Obla geometrijska tijela u školskoj matematici

Golubić, Lea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lea Golubić

OBLA GEOMETRIJSKA TIJELA U ŠKOLSKOJ MATEMATICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Dora Pokaz

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima bez kojih moje postignuće ne bi bilo moguće. Hvala mentorici izv. prof. dr. sc. Dori Pokaz i suvoditeljici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na savjetima i pomoći oko izrade rada.

Sadržaj

Uvod

Sjetimo se da smo se od malih nogu u svakodnevnom životu susretali s oblim geometrijskim tijelima jer mnoge stvari koje nas okružuju imaju oblik valjka, stošca ili kugle. Iako još u vrtićkoj dobi djeca dobivaju zadatke u kojima trebaju izbaciti uljeza gdje je potrebno razlikovati geometrijske likove od geometrijskih tijela kao i uglata geometrijska tijela od oblih geometrijskih tijela, učenici tek u drugom polugodištu osmog razreda osnovne škole usvajaju matematičku definiciju valjka, stošca te kugle i sfere. U ovom diplomskom radu bit će riječi upravo o oblim geometrijskim tijelima u školskoj matematici.

U prvom poglavlju kratko ćemo se osvrnuti na razvoj proučavanja oblih geometrijskih tijela kroz povijest te spomenuti osnovne veličine s kojima se susreću učenici osnovnih i srednjih škola kod upoznavanja s oblim geometrijskim tijelima. Također će biti objašnjen Cavalierijev princip za računanje obujma te ćemo spomenuti broj π koji se javlja u formulama za oplošje i obujam oblih geometrijskih tijela.
Sljedeća tri poglavlja bit će posvećena jednom od oblih geometrijskih tijela. Tako će u drugom poglavlju biti riječi o valjku, u trećem poglavlju ćemo se osvrnuti na stožac dok će posljednje poglavlje biti posvećeno kugli i sferi. U svakom poglavlju ćemo najprije objasniti pristup pojedinom oblom geometrijskom tijelu u osnovnoj, odnosno srednjoj školi te opisati način kako učenici mogu samostalno, kroz praktičnu vježbu, doći do osnovnih formula za oplošje i obujam valjka, stošca i kugle. Na kraju svakog poglavlja ćemo metodički riješiti zadatke koji su vezani uz pojedino tijelo, a javili su se posljednjih desetak godina na školskom, županijskom ili državnom natjecanju iz matematike u Republici Hrvatskoj.

Većina slika u ovom diplomskom radu bit će izrađene u programu dinamičke geometrije *GeoGebra* koji je prikladan za učenike osnovnih i srednjih škola te im uvelike može pomoći kod predočavanja geometrijskih tijela iz prostora. Kada je riječ o presjecima oblih geometrijskih tijela ravninama, presječne krivulje na jednostavan način možemo prikazati u programu *Rhinoceros* pa će slike koje prikazuju presjeke tijela ravninama biti prikazane u tom programu. Program *Rhinoceros* osmišljen je za 3D modeliranje i prikladniji je za starije uzraste pa se njime prvenstveno koriste studenti.

Poglavlje 1

Obla geometrijska tijela

1.1 Povijest

Valjak i valjkaste plohe

Starogrčki matematičar Euklid (330. pr. Kr. - 275. pr. Kr.) u XI. knjizi svojih *Elemenata* definira valjak kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne od njegovih stranica. Međutim, kod njega se ne pojavljuje pojam valjkaste plohe. Taj pojam javlja se tek kod Serena iz Antinopoloisa (4. st.) koji je bio jedan od Euklidovih komentatora. Seren također spominje i pojam kosog valjka, dok se Euklid bavio samo uspravnim valjkom. Formulu za površinu plašta valjka našao je Arhimed (287. pr. Kr. - 212. pr. Kr.) te u 13. propoziciji svojega djela *O kugli i valjku* dokazuje da je površina plašta svakog uspravnog valjka jednaka površini kruga čiji je polumjer geometrijska sredina duljine izvodnice i promjera njegove osnovke, tj. površina plašta uspravnog valjka duljine izvodnice v i polumjera duljine r jednaka je

$$\pi\left(\sqrt{v \cdot 2r}\right)^2 = 2\pi r v,$$

(prema [7]).

Stožac i stožaste plohe

Euklid definira stožac kao rotacijsko tijelo koje se dobije rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne od kateta. Euklid ne spominje pojam stožaste plohe, već taj pojam uvodi Apolonije (262. pr. Kr. - 190. pr. Kr.) u svom djelu *Presjeci stošca*:
"*Ako od bilo koje točke kružnice kruga koji se ne nalazi u istoj ravnini s nekom drugom točkom, povučemo pravac koji tu točku spaja s točkom kružnice, te uz fiksiranu drugu točku premještamo pravac po kružnici rotirajući ga do položaja od kojeg je počelo*

gibanje, tada plohu opisanu pravcem, koja se sastoji od dva dijela što se sastaju u vrhu, zovemo stožastom plohom, a osi stošca zovemo pravac koji prolazi tom točkom i središtem kruga." ([7])
Formulu za obujam stošca našao je Demokrit (460. pr. Kr. - 370. pr. Kr.), a strogi dokazi koji se rabe za izvod formula za obujam stošca izloženi su u pet propozicija (10. - 14.) u XII. knjizi Euklidovih *Elemenata*. U prvoj propoziciji se metodom ekshaustije dokazuje da je obujam stošca jednak trećini obujma valjka koji imaju jednaku osnovku i visinu. U drugoj propoziciji se istom metodom dokazuje da je omjer obujma stožaca ili valjaka jednakih visina jednak omjeru površina njihovih osnovki. U trećoj propoziciji dokazuje se da se obujmi dvaju sličnih stožaca ili valjaka odnose kao kubovi promjera njihovih osnovki. U posljednje dvije propozicije dokazuje se da je omjer obujmova dvaju stožaca ili valjaka koji imaju sukladne osnovke jednak omjeru njihovih visina, (prema [7]).

Kugla i sfera

U 17. i 18. propoziciji XII. knjige Euklidovih *Elemenata* riječ je o kugli. Euklid također koristi poučak (ali ga nigdje nije u potpunosti dokazao) da je svaki ravninski presjek kugle krug. Također uvodi pojam glavnog kruga - ako presječna ravnina prolazi središtem kugle, onda je krug koji nastaje u presjeku najveće površine. U 18. propoziciji metodom ekshaustije dokazuje da se obujmi dviju kugli odnose kao kubovi njihovih polumjera. Budući da Euklid ne navodi ni formulu za oplošje kugle ni za njen obujam, pretpostavlja se da ih nije ni znao. Arhimed je prvi došao do tih formula čije dokaze daje u svojoj raspravi *O kugli i valjku*, u 33. i 34. propoziciji I. knjige, (prema [7]).

1.2 Obla geometrijska tijela u školskoj matematici

Obla geometrijska tijela su ona tijela koja na svojoj granici imaju dio koji pripada barem jednoj zakrivljenoj plohi, a mogu sadržavati i ravnu plohu. Obla geometrijska tijela nazivaju se i rotacijskim tijelima jer su dobivena rotacijom nekog ravninskog lika oko pravca.

Osnovna škola

U osnovnoj školi učenici se s geometrijom prostora susreću na samom početku svog obrazovanja. Kao što stoji u Hrvatskom nacionalnom obrazovnom standardu (HNOS-u), učenici prvog razreda osnovne škole trebaju među predmetima iz neposredne okoline, na modelima geometrijskih tijela i na ilustracijama prepoznati i imenovati kuglu, valjak, kocku, kvadar i piramidu. Također, očekuje se od učenika da razlikuju ravne plohe od zakrivljenih ploha, tj. uglata geometrijska tijela od oblih geometrijskih tijela. Geometrija prostora detaljnije se obrađuje u drugom polugodištu osmog razreda. Od oblih geometrijskih tijela spominju se valjak, stožac te kugla i sfera gdje se usvajaju definicije tih tijela te njihovi osnovni elementi, pri čemu se spominju samo uspravna tijela. Od numeričkih veličina objašnjavaju se oplošje i obujam ili volumen tijela. Za svako od spomenutih tijela bit će opisano kako učenici kroz praktičnu vježbu mogu sami doći do formula za njihovo oplošje i volumen.

Srednja škola

U srednjoj školi učenici se s geometrijom prostora susreću u drugom polugodištu drugog razreda. Ovdje, osim uspravnih tijela, proučavaju i kosa tijela. S obzirom na vrstu škola, na različite se načine uvode tijela i dokazuju njihova svojstva. Dokazi formula, osim u udžbenicima za gimnazije, mogu se naći i u udžbenicima za tehničke škole koje imaju četiri sata matematike tjedno. U trogodišnjim se srednjim školama formule za oplošje i obujam ne dokazuju već su samo navedene jer je riječ o školama u kojima je satnica matematike jedan ili dva sata tjedno, a i učenici koji pohađaju tu vrstu škole obično nemaju visoka matematička predznanja niti su motivirani za učenje matematike.
Kod zadataka s natjecanja, obla geometrijska tijela se većinom javljaju u 3. ili 4. razredu pod pojmom rotacijskih tijela. Za učenike srednjih škola sastavljaju se dvije varijante zadataka, A i B. Zadaci A varijante su složeniji i namijenjeni su učenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija, ali se u toj varijanti mogu natjecati i drugi učenici. Zadaci B varijante namijenjeni su učenicima svih srednjih škola osim prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

1.3 Cavalierijev princip

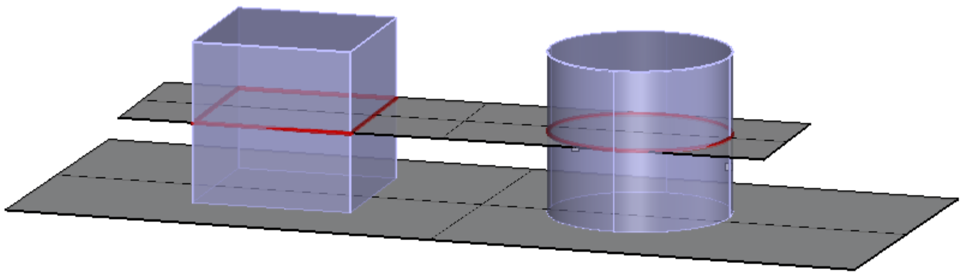
Bonaventura Cavalieri (1598. - 1647.) je bio talijanski matematičar i astronom. Veliki utjecaj na njega imao je Galileo Galilei, čiji je bio učenik. Cavalieri se bavio raznim područjima matematike, fizike i astronomije. Predavao je matematiku na Sveučilištu u Bologni i putem pisama održavao je stalne veze s najuglednijim matematičarima svojeg vremena.
Najpoznatija Cavalierijeva knjiga je *Geometria indivisibilibus continuorum nova guadam ratione promota* (1635.) u kojoj izlaže svoju metodu nedjeljivih veličina. Cavalierijeve nedjeljive veličine su beskonačno tanke. Ravninske figure smatra sastavljenim

od paralelnih dužina, a prostorne figure od paralelnih likova, (prema [4]).

Cavalierijev princip za površine: ako se dva lika mogu postaviti tako da njihovi presjeci s pravcima paralelnima jednom zadanom pravcu imaju istu duljinu, onda oni imaju jednake površine.

Slika 1.1: Cavalierijev princip za površine

Cavalierijev princip za obujme: ako se dva tijela mogu postaviti tako da njihovi presjeci s ravninama paralelnima jednoj zadanoj ravnini imaju jednake površine, onda ta dva tijela imaju jednake obujme.



Slika 1.2: Cavalierijev princip za obujme

U ovom ćemo radu sve formule za uglata tijela smatrati poznatima, tj. nećemo ih dokazivati.
Općenito, kod računanja obujma tijela uvijek krećemo od obujma kvadra čiji volumen računamo pomoću formule $V = a \cdot b \cdot c$ koju dokazujemo koristeći osnovne aksiome obujma, ali ovdje ćemo taj dokaz preskočiti. Iz toga slijedi da je obujam svake prizme jednak umnošku površine osnovke i pripadne visine.
Sljedeći tri propozicije proizlaze iz Cavalierijevog principa.

