Nekoliko pristupa krivuljama drugog reda

Govorko, Danica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Danica Govorko

NEKOLIKO PRISTUPA KRIVULJAMA DRUGOG REDA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U krivulje drugog reda ubrajamo elipsu, hiperbolu i parabolu. Često ih drugačije nazivamo i konike ili čunjosječnice. Navedene krivulje proučavale su se i definirale još od starogrčkih vremena. Menehmo (375.pr.Kr-320.pr.Kr), Apolonije (262.pr.Kr-190.pr.Kr.), Papus (290.-350.) te Ruđer Bošković (1711.-1787.) samo su neki od matematičara koji su se time bavili. Svaki od njih imao je poseban pristup ovim krivuljama pa ih je i definirao na drugačiji način. U ovom radu predstavili smo različite pristupe krivuljama drugog reda te naveli i nekoliko definicija: metrička, Papus-Boškovićeva, algebarska te definicija konike kao presjek stožaste plohe ravninom. Za polaznu definiciju odabrali smo metričku definiciju, a za ostale definicije smo pokazali da su joj ekvivalentne.
Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom poglavlju navedene su metričke definicije elipse, hiperbole i parabole. Opisani su temeljni pojmovi vezani uz navedene krivulje i analiziran je međusoban odnos pravca i krivulje. U drugom poglavlju naveli smo nekoliko različitih teorema koji opisuju krivulje drugog reda i dokazali da su ekvivalentni metričkoj definiciji svake od krivulja.
Treće poglavlje sadrži dokaze različitih svojstva elipse, hiperbole i parabole, provedenih koordinatnom metodom. U četvrtom poglavlju prikazano je nekoliko zadataka s matematičkih natjecanja. Odabrani zadatci su riješeni koordinatnom metodom.
Sve slike u ovom radu izrađene su u programu dinamične geometrije GeoGebra.

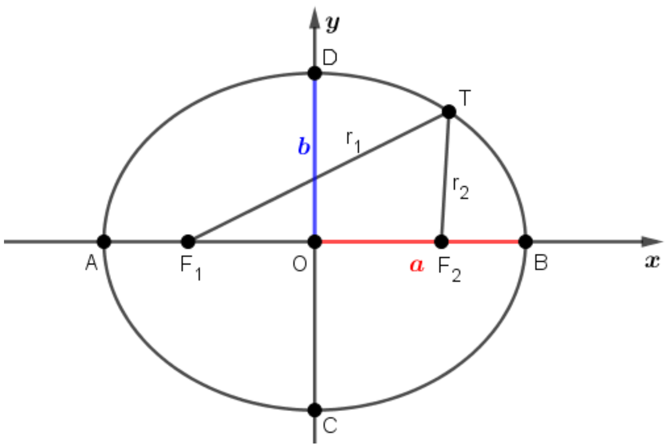
Poglavlje 1

Definicije i temeljni pojmovi

1.1 Elipsa

U ovom poglavlju definirat ćemo elipsu, hiperbolu i parabolu navodeći njihove metričke definicije. Te definicije mogu se naći u svim srednjoškolskim udžbenicima iz matematike za treći razred. Uz to, objasnit ćemo temeljne pojmove vezane uz navedene krivulje i izvesti njihove jednadžbe. Osvrnut ćemo se i na međusoban odnos pravca i krivulja drugog reda.

Definicija 1.1.1. *Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 i neka je a pozitivan realan broj takav da je $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$.*



Slika 1.1: Elipsa

To možemo zapisati i ovako:

$$E = \Big\{T \in E^2 : |F_1T| + |F_2T| = 2a\Big\}.$$

Čvrste točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarištima** ili **fokusima** elipse. Ako točka T pripada elipsi, tada dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$ zovemo radijvektorima točke T, a duljine tih dužina označavamo $|F_1T| = r_1, |F_2T| = r_2$. Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo **središte** ili **centar elipse** i označimo ga slovom O. Broj $\frac{1}{2}|F_1F_2|$ nazivamo **linearni ekscentricitet** elipse i označavamo slovom e. Pravac F_1F_2 siječe elipsu u točkama koje nazivamo tjemena elipse. Označimo ih s A i B. Budući da je A na elipsi vrijedi

$$|F_1A| + |F_2A| = 2a.$$

Kad $|F_2A|$ zamijenimo s $|F_1A| + |F_1F_2|$ dobivamo

$$2|F_1A| + |F_1F_2| = 2a,$$

$$2|F_1A| + 2|F_1O| = 2a,$$

$$|AF_1| + |F_1O| = a,$$

odnosno

$$|AO| = a.$$

Drugim riječima, tjeme A je od središta elipse udaljeno za a. Isto vrijedi i za drugo tjeme B. Simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ siječe elipsu u točkama koje također nazivamo tjemenima elipse. Označimo ih slovima C i D. Budući da je C na simetrali vrijedi $|F_1C| = |F_2C|$. Budući da je C na elipsi vrijedi

$$2a = |F_1C| + |F_2C| = 2|F_1C|,$$

odnosno

$$|F_1C| = a.$$

U pravokutnom trokutu F_1OC vrijedi Pitagorin poučak, tj.

$$|OC|^2 = |F_1C|^2 - |OF_1|^2 = a^2 - e^2, \quad |OC| = \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Time smo dobili udaljenost tjemena C do središta elipse. Taj se broj označava slovom b. Isto vrijedi i za točku D.

Sada ćemo, koristeći se definicijom elipse, izvesti njenu jednadžbu.

Neka su dane točke F_1 i F_2 i neka je O polovište dužine $\overline{F_1F_2}$. Ako postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u točki O, a da se F_1 i F_2 nalaze na osi x, tada F_1 i F_2 imaju koordinate $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$.
Neka je $T(x, y)$ proizvoljna točka elipse. S obzirom da pripada elipsi, onda vrijedi

$$|F_1T| + |F_2T| = 2a,$$

odnosno

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Kvadriranjem jednadžbe $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ te sređivanjem dobivamo

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex.$$

Ponovnim kvadranjem i sređivanjem dobivamo

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Budući da je $a > e$, onda je i $a^2 > e^2$, pa se uz $b^2 = a^2 - e^2$ prethodna jednadžba može zapisati u obliku

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dijeljenjem s a^2b^2 dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.1}$$

Jednadžba (1.1) naziva se kanonska jednadžba elipse.

Pokažimo da vrijedi i obrnuto, odnosno ako koordinate proizvoljne točke $T(x, y)$ zadovoljavaju jednadžbu (1.1), onda točka T pripada elipsi s fokusima $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$.
Dakle, trebamo pokazati da je zbroj udaljenosti $|F_1T|+|F_2T|$ jednak $2a$. Za navedene točke T, F_1 i F_2 vrijedi

$$|F_1T| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \quad |F_1T| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Iz jednadžbe elipse imamo da je $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, a iz $b^2 = a^2 - e^2$ slijedi da je $e^2 = a^2 - b^2$ i $a^2 = e^2 + b^2$. Uvrštavanjem navedenog i sređivanjem slijedi

$$|F_1T| = \sqrt{\left(\frac{e}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x + a\right|.$$

Analogno je

$$|F_2T| = \sqrt{\left(a - \frac{e}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{e}{a}x\right|.$$

Budući da je $a > e$ i $|x| \leq a$, onda su izrazi unutar apsolutne vrijednost pozitivni pa vrijedi

$$|F_1T| = \frac{e}{a}x + a, \quad |F_2T| = a - \frac{e}{a}x.$$

Konačno, zbrajanjem se dobije

$$|F_1T| + |F_2T| = \frac{e}{a}x + a + a - \frac{e}{a}x = a + a = 2a$$

pa zaključujemo da točka T pripada elipsi.

Označimo s A i B točke u kojima elipsa siječe x-os, a s C i D u kojima siječe y-os. Uvrštavanjem $y = 0$ odnosno $x = 0$ u jednadžbu elipse, slijedi $A(-a, 0), B(a, 0), C(0, -b)$, $D(0, b)$. Navedene točke su tjemena elipse. Dužina $\overline{AB}$ zove se velika os, a njezina duljina $2a$ duljina velike osi. Dužina $\overline{CD}$ zove se mala os elipse, a njezina duljina $2b$ duljina male osi. Broj $\varepsilon = \frac{e}{a}$ naziva se **numerički ekscentricitet** i za njega vrijedi $0 < \varepsilon < 1$ jer je $e < a$.

Još ćemo opisati međusoban položaj pravca i elipse. Pravac i elipsa mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da mu je ishodište u središtu elipse, a da je pravac F_1F_2 os x. U tom sustavu elipsa ima jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a pravac ima jednadžbu $y = kx + l$. Presjek pravca i elipse određujemo rješavanjem sustava određenog njihovim jednadžbama. Uvrstimo li y iz prve jednadžbe u drugu, nakon sređivanja ćemo dobiti kvadratnu jednadžbu

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0. \tag{1.2}$$

Pravac siječe elipsu u dvije točke ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $D > 0$, a ako je $D < 0$, onda nemaju zajedničkih točaka. Pravac je tangenta elipse ako pripadna kvadratna jednadžba (1.2) ima jedno rješenje, odnosno ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $D = 0$. Slijedi da će pravac $y = kx + l$ biti tangenta elipse ako i samo ako je

$$a^2k^2 + b^2 = l^2. \tag{1.3}$$

Jednakost (1.3) zovemo **uvjet dodira** pravca i elipse.
Odredimo jednadžbu tangente elipse ako je zadano njeno dIralište $D_1(x_1, y_1)$. Rješenje jednadžbe (1.2) uz uvjet da je $D = 0$ je

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}$$

pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca dobivamo

$$y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Dakle, dirālište tangente je točka $D_1\left(-\frac{ka^2}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$. Iz ovoga slijedi da su koeficijent smjera tangente k i odsječak l jednaki

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštavanjem navedenih koeficijenata u jednadžbu pravca $y = kx + l$, dobivamo da je jednadžba tangente elipse s dirālištem u točki $D_1(x_1, y_1)$

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1},$$

odnosno

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

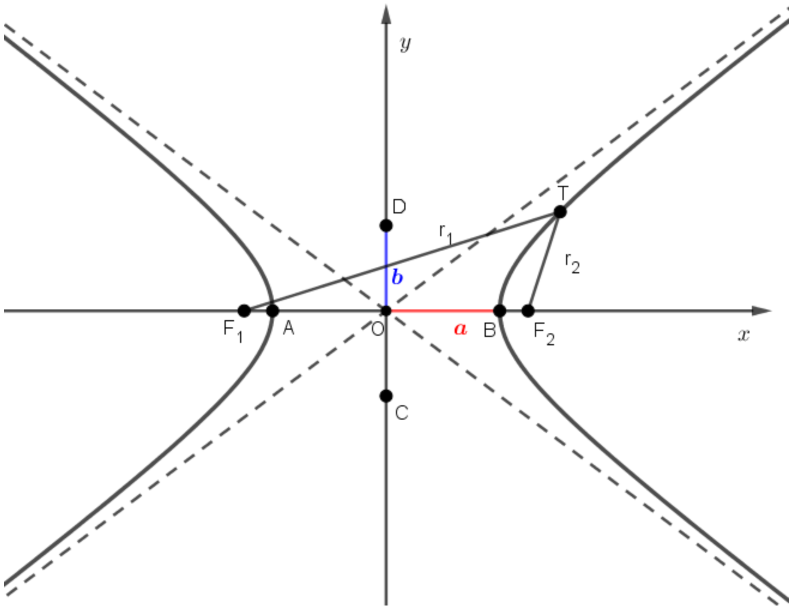
1.2 Hiperbola

Definicija 1.2.1. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke u ravnini E^2 i neka je a pozitivan realan broj takav da je $a < \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Hiperbola je skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od točaka F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$.*

To možemo zapisati i ovako:

$$H = \left\{T \in E^2 : ||F_1T| - |F_2T|| = 2a\right\}.$$

Čvrste točke F_1 i F_2 nazivaju se **žarištima** ili **fokusima** hiperbole. Ako točka T pripada hiperboli, tada dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$ zovemo radijvektorima točke T, a duljine tih dužina označavamo $|F_1T| = r_1, |F_2T| = r_2$. Polovište dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo **središte** ili **centar hiperbole** i označimo ga slovom O. Broj $\frac{1}{2}|F_1F_2|$ nazivamo **linearni ekscentricitet** hiperbole i označavamo slovom e.



Slika 1.2: Hiperbola

Pravac F_1F_2 siječe hiperbolu u točkama koje nazivamo tjemena hiperbole. Označimo ih s A i B. Budući da je A na hiperboli vrijedi

$$||F_1A| - |F_2A|| = 2a.$$

Točka A se nalazi bliže fokusu F_1 pa za nju vrijedi $|F_2A| - |F_1A| = 2a$. Kad $|F_2A|$ zamijenimo s $|F_1F_2| - |F_1A|$ dobivamo

$$|F_1F_2| - 2|F_1A| = 2a,$$

$$2|F_1O| - 2|F_1A| = 2a,$$

$$|F_1O| - |F_1A| = a,$$

odnosno

$$|AO| = a.$$

Drugim riječima, tjeme A je od središta hiperbole udaljeno za a. Isto vrijedi i za drugo tjeme B.

Odaberimo na simetrali dužine $\overline{F_1F_2}$ točke C i D takve da je $|CA| = |CB| = |DA| = |DB| = e$. Točke C i D nazivamo imaginarnim tjemenima. Primijetimo da C i D nisu točke

hiperbole jer je $||F_1C| - |F_2C|| = ||F_1D| - |F_2D|| = 0$.
U pravokutnom trokutu COA vrijedi Pitagorin poučak, tj.

$$|OC|^2 = |CA|^2 - |AO|^2 = e^2 - a^2, \quad |OC| = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Time smo dobili udaljenost tjemena C do središta elipse. Taj se broj označava slovom b. Isto vrijedi i za točku D.

Jednadžbu hiperbole možemo odrediti slično kao i jednadžbu elipse.
Postavimo koordinatni sustav tako da mu je ishodište u polovištu dužine $\overline{F_1F_2}$, a fokusi hiperbole leže na osi x. Tada F_1 i F_2 imaju koordinate $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$.
Neka je $T(x, y)$ proizvoljna točka hiperbole. S obzirom da pripada hiperboli, onda vrijedi

$$||F_1T| - |F_2T|| = 2a,$$

odnosno

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Slijedi da je

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Kvadriranjem jednadžbe $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \mp 2a = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ te sređivanjem dobivamo

$$\pm a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a^2 + ex.$$

Ponovnim kvadranjem i sređivanjem dobivamo

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Budući da je $a < e$, onda je i $a^2 < e^2$, pa se uz $b^2 = e^2 - a^2$ prethodna jednadžba može zapisati u obliku

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dijeljenjem s $-a^2b^2$ dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

Jednadžba (1.4) naziva se kanonska jednadžba hiperbole.

Pokazat ćemo da vrijedi i obrnuto, ako koordinate točke $T(x,y)$ zadovoljavaju jednadžbu (1.4), onda točka pripada hiperboli s fokusima $F_1(-e,0)$, $F_2(e,0)$. Dakle, potrebno je pokazati da je $||F_1T| - |F_2T|| = 2a$. Za koordinate točke T vrijedi $y^2 = b^2\Big(\frac{x^2}{a^2} - 1\Big)$, pa je onda

$$|F_1T| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2ex + e^2 + b^2\Big(\frac{x^2}{a^2} - 1\Big)}.$$

Kako je $b^2 = e^2 - a^2$, slijedi

$$|F_1T| = \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\Big(a + \frac{e}{a}x\Big)^2} = \Big|a + \frac{e}{a}x\Big|.$$

Analogno se dobije

$$|F_2T| = \Big|a - \frac{e}{a}x\Big|.$$

Budući da je $a < e$ i $|x| \geq a$, razlikujemo dva slučaja.
Ako je $x > 0$, onda je $a + \frac{e}{a}x > 0$ i $a - \frac{e}{a}x < 0$.
Ako je $x < 0$, onda je $a + \frac{e}{a}x < 0$ i $a - \frac{e}{a}x > 0$.

Dakle, ako je $x > 0$, onda je

$$||F_1T| - |F_2T|| = \Big|a + \frac{e}{a}x - \Big(-a + \frac{e}{a}x\Big)\Big| = |2a| = 2a.$$

Ako je $x < 0$, onda je

$$||F_1T| - |F_2T|| = \Big|-a - \frac{e}{a}x - \Big(a - \frac{e}{a}x\Big)\Big| = |-2a| = 2a.$$

Zaključujemo da točka T pripada hiperboli.

Označimo s A i B točke u kojima hiperbola siječe x-os. Uvrštavanjem $y = 0$ u jednadžbu hiperbole dobivamo $A(-a,0), B(a,0)$. Navedene točke su tjemena hiperbole. Dužinu $\overline{AB}$ zovemo realnom osi, a $\overline{CD}, C(0,-b), D(0,b)$ imaginarnom osi hiperbole.

Realan broj a zovemo duljinom realne poluosi, a b duljinom imaginarne poluosi hiperbole. Za numerički ekscentricitet hiperbole $\varepsilon = \frac{e}{a}$ vrijedi $\varepsilon > 1$, jer je $e > a$.

Analizirajmo međusoban položaj pravca i hiperbole. Pravac i hiperbola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Postavimo koordinatni sustav tako da mu je x-os pravac F_1F_2, a ishodište središte hiperbole. U tom sustavu hiperbola ima jednadžbu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a pravac $y = kx + l$. Presjek pravca i hiperbole određujemo rješavanjem sustava određenog njihovim jednadžbama. Broj zajedničkih točaka pravca i hiperbole ovisi o diskriminanti pripadne kvadratne jednadžbe

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2klx - a^2(b^2 + l^2) = 0. \tag{1.5}$$

Pravac siječe hiperbolu u dvije točke ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $D > 0$, a ako je $D < 0$, onda nemaju zajedničkih točaka. Pravac će biti tangenta hiperbole ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe (1.5) $D = 0$, odnosno ako i samo ako je

$$a^2k^2 - b^2 = l^2. \tag{1.6}$$

Jednakost (1.6) zovemo **uvjet dodira** pravca i hiperbole. Analogno kao i kod elipse, slijedi da je jednadžba tangente hiperbole s diralištem u točki $D_1(x_1, y_1)$

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1},$$

odnosno

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Hiperbola je, za razliku od elipse, neograničena krivulja i ima asimptote. Asimptota hiperbole je graničan položaj tangente kada se diralište tangente giba po grani hiperbole u beskonačnost. Hiperbola ima dvije asimptote i njihove jednadžbe su

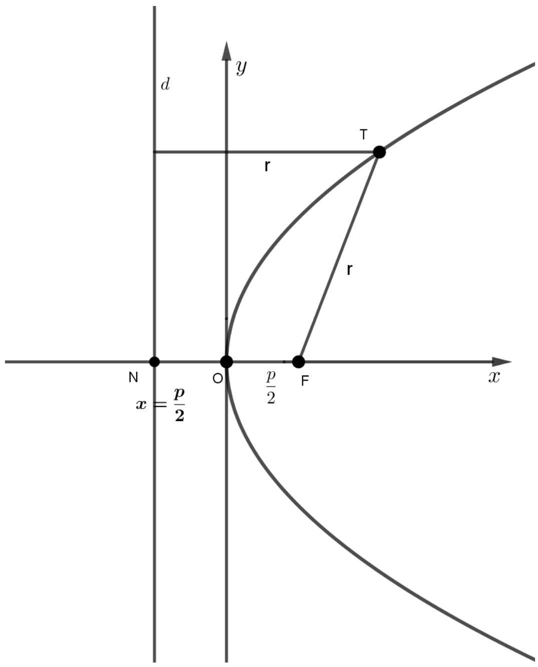
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

1.3 Parabola

Definicija 1.3.1. *Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u ravnini E^2 koja ne pripada pravcu d. Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od pravca d i točke F.*

To možemo zapisati i ovako:

$$P = \Big\{T \in E^2 : d(T, F) = d(T, d)\Big\}.$$



Slika 1.3: Parabola

Točka F zove se **žarište** ili **fokus** parabole, a pravac d **direktrisa** ili **ravnalica**. Ako s N označimo nožište okomice iz fokusa F na direktrisu, onda je polovište dužine $\overline{FN}$ **tjeme** parabole. Očito je da tjeme pripada paraboli, jer je jednako udaljeno od fokusa i od direktrise. Povučena okomica naziva se **os** parabole.

Sada ćemo izvesti jednadžbu parabole. Odaberimo koordinatni sustav tako da mu je ishodište u tjemenu parabole, a x-os os parabole. Direktrisa d u tako odabranom koorinatnom sustavu ima jednadžbu $x + \dfrac{p}{2} = 0$, gdje je p bilo koji pozitivan realan broj. Slijedi da fokus ima koordinate $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Neka je $T(x, y)$ proizvoljna točka parabole. S obzirom da pripada paraboli, vrijedi da je $d(T, F) = d(T, d)$, odnosno

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{1.7}$$

Jednadžba (1.7) naziva se kanonska jednadžba parabole. Još je nazivamo i tjemenom jednadžbom.

Pokazat ćemo da vrijedi i obrnuto, ako koordinate proizvoljne točke T zadovoljavaju jednadžbu (1.7), onda točka T pripada paraboli. Za svaku točku $T(x, y)$ koja se nalazi u I. ili IV. kvadrantu vrijedi

$$d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(T, d) = x + \frac{p}{2}.$$

Za koordinate točke T vrijedi $y^2 = 2px$ pa uvrštavanjem u $d(T, F)$ dobivamo

$$d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Budući da se T nalazi u I. ili IV. kvadrantu, slijedi da je $x > 0$. Također vrijedi da je $p > 0$. Zaključujemo da je $x + \frac{p}{2} > 0$, odnosno

$$d(T, F) = x + \frac{p}{2} = d(T, d).$$

Time smo dokazali da točka T leži na paraboli te da je (1.7) zaista jednadžba parabole.

Pravac i parabola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Broj zajedničkih točaka ovisi o broju rješenja sustava određenog jednadžbom pravca i parabole:

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Uvrštavanjem y iz prve jednadžbe u drugu dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0. \tag{1.8}$$

Pravac siječe parabolu u dvije točke ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $D > 0$, a ako je $D < 0$, onda nemaju zajedničkih točaka. Pravac je tangenta parabole ako pripadna kvadratna jednadžba (1.8) ima jedno rješenje, odnosno ako je diskriminanta $D = 0$. Dakle, slijedi da je $y = kx + l$ tangenta parabole ako i samo ako je

$$p = 2kl. \tag{1.9}$$

Jednakost (1.9) zovemo **uvjet dodira** pravca i parabole. Odredimo sada jednadžbu tangente ako je zadano njeno diralište $D_1(x_1, y_1)$. Rješenje jednadžbe (1.8) uz uvjet da je $D = 0$ je

$$x_1 = \frac{p - kl}{k^2}$$

pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca dobivamo

$$y_1 = \frac{p}{k}.$$

Odavde slijedi

$$k = \frac{p}{y_1}.$$

Korištenjem činjenice da za koordinate točke D_1 vrijedi $y_1^2 = 2px_1$ i uvrštavanjem u $x_1 = \frac{p - kl}{k^2}$, dobivamo

$$l = \frac{px_1}{y_1}.$$

Dakle, jednadžba tangente na parabolu je

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1},$$

odnosno

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Poglavlje 2

Ekvivalentne definicije

U ovom poglavlju navest ćemo nekoliko teorema koji opisuju krivulje drugog reda te ćemo dokazati da su ekvivalentni metričkoj definiciji pojedine krivulje.

2.1 Konike kao presjek stožaste plohe

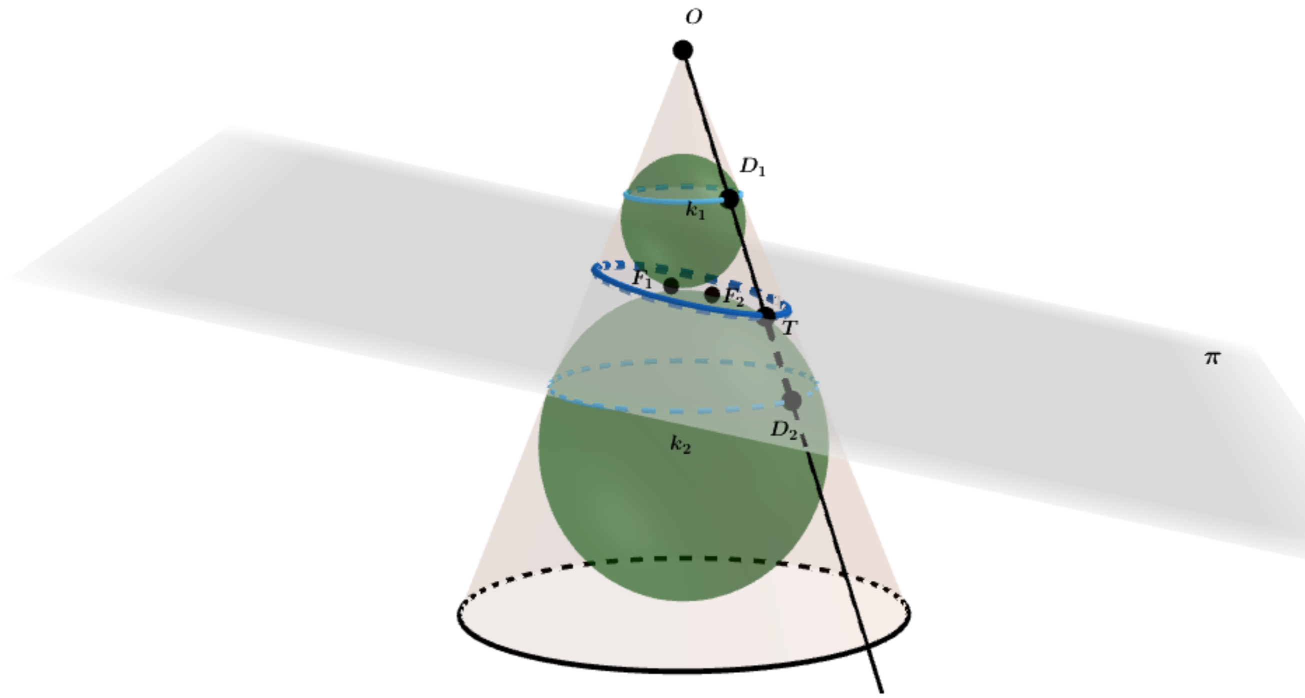
Definirajmo prvo stožastu plohu. Neka su o i s dva različita pravca sa zajedničkom točkom O. Skup svih točaka prostora što ga opisuje pravac s kada se zavrti oko pravca o za $360°$, zove se **stožasta ploha**. Točka O zove se vrh, pravac o os, a pravac s izvodnica stožaste plohe. Izvodnicama nazivamo i sve pravce koji nastaju opisanom rotacijom pravca s za proizvoljni kut.

Teorem 2.1.1. *Elipsa, hiperbola i parabola su presjeci ravnine i stožaste plohe. Ako ravnina siječe sve izvodnice, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, onda je presjek elipsa. Ako je ravnina usporedna s dvjema izvodnicama, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, onda je presjek hiperbola. Ako je ravnina usporedna s jednom izvodnicom, a ne sadrži tu izvodnicu, onda je presjek parabola.*

Dokaz.
Dokaz ćemo provesti posebno za svaku od navedenih krivulja. Dokaz je preuzet iz izvora [6] i [8].

Elipsa

Neka je π ravnina kojom je presječena stožasta ploha. Budući da ravnina siječe sve izvodnice i ne prolazi vrhom, presječna krivulja se nalazi na samo jednom dijelu stožaste plohe (gornjem ili donjem.) Upišimo u taj dio stožaste plohu dvije kugle, K_1 i K_2 koje dodiruju ravninu π odozgo i odozdo. Označimo s F_1 i F_2 točke u kojima kugle K_1 i K_2 dodiruju ravninu. Pokazat ćemo da je presjek stožaste plohe i ravnine π elipsa kojoj su točke F_1 i F_2 fokusi.



Slika 2.1: Elipsa

Neka je T proizvoljna točka s presječne krivulje. Kugla K_1 dira plohu duž kružnice k_1, a kugla K_2 duž kružnice k_2. Izvodnica koja prolazi točkom T dira kružnice k_1 i k_2 u točkama D_1 i D_2 redom. Ako iz bilo koje točke izvan kugle povučemo dvije tangente na kuglinu plohu, tj. na sferu, onda su udaljenosti te točke od dirališta na sferi međusobno jednake. Dakle, vrijedi

$$|TF_1| = |TD_1|, \quad |TF_2| = |TD_2|.$$

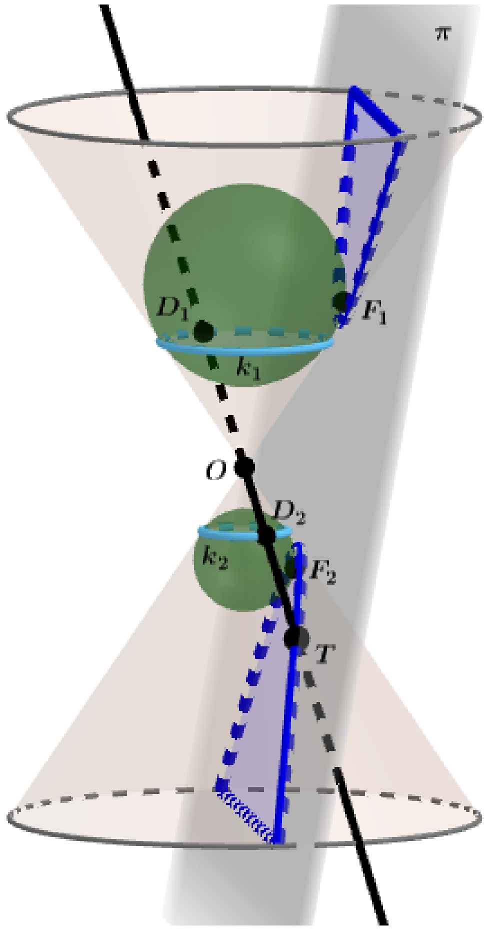
Zbrajanjem navedenih jednakosti dobivamo da je

$$|TF_1| + |TF_2| = |TD_1| + |TD_2| = |D_1D_2|.$$

Budući da je $\overline{D_1D_2}$ izvodnica uspravnog krnjeg stošca, slijedi da je $|D_1D_1|$ konstanta. Možemo staviti $|D_1D_1| = 2a, a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dakle, $|TF_1| + |TF_2| = 2a$ za svaku točku T na presječnoj krivulji pa zaključujemo da je ta krivulja elipsa s fokusima F_1 i F_2.

Hiperbola

Neka je π ravnina kojom je presječena stožasta ploha. Budući da je ravnina usporedna s dvjema izvodnicama, siječe oba dijela stožaste plohe. Upišimo u tu stožastu plohu dvije kugle K_1 i K_2 koje dodiruju ravninu π s iste strane. Označimo s F_1 i F_2 točke u kojima kugle dodiruju ravninu, a s k_1 i k_2 kružnice duž kojih kugle K_1 i K_2 diraju plohu.



Slika 2.2: Hiperbola

Neka je T proizvoljna točka s presječne krivulje takva da je $|TF_1| > |TF_2|$. Izvodnica koja prolazi točkom T dira kružnice k_1 i k_2 u točkama D_1 i D_2 redom. Budući da su pravci TF_1 i TD_1 tangente povučene na sferu, gdje su F_1 i D_1 dirališta, vrijedi $|TF_1| = |TD_1|$. Analogno

$|TF_2| = |TD_2|$. Oduzimanjem navedenih jednakosti dobivamo da je

$$|TF_1| - |TF_2| = |TD_1| - |TD_2| = |D_1D_2|.$$

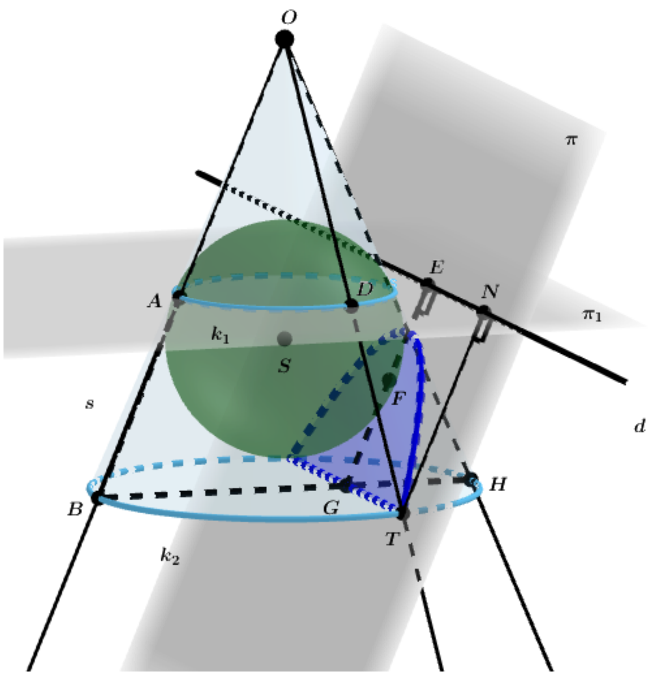
Kružnice k_1 i k_2 leže u paralelnim ravninama pa su zato sve izvodnice krnjeg stošca kojemu je gornja osnovka krug omeđen kružnicom k_1, a donja osnovka krug omeđen kružnicom k_2 jednake duljine, odnosno $|D_1D_1|$ je konstanta.
Ako je proizvoljna točka T takva da je $|TF_1| < |TF_2|$, onda oduzimanjem dobivamo

$$|TF_2| - |TF_1| = |TD_2| - |TD_1| = |D_1D_2|.$$

Možemo staviti $|D_1D_1| = 2a, a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dakle, općenito vrijedi da je $||TF_1|-|TF_2|| = 2a$, za svaku točku T na presječnoj krivulji. Zaključujemo da je presječna krivulja hiperbola s fokusima F_1 i F_2.

Parabola

Neka je π ravnina kojom je presječena stožasta ploha te neka je s izvodnica s kojom je paralelna. Budući da je π paralelna s jednom izvodnicom, u stožastu plohu možemo upisati samo jednu kuglu K koja dodiruje plohu i ravninu. Označimo s F točku u kojoj kugla K dira ravninu i s k_1 kružnicu duž koje K dira plohu.



Slika 2.3: Parabola

Neka je T proizvoljna točka s presječne krivulje. Neka je k_2 kružnica koja se nalazi na stožastoj plohi, prolazi točkom T, a ravnina te kružnice paralelna je s ravninom kružnice k_1. Označimo s D točku u kojoj izvodnica OT siječe k_1. Točke F i D su dirališta tangenti povučenih iz točke T na sferu. Vrijedi da je $|TF| = |TD|$.

Neka su A i B točke u kojima izvodnica s siječe kružnice k_1 i k_2 redom. Kružnice k_1 i k_2 leže u paralelnim ravninama pa su zato sve izvodnice krnjeg stošca kojemu je gornja osnovka krug omeđen kružnicom k_1, a donja osnovka krug omeđen kružnicom k_2 jednake duljine, odnosno vrijedi $|AB| = |TD|$. Dužina $\overline{AB}$ nalazi se u osnom presjeku koji je određen točkama O, S, F, gdje je S središte upisane kugle. Označimo s π_1 ravninu kružnice k_1, a s d pravac koji je presjek ravnina π i π_1. Svaka ravnina koja sadrži pravac SF je okomita na ravninu π jer je pravac SF okomit na π. Zato je i osni presjek OSF okomit na ravninu π. Ravnina π_1 je također okomita na osni presjek pa je i pravac d okomit na taj presjek. Zaključujemo da je pravac d okomit na AB jer se AB nalazi u ravnini OSF.

Dužinu $\overline{AB}$ možemo translacijom dovesti u položaj $\overline{EG}$, tako da se E nalazi na pravcu d, a G na promjeru $\overline{BH}$ kružnice k_2. Označimo s N nožište okomice iz točke T na pravac d. Očito $\overline{TN} \perp d$. Također vrijedi i da je $|TN| = |EG|$. Imamo:

$$|TF| = |TD| = |AB| = |EG| = |TN|,$$

odnosno $|TF| = |TN|$, što znači da je

$$d(T, F) = d(T, d).$$

Dakle, za svaku točku T na presječnoj krivulji vrijedi da je jednako udaljena od točke F i od pravca d, pa je presječna krivulja parabola s fokusom F i direktrisom d. □

Kugle korištene u ovom dokazu nazivaju se **Dandelinovim kuglama**, po belgijskom matematičaru G.P. Dandelinu (1794.-1849.). On je otkrio povezanost između presjeka stošca i ravnine, fokusa konika te kugli upisanih u stožac koje diraju ravninu kojom je presječen.

2.2 Algebarska definicija

Teorem 2.2.1. *Neka je S skup definiran jednadžbom*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu i neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ *matrica linearnog operatora pridruženog toj jednadžbi. Tada, ako je:*
1. $\det A > 0$, *onda je S elipsa, skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup.*
2. $\det A < 0$, *onda je S hiperbola ili unija dvaju ukrštenih pravaca.*
3. $\det A = 0$, *onda je S parabola, unija dvaju paralelnih pravaca, jedan pravac ili prazan skup.*

Skup S naziva se krivulja drugog reda. Ovaj teorem opravdava naziv krivulje drugog reda za elipsu, hiperbolu i parabolu. Zamijetimo da nam sadržaj teorema govori da nisu samo te tri krivulje krivulje drugog reda. Zato, ponekad, za elipsu, hiperbolu i parabolu kažemo da su nedegenerirane krivulje drugog reda, dok druge vrste nazivamo degeneriranim krivuljama drugog reda.

Dokaz ovog teorema preuzet je iz izvora [8].

Dokaz.
U Kartezijevu koordinatnom sustavu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dana je jednadžba krivulje drugog reda

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \tag{2.1}$$

Pridružit ćemo toj krivulji simetričan linearan operator u bazi $(\vec{i}, \vec{j})$ koji je dan matricom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ako je u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu $(O, \vec{i}, \vec{j})$ krivulja dana svojom jednadžbom (2.1) i ako su λ_1 i λ_2 svojstveni vektori simetričnog linearnog operatora pridruženog toj krivulji, onda postoji Kartezijev pravokutni koordinatni sustav $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ u kojem krivulja (2.1) ima jednadžbu

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0. \tag{2.2}$$

Sustav $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ je dobiven iz sustava $(O, \vec{i}, \vec{j})$ rotacijom za kut φ. Vrijedi da je

$$\vec{i}' = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j},$$

$$\vec{j'} = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}.$$

Veza između koordinata u ta dva sustava je dana s

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Matrica A u bazi $(\vec{i'}, \vec{j'})$ ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

gdje su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti operatora A.
Budući da determinanta matrice A ne ovisi o izboru koordinatnog sustava, promatrat ćemo matricu A u bazi $(\vec{i'}, \vec{j'})$. Imamo dakle $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.
Razlikujemo sljedeća dva slučaja: $\det A \neq 0$ i $\det A = 0$.

1. slučaj $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$.

To znači da su i λ_1 i λ_2 različiti od 0. Zbog toga jednadžbu krivulje (2.2) možemo zapisati ovako:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Translatirajmo sada koordinatni sustav za vektor $-\frac{b_1}{\lambda_1}\vec{i'} - \frac{b_2}{\lambda_2}\vec{j'}$. Tom translacijom se točka O preslika u točku $O'\left(-\frac{b_1}{\lambda_1}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. Označimo s x'' i y'' nove koordinate, u sustavu $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$. Veza sa starim koordinatama je dana na sljedeći način: $x'' = x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$. Dakle, u sustavu $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$ jednadžba (2.2) poprima oblik

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Neka je $c = b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$. Sada navedena jednadžba izgleda ovako:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0.$$

S obzirom na predznake brojeva λ_1 i λ_2, unutar prvog slučaja razlikujemo dva podslučaja.

1.A $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
To znači da λ_1 i λ_2 imaju iste predznake.
Ako je $c = 0$ onda slijedi da je $x'' = 0$ i $y'' = 0$, pa se skup S sastoji od samo jedne točke. Ta točka je ishodište O' u koordinatnom sustavu $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$.
Ako je $c \neq 0$ i istog predznaka kao i λ_1 i λ_2, onda ne postoji niti jedna točka čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu, pa je S prazan skup.
Ako je $c \neq 0$ i različitog predznaka kao i λ_1 i λ_2, onda imamo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -c,$$

odnosno

$$\frac{x''^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1.$$

Zaključujemo da je u ovom slučaju krivulja elipsa.

1.B $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.
To znači da λ_1 i λ_2 imaju različite predznake.
Ako je $c = 0$ onda imamo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$y'' = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}x''.$$

Dakle, u ovom slučaju skup S se sastoji od para ukrštenih pravaca.
Ako je $c \neq 0$ onda imamo

$$\frac{x''^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1,$$

pa se u ovom slučaju radi o hiperboli.

2. slučaj $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.
Možemo uzeti da je $\lambda_2 \neq 0$. Tada jednadžba (2.2) izgleda ovako:

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0.$$

Unutar drugog slučaja također razlikujemo dva podslučaja.
2.A Ako je $b_1 = 0$, onda imamo

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + b = 0,$$

odnosno

$$\lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Translatirajmo sada koordinatni sustav za vektor $-\frac{b_2}{\lambda_2}\vec{j}'$. Tom translacijom se točka O preslika u točku $O'\left(0, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. Označimo s x'' i y'' nove koordinate, u sustavu $(O', \vec{i}', \vec{j}')$. Veza sa starim koordinatama je dana na sljedeći način: $x'' = x', y'' = y' + \frac{b_2}{\lambda_2}$. Dakle, u sustavu $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ jednadžba (2.2) poprima oblik

$$\lambda_2 y''^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0,$$

odnosno uz oznaku $c = b - \frac{b_2^2}{\lambda_2}$

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0.$$

Ako je $c = 0$, onda je $y'' = 0$, odnosno krivulja je jedan (dvostruki) pravac.
Ako su c i λ_2 istog predznaka, onda ne postoji niti jedna točka čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu, pa je S prazan skup.
Ako su c i λ_2 različitih predznaka, onda imamo

$$\begin{aligned} \lambda_2 y''^2 &= -c \\ y''^2 &= -\frac{c}{\lambda_2} \\ y'' &= \pm\sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Dakle, u ovom slučaju radi se o dva paralelna pravca.

2.B Ako je $b_1 \neq 0$, onda jednadžbu (2.2) možemo zapisati u obliku:

$$\lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1x' + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1\left(x' + \frac{b}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2b_1\lambda_2}\right) = 0$$

Translatirajmo sada koordinatni sustav za vektor $\left(-\frac{b}{2b_1}+\frac{b_2^2}{2b_1\lambda_2}\right)\vec{i}'-\frac{b_2}{\lambda_2}\vec{j}'$. Tom translacijom se točka O preslika u točku $O'\left(-\frac{b}{2b_1} + \frac{b_2^2}{2b_1\lambda_2}, -\frac{b_2}{\lambda_2}\right)$. Označimo s x'' i y'' nove koordinate,

u sustavu $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$. Veza sa starim koordinatama je dana na sljedeći način:
$x'' = x' + \dfrac{b}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2b_1\lambda_2}, y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}$. Dakle, u sustavu $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$ jednadžba izgleda

$$\lambda_2 y''^2 + 2b_1 x'' = 0.$$

Očito je da se u ovom slučaju radi o paraboli. □

2.3 Papus-Boškovićeva definicija

Teorem 2.3.1. *Neka je ε pozitivan realan broj, F čvrsta točka ravnine i d čvrsti pravac te ravnine takav da se F ne nalazi na tom pravcu. Skup točaka T ravnine za koje je omjer udaljenosti do točke F i udaljenosti do pravca d konstantan i jednak ε je krivulja drugog reda sa žarištem F. Ako je $\varepsilon < 1$, onda se radi o elipsi, ako je $\varepsilon > 1$ o hiperboli, a ako je $\varepsilon = 1$ onda je krivulja parabola.*

Ideja dokaza preuzeta je iz izvora [12].

Dokaz.
Odaberimo koordinatni sustav takav da mu se ishodište nalazi u točki F, a pravac d ima jednadžbu $x - C = 0, C > 0$. Tada za točku $T(x, y)$ krivulje vrijedi

$$\frac{d(T,F)}{d(T,d)} = \varepsilon,$$

odnosno

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon |x - C|.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x - C)^2. \tag{2.3}$$

C predstavlja udaljenost točke F od pravca d.
Razlikujemo dva slučaja:
1.slučaj: $\varepsilon = 1$. Tada vrijedi $\dfrac{d(T,F)}{d(T,d)} = 1$ pa je to po definiciji parabola s fokusom F i direktrisom d.
2.slučaj: $\varepsilon \neq 1$. Raspisivanjem (2.3)dobivamo

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon^2 Cx + \varepsilon^2 C^2,$$

$$\left(1 - \varepsilon^2\right)\left(x^2 + \frac{2\varepsilon^2 C}{1 - \varepsilon^2} x\right) + y^2 = \varepsilon^2 C^2.$$

Svodeći izraz u zagradi na potpuni kvadrat dobivamo

$$\left(1-\varepsilon^2\right)\left(x+\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}\right)^2+y^2=\frac{\varepsilon^2 C^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Dijeljenjem s $1-\varepsilon^2$ dobivamo

$$\left(x+\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon^2 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2}.$$

Konačno, dijeljenjem s izrazom na desnoj strani jednadžbe dobivamo

$$\frac{\left(x+\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{\varepsilon^2 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}}=1. \tag{2.4}$$

Ako je $\varepsilon < 1$, onda je $\varepsilon^2 < 1$ pa je $1-\varepsilon^2 > 0$.
Ako je $\varepsilon > 1$, onda je $\varepsilon^2 > 1$ pa je $1-\varepsilon^2 < 0$.
Primijetimo da je izraz $\dfrac{\varepsilon^2 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$ uvijek pozitivan.
Izraz $\dfrac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}$ je pozitivan ako je $\varepsilon < 1$, a negativan ako je $\varepsilon > 1$.
Prema tome, jednadžba (2.4) je kanonska jednadžba **elipse** ako je $\varepsilon < 1$, a kanonska jednadžba **hiperbole** ako je $\varepsilon > 1$. Pokažimo još da je točka $F(0,0)$ fokus navedene elipse i hiperbole. Dokaz ćemo provesti za elipsu, dok za hiperbolu ide analogno. Navedena elipsa ima središte u točki $\left(-\dfrac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}, 0\right)$, a kvadrati duljina velike i male poluosi su joj

$$a^2=\frac{\varepsilon^2 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2},\ b^2=\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2}.$$

Pokazat ćemo da je linearni ekscentricitet dobivene elipse jednak udaljenosti točke F i središta elipse. Imamo:

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2-b^2 \\ e^2 &= \frac{\varepsilon^2 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{\varepsilon^2 C}{1-\varepsilon^2} \\ e^2 &= \frac{\varepsilon^4 C^2}{(1-\varepsilon^2)^2}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$e = \frac{\varepsilon^2 C}{1 - \varepsilon^2}.$$

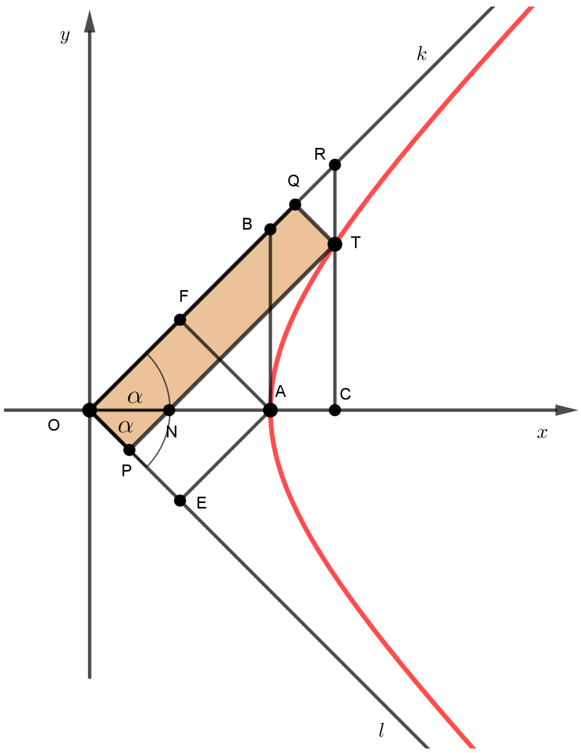
Dakle, vidimo da se točka $F(0, 0)$ nalazi na udaljenosti e od središta elipse pa je F fokus dobivene elipse. Za hiperbolu, analognim postupkom dolazimo do istog zaključka.

□

2.4 Alternativna definicija hiperbole

U ovom odlomku navest ćemo alternativnu definiciju hiperbole, kao geometrijsko mjesto točaka T. Definicija je preuzeta iz izvora [8].

Teorem 2.4.1. *Zadana su dva pravca koja se sijeku i točka unutar krakova kuta kojeg tvore ta dva pravca. Paralele kroz navedenu točku s danim pravcima određuju paralelogram. Geometrijsko mjesto točaka takvih da je površina tog paralelograma konstantna je hiperbola kojoj su zadani pravci asimptote.*



Dokaz.

Neka su k i l dva pravca koja se sijeku u točki O i neka je kut između tih pravaca manji od $180°$. Neka je točka $T(x, y)$ proizvoljna točka unutar krakova toga kuta. Točkom T

povucimo paralelu s pravcem k i označimo s P sjecište te paralele s pravcem l. Točkom T povucimo paralelu s pravcem l i označimo s Q sjecište te paralele s pravcem k. Dobili smo paralelogram $OPTQ$. Dokazat ćemo da je geometrijsko mjesto točaka T takvih da je površina paralelograma $OPTQ$ konstanta hiperbola kojoj su pravci k i l asimptote.

Odaberimo koordinatni sustav takav da mu je točka O ishodište, a x-os simetrala kuta između pravaca k i l. Označimo s 2α kut između pravaca k i l. Neka je točka C točka na x-osi čija je apscisa jednaka x. Označimo s R sjecište pravaca k i CT. Dobiveni trokut TRQ je jednakokračan pa vrijedi $|QR| = |QT| = |OP|$.
Izračunajