oporavka.

	Carty & Lieberman [5]			**Altman & Kishore [2]**		
Klasa prioriteta	**Broj**	**Prosjek**	**St. dev.**	**Broj**	**Prosjek**	**St. dev.**
Senior osigurana	115	\$53.80	\$26.86	85	\$57.89	\$22.99
Senior neosigurana	278	\$51.13	\$25.45	221	\$47.65	\$26.71
Senior podređena	196	\$38.52	\$23.81	177	\$34.38	\$25.08
Podređena	226	\$32.74	\$20.18	214	\$31.34	\$22.42
Junior podređena	9	\$17.09	\$10.90	—	—	—

Tablica 4.3: Statistike oporavka po klasi prioriteta (na glavnicu od \$100.00)

Kreditni spread

Vjerojatnost defaulta može se aproksimirati pomoću stope oporavka i kreditnog spreada na obveznicu (vidi [13]). Sljedeću aproksimaciju koristit ćemo u Monte Carlo simulaciji.

Razlikujemo dvije vrste vjerojatnosti defaluta. Kumulativna (bezuvjetna) vjerojatnost defaulta odnosi se na događaj defaulta do nekog trenutka t. *Stopa hazarda* ili *intenzitet defaulta* označava vjerojatnost defaulta uz uvjet da u nekom prethodnom trenutku obveznica preživi. Uzmimo kratki period Δt. Intenzitet defaulta $\lambda(t)$ u trenutku t je definiran tako da je $\lambda(t)\Delta t$ vjerojatnost defaulta između t i $t + \Delta t$ uvjetno da se default nije dogodio do trenutka t. Ako je $P(t)$ kumulativna vjerojatnost preživljavanja poduzeća do vremena t, uvjetna vjerojatnost defaulta između t i $t + \Delta(t)$ je

$$[P(t) - P(t + \Delta t)] \,/\, P(t).$$

Izjednačavanjem s $\lambda(t)\Delta t$ slijedi:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = -\lambda(t)P(t)\Delta t.$$

Puštanjem $\Delta t \to 0$ slijedi:

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda(t)P(t),$$

iz čega je

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right).$$

Definiramo $Q(t)$ kao vjerojatnost defaulta do vremena t:

$$Q(t) := 1 - P(t),$$

što daje

$$Q(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

ili

$$Q(t) = 1 - \exp\left(-\bar{\lambda}(t) \cdot t\right), \tag{4.10}$$

gdje je $\bar{\lambda}$ prosječna stopa hazarda između vremena 0 i t.

Primjer 4.1.4. *Uzmimo obveznicu čiji je prinos 200 baznih poena (2%) viši od neke slične bezrizične obveznice, te neka je očekivana stopa oporavka 40%. Vlasnik obveznice očekuje gubitak od 2% zbog mogućnosti defaulta. Slijedi da je aproksimacija za uvjetnu vjerojatnost defaulta* $0.02/(1 - 0.4) = 3.33\%$.

Općenito,

$$\bar{\lambda} = \frac{s}{1 - R}, \tag{4.11}$$

gdje je $\bar{\lambda}$ prosječna godišnja stopa hazarda, s je kreditni spread obveznice, a R stopa oporavka. Sada iz (4.10) i (4.11) slijedi:

$$Q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{s}{1 - R} \cdot t\right).$$

Odnosno, dobivamo aproksimaciju spreada

$$s = \frac{R - 1}{t} \ln\left(1 - Q(t)\right). \tag{4.12}$$

4.2 Simulacija

Podaci

Ulazni podaci za model su:

- matrica prijelaza kreditne agencije S&P,
- bezrizična kamatna stopa, r,
- stopa oporavka, R,
- broj obveznica u portfelju, N,
- vektor izloženosti po obveznici,
- vektor početnih rejtinga obveznica,
- matrica korelacija povrata poduzeća,
- broj simulacija, n.

Početni	**Rejting nakon jedne godine (%)**								
rejting	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	86.99	9.12	0.53	0.05	0.08	0.03	0.05	0.00	3.15
AA	0.50	87.06	7.85	0.49	0.05	0.06	0.02	0.02	3.95
A	0.03	1.69	88.17	5.16	0.29	0.12	0.02	0.06	4.46
BBB	0.01	0.09	3.42	86.04	3.62	0.46	0.11	0.17	6.08
BB	0.01	0.03	0.11	4.83	77.50	6.65	0.55	0.65	9.67
B	0.00	0.02	0.08	0.17	4.93	74.53	4.42	3.44	12.41
CCC	0.00	0.00	0.11	0.20	0.59	13.21	43.51	26.89	15.49

Tablica 4.4: Jednodogišnja matrica prijelaza za korporativne obveznice (1981.-2018.). [18]

Koristimo globalnu matricu prijelaza S&P agencije s jednogodišnjim vjerojatnostima prijelaza za korporativne obveznice u 2018. godini. Stupac NR označava da izdavatelj više nema kreditnu ocjenu od strane S&P agencije i da se suočio s defaultom. U simulaciji se zadnji i predzadnji stupac kombiniraju u jedan.

Tablica 4.5: Ulazni parametri

Bezrizična kamatna stopa	0.01
Stopa oporavka	51.13%
Veličina portfelja	20
Broj simulacija	20,000

Za implementaciju CreditMetricsa koristili smo programski jezik i programsko okruženje *R* (paket *CreditMetrics* [19]). Pretpostavili smo da se portfelj sastoji od 20 beskuponskih senior neosiguranih obveznica različitih izdavatelja. Svaka obveznica ima svoj početni rejting. Iznos izloženosti je iznos glavnice obveznice. Iz očekivane stope oporavka i vjerojatnosti defaulta pomoću formule (4.12) računamo dodatni parametar s, kreditni spread za svaki rejting.

Tablica 4.6: Kreditni spread dobiven iz vjerojatnosti defaulta

Rejting	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Spread	0.0155	0.0196	0.0223	0.0310	0.0518	0.0806	0.2321

Tablica 4.7: Hipotetski portfelj

Imovina	**Rejting**	**Izloženost**
1	AAA	7,000,000
2	AA	1,000,000
3	A	1,000,000
4	BBB	1,000,000
5	BB	1,000,000
6	B	1,000,000
7	CCC	1,000,000
8	A	10,000,000
9	BB	5,000,000
10	A	3,000,000
11	A	1,000,000
12	A	2,000,000
13	B	600,000
14	B	1,000,000
15	B	3,000,000
16	B	2,000,000
17	BBB	1,000,000
18	BBB	8,000,000
19	BBB	1,000,000
20	AA	5,000,000

Za opisati portfelj potrebno je odrediti i korelacije povrata imovine izdavatelja. Korelacije su zadane u tablici 4.8. Možemo uočiti da postoji pet grupa izdavatelja unutar kojih su korelacije imovine više, dok su niže između grupa. To je mogući slučaj portfelja koji npr. sadrži obveznice iz pet različitih industrija.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0.45	0.45	0.45	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.45	1	0.45	0.45	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
3	0.45	0.45	1	0.45	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
4	0.45	0.45	0.45	1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
5	0.15	0.15	0.15	0.15	1	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
6	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	1	0.35	0.35	0.35	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
7	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.35	1	0.35	0.35	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
8	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.35	0.35	1	0.35	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
9	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.35	0.35	0.35	1	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
10	0.15	0.15	0.15	0.15	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.15	0.15	0.15	0.1	0.1
11	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1	0.45	0.45	0.45	0.45	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
12	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.45	1	0.45	0.45	0.45	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
13	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.45	0.45	1	0.45	0.45	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
14	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.45	0.45	0.45	1	0.45	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.45	0.45	0.45	0.45	1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
16	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1	0.55	0.55	0.25	0.25
17	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.55	1	0.55	0.25	0.25
18	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.55	0.55	1	0.25	0.25
19	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.25	0.25	0.25	1	0.65
20	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.25	0.25	0.25	0.65	1

Tablica 4.8: Matrica korelacija povrata imovine izdavatelja. [12]

Koraci

1. Za svaki mogući ishod kreditnog rejtinga nakon godinu dana ($t = 1$) računamo vrijednosti svake obveznice formulom

$$V_t = \text{izloženost} \cdot e^{-(r+s)t}, \tag{4.13}$$

gdje je s spread novog rejtinga.

2. Za svaku obveznicu izdvajamo referentnu vrijednost—vrijednost ako obveznica ostane istog kreditnog rejtinga. Zbroj pojedninačnih vrijednosti je referentna vrijednost portfelja.

3. Iz matrice prijelaza računamo pragove povrata na način opisan u odjeljku 4.1.

4. U ovom koraku provodimo Monte Carlo simulaciju povrata imovine izdavatelja. Generiramo uzorak iz N-dimenzionalne standardne normalne razdiobe, i iz njega uz pragove dobivene u prethodnom koraku dobivamo kreditne promjene. Postupak ponavljamo n puta.

5. Na temelju kreditnih promjena iz svake simulacije računamo nove vrijednosti obveznica pomoću rezultata iz 1. koraka. Ukoliko je kreditna promjena default, nova vrijednost obveznice je 51.13% izloženosti. Zbroj pojedninačnih vrijednosti je nova vrijednost portfelja. Gubitci su razlike novih i referentne vrijednosti portfelja.

6. Iz dobivenog niza gubitaka računamo mjere rizika:

   a) *Očekivani gubitak* je srednja vrijednost gubitaka,

   b) *VaR* računamo kao empirijski kvantil gubitaka,

   c) *Neočekivani gubitak* tj. *kreditni VaR* je razlika VaR-a i očekivanog gubitka,

   d) *Očekivani manjak* računamo kao srednju vrijednost gubitaka koji premašuju VaR,

   e) *Marginalni VaR* i-te imovine računamo kao razliku kreditnog VaR-a cijelog portfelja i portfelja bez i-te obveznice.

Pouzdani intervali

Pouzdane intervale za očekivani gubitak i kvantile razdiobe gubitaka ćemo dobiti korištenjem centralnog graničnog teorema. Označimo s $X_1, X_2, ..., X_n$ simulirani uzorak gubitaka portfelja, a s $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ sortirani uzorak. Neka je μ_n srednja vrijednost, a σ_n standardna devijacija uzorka. Za veliki n očekivani gubitak portfelja će biti približno normalno distribuiran s očekivanjem μ_n i devijacijom $\sigma_n/\sqrt{n}$. Tada je $(1-\alpha)\cdot 100\%$ pouzdani interval za očekivani gubitak oblika:

$$\left[\mu_n + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}, \mu_n + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right],$$

gdje je z_α α-kvantil standardne normalne razdiobe.

Želimo pronaći pouzdani interval za p-kvantil razdiobe gubitaka. Neka je VaR_p stvarna vrijednost ove statistike. Tada svaki generirani gubitak (po definiciji) ima $(1-p)\cdot 100\%$ šanse biti iznad VaR_p. Neka je, od n generiranih, N_p broj gubitaka većih od VaR_p. Očito je $N_p \sim B(n, p)$. Opet iz centralnog graničnog teorema možemo N_p aproksimirati s normalnom razdiobom s očekivanjem $n\cdot p$ i varijancom $n\cdot p\cdot(1-p)$. Tada su donja i gornja granica pouzdanog intervala za N_p dane s:

$$l = n\cdot p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$
$$u = n\cdot p + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

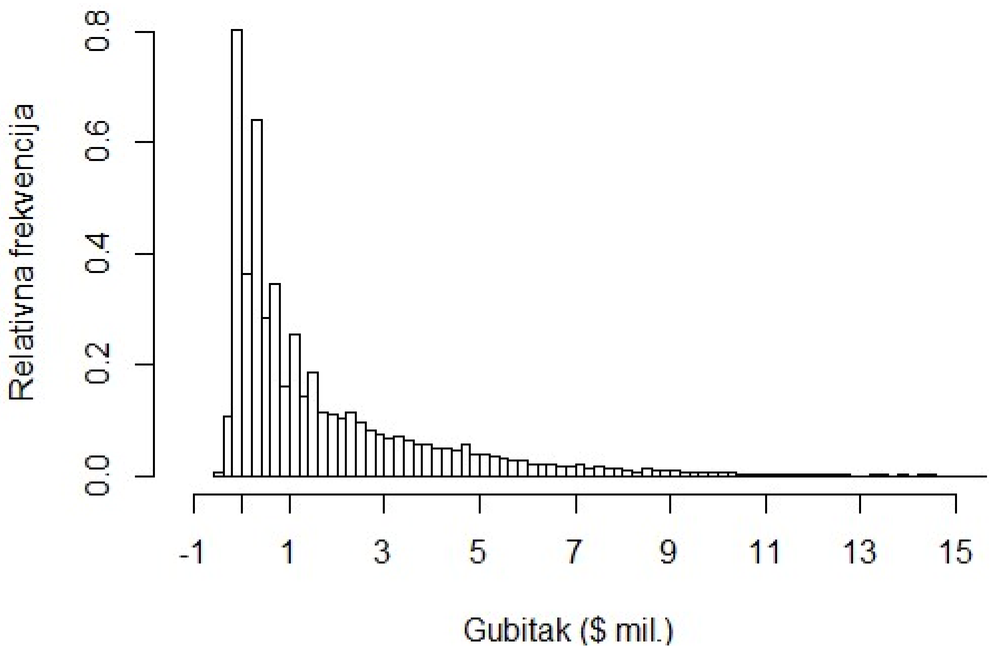
Ukoliko $n\cdot p$, l i u nisu cijeli brojevi, l i $n\cdot p$ zaokružujemo na najveći cijeli broj manji od l, a u na najmanji cijeli broj veći od u. Slijedi da je $(1-\alpha)\cdot 100\%$ pouzdani interval za p-kvantil gubitaka oblika $[X_{(l)}, X_{(u)}]$.

4.3 Rezultati

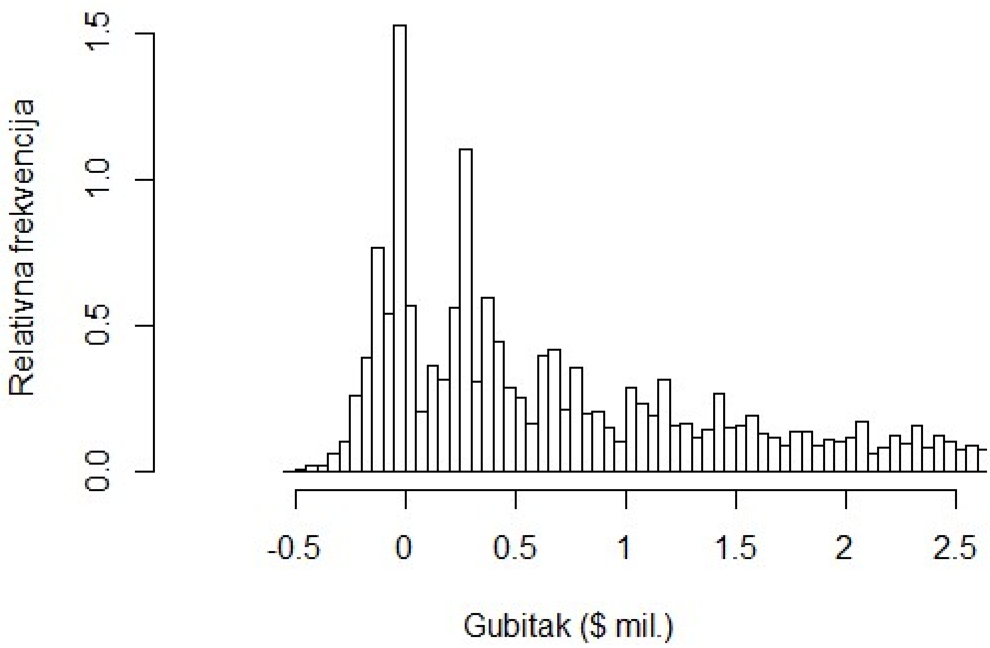
Razina pouzdanosti	**99%**	**99.9%**
Očekivani gubitak ($ mil.)	1.72	
VaR (kvantil) ($ mil.)	9.70	14.11
Neočekivani gubitak ($ mil.)	7.99	12.40
Očekivani manjak ($ mil.)	11.61	15.37

Tablica 4.9: Mjere rizika portfelja

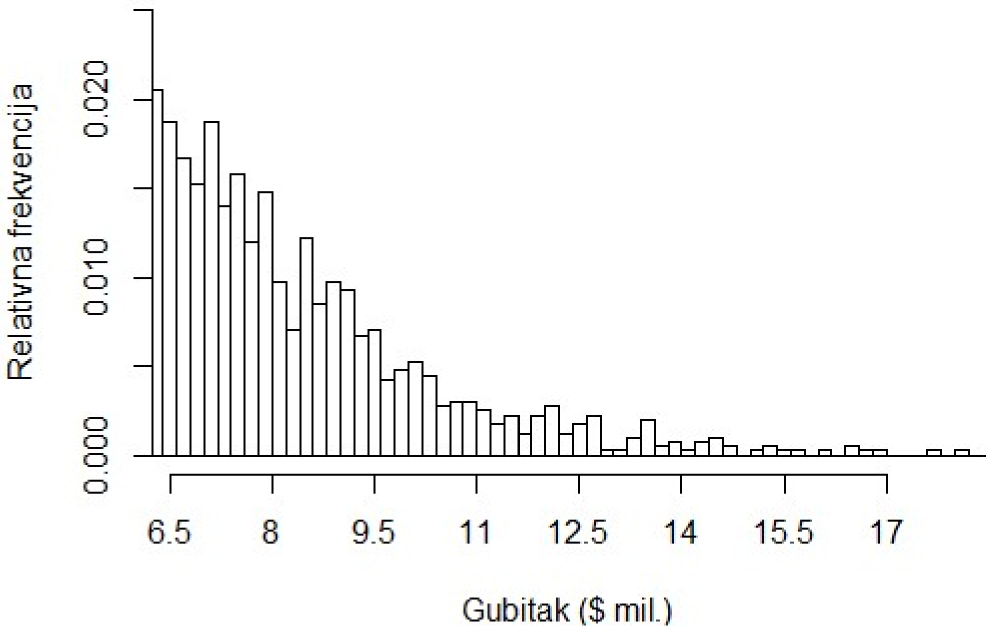
Na slikama 4.3–4.5 su dani stupčasti dijagrami gubitaka dobivenih generiranjem 20,000 scenarija prema gore iznesenoj metodologiji. Slika 4.3 pokazuje distribuciju gubitaka, a 4.4 pokazuje najčešće scenarije. Vidimo da distribucija pokazuje više vrhova. Prvi i najveći vrh odgovara simulacijama bez značajnih kreditnih promjena. Idući vrh koji se ističe odgovara scenarijima s jednim zabilježenim defaultom u portfelju, i tako dalje. To se može objasniti činjenicom da događaj defaulta rezultira značajnijom promjenom vrijednosti portfelja nego ostali događaji. Što je portfelj veći, ovakav utjecaj defaulta manje je izražen.



Slika 4.3: Histogram gubitaka portfelja



Slika 4.4: Stupčasti dijagram relativnih frekvencija 75% najmanjih gubitaka portfelja



Slika 4.5: Desni rep gubitaka portfelja preko 0.95-kvantila

Dijagram 4.5 pokazuje desni rep razdiobe gubitaka, preko 0.95-kvantila. Uočimo razliku u skali vertikalne osi koja je 40 puta manja u odnosu na dijagram 4.3.

Distribucija dobivena simulacijom pokazuje prije spomenuta svojstva distribucije gubitaka kreditnog portfelja: veliku vjerojatnost malih negativnih gubitaka (profita) skupa s malim vjerojatnostima za značajne gubitke.

Iz generiranog uzorka dobili smo i procjenu 95%-pouzdanih intervala za očekivanje i kvantile gubitaka (tablica 4.10).

	Donja granica	**Statistika**	**Gornja granica**
Očekivani gubitak ($ mil.)	1.68	1.72	1.75
99%-VaR ($ mil.)	9.41	9.70	10.04
99.9%-VaR ($ mil.)	13.26	14.11	14.56

Tablica 4.10: 95%-pouzdani intervali za očekivanje i kvantile gubitaka

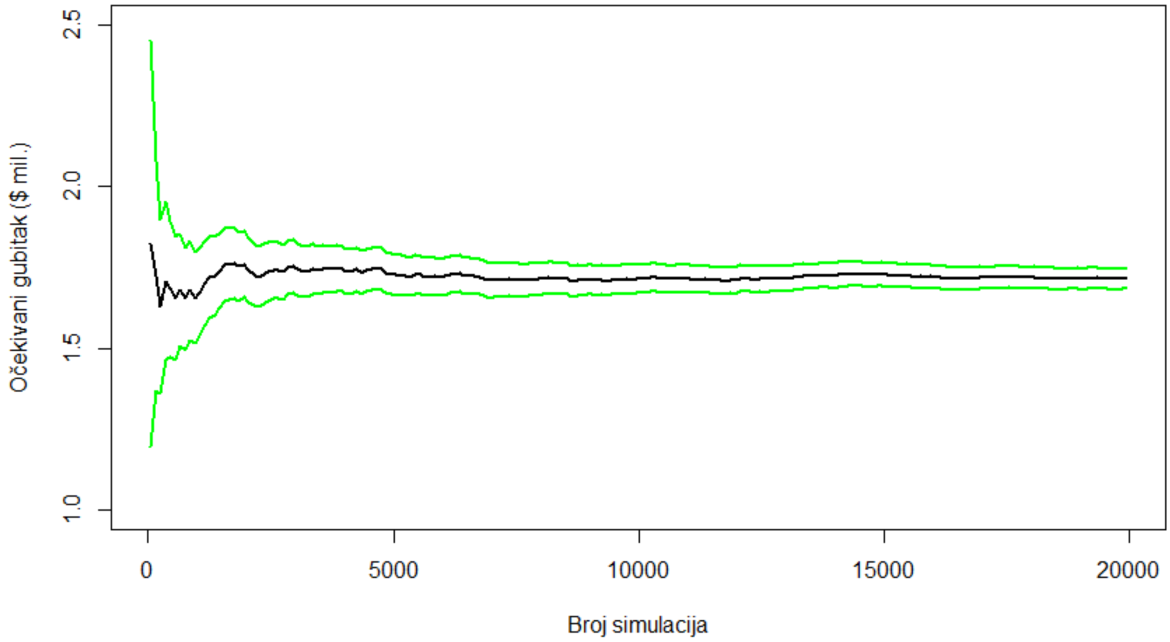
U tablici 4.11 dan je marginalni VaR za svaku pojedinu obveznicu u dolarima i u postotku izloženosti. Također su prikazane standardne devijacije vrijedosti obveznica te marginalne devijacije. Iz razlike pojedinačnih i marginalnih devijacija za obveznice možemo uočiti posljedice diverzifikacije. Općenito primjećujemo da je smanjenje od pojedinačne prema marginalnoj devijaciji veće za obveznice višeg rejtinga. To podupire teoriju da je potreban puno veći portfelj kako bi se diverzificirali rizičniji kreditni instrumenti.

Imovina	Početni rejting	Standardna devijacija		Marginalna st. devijacija		Marginalni 99%-VaR	
		\$ mil.	**%**	**\$ mil.**	**%**	**\$ mil.**	**%**
1	AAA	0.543	7.76%	0.115	1.64%	0.402	5.74%
2	AA	0.087	8.71%	0.013	1.33%	0.053	5.33%
3	A	0.091	9.12%	0.016	1.57%	0.048	4.82%
4	BBB	0.102	10.19%	0.018	1.77%	0.007	0.72%
5	BB	0.126	12.60%	0.033	3.33%	0.184	18.36%
6	B	0.140	14.03%	0.041	4.10%	0.221	22.14%
7	CCC	0.149	14.89%	0.043	4.26%	0.167	16.71%
8	A	0.907	9.07%	0.334	3.34%	1.351	13.51%
9	BB	0.628	12.56%	0.225	4.51%	0.712	14.23%
10	A	0.272	9.08%	0.069	2.31%	0.262	8.72%
11	A	0.090	8.99%	0.018	1.75%	0.044	4.36%
12	A	0.181	9.05%	0.037	1.84%	0.217	10.87%
13	B	0.085	14.18%	0.022	3.61%	0.031	5.21%
14	B	0.139	13.92%	0.039	3.89%	0.165	16.51%
15	B	0.420	14.00%	0.127	4.23%	0.327	10.91%
16	B	0.285	14.26%	0.094	4.72%	0.261	13.04%
17	BBB	0.104	10.37%	0.029	2.85%	0.094	9.40%
18	BBB	0.849	10.61%	0.312	3.90%	0.787	9.84%
19	BBB	0.103	10.33%	0.020	1.98%	0.036	3.64%
20	AA	0.430	8.60%	0.090	1.80%	0.233	4.67%

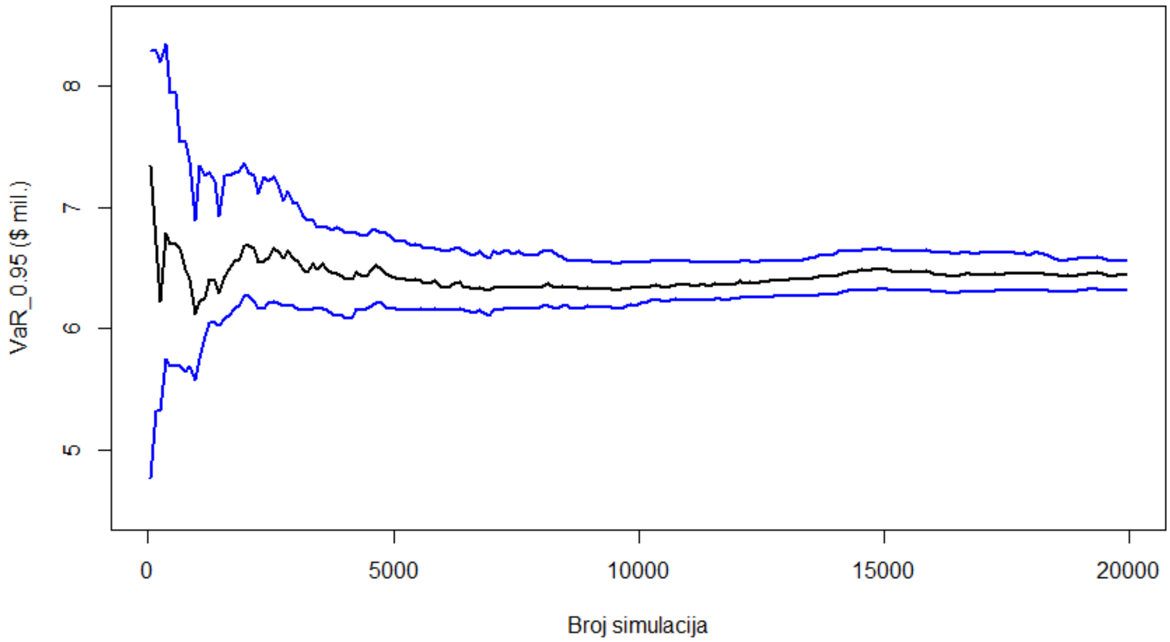
Tablica 4.11: Marginalne statistike obveznica u portfelju

Nadalje, kako je cilj da algoritam bude precizan i što brži, pitali smo se koliki je dovoljan broj simulacija za dobivanje preciznih procjena. Promatrali smo pouzdane intervale i njihovu širinu za sve veći i veći n. Rezultate predstavljamo u idućim grafovima.

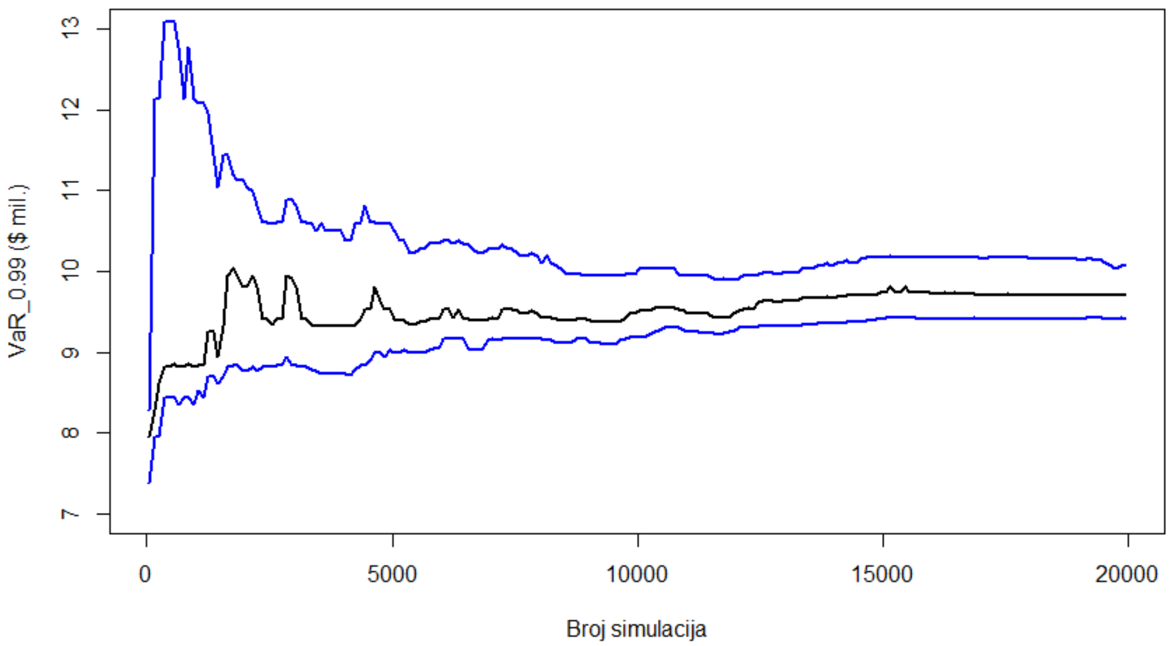
Možemo uočiti da se sve statistike stabiliziraju nakon 12,000 simulacija, a ako promatramo samo 0.95-kvantil, onda je dovoljno i 5,000 simulacija (čak 4 puta manje nego što smo odabrali!). Za iste n pouzdani intervali se također ne sužavaju značajno. Možemo uočiti da se procjene i pouzdani intervali za ekstremno visoke kvantile ne mijenjanju često. To objašnjava činjenica da prosječno samo jedan od tisuću scenarija proizvodi vrijednost koja utječe na procjene. Da bismo značajno poboljšali procjenu morali bismo generirati mnogo veći broj scenarija.



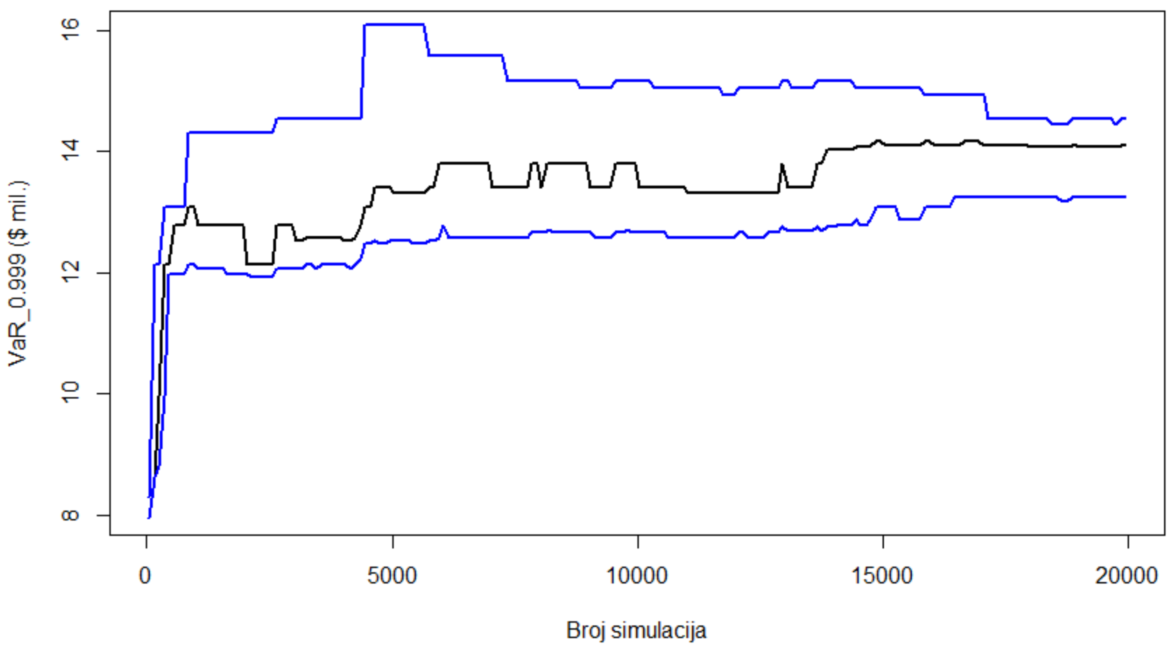
Slika 4.6: Promjena 95%-pouzdanih intervala za očekivani gubitak ($ mil.)



Slika 4.7: Promjena 95%-pouzdanih intervala za 95%-VaR gubitaka ($ mil.)



Slika 4.8: Promjena 95%-pouzdanih intervala za 99%-VaR gubitaka ($ mil.)



Slika 4.9: Promjena 95%-pouzdanih intervala za 99.9%-VaR gubitaka ($ mil.)

Bibliografija

[1] L. Allen i A. Saunders, *Credit Risk Measurement In and Out of the Financial Crisis: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*, John Wiley&Sons, 2010.

[2] E. I. Altman, *Rating Migration of Corporate Bonds: Comparative Results and Investor/Lender Implication*, (1996).

[3] P. Artzner, *Thinking coherently*, Risk (1997), 68–71.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber i D. Heath, *Coherent measures of risk*, Mathematical finance **9** (1999), br. 3, 203–228.

[5] L. V. Carty i D. Lieberman, *Corporate bond defaults and default rates 1938-1995*, Moody's Investors Service Global Credit Research, New York, NY (1996).

[6] E. Castillo i A. S. Hadi, *Fitting the generalized Pareto distribution to data*, Journal of the American Statistical Association **92** (1997), br. 440, 1609–1620.

[7] M. Cruz, R. Coleman i G. Salkin, *Modeling and measuring operational risk*, Journal of Risk **1** (1998), br. 1, 63–72.

[8] M. H. DeGroot i M. J. Schervish, *Probability and statistics*, Pearson Education, 2012.

[9] S. Ebnöther i P. Vanini, *Credit portfolios: What defines risk horizons and risk measurement?*, Journal of Banking & Finance **31** (2007), br. 12, 3663–3679.

[10] M. Elkhoury, *Credit rating agencies and their potential impact on developing countries*, (2009), https://unctad.org/en/docs/gdsddf20081_en.pdf.

[11] E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown i W. N. Goetzmann, *Modern portfolio theory and investment analysis*, John Wiley & Sons, 2009.

[12] G. M. Gupton, C. C. Finger i M. Bhatia, *Creditmetrics: technical document*, JP Morgan & Co., 1997.

[13] J. C. Hull, *Options, Futures, And Other Derivatives (Eight Edition)*, New Jersey: PrenticeHall (2012).

[14] A. M. Malz, *Financial risk management: models, history, and institutions*, sv. 538, John Wiley & Sons, 2011.

[15] A. J McNeil, *Extreme value theory for risk managers*, Departement Mathematik ETH Zentrum (1999).

[16] R. C. Merton, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, The Journal of finance **29** (1974), br. 2, 449–470.

[17] P. Nickell, W. Perraudin i S. Varotto, *Stability of rating transitions*, Journal of Banking & Finance **24** (2000), br. 1-2, 203–227.

[18] Standard & Poor's Global Credit Portal, *Default, transition and recovery: 2018 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions*, 2019, https://www.spratings.com/documents/20184/774196/2018AnnualGlobalCorporateDefaultAndRatingTransitionStudy.pdf.

[19] Andreas W., *CreditMetrics: Functions for calculating the CreditMetrics risk model*, 2007, https://cran.r-project.org/web/packages/CreditMetrics/CreditMetrics.pdf, R package version 0.0-2.

Sažetak

Otkako je Banka za međunarodna poravnavanja definirala zahtjeve na kapitalne rezerve VaR metodologija postajala je sve važnija u bankovnoj praksi. Bankama je dozvoljeno koristiti vlastite interne modele za računanje izloženosti kreditnom riziku. Prvo uvodimo osnovne koncepte VaR-a, a onda gledamo njegovo potencijalno proširenje na neutržive kredite, te njegovu ulogu u računanju kapitalnih pričuva banke. Posebnu pažnju poklanjamo CreditMetrics-u originalno predloženom od strane J.P. Morgana. CreditMetrics predstavlja korisno pomagalo u VaR modeliranju kreditiranja. Primijenjujemo koncepte kao što su Generalizirana Pareto distribucija s teškim repovima i procjena neočekivanih gubitaka primjenom teorije ekstremne vrijednosti. Predstavljamo metodologiju modela koji koristi Monte Carlo simulaciju za procjenu različitih mjera kreditnog rizika. Na kraju iznosimo rezultate simulacije za hipotetski portfelj obveznica.

Summary

Since the Bank for International Settlements introduced capital requirements for market risk, VAR methodologies have become more and more important in banking. Certain banks were allowed to develop and use internal VAR models for calculating the exposure to credit risk. Firstly, we review basic VAR concept and then look at its potential extension to nontradable loans and its use in calculating the bank's capital requirement. Special attention is paid to J.P.Morgan's CreditMetrics, which is a useful tool in VAR modelling for credit risk. We apply concepts such as Generalized Pareto distribution with heavy tails and estimate unexpected loss using extreme value theory. We introduce the methodology for Monte Carlo simulation used to assess different credit risk measures. Lastly, we carry out the results of the simulation for a hypothetical loan portfolio.

Životopis

Ana Bokšić rođena je 21.11.1995. godine u Makarskoj. Pohađa osnovnu školu Stjepana Ivičevića u Makarskoj, a srednjoškolsko obrazovanje završava u (prirodoslovno-matematičkoj) III. gimnaziji Split. Akademske godine 2014./2015. upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija stječe naziv sveučilišne prvostupnice matematike. Diplomski studij Financijska i poslovna matematika nastavlja 2017./2018. godine na istom fakultetu. Tijekom cijelog studija prima stipendiju za izvrsnost grada Makarske.