Propozicija 1.3.1. *Obujam uspravnog valjka jednak je umnošku površine osnovke i pripadne visine. Posebno, obujam V uspravnog valjka s polumjerom osnovke r i duljinom visine v dan je formulom $V = r^2\pi v$.*

Dokaz. Neka su dani valjak polumjera osnovke r i duljine visine v te prizma iste visine, a čija osnovka ima jednaku površinu kao i krug koji je osnovka valjka.
Označimo s B_p, v_p, B_v i v redom površinu baze prizme, duljinu visine prizme, površinu baze valjka te duljinu visine valjka. Presiječemo li valjak i prizmu ravninom usporednom s ravninom osnovaka dobivamo krug i mnogokut koji su sukladni osnovkama valjka i prizme. Dakle, imaju jednake površine. Prema Cavalierijevom principu obujmi valjka i prizme su jednaki, a poznavajući formulu za obujam prizme $V_p = B_p \cdot v_p$ imamo:

$$V_v = V_p = B_p \cdot v_p = B_v \cdot v.$$

Dakle, obujam uspravnog valjka čiji je polumjer osnovke r i visina duljine v jednak je

$$V = r^2\pi v,$$

(prema [14]). □

Propozicija 1.3.2. *Obujam uspravnog stošca jednak je trećini umnoška površine osnovke i duljine visine stošca. Posebno, obujam V uspravnog stošca s polumjerom osnovke r i duljinom visine v dan je formulom $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$.*

Dokaz. Neka su dani stožac polumjera osnovke r i duljine visine v te piramida iste visine, a čija osnovka ima jednaku površinu kao i krug koji je osnovka stošca. Presiječemo li ta dva tijela ravninom usporednom s ravninom osnovaka na udaljenosti x od vrha, kao presjek dobivamo krug, odnosno mnogokut koji su slični osnovkama stošca i piramide s istim koeficijentom sličnosti $\frac{x}{v}$.
Označimo s B_s, B_s', v, B_p, B_p' i v_p redom površinu osnovke stošca, površinu presječnog kruga, duljinu visine stošca, površinu osnovke piramide, površinu presječnog mnogokuta i duljinu visine piramide . Imamo:

$$\frac{B_s'}{B_s} = \left(\frac{x}{v}\right)^2$$

i

$$\frac{B_p'}{B_p} = \left(\frac{x}{v}\right)^2,$$

a budući da su površine osnovaka jednake, tj. $B_s = B_p$, slijedi da su i površine presječnih likova jednake, tj. $B_s' = B_p'$. Prema Cavalierijevom principu zaključujemo da su obujmi stošca i piramide jednaki, a poznavajući formulu za obujam piramide $V_p = \frac{1}{3} \cdot B_p \cdot v_p$ imamo:

$$V_s = V_p = \frac{1}{3} \cdot B_p \cdot v_p = \frac{1}{3} \cdot B_s \cdot v.$$

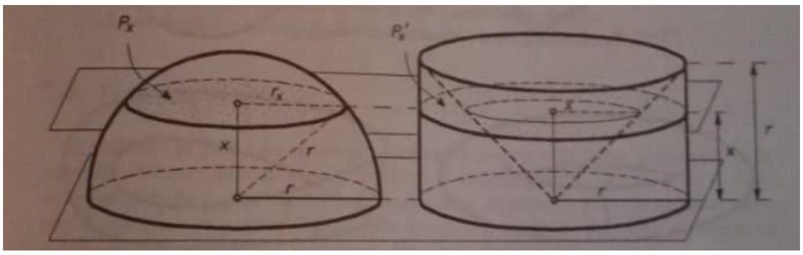
Dakle, obujam uspravnog stošca čiji je polumjer osnovke r i visina duljine v jednak je

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi v,$$

(prema [14]). □

Propozicija 1.3.3. *Obujam kugle V polumjera duljine r dan je formulom $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$.*

Dokaz. Najprije ćemo odrediti obujam polukugle. U tu svrhu na ravnini glavnog kruga polukugle uzmimo valjka čiji su polumjer i visina jednakih duljina i iznose r. Unutar valjka upišemo stožac kao što je prikazano na Slici 1.3.



Slika 1.3: Skica za dokaz *Propozicije 1.3.3.*, izvor: [13]

Tvrdimo da je obujam polukugle jednak obujmu tijela T dobivenog kada iz valjka oduzmemo stožac. Ta dva tijela se nalaze između paralelnih ravnina na udaljenosti r. Presiječemo ih paralelnom ravninom koja je za x udaljena od ravnine osnovke.
Neka je P_x površina presjeka polukugle s tom ravninom. Slijedi da je P_x površina kruga polumjera r_x.
Iz Pitagorinog poučka dobivamo:

$${r_x}^2 = r^2 - x^2,$$

tj.

$$P_x = {r_x}^2 \pi = (r^2 - x^2)\pi.$$

Neka je P_x' površina presjeka te ravnine s tijelom T. Slijedi da je P_x' površina kružnog vijenca čiji je polumjer vanjske kružnice r, a unutrašnje x.
Prema tome je

$$P_x' = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi,$$

iz čega uočavamo da je
$$P_x = P'_x.$$
Prema Cavalierijevom principu zaključujemo da je
$$V(polukugle) = V(T) = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3}r^3\pi.$$
Dakle, obujam kugle polumjera r jednak je
$$V = 2 \cdot \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi,$$
(prema [13]). □

1.4 Broj π

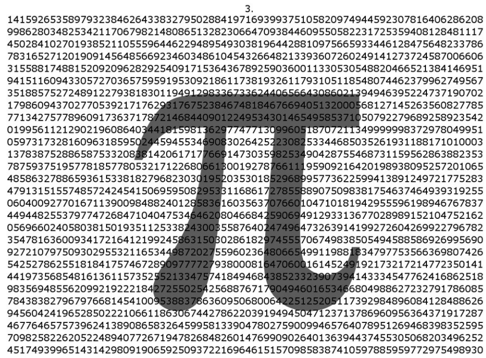
Kada je riječ o oblim geometrijskim tijelima, neizostavno je osvrnuti se na broj π jer se on javlja u formulama za oplošje i obujam oblih tijela.
Broj π možemo definirati kao omjer opsega i promjera kruga, tj. $\pi = \frac{o}{2r}$ ili kao omjer površine i kvadrata polumjera kruga, tj. $\pi = \frac{P}{r^2}$.
Broj π je također poznat pod nazivom Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj.

Arhimed iz Sirakuze (287. pr. Kr. - 212. pr. Kr.) se smatra najvećim matematičarem i fizičarem antičkog doba. Arhimed većini problema najprije pristupa fizikalno, a za postizanje preciznosti provodi dokaze Eudoksovom (408. pr. Kr. - 355. pr. Kr.) metodom ekshaustije.
Upisujući i opisujući krugu pravilni 96-erokut, Arhimed je dobio procjenu za vrijednost broja π:
$$3\frac{10}{17} < \pi < 3\frac{1}{7},$$
(prema [5]).

Ludolph van Ceulen (1540. - 1610.) je bio matematičar njemačkog porijekla koji se bavio Arhimedovom metodom kod određivanja vrijednosti broja π i uspio ga odrediti na 35 decimalnih mjesta. U njegovu čast broj π nosi ime Ludolfov broj.

Zanimljivosti o broju π

S obzirom da su prve tri znamenke broja π jednake 3.14, svake se godine 14. ožujka slavi Pi dan. Taj je datum odabran zbog standardnog američkog oblika datuma mjesec/dan.



Slika 1.4: Broj π

Kako bi učenici lakše zapamtili prvih nekoliko decimala broja π, osmišljenje su mnoge pjesmice, od čega je jedna od najpoznatijih

Tri mesara jednu buhu klala,
Četiri krila ima pčela mala.
Jedna ruka pet prstiju miče,
Devet Muza umjetnost potiče,
Po dva roga ima svaka krava,
Šest je nogu u sitnoga mrava.
Pet ocjena, a srednja je tri;
Tim brojkama započinje π. ([11])

Isto tako, često možemo vidjeli da su zidovi učionica ispisani znamenkama broja π.

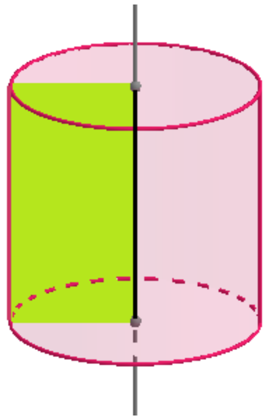
Poglavlje 2

Valjak

2.1 Valjak u školskoj matematici

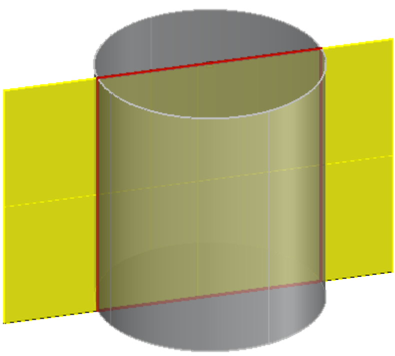
Osnovna škola

Učenici se u svakodnevnom životu susreću s valjkastim tijelima jer raznovrsni predmeti oko nas imaju upravo oblik valjka. Primjerice, cijevi, olovka, kreda, stupovi i sl., ali konkretno se počinju njime baviti u drugom polugodištu osmog razreda nakon uglatih geometrijskih tijela. Prema Hrvatskom nacionalnom obrazovnom standardu (HNOS-u), od učenika se traži da skiciraju valjak i njegovu mrežu te izračunaju obujam i oplošje valjka. U osnovnoj školi učenici se susreću samo s pojmom uspravnog valjka.
U udžbeniku ([12]), ali i mnogim drugim udžbenicima iz matematike za osnovnu školu, nalazimo sljedeću rečenicu kojom se definira valjak:
Valjak je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim krugovima koji se nalaze u usporednim ravninama te dijelom zakrivljene plohe.
Uočimo da ta rečenica ne opisuje dobro pojam valjka jer nije precizno opisano kako izgleda ta zakrivljena ploha te netko može zaključiti da ona ne mora biti valjkasta ploha.
Budući da se u osnovnoj školi radi samo uspravni valjak, dovoljno ga je definirati pomoću rotacije pravokutnika.
Dakle, uspravni valjak je rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Primjenom animacija u programu dinamičke geometrije *GeoGebra* možemo pomoći učenicima kako bi dobili osjećaj za tu rotaciju.



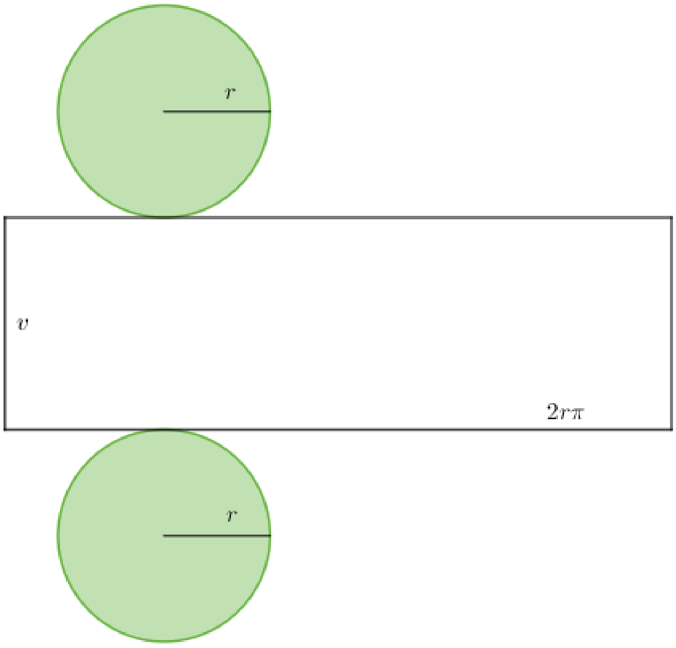
Slika 2.1: Uspravni valjak

Uočimo da je valjak omeđen dvama paralelnim, međusobno sukladnim krugovima te zakrivljenom plohom koju čine dužine paralelne s dužinom koja spaja središta tih krugova. Krugovi se nazivaju osnovke ili baze valjka, a zakrivljena ploha plašt valjka. Dužina okomita na ravnine osnovki kojoj je jedna krajnja točka u ravnini jedne osnovke, a druga u ravnini druge osnovke naziva se visina valjka. Pravac koji prolazi središtima osnovki valjka naziva se os valjka. Dužine usporedne s osi valjka kojima je jedna krajnja točka na rubu jedne osnovke, a druga krajnja točka na rubu druge osnovke nazivaju se izvodnice valjka. Sve izvodnice valjka su jednake duljine i međusobno usporedne.
U osnovnoškolskim udžbenicima također se spominje osni presjek uspravnog valjka kao presjek uspravnog valjka ravninom koja sadrži os valjka. Osni presjek uspravnog valjka jest pravokutnik.



Slika 2.2: Osni presjek uspravnog valjka

Kako bi učenici odredili mrežu uspravnog valjka, najprije naprave model valjak od kartona te razrežu plašt valjka po jednoj njegovoj izvodnici i polože ga u ravninu.



Slika 2.3: Mreža uspravnog valjka

Učenici uočavaju da se mreža uspravnog valjka sastoji od dva sukladna kruga što su osnovke valjka te jednog pravokutnika što je plašt valjka. Stranice tog pravokutnika su duljine $2r\pi$, što odgovara opsegu kruga radijusa r i v, što je duljina visine valjka. Dakle, slijedi da je površina plašta jednaka $P = 2r\pi v$. S obzirom da mrežu valjka čine dva sukladna kruga i pravokutnik, a oplošje valjka je zbroj površina ploha koje ga omeđuju, imamo

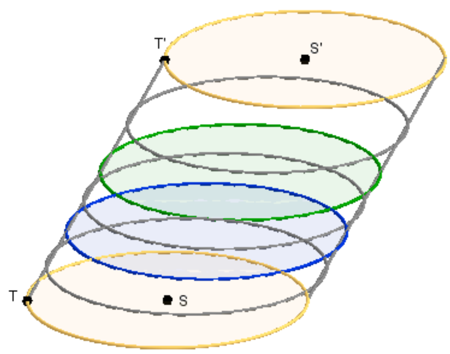
$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v).$$

Da bismo izračunali obujam valjka, usporedimo ga s prizmom koja ima jednaku površinu baze i jednaku duljinu visine kao i valjak. Od kartona napravimo šuplje modele valjka i prizme te odredimo odnos njihovih obujama. Rižom napunimo model valjka i zatim je presipamo u model prizme. Uočavamo da će model prizme biti napunjen iz čega slijedi da ta dva tijela imaju jednake obujme, a s obzirom da znamo da je obujam prizme jednak umnošku površine baze i duljine visine, zaključujemo da isto vrijedi i za valjak. Kako je baza valjka krug polumjera r, slijedi da je $B = r^2\pi$ te dobivamo

$$V = r^2\pi \cdot v.$$

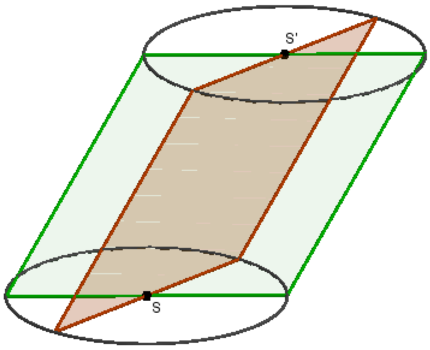
Srednja škola

U Republici Hrvatskoj postoji nekoliko vrsta srednjih škola i u njima se na različite načine uvodi pojam valjka i dokazuju njegova svojstva. U udžbenicima za gimnazije i tehničke škole koje imaju četiri sata matematike tjedno, nalaze se dovoljno detaljni dokazi i izvodi formula. Međutim, također valja napomenuti da u nekim udžbenicima oni budu vrlo šturo i neprecizno napisani te im uvijek treba pristupati s oprezom. Kada je riječ o strukovnim trogodišnjim školama, obrađuje se samo uspravni valjak, a formule za oplošje i obujam valjka se ne dokazuju nego su samo navedene. Zadaci koji se javljaju u tim vrstama škola su vrlo jednostavni i većinom se svode na direktnu upotrebu navedenih formula. Bez obzira na vrstu škole, učenici pojam valjka susreću u drugom polugodištu drugog razreda.
U nekim udžbenicima i dalje se provlači pomalo neprecizna definicija valjka kao što je bio slučaj kod udžbenika u osnovnim školama. S obzirom da se sada javlja i pojam kosog valjka, trebamo općenito definirati valjak. U mnogim udžbenicima se valjak opisuje na analogan način kao i prizma. Jedina bitna razlika je u tome što je osnovka valjka krug, dok je osnovka prizme mnogokut. U udžbeniku [14] precizno je iskazana općenita definicija valjka.
Neka je $K = K(S, r)$ krug sa središtem S u ravnini π, a točka $S^{'}$ neka je točka ravnine π' koja je paralelna s ravninom π, ali se one ne podudaraju. Unija svih dužina $\overline{TT'}$ koje su usporedne sa $\overline{SS'}$ pri čemu $T \in K$, $T^{'} \in \pi^{'}$ nazivamo valjak.



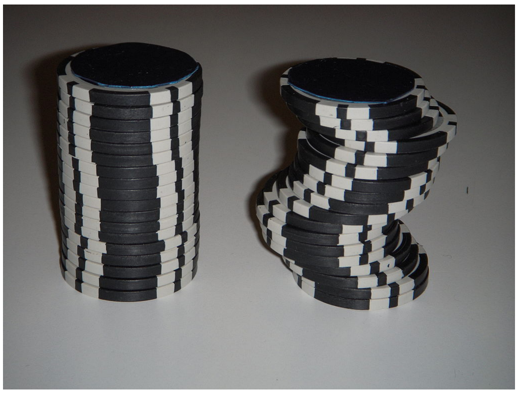
Slika 2.4: Valjak

Uočimo, ako je dužina $\overline{SS'}$ okomita na ravninu π, onda se tijelo definirano na ovaj način podudara s uspravnim valjkom.
Prisjetimo se da su osni presjeci uspravnog valjka sukladni pravokutnici sa stranicama duljina $2r$ i v. U srednjoj školi to se znanje proširuje i na kosi valjak. Osni presjeci kosog valjka su paralelogrami, međutim oni nisu sukladni. Među svim osnim presjecima kosog valjka ističe se onaj osni presjek čiji je kut α najmanji. Takav osni presjek kosog valjka nazivamo karakterističnim presjekom valjka.



Slika 2.5: Karakteristični presjek valjka

Prema Cavalierijevom principu, opisanom u prethodnom poglavlju, za obujam kosog valjka također vrijedi $V = r^2\pi v$. Budući da se do formule dolazi analogno kao što je opisano u dokazu Propozicije 1.3.1., ovdje ćemo taj dokaz preskočiti (promatramo uspravni i kosi valjak koji imaju jednake površine osnovki i jednake duljine visina).



Slika 2.6: Cavalierijev princip računanja obujma valjka, izvor: [2]

2.2 Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. (Školsko natjecanje iz matematike 2011., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat. Odredite duljinu polumjera osnovke tako da njegovo oplošje i obujam imaju istu numeričku vrijednost.

Rješenje: Znamo da općenito vrijedi: osni presjek uspravnog valjka je pravokutnik sa stranicama duljine $2r$ i v. Budući da je u zadatku zadano da je osni presjek uspravnog valjka kvadrat, treba vrijediti $2r = v$.
Iz uvjeta zadatka imamo da oplošje i obujam valjka trebaju biti jednaki, tj. da treba vrijediti $O = V$.
Općenito, formula za oplošje valjka glasi

$$O = 2B + P = 2r\pi(r + v).$$

Oplošje uspravnog valjka čija je duljina visine jednaka duljini promjera osnovke dano je formulom

$$O = 2r\pi \cdot 3r,$$

tj.

$$O = 6r^2\pi.$$

Općenito, formula za obujam uspravnog valjka glasi

$$V = B \cdot v = r^2\pi \cdot v$$

pa slijedi da je obujam uspravnog valjka čija je duljina visine jednaka duljini promjera osnovke dana formulom

$$V = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi.$$

S obzirom da oplošje i obujam trebaju biti jednaki, imamo

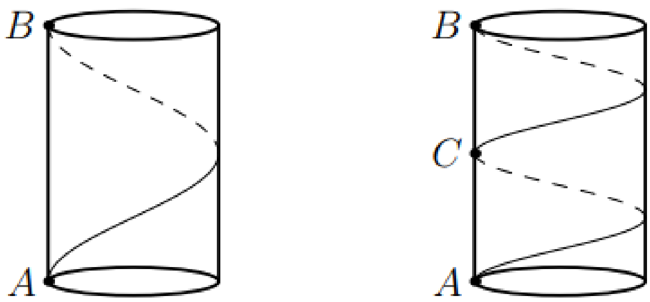
$$6r^2\pi = 2r^3\pi,$$

iz čega slijedi da je $r = 3$.
Dakle, polumjera osnovke ima brojčanu vrijednost 3.

Općenito, učenici znaju da je osni presjek uspravnog valjka pravokutnik sa stranicama duljina $2r$ i h, a u *Zadatku 1.* imamo da je taj presjek kvadrat što bi trebalo potaknuti učenike da dođu do veze između visine valjka i polumjera njegove osnovke te tako povežu dvije nepoznanice na temelju čega mogu provesti potreban račun i odrediti traženu veličinu u zadatku.

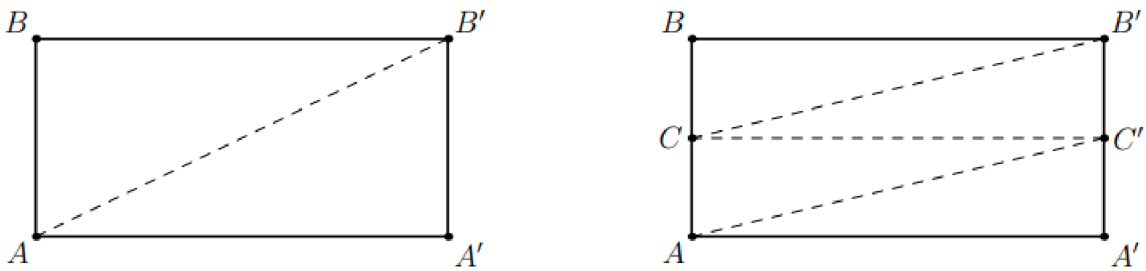
Zadatak 2. (Školsko natjecanje iz matematike 2010., 3. razred - srednja škola - A varijanta)
Dan je valjak visine 10 cm. Na obodima njegovih osnovki označene su točke A i B takve da je $\overline{AB}$ paralelna s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka (po plaštu), njena duljina će biti 15 cm. Kolika je duljina najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B?

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu:



Slika 2.7: Skica za *Zadatak 2.*, izvor: [10]

Prerežemo plašt valjka duž dužine $\overline{AB}$ kao što je prikazano na Slici 2.8.



Slika 2.8: Skica za *Zadatak 2.*, izvor: [10]

Tako dobivamo pravokutnik $ABB'A'$ takav da vrijedi $|AB'| = 15$ cm. Uočimo da

je $\left|AA^{'}\right|$ opseg osnovke valjka, a dužina $\overline{A'B'}$ je visina valjka i njezina je duljina $|A^{'}B^{'}| = 10$ cm.
Primjenom Pitagorinom poučka na trokut $\triangle AA^{'}B^{'}$ dobivamo:

$$|AA^{'}| = \sqrt{|AB'|^2 - |A'B'|^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Označimo s x duljinu najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B, a s C označimo točku presjeka te linije s dužinom $\overline{AB}$.
Vrijedi

$$x = |AC^{'}| + |CB^{'}| = 2|AC^{'}|.$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut $\triangle AA^{'}C^{'}$ dobivamo:

$$|AC^{'}| = \sqrt{|AA'|^2 + |A'C'|^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6},$$

iz čega slijedi da je $x = 2 \cdot 5\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$.
Dakle, duljina najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B jednaka je $10\sqrt{6}$ cm.

Kroz *Zadatak 2.* učenici razvijaju osjećaj prijelaza iz trodimenzionalnog u dvodimenzionalni prostor. Ključno kod rješavanja ovog zadatka je da učenici shvate da je potrebno plašt valjka prerezati duž dužine $\overline{AB}$ te općenito da znaju kako izgleda plašt valjka te što je najkraća linija koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B.

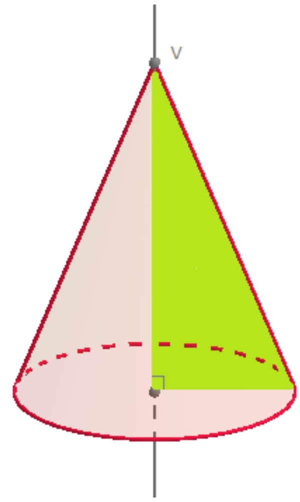
Poglavlje 3

Stožac

3.1 Stožac u školskoj matematici

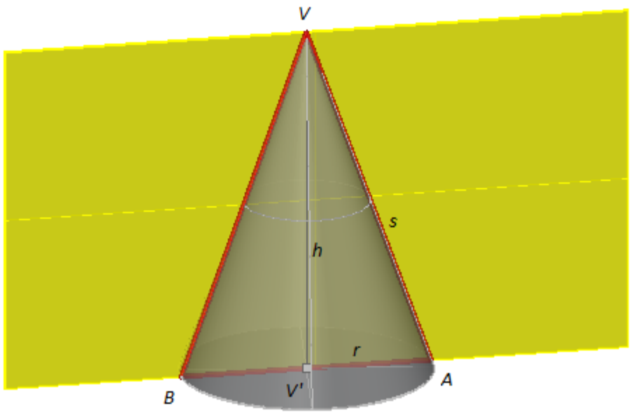
Osnovna škola

Učenici se s pojmom stošca susreću u svakodnevnom životu kroz predmete koji imaju oblik stošca kao što su kornet za sladoled, krovovi na tornjevima, neke čaše. Međutim, pojam stošca detaljnije upoznaju u drugom polugodištu osmog razreda nakon što se obradi nastavni sadržaj vezan uz valjak. Prema Hrvatskom nacionalnom obrazovnom standardu (HNOS-u) od učenika se traži da skiciraju stožac i njegovu mrežu te izračunaju obujam i oplošje stošca.
U mnogim osnovnoškolskim udžbenicima iz matematike te digitalnim obrazovnim sadržajima koji su dostupni učenicima nalazimo neprecizne definicije stošca. Tako možemo naići na sljedeću definiciju stošca koju možemo uočiti kod [3]:
Stožac je oblo geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom koji nazivamo osnovkom ili bazom stošca te dijelom zakrivljene plohe koju nazivamo plaštem stošca.
Uočimo da ovom rečenicom stožac nije dobro definiran jer nije precizno rečeno što je ta zakrivljena ploha te kako ona izgleda. Isto tako, u ovoj se rečenici nigdje ne spominje vrh stošca koji je njegov osnovni element. Budući da se u osnovnoj školi radi samo uspravni stožac, dovoljno ga je definirati pomoću rotacije pravokutnog trokuta. Dakle, uspravni stožac je rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Preostala kateta, tj. kateta oko koje se ne vrši rotacija jednaka je polumjeru osnovke stošca. Primjenom animacija u programu dinamičke geometrije *GeoGebra* možemo olakšati učenicima kako bi dobili osjećaj za opisanu rotaciju.



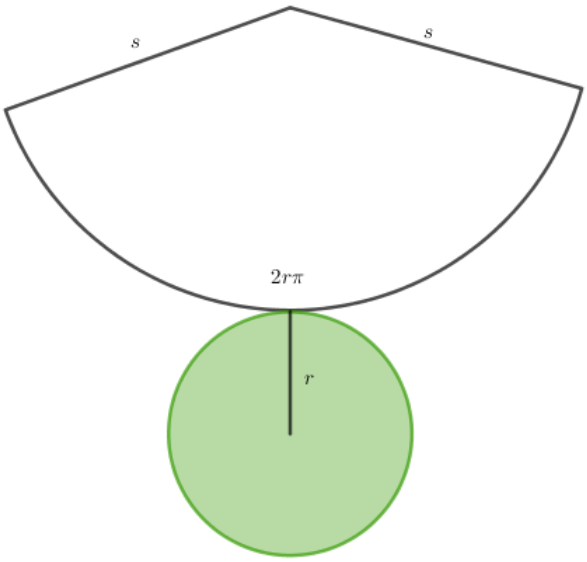
Slika 3.1: Uspravni stožac

Uočimo da je stožac omeđen krugom, točkom koja se ne nalazi u istoj ravnini kao i krug te zakrivljenom plohom. Ta točka naziva se vrh stošca, a krug osnovka ili baza stošca. Dužine koje spajaju vrh stošca s točkama kružnice zovu se izvodnice stošca. Skup svih točaka na svim izvodnicama čine zakrivljenu plohu koja je plašt stošca. Visina stošca je dužina koja spaja vrh stošca s njegovom ortogonalnom projekcijom na ravninu osnovke stošca. Kada je riječ o uspravnom stošcu, visina je dužina koja spaja vrh stošca sa središtem njegove osnovke. Pravac koji spaja vrh stošca sa središtem njegove osnovke naziva se os stošca.
U osnovnoškolskim udžbenicima spominje se presjek stošca i ravnine koja sadrži os stošca. Taj presjek naziva se osni presjek stošca. Kod uspravnog stošca svaki je osni presjek jednakokračni trokut s osnovicom duljine $2r$ i krakom duljine s, što ćemo pokazati u nastavku teksta.
Neka vrijede oznake kao što je prikazano na Slici 3.2. Promotrimo trokute $\triangle AVV'$ i $\triangle BVV'$. Stranica $\overline{VV'}$ je zajednička, kutevi $\angle AV'V$ i $\angle BV'V$ su jednake veličine jer je $\overline{VV'}$ visina stošca, te je $|AV'| = |BV'|$ jer je to polumjer osnovke stošca. Prema SKS- teoremu o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti $\triangle AVV'$ i $\triangle BVV'$ sukladni pa slijedi da je $|AV| = |BV|$, tj. da je trokut $\triangle AVB$ jednakokračni.
Prema tome, možemo zaključiti da su izvodnice uspravnog stošca jednakih duljina.



Slika 3.2: Osni presjek uspravnog stošca

Kako bi učenici odredili mrežu uspravnog stošca, najprije naprave model stošca od kartona te razrežu plašt stošca po jednoj njegovoj izvodnici i polože ga u ravninu. Učenici uočavaju da se mreža uspravnog stošca sastoji od kružnog isječka i kruga. Polumjer kružnog isječka je duljine s, a duljina njegovog luka jednaka je opsegu osnovke, tj. duljina luka je $2r\pi$.



Slika 3.3: Mreža stošca

Oplošje stošca jest ukupni iznos površina ploha koje ga omeđuju. Budući da je stožac omeđen krugom te kružnim isječkom, potrebno je prisjetiti se formula za njihove površine. Formula za površinu kruga glasi

$$P = r^2\pi.$$

Kružni isječak omeđen je dvjema izvodnicama duljina s čiji je pripadni središnji kut α pa duljinu kružnog luka računamo koristeći formulu

$$l = \frac{s \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}.$$

S druge strane, učenici mogu zaključiti da je duljina tog kružnog luka jednaka opsegu osnovke stošca, tj. da je $l = 2r\pi$. Prema tome, površina kružnog isječka jednaka je

$$P = \frac{s^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = l \cdot \frac{s}{2} = 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = r\pi s.$$

Dakle, formula za oplošje uspravnog stošca polumjera osnovke r i izvodnice duljine s jednaka je

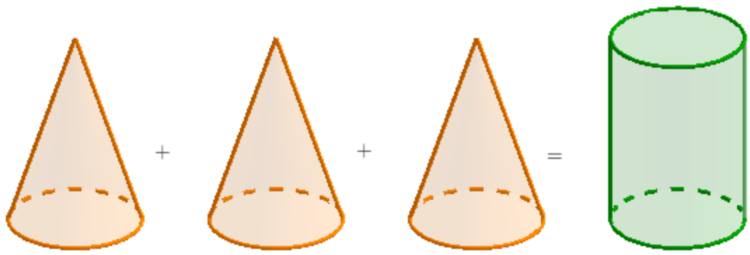
$$O = B + P$$
$$O = r^2\pi + r\pi s$$
$$O = r\pi(r + s).$$

Kada je riječ o određivanju obujma stošca, učenici će koristiti znanje o obujmu valjka. Budući da se učenici najprije susreću s valjkom kao oblim geometrijskim tijelom, kad dođu do obujma stošca već znaju da je obujam valjka polumjera osnovke r i duljine visine v dan formulom $V = B \cdot v = r^2\pi v$.
Do formule za obujam stošca učenici će doći kroz praktičnu vježbu. Dobivaju model šupljeg valjka čija je površina osnovke B, a duljina visine v te model šupljeg stožac s jednakom površinom osnovke i jednakom duljinom visine. Učenici također na raspolaganju imaju rižu. Njihov je zadatak da najprije napune stožac rižom te rižu iz stošca prebace u valjak. Postavlja se pitanje: "*Koliko puta trebamo napuniti stožac rižom i prebaciti je u valjak kako bi valjak bio pun do vrha?*"
Učenici dolaze do zaključka da opisani postupak trebamo ponoviti tri puta. Iz toga proizlazi zaključak da je obujam stošca tri puta manji od obujma valjka koji ima jednaku površinu osnovke i duljinu visine kao i stožac, tj. da vrijedi

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v.$$

Dakle, obujam stošca polumjera osnovke r i duljine visine v dan je formulom

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi v.$$



Slika 3.4: Odnos obujma stošca i valjka

Srednja škola

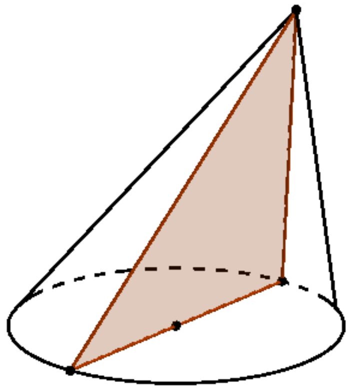
Kao što je opisano u prethodnom poglavlju u kojem je bilo riječi o valjku, s obzirom na vrstu srednje škole na različite se načine uvodi pojam stošca i dokazuju njegova svojstva. U udžbenicima za gimnazije i tehničke škole koje imaju četiri sata matematike tjedno, nalaze se dovoljno detaljni dokazi i izvodi formula, ali uvijek im treba pristupati s oprezom. U trogodišnjim se srednjim školama obrađuje samo uspravni stožac, a formule za oplošje i obujam se ne dokazuju nego su samo navedene. Javljaju se vrlo jednostavni zadaci koji se većinom svode na direktnu upotrebu navedenih formula. Krnji se stožac uopće ne spominje.

S obzirom da se sada javlja i pojam kosog stošca, treba nam općenita definicija stošca. U mnogim udžbenicima se stožac opisuje na analogan način kao i piramida. Jedina bitna razlika je u tome što je osnovka stošca krug, dok je osnovka piramide mnogokut. U udžbeniku [14] precizno je iskazana općenita definicija stošca.

Neka je $K(S, r)$ krug u ravnini π, a V neka je točka van te ravnine. Unije svih dužina $\overline{VT}$ koje spajaju točku V s bilo kojom točkom T kruga K naziva se stožac s vrhom V i osnovkom K.

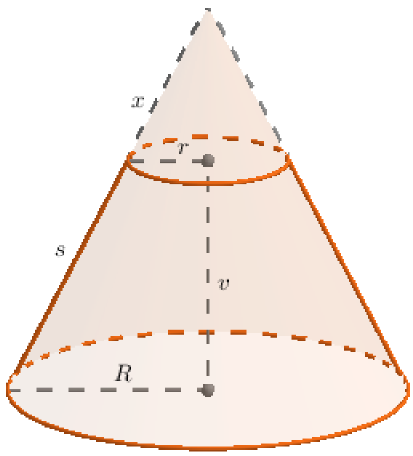
Uočimo, ako je dužina $\overline{VS}$ okomita na ravninu osnovke, onda se tijelo definirano na ovaj način podudara s uspravnim stošcem.

Prisjetimo se da je osni presjek uspravnog stošca jednakokračni trokut. U srednjoj školi to se znanje proširuje i na kosi stožac. Osni presjek kosog stošca s ravninom okomitom na ravninu baze naziva se karakteristični presjek. Stranice tog trokuta su promjer kruga, tj. osnovke stošca te najkraća i najdulja izvodnica stošca.



Slika 3.5: Karakteristični presjek kosog stošca

Novi pojam s kojim se učenici također susreću jest krnji stožac i on je definiran na sljedeći način:
Krnji stožac je geometrijsko tijelo koje nastaje presijecanjem stošca ravninom usporednom s ravninom osnovke i odbacivanjem manjeg stošca.
Zamislimo da imamo uspravni krnji stožac. U nastavku teksta odredit ćemo formule za oplošje i obujam uspravnog krnjeg stošca.



Slika 3.6: Krnji stožac

Neka je R polumjer donje osnovke, a r polumjer gornje osnovke te neka je v duljina visine krnjeg stošca. Sve izvodnice uspravnog krnjeg stošca su jednake duljine i one iznose

$$s = \sqrt{v^2 + (R-r)^2},$$

što dobivamo primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s katetama duljina v i $R-r$ te hipotenuzom duljine s.
Ako krnji stožac razrežemo po jednoj njegovoj izvodnici i rastvorimo ga u jednu ravninu dobivamo mrežu krnjeg stošca koja se sastoji od dva kruga čiji su polumjeri duljine R i r, a plašt krnjeg stošca je prstenasti dio kružnog isječka. Duljina većeg luka je $2R\pi$ što odgovara opsegu većeg kruga, a duljina manjeg luka je $2r\pi$ što odgovara opsegu manjeg kruga. Prema tome, površina plašta P je razlika površina P_1 i P_2 kružnih isječaka. Označimo s x duljinu nepostojećeg dijela polumjera kružnog isječka. Iz sličnosti trokuta dobivamo:

$$x : r = (x+s) : R$$

$$x \cdot R = r \cdot (x+s)$$

$$x \cdot (R-r) = r \cdot s,$$

iz čega slijedi da je

$$x = \frac{s \cdot r}{R-r}.$$

Uvrštavanjem izračunate vrijednosti x u $x+s$ dobivamo da je

$$x + s = \frac{s \cdot R}{R-r}.$$

Prema tome je

$$P = P_1 - P_2 = R\pi(x+s) - r\pi x = R\pi \cdot \frac{sR}{R-r} - r\pi \cdot \frac{sr}{R-r} = \pi s \cdot \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi s(R+r).$$

Dakle, oplošje uspravnog krnjeg stošca s polumjerima osnovki R i r i izvodnicom duljine s dano je formulom

$$O = R^2\pi + r^2\pi + s\pi(R+r).$$

Kako bismo odredili formulu za obujam krnjeg stošca, promotrimo ponovno uspravni krnji stožac. Neka je v duljina visine krnjeg stošca te h duljina visine manjeg (odrezanog) stošca. Tada je $h+v$ visina cijelog stošca. Osnovke B i b, što su osnovke većeg i manjeg stošca, su slični likovi te vrijedi

$$B : b = (v+h)^2 : h^2$$

$$\begin{aligned}\sqrt{B} : \sqrt{b} &= (v+h) : h\\ h\sqrt{B} &= (v+h)\sqrt{b}\\ h\left(\sqrt{B}-\sqrt{b}\right) &= v\sqrt{b}.\end{aligned}$$

Iz čega slijedi da je

$$h = \frac{v\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{\left(v\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{B-b}.$$

Obujam krnjeg stošca V razlika je obujmova velikog i malog stošca, V_1 i V_2, s osnovkama B i b te duljinama visina $v+h$ i h, tj.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}B(v+h) - \frac{1}{3}bh = \frac{1}{3}Bv + \frac{1}{3}(B-b)\,h.$$

Uvrštavanjem izračunate vrijednosti h u formulu za obujam krnjeg stošca dobivamo

$$V = \frac{1}{3}Bv + \frac{1}{3}(B-b)\cdot\frac{v\sqrt{b}\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{B-b} = \frac{v}{3}\left(B+\sqrt{Bb}+b\right).$$

Znamo da je $B = R^2\pi$ i $b = r^2\pi$ te dobivamo

$$V = \frac{v}{3}\left(R^2\pi + \sqrt{R^2\pi\cdot r^2\pi} + r^2\pi\right) = \frac{v}{3}\left(R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi\right).$$

Dakle, obujam uspravnog krnjeg stošca kojem osnovke imaju polumjere R i r, a visina iznosi v, dan je formulom

$$V = \frac{\pi v}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

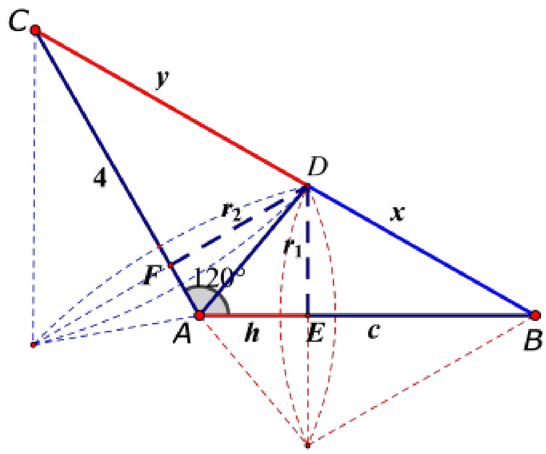
Kao što je slučaj kod valjka, učenici kod stošca također mogu primijeniti Cavalierijev princip za računanje obujam, tj. zaključuju da dva stošca jednakih površina osnovki i jednakih duljina visina imaju jednake obujmove.

3.2 Zadaci s natjecanja

Stožac se u zadacima s natjecanja javlja kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom trokuta oko zadanog pravca. Također, u zadacima je riječ o krnjim stošcima ili o stošcima koji imaju zajedničku osnovku. Općenito, u zadacima sa stošcem učenici trebaju imati dobar osjećaj za prostor kako bi mogli uočiti traženo.

Zadatak 1. (Županijsko natjecanje iz matematike 2017., 4. razred - srednja škola - B varijanta)
U trokutu $\triangle ABC$ je $a = |BC| = \sqrt{21}$ cm, $b = |AC| = 4$ cm i $\alpha = \angle BAC = 120°$. Na stranici $\overline{BC}$ odredite točku D tako da obujam rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta $\triangle ABD$ oko stranice AB bude jednak obujmu rotacijskog tijela nastalog rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko stranice AC. U kojem omjeru točka D dijeli stranicu a?

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu:



Slika 3.7: Skica za *Zadatak 1.*, izvor: [10]

Neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ koja dijeli tu stranicu u omjeru $x : y$.
Rotacijom trokuta $\triangle ABD$ oko pravca AB nastaje tijelo sastavljeno od dva stošca koji imaju zajedničku osnovku polumjera r_1, a pripadne visine su duljina v_1 i $c - v_1$. Obujam tog tijela jednak je:

$$V_1 = \frac{1}{3}{r_1}^2\pi v_1 + \frac{1}{3}{r_1}^2\pi(c - v_1) = \frac{{r_1}^2\pi}{3}(v_1 + c - v_1) = \frac{{r_1}^2\pi c}{3}.$$

Rotacijom trokuta $\triangle ADC$ oko pravca AC nastaje tijelo sastavljeno od dva stošca koji imaju zajedničku osnovku polumjera r_2, a pripadne visine su duljina v_2 i $b - v_2$. Obujam tog tijela jednak je:

$$V_2 = \frac{1}{3}{r_2}^2\pi v_2 + \frac{1}{3}{r_2}^2\pi(b - v_2) = \frac{{r_2}^2\pi}{3}(v_2 + b - v_2) = \frac{{r_2}^2\pi b}{3}.$$

Prema uvjetima zadatka treba vrijediti $V_1 = V_2$, tj.

$$\frac{{r_1}^2 \pi c}{3} = \frac{{r_2}^2 \pi b}{3}$$

$${r_1}^2 c = {r_2}^2 b$$

$$\frac{{r_1}^2}{{r_2}^2} = \frac{c}{b} \text{ ili } \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Duljinu stranice c izračunat ćemo primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

$$\left(\sqrt{21}\right)^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 120^\circ$$

$$21 = 16 + c^2 + 4c$$

$$c^2 + 4c - 5 = 0$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = -5.$$

Dakle, duljina stranice $\overline{AB}$ je $c = 1$ cm.
Uvrštavanjem $b = 4$ i $c = 1$ u omjer dobivamo:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \frac{2}{1},$$

tj.

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{c}{b}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Omjer u kojem točka D dijeli stranicu a odredit ćemo tako da odredimo omjer $\frac{x}{y}$. To ćemo izračunati iz pravokutnih trokuta $\triangle DEB$ i $\triangle CFD$:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{r_1}{\sin\beta}}{\frac{r_2}{\sin\gamma}} = \frac{r_1 \sin\gamma}{r_2 \sin\beta}.$$

Primjenom poučka o sinusu i omjera $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1}$ dobivamo:

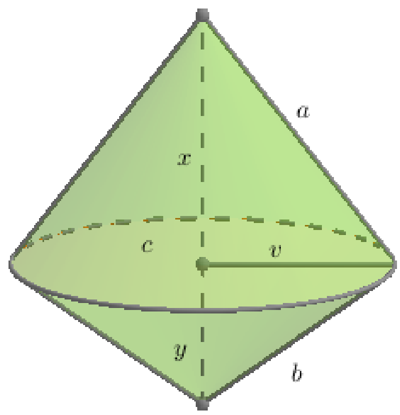
$$\frac{x}{y} = \frac{r_1 \sin\gamma}{r_2 \sin\beta} = \frac{r_1 \cdot c}{r_2 \cdot b} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru $1:2$.

Zadatak 1. traži od učenika da povežu gradivo prethodnog razreda, tj. trigonometriju pravokutnog trokuta i trigonometriju raznostraničnog trokuta pomoću čega izračunaju veličine potrebne za određivanje traženog omjera.

Zadatak 2. (Županijsko natjecanje iz matematike 2016., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
U pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta i trostruke duljine visine na hipotenuzu iznosi 12. Trokut rotira oko pravca na kojem leži hipotenuza tako da nastaje rotacijsko tijelo maksimalnog oplošja. Koliki je obujam nastalog tijela?

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu:



Slika 3.8: Skica za *Zadatak 2.*

Rotacijom pravokutnog trokuta oko pravca na kojem leži hipotenuza nastaje tijelo koje se sastoji od dva stošca sa zajedničkom osnovkom čiji je polumjer jednak duljini visine na hipotenuzu tog trokuta.
Neka je x visina većeg stošca, a y visina manjeg stošca.
Oplošje dobivenog tijela se sastoji od dva plašta kojima su izvodnice kateta a i b danog pravokutnog trokuta.
Imamo $O = v\pi a + v\pi b = v\pi\,(a+b)$.
Iz uvjeta zadatka imamo $a + b + 3v = 12$, iz čega slijedi da je $a + b = 12 - 3v$.

Uvrštavanjem u formulu za oplošje dobivamo

$$O = v\pi\,(12 - 3v) = 12v\pi - 3v^2\pi = 3\pi\left(4v - v^2\right).$$

Uočimo da oplošje ovisi o duljini visine na hipotenuzu te da će oplošje biti maksimalno za onaj v za koji funkcija $f(v) = -v^2 + 4v$ postiže maksimum.
Funkcija f postiže maksimum u apscisi tjemena, tj. za $v = -\dfrac{4}{-2} = 2$.
Uvrštavanjem $v = 2$ u $a + b = 12 - 3v$ dobivamo da je $a + b = 6$.
Površinu trokuta $\triangle ABC$ izrazimo na dva načina:

$$P\,(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v}{2},$$

iz čega slijedi

$$a \cdot b = c \cdot v = 2c.$$

Kvadriranjem jednakosti $a+b = 6$ i primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle ABC$ dobivamo

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 36\\ a^2 + 2ab + b^2 &= 36\\ c^2 + 2 \cdot 2c &= 36\\ c^2 + 4c - 36 &= 0.\end{aligned}$$

Duljina stranice c je pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe, tj. $c = -2 + 2\sqrt{10}$.
Traženi obujam je zbroj obujmova dvaju stožaca koji imaju zajedničku osnovku i visine x i y.
Imamo

$$V = \frac{1}{3}v^2\pi x + \frac{1}{3}v^2\pi y = \frac{1}{3}v^2\pi\,(x+y) = \frac{1}{3}v^2\pi c.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $v = 2$ i $c = -2 + 2\sqrt{10}$ dobivamo

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi\left(-2 + 2\sqrt{10}\right) = \frac{8}{3}\pi\left(-1 + \sqrt{10}\right).$$

Dakle, traženi obujam jednak je $\dfrac{8}{3}\pi\left(-1 + \sqrt{10}\right)$ kubičnih jedinica.

Bogatstvo *Zadatka 2.* je u tome što je prikladan za učenike trećeg, ali i za učenike četvrtog razreda srednje škole. Učenici trećeg razreda srednje škole ovaj će zadatak riješiti tako da ekstreme kvadratne funkcije traže u njezinu tjemenu, dok učenici četvrtog razreda srednje škole mogu ekstreme funkcije odrediti pomoću derivacije funkcije.

Zadatak 3. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2014., 4. razred - srednja škola - B varijanta)
Duljine stranica trokuta su uzastopni prirodni brojevi (u centimetrima). Najveći kut trokuta je dvostruko veći od najmanjeg. Odredite obujam tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko najdulje stranice.

Rješenje: Neka su duljine stranica trokuta $\triangle ABC$ jednake $|BC| = a = n$, $|AC| = b = n + 1$ i $|AB| = c = n + 2$.
Budući da je a najkraća stranica, nasuprot nje je najmanji kut, kut α. Nasuprot najdulje stranice c je najveći kut γ.
Iz uvjeta zadatka imamo $\gamma = 2\alpha$.
Primjenom poučka o sinusu na trokut $\triangle ABC$ dobivamo:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{n+2}{\sin\gamma}$$

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{n+2}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{n+2}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

iz čega slijedi

$$\cos\alpha = \frac{n+2}{2n}.$$

Iz poučka o kosinusu i uvrštavanjem prethodno izračunatog slijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

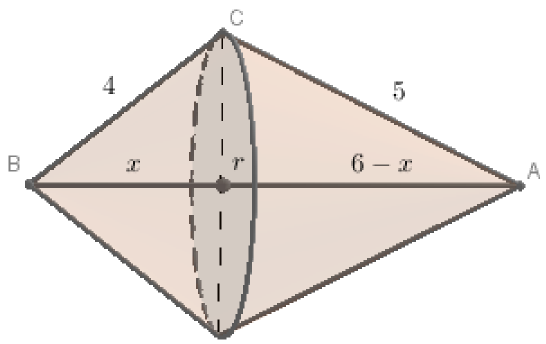
$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cos\alpha$$

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\frac{n+2}{2n}$$

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - (n+1)(n+2)\frac{n+2}{n}.$$

Množenjem i sređivanjem gornje jednakosti dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 3n - 4 = 0$, čija su rješenja $n_1 = 4$, $n_2 = -1$, a budući da n označava duljinu stranice a,

jedina mogućnost je $n = 4$.
Tada su stranice trokuta jednake $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
Kako bismo odredili koje tijelo nastaje rotacijom trokuta oko najdulje stranice, nacrtajmo skicu:



Slika 3.9: Skica za *Zadatak 3.*

Dakle, rotacijom trokuta $\triangle ABC$ oko stranice c nastaje tijelo koje se sastoji od dva stošca sa zajedničkom osnovkom čiji je polumjer jednak duljini visine na stranicu c. Visina manjeg stošca je duljine x pa je tada duljina visine većeg stošca jednaka $c-x$, tj. $6-x$.
Traženi obujam jednak je:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi x + \frac{1}{3}r^2\pi(6-x)$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi(x+6-x)$$

$$V = 2r^2\pi.$$

Duljinu polumjera osnovke r ćemo izračunati primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta:

$$\sin\alpha = \frac{r}{b} = \frac{r}{5}.$$

Budući da je

$$\cos\alpha = \frac{n+2}{2n} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

slijedi da je

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Dakle, $r = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.
Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u formulu za obujam dobivamo:

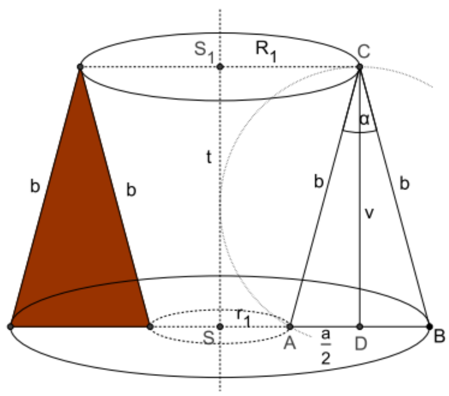
$$V = 2r^2\pi = 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \pi = \frac{175\pi}{8}.$$

Dakle, traženi obujam rotacijskog tijela jednak je $\frac{175\pi}{8}$ cm^3.

Kod *Zadatka 3.* učenici trebaju na pravilan način označiti duljine stranica trokuta koje su zadane kao tri uzastopna prirodna broja te korištenjem činjenice o odnosu kutova i stranica trokuta te kosinusovog poučka odrediti duljine stranica trokuta pomoću čega dalje računaju tražene veličine.

Zadatak 4. (Državno natjecanje iz matematike 2012., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
Jednakokračnom trokutu kojemu je duljina kraka $b = 10$ cm, a mjera kuta između krakova $\alpha = 30°$, opisana je kružnica. Neka je t tangenta te kružnice koja je paralelna s visinom na osnovicu. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom danog trokuta oko tangente t.

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu:



Slika 3.10: Skica za *Zadatak 4.*, izvor: [10]

Rotacijsko tijelo čiji obujam tražimo sastavljeno je od krnjeg stošca od kojeg je oduzeti manji krnji stožac. Uočimo da su visine oba stošca jednake.
Neka je osnovica jednakokračnog trokuta duljine a.
Neka je V_1 obujam većeg krnjeg stošca čije osnovke imaju polumjere R i $R + \frac{a}{2}$, a visina je duljine v.
Imamo

$$V_1 = \frac{v\pi}{3}\left(R^2 + R\left(R + \frac{a}{2}\right) + \left(R + \frac{a}{2}\right)^2\right).$$

Neka je V_2 obujam manjeg krnjeg stošca čije osnovke imaju polumjere R i $R - \frac{a}{2}$, a visina je duljine v.
Imamo

$$V_2 = \frac{v\pi}{3}\left(R^2 + R\left(R - \frac{a}{2}\right) + \left(R - \frac{a}{2}\right)^2\right.$$

Tada je traženi obujam V rotacijskog tijela jednak:

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{v\pi}{3}\left(R^2 + R\left(R + \frac{a}{2}\right) + \left(R + \frac{a}{2}\right)^2\right) - \frac{v\pi}{3}\left(R^2 + R\left(R - \frac{a}{2}\right) + \left(R - \frac{a}{2}\right)^2\right)$$

$$V = \frac{v\pi}{3}\left[R^2 + R\left(R - \frac{a}{2}\right) + \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 - R^2 - R\left(R - \frac{a}{2}\right) - \left(R - \frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$V = avR\pi.$$

Duljinu osnovice a i visine v izračunat ćemo primjernom trigonometrije pravokutnog trokuta $\triangle ADC$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b},$$

iz čega slijedi

$$a = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2b,$$

tj.

$$a = \sin 15^\circ \cdot 2 \cdot 10 = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}.$$

S druge strane,

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{b},$$

iz čega slijedi

$$v = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot b,$$

tj.

$$v = \cos 15^\circ \cdot 10 = \frac{5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{2}.$$

Polumjer opisane kružnice R odredit ćemo tako da površinu trokuta $\triangle ABC$ izrazimo na dva različita načina

$$P(\triangle ABC) = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot b \cdot b}{4R},$$

iz čega dobivamo

$$R = \frac{b^2}{2v},$$

tj.

$$R = \frac{10^2}{2 \cdot \frac{5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}.$$

Uvrštavanjem izračunatih veličina u formulu za obujam dobivamo:

$$V = \left(5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}\right) \cdot \frac{5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \left(5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}\right) \cdot \pi$$

$$V = 50 \cdot \left(5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}\right) \cdot \pi$$

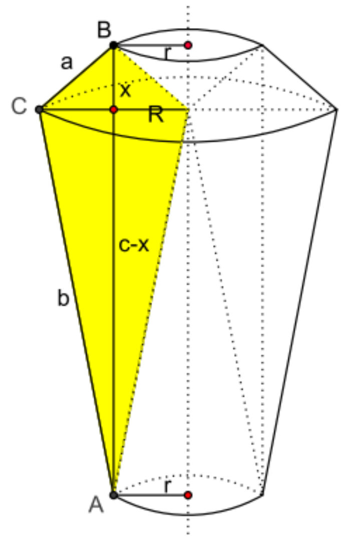
$$V = 250\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\pi.$$

Dakle, traženi obujam dobivenog rotacijskog tijela jednak je $250\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\pi \text{ cm}^3$.

Zadatak 4. povezuje gradivo prvog, trećeg i četvrtog razreda srednje škole. Kako bi odredili duljine osnovice i visine, učenici trebaju primijeniti trigonometriju pravokutnog trokuta (što je gradivo trećeg razreda srednje škole). Kod računanja polumjera opisane kružnice, potrebno je povezati dvije različite formule za površinu trokuta od čega je jedna formula izražena pomoću polumjera trokutu opisane kružnice (što je gradivo prvog razreda srednje škole).

Zadatak 5. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2011., 4. razred - srednja škola - B varijanta)
Deltoid rotira oko pravca koji prolazi jednim njegovim vrhom, a paralelan je osi simetrije deltoida. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom ako su duljine stranica deltoida $a = 2$ cm, $b = 8$ cm, a kut među njima $\alpha = 120^\circ$.

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu:



Slika 3.11: Skica za *Zadatak 5.*, izvor: [10]

Tijelo dobiveno rotacijom deltoida sastavljeno je od dva krnja stošca kojima su oduzeta dva stošca. Oba krnja stošca imaju polumjere manje osnovke duljine r, a polumjer veće (zajedničke) osnovke je duljine R.
Polumjer r jednak je polovini manje dijagonale deltoida (što je ujedno i visina na stranicu c trokuta $\triangle ABC$), a $R = 2r$.
Označimo s V_{K1} obujam manjeg krnjeg stošca čija je visina duljine x.
Označimo s V_{K2} obujam većeg krnjeg stošca čija je visina duljine $c - x$.
Nadalje, neka je V_1 obujam stošca koji je oduzet manjem krnjem stošcu, a V_2 obujam stošca koji je oduzet većem krnjem stošcu. Njihove su visine redom x i $c - x$.
Tada je traženi obujam tijela jednak

$$V = V_{K1} + V_{K2} - V_1 - V_2.$$

Prema tome je

$$V = \frac{\pi x}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) + \frac{(c-x)\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) - \frac{r^2 \pi x}{3} - \frac{r^2 \pi (c-x)}{3}$$

$$V = \frac{c\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) - \frac{c\pi}{3} r^2$$

$$V = \frac{c\pi}{3}\left(R^2 + Rr\right).$$

Uvrštavanjem $R = 2r$ u formulu za obujam rotacijskog tijela dobivamo

$$V = \frac{c\pi}{3}\left(4r^2 + 2r^2\right)$$

$$V = 2c\pi r^2.$$

Duljinu c ćemo izračunati primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle ABC$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$c^2 = 2^2 + 8^2 - 2\cdot 2\cdot 8\cos 120^\circ = 84,$$

tj.

$$c = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

Polumjer osnovke r ćemo izračunati tako da površinu trokuta $\triangle ABC$ izrazimo na dva različita načina

$$P(\triangle ABC) = \frac{r\cdot c}{2} = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin 120^\circ,$$

tj.

$$r = \frac{ab\sin 120^\circ}{c} = \frac{2\cdot 8\cdot\sin 120^\circ}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti u formulu za obujam dobivamo:

$$V = 2\cdot 2\sqrt{21}\cdot\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2\cdot\pi = \frac{64\sqrt{21}\pi}{7}.$$

Dakle, traženi obujam rotacijskog tijela jednak je $\frac{64\sqrt{21}\pi}{7}$ cm^3.

U *Zadatku 5.* učenicima bi vjerojatno bilo najteže odrediti dobiveno rotacijsko tijelo, što je zapravo ključni korak za daljnji račun, budući da je ono sastavljeno od dva krnja stošca kojima nedostaju dva stošca. Veličine potrebne za određivanje obujma slijede iz primjene trigonometrije raznostraničnog trokuta i formula za površinu trokuta, gdje je potrebno površinu trokuta izraziti preko trigonometrijskih veličina.

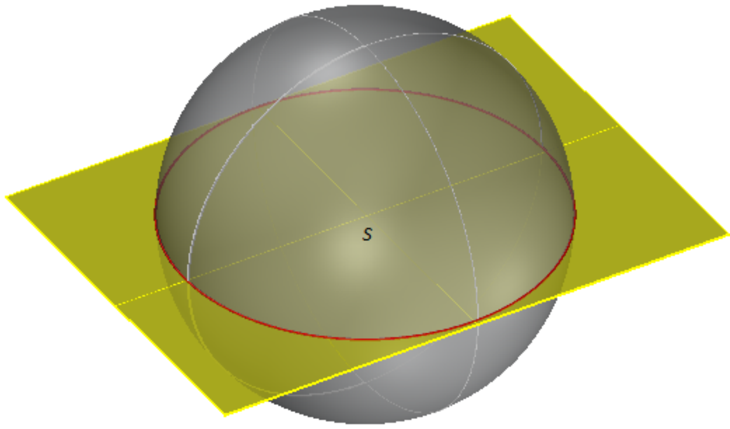
Poglavlje 4

Kugla i sfera

4.1 Kugla i sfera u školskoj matematici

Osnovna škola

Učenici su od malih nogu upoznati s pojmom kugle jer različiti predmeti u prirodi koji su im bliski imaju oblik kugle. Primjerice, lopta, špekula, naranča, sladoled.
U drugom polugodištu osmog razreda, učenici se detaljnije upoznaju s kuglom i sferom te njihovim elementima. Prema Hrvatskom nacionalnom obrazovnom standardu (HNOS-u) od učenika se traži da skiciraju sferu i kuglu, uoče glavne kružnice te izračunaju oplošje i obujam kugle.
S obzirom da su učenici već upoznati s geometrijom ravnine te definicijama kružnice i kruga, na analogan način definiraju se i sfera i kugla, ali se iz ravnine prelazi u prostor. Na takav način definirane su sfera i kugla u [15]:
Sfera je skup svih točaka prostora koje su od jedne čvrste točke S tog prostora jednako udaljene. Točka S naziva se središte sfere, a udaljenost od točke sfere do S zovemo polumjer sfere i označavamo ga s R. Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost do čvrste točke S tog prostora manja od R ili jednaka R. Dakle, možemo reći da je sfera rub kugle.
Ako bi kuglu polumjera R presjekli ravninom koja prolazi središtem kugle, kao presjek bi dobili krug polumjera R. Takav presjek zove se glavni presjek kugle, a pripadna kružnica glavna kružnica kugle.



Slika 4.1: Glavna kružnica kugle

Osim glavnih presjeka kugle, postoje i drugi. Općenito, kad neka ravnina siječe kuglu onda je presjek krug čiji je polumjer jednak polumjeru kugle ili manji od njega. U osnovnoj školi se formule za oplošje i obujam kugle ne izvode već su samo navedene. Međutim, kada je u pitanju oplošje kugle, učenici do formule mogu doći kroz praktičnu vježbu. Učenici bi vjerojatno krenuli na analogan način određivati oplošje kugle kao što je to bio slučaj kod valjka i stošca gdje su najprije odredili mrežu valjka odnosno stošca te na temelju mreže došli do formule za oplošje. Ako bi učenici krenuli rezati sferu duž, na primjer glavne kružnice, uočili bi da ne dobivaju ravninski lik. Tako se prirodno javlja potreba da se kod kugle oplošje određuje na drugačiji način.
Učenici dobivaju naranču koja predstavlja kuglu. Postavlja se pitanje *Kolika je površina kore kojom je prekrivena naranča?* Učenici prema uputama najprije prepolove naranču duž glavne kružnice te na papiru nacrtaju četiri ili više kruga čiji je polumjer jednak polumjeru glavnog kruga. Budući da je oplošje zbroj površina ploha koje omeđuju tijelo, učenici će otkinuti koru naranče na što manje dijelove te popunjavati krugove koje su nacrtali na papiru. Na kraju će uočiti da su popunili točno četiri kruga te da je oplošje kugle zbroj površina krugova koje su popunili. Budući da je površina kruga čiji je polumjer R dana formulom $P = R^2\pi$, slijedi da je oplošje kugle polumjera R jednako

$$O = 4R^2\pi.$$

Formula za obujam kugle polumjera R je

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

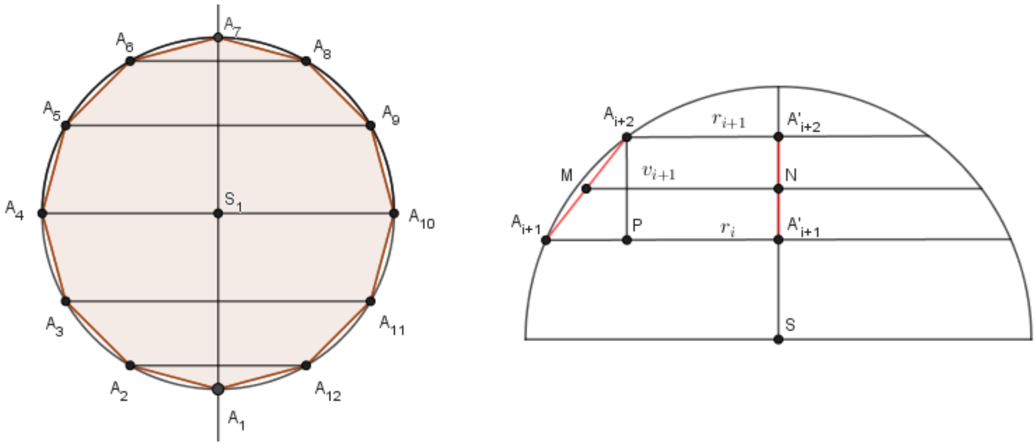
Srednja škola

U srednjoj školi se kugla i sfera obrađuju na samom kraju drugog razreda. Kao što je opisano u prethodnim poglavljima, tj. kod valjka i stošca, kugla i sfera se uvode na različite načine, ovisno o kojoj vrsti škole je riječ. U trogodišnjim strukovnim školama se formule za oplošje i obujam kugle ne dokazuju već su samo navedene, a zadaci su vrlo jednostavni i podrazumijevaju direktnu upotrebu formula. U gimnazijama i tehničkim školama se formule za oplošje i obujam kugle dokazuju, te se spominju i dijelovi kugle.
U većini srednjoškolskih udžbenika se kugla i sfera definiraju analogno kao i u osnovnoj školi. U udžbeniku [14] se kugla i sfera definiraju i kao rotacijska tijela:
Rotiramo li krug polumjera R oko bilo kojeg pravca koji prolazi središtem S kruga, dobivamo tijelo koje nazivamo kugla polumjera R i središta S. Pri toj rotaciji kružnica polumjera R opisuje plohu koju nazivamo sfera.
Do formule za obujam kugle dolazimo primjerom Cavalierijevog principa na dva tijela, polukuglu polumjera R i valjak iz kojeg je uklonjen stožac. Ovdje ćemo taj dokaz preskočiti jer je on raspisan u dokazu Propozicije 1.3.3. Dakle, obujam kugle polumjera R jednak je

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

Kao što je već opisano ranije, pri određivanju formule za oplošje kugle najveći problem stvara činjenica da se sfera ne može položiti u ravninu. Stoga se oplošje kugle izračuna tako da se izračuna oplošje tijela koje dovoljno dobro aproksimira kuglu, a čije oplošje znamo izračunati.

Prema [14] imamo sljedeći izvod formule za oplošje kugle.
Kao što je već spomenuto, sfera nastaje rotacijom kružnice polumjera R oko promjera. Upišimo u kružnicu $2n$-terokut. Za veće n mnogokut bolje aproksimira kružnicu. Rotacijom mnogokuta oko osi A_1A_{n+1} nastaje tijelo čije oplošje aproksimira oplošje kugle. Dobiveno rotacijsko tijelo sastoji se od dva stošca i $n-2$ krnja stošca. Duljina izvodnice stožaca i krnjih stožaca jednaka je a, pri čemu je a duljina stranice mnogokuta. Zbroj površina plašteva svih slojeva čini oplošje upisanog rotacijskog tijela.
Formula za oplošje plašta krnjeg stošca jednaka je $P = s\pi(R+r)$ gdje su R i r polumjeri osnovki, a s je duljina izvodnice. Ovu formulu možemo primijeniti i na stožac jer je tada jedan od polumjera jednak nuli.
Proučimo detaljnije sloj nastao rotacijom dužine $A_{i+1}A_{i+2}$. Polumjeri osnovki su r_i i r_{i+1}, a visina dobivenog krnjeg stošca je v_{i+1}. Neka je P nožište visine v_{i+1} iz vrha A_{i+2} na stranicu $A_{i+1}A'_{i+1}$.
Četverokut $A_{i+1}A'_{i+1}A'_{i+2}A_{i+2}$ je trapez. Njegova srednjica je dužina $\overline{MN}$ čija je



Slika 4.2: Pomoćna skica

duljina $\frac{r_i + r_{i+1}}{2}$. Točka M je polovište stranice pravilnog mnogokuta pa je $\overline{MS}$ polumjer upisane kružnice tom mnogokutu. Označimo ga s r.
Trokuti $\triangle A_{i+1}PA_{i+2}$ i $\triangle SNM$ su slični jer su pravokutni, a šiljasti su im kutovi sukladni jer imaju okomite krake. Prema tome vrijedi

$$|MN| : |MS| = |A_{i+2}P| : |A_{i+1}A_{i+2}|,$$

tj.

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{2} : r = v_{i+1} : a,$$

iz čega slijedi da je

$$r_i + r_{i+1} = \frac{2rv_{i+1}}{a}.$$

Oplošje plašta ovog sloja je

$$P_{i+1} = a\pi(r_i + r_{i+1}) = a\pi \cdot \frac{2rv_{i+1}}{a} = 2rv_{i+1}\pi,$$

a oplošje cijelog rotacijskog tijela jednako je $O = P_1 + P_2 + ... + P_n$,
tj.

$$O = 2rv_1\pi + 2rv_2\pi + ... + 2rv_n\pi = 2r\pi(v_1 + v_2 + ... + v_n) = 2r\pi \cdot 2R = 4rR\pi.$$

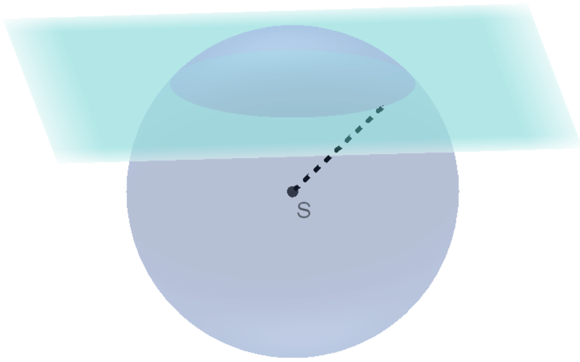
Za vrlo velik n rotacijsko tijelo sve bolje aproksimira kuglu i tada je $r \approx R$ pa zaključujemo da je oplošje kugle jednako

$$O = 4R^2\pi.$$

Na kraju ćemo definirati dijelove kugle jer se oni spominju u nekih srednjim školama te navesti formule za njihove obujmove. Dijelovi kugle su kuglin odsječak, kuglin isječak i kuglin sloj.
Ravnina koja siječe kuglu dijeli kuglu na dva kuglina odsječka, a istovremeno dijeli sferu na dvije kugline kapice.
Formula za obujam kuglinog odsječka glasi

$$V = \frac{1}{3}\pi v^2(3R - v),$$

gdje su v visina kuglina odsječka, a R polumjer kugle.

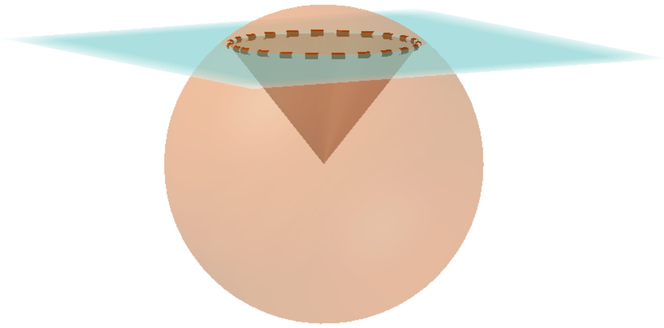


Slika 4.3: Kuglin odsječak, izvor:[3]

Kuglin isječak je dio kugle omeđen kuglinom kapicom i plaštom stošca koji pripada toj kapici i ima vrh u središtu kugle.
Formula za obujam kuglinog isječka glasi

$$V = \frac{2}{3}R^2\pi v,$$

gdje su v visina kuglina odsječka, a R polumjer kugle.

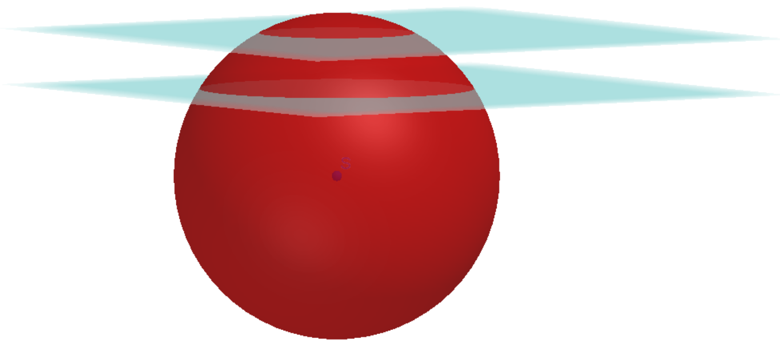


Slika 4.4: Kuglin isječak, izvor:[3]

Kuglin sloj je dio kugle koji odsijecaju dvije usporedne ravnine. Odgovarajući dio sfere naziva se kuglin pojas.
Formula za obujam kuglinog sloja glasi

$$V = \frac{1}{6}\pi v(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2),$$

gdje su v visina kuglina sloja, a r_1 i r_2 polumjeri presječnih krugova.

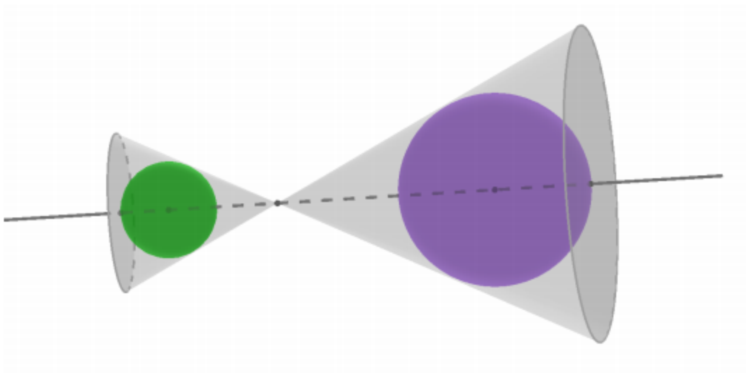


Slika 4.5: Kuglin sloj, izvor:[3]

4.2 Zadaci s natjecanja

Na natjecanjima iz matematike posljednjih 10 godina, kugla se javlja u kombiniranim zadacima s ostalim oblim geometrijskim tijelima u situacijama gdje je kugla upisana ili opisana nekom oblom geometrijskom tijelu.

Zadatak 1. (Državno natjecanje iz matematike 2018., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
Dvije kugle polumjera 3 cm i 5 cm upisane su u dva stošca kao što je prikazano na slici. Stošci imaju jednake vršne kutove i zajedničku os koja je okomita na osnovke stožaca te prolazi njihovim središtem i zajedničkim vrhom. Udaljenost između osnovki je 40 cm. Ako svaka kugla dodiruje plašt i osnovku pripadnog stošca, izračunajte ukupni obujam stožaca.

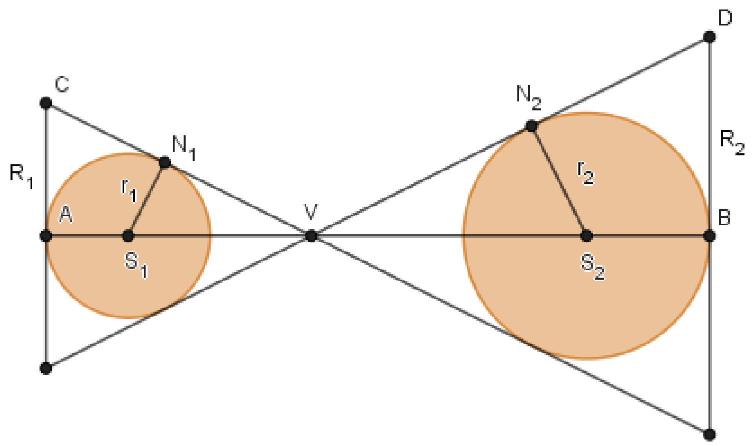


Slika 4.6: Slika za *Zadatak 1.*, izvor: [10]

Rješenje: Nacrtajmo najprije skicu i uvedimo oznake:
Neka je S_1 središte manje kugle čiji je polumjer $r_1 = |S_1N_1| = 3$ cm te neka je R_1 polumjer osnovke manjeg stošca čije je središte A, a duljina visine jednaka je duljini dužine $\overline{AV}$. Neka je S_2 središte veće kugle čiji je polumjer $r_2 = |S_2N_2| = 5$ cm te neka je R_2 polumjer osnovke većeg stošca čije je središte B, a duljina visine jednaka je duljini dužine $\overline{BV}$. Neka je V_1 obujam manjeg stošca, a V_2 obujam većeg stošca.
Tada je

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot {R_1}^2 \cdot \pi \cdot |AV|$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot {R_2}^2 \cdot \pi \cdot |BV|.$$



Slika 4.7: Skica za *Zadatak 1.*

Udaljenost osnovki stožaca jednaka je udaljenosti središta njihovih osnovki, tj. jednaka je duljini dužine $\overline{AB}$. Tada je udaljenost središta kugli jednaka

$$|S_1S_2| = |AB| - |AS_1| - |BS_2| = |AB| - r_1 - r_2 = 40 - 3 - 5 = 32.$$

Iz činjenice da su vršni kutovi stožaca jednaki i $\angle S_1N_1V = \angle S_2N_2V = 90°$ slijedi da su trokuti $\triangle S_1N_1V$ i $\triangle S_2N_2V$ slični te vrijedi

$$\frac{|S_1V|}{r_1} = \frac{|S_2V|}{r_2}$$
$$\frac{|S_1V|}{3} = \frac{|S_2V|}{5}$$
$$|S_1V| = \frac{3}{5}\,|S_2V|\,,$$

pa je

$$32 = |S_1S_2| = |S_1V| + |S_2V| = \frac{3}{5}\,|S_2V| + |S_2V| = \frac{8}{5}\,|S_2V|\,,$$

iz čega dobivamo da je $|S_1V| = 12$ cm i $|S_2V| = 20$ cm. Trokuti $\triangle S_1N_1V$ i $\triangle CAV$ su također slični, imaju zajednički kut $\angle AVC$ i $\angle S_1N_1V = \angle CAV = 90°$.
Vrijedi:

$$\frac{|S_1N_1|}{|N_1V|} = \frac{|CA|}{|AV|}$$
$$\frac{r_1}{|N_1V|} = \frac{R_1}{r_1 + |S_1V|}.$$

Duljinu dužine $\overline{N_1V}$ možemo izračunati primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle S_1VN_1$:

$$|N_1V| = \sqrt{|S_1V|^2 - |S_1N_1|^2} = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}.$$

Imamo

$$\frac{3}{3\sqrt{15}} = \frac{R_1}{15}$$

iz čega slijedi $R_1 = \sqrt{15}$ cm. Analogno, iz sličnosti trokuta $\triangle S_2N_2V$ i $\triangle VBD$ slijedi da je

$$\frac{|S_2N_2|}{|N_2V|} = \frac{|BD|}{VB}$$

$$\frac{r_2}{|N_2V|} = \frac{R_2}{r_2 + |S_2V|}.$$

Duljinu dužine $\overline{N_2V}$ izračunamo primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle VS_2N_2$:

$$|N_2V| = \sqrt{|S_2V|^2 - |N_2S_2|^2} = \sqrt{20^2 - 5^2} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}.$$

Imamo

$$\frac{5}{5\sqrt{15}} = \frac{R_2}{25}$$

iz čega slijedi $R_2 = \dfrac{5\sqrt{15}}{3}$ cm.
Ukupni obujam V stožaca jednak je

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{1}{3}{R_1}^2\pi|AV| + \frac{1}{3}{R_2}^2\pi|BV|$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\sqrt{15}^2 \cdot 15 + \left(\frac{5\sqrt{15}}{3}\right)^2 \cdot 25\right]$$

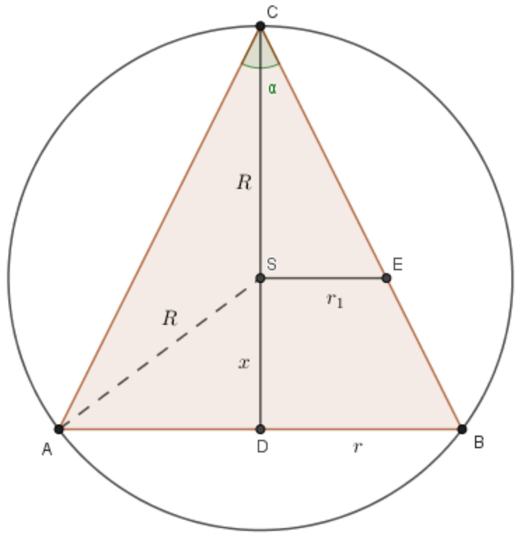
$$V = \frac{3800\pi}{9}.$$

Dakle, traženi obujam tijela iznosi $\dfrac{3800\pi}{9}$ cm^3.

Budući da su u *Zadatku 1.* zadani vršni kutovi stožaca, to će vjerojatno učenike potaknuti da krenu u dobrome smjeru i na temelju sukladnih kutova dođu do sličnih trokuta iz čijih omjera će dalje računati potrebne veličine za provođenje daljnjeg računa.

Zadatak 2. (Državno natjecanje iz matematike 2011., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
Uspravnom kružnom stošcu opisana je kugla. Ravnina koja sadrži središte te kugle, a paralelna je s osnovkom stošca dijeli stožac na dva dijela jednakih obujmova. Odredite kosinus kuta pri vrhu osnog presjeka stošca.

Rješenje: Osni presjek uspravnog stošca je jednakokračni trokut. Nacrtajmo skicu osnog presjeka stošca te uvedimo oznake:



Slika 4.8: Skica za *Zadatak 2.*

Neka je r polumjer osnovke početnog stošca, a $x+R$ njegova visina te α kut pri vrhu osnog presjeka stošca. Ravnina koja sadrži središte kugle S i paralelna je osnovki stošca dijeli početni stožac na manji stožac čija je visina R, a polumjer osnovke r_1 te na krnji stožac. Iz uvjeta zadatka treba vrijediti da je obujam početnog stošca jednak dvostrukom obujmu manjeg stošca. Neka je V obujam početnog stošca, a V'

obujam manjeg stošca. Vrijedi:

$$V = 2V'$$

$$\frac{1}{3}r^2\pi\,(x+R) = 2\cdot\frac{1}{3}{r_1}^2\pi R$$

$$r^2\,(x+R) = 2{r_1}^2R.$$

Trokuti $\triangle DCB$ i $\triangle SCE$ su slični jer je $\angle DCB = \angle SCE = \dfrac{\alpha}{2}$ i $\angle CDE = \angle CSE = 90^\circ$ pa vrijedi

$$\frac{r_1}{R} = \frac{r}{R+x}$$

iz čega slijedi

$$r_1 = \frac{r}{R+x}\cdot R.$$

Uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo:

$$r^2(x+R) = 2\cdot\left(\frac{rR}{r+x}\right)^2\cdot R$$

$$(x+R)^3 = 2R^3$$

$$x = R\left(\sqrt[3]{2}-1\right).$$

Promotrimo jednakokračni trokut $\triangle ASC$. Vrijedi:

$$|CS| = |SA| = R$$

$$\angle SCA = \angle SAC = \frac{\alpha}{2}.$$

Tada je

$$\angle CSA = 180^\circ - \alpha$$

pa slijedi da je

$$\angle ASD = \alpha.$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokut $\triangle ADS$ dobivamo:

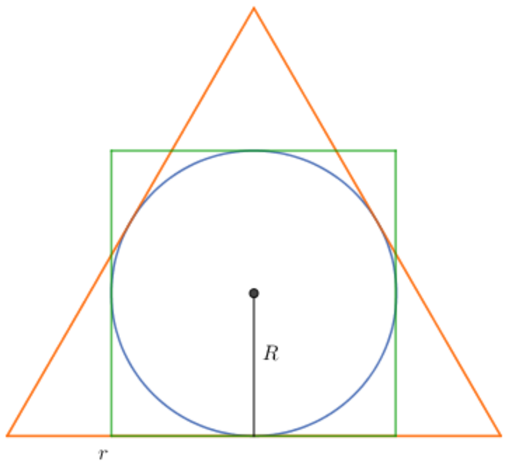
$$\cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{R\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{R} = \sqrt[3]{2}-1.$$

Dakle, kosinus kuta pri vrhu trokuta iznosi $\sqrt[3]{2}-1$.

U *Zadatku 2.* učenici najprije trebaju znati skicirati osni presjek uspravnog stošca te zatim uočiti slične trokute iz čijih omjera mogu izračunati veličine potrebne za daljnji račun. Bogatstvo zadatka je u tome što povezuje gradivo geometrije iz prvog razreda (sličnost trokuta) i trećeg razreda srednje škole (trigonometrija pravokutnog trokuta).

Zadatak 3. (Županijsko natjecanje iz matematike 2012., 3. razred - srednja škola - B varijanta)
Oko iste kugle opisani su jednakostraničan valjak i jednakostraničan stožac. Pokažite da je omjer oplošja ovih triju tijela jednak omjeru njihovih obujmova.

Rješenje: Valjak je jednakostraničan ako je duljina njegove izvodnice jednaka dvostrukoj duljini polumjera njegove osnovke. Osni presjek jednakostraničnog valjka je kvadrat.
Stožac je jednakostraničan ako je duljina njegove izvodnice jednaka dvostrukoj duljini polumjera osnovke stošca. Osni presjek jednakostraničnog stošca je jednakostraničan trokut.
Skicirajmo osni (karakteristični) presjek zadanih tijela:



Slika 4.9: Skica za *Zadatak 3.*

Neka je R polumjer kugle. Tada su oplošje O_K i obujam V_K kugle jednaki:

$$O_K = 4R^2\pi,$$

$$V_K = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

Uočimo da je polumjer osnovke valjka također duljine R, a budući da je riječ o jednakostraničnom valjku, tada je duljina njegove visine jednaka $v = 2R$ pa su oplošje O_V i obujam V_V valjka jednaki:

$$O_V = 2R\pi(R + 2R) = 6R^2\pi,$$

$$V_V = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi.$$

Neka je r polumjer osnovke stošca. Tada je njegova visina jednaka $v = r\sqrt{3}$ (slijedi iz primjene Pitagorinog poučka na pravokutni trokut s katetama duljina r i $2r$). Budući da je R polumjer kružnice upisane u jednakostraničan trokut duljine stranice $2r$ slijedi da je $r = R\sqrt{3}$ što dobivamo izjednačavanjem formula za površinu trokuta, tj.

$$\frac{2r \cdot r\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{2r \cdot R}{2}.$$

Tada su oplošje O_S i obujam V_S stošca jednaki:

$$O_S = R\sqrt{3}\pi \left(R\sqrt{3} + 2R\sqrt{3}\right) = 9R^2\pi,$$

$$V_S = \frac{1}{3}\left(r\sqrt{3}\right)^2 \pi \cdot R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3R^3\pi.$$

Prema tome je

$$O_K : O_V : O_S = 4R^2\pi : 6R^2\pi : 9R^2\pi = 4 : 6 : 9,$$

$$V_K : V_V : V_S = \frac{4}{3}R^3\pi : 2R^3\pi : 3R^3\pi = \frac{4}{3} : 2 : 3 = 4 : 6 : 9.$$

Dakle, $O_K : O_V : O_S = V_K : V_V : V_S$.

Kao posljednji zadatak, odabran je *Zadatak 3.* jer on povezuje sva obla geometrijska tijela spomenuta u ovom radu. U ovom zadatku učenici trebaju najprije razmisliti što je osni presjek jednakostraničnog valjka i jednakostraničnog stošca te korištenjem znanja iz planimetrije međusobno povezati nepoznate veličine.

Bibliografija

[1] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Stereometrija*, nastavni materijal za kolegij Elementarna geometrija, Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2007., dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/7.stereometrija.pdf (svibanj, 2019.)

[2] K. Brleković, A. Brmbota, S. Loparić, M. Njerš, *Obujam tijela. Cavalierijev princip*, dostupno na https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/10731_Obujam_tijela._Cavalierijev_princip.html (svibanj, 2019.)

[3] K. Brleković, A. Brmbota, S. Loparić, M. Njerš, *Rotacijska tijela*, dostupno na https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/html/1775_Rotacijska_tijela.html (rujan, 2019.)

[4] F. M. Bruckler, *Povijest matematike*, nastavni materijal za kolegij Povijest matematike, Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2017., dostupno na http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat11-2017.pdf (svibanj, 2019.)

[5] F. M. Bruckler, *Povijest matematike I*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, 2014., dostupno na http://www.mathos.unios.hr/images/uploads/714.pdf (lipanj, 2019.)

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2 udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije 2. dio*, Element, Zagreb, 2008.

[7] G. I. Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.

[8] S. Gorjanec, E. Jurkin, I. Kodrnja, H. Koncul, *Deskriptivna geometrija*, Sveučilišni web-udžbenik, 2018., dostupno na http://www.grad.hr/geometrija/udzbenik (svibanj, 2019.)

[9] I. Gusić, J. Gusić, I. Mrkonjić *Matematika 8 udžbenik za 8. razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2001.

[10] A. Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, dostupno na `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm` (lipanj, 2019.)

[11] I. Marinović, *Zar i broj u stihu otpjevati je moguće?*, dostupno na `https://mis.element.hr/fajli/549/07-06.pdf` (rujan, 2019.)

[12] T. Nemeth, G. Stajčić, *Matematika 8 udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole 2. polugodište*, Profil, Zagreb, 2007.

[13] D. Palman, *Stereometrija*, Element, Zagreb, 2005.

[14] S. Varošanec, *Matematika 2 udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola*, Element, Zagreb, 2008.

[15] S. Varošanec, *Matematika 8 udžbenik sa zbirkom zadataka za 8. razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2001.

Sažetak

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje govori o povijesti oblih geometrijskih tijela te kako se ona uvode u školsku matematiku. Također je objašnjen Cavalierijev princip računanja obujma te je spomenuta kratka povijest broja π s obzirom da se on pojavljuje u formulama za oplošje i obujam oblih geometrijskih tijela. U svakom od sljedećih poglavlja opisano je jedno oblo geometrijsko tijelo te kako je ono uvedeno u osnovnu, odnosno srednju školu. Tako je drugo poglavlje posvećeno valjku, u trećem poglavlju je riječ o stošcu, dok se u posljednjem poglavlju govori o kugli i sferi. Osim definicija pojedinih geometrijskih tijela, izvedene su osnovne formule za oplošje i obujam te su objašnjeni zadaci koji su se javili na školskom, županijskom ili državnom natjecanju posljednjih 10 godina.

Summary

This thesis is divided into four chapters. The first chapter is devoted to the history of oblique geometric solids and how they are introduced into school. There was also explained Cavalier's Principle for Volume and the short history of the number π because it appears in the surface area and the volume of oblique geometric solids.
Each of the following chapters describes one oblique geometric solid and how it is introduced into primary and secondary school. The second chapter is dedicated to the cylinder, in the third chapter it is a cone, while in the last chapter it is about the sphere. In addition to the definitions of individual geometric solids, basic formulas for surface area and volume have been introduced and the tasks that have occurred at school, county or state competition for the past 10 years have been explained.

Životopis

Rođena sam 13. travnja 1994. u Čakovcu. Živim u Vratišincu gdje sam polazila Osnovnu školu dr. Vinka Žganca od 2001. do 2009. godine. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Gimnaziji Josipa Slavenskog u Čakovcu gdje sam upisala prirodoslovno - matematički smjer. 2013. godine završila sam srednju školu te položila državnu maturu i upisujem se na preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završila 2017. godine kada upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički na istom fakultetu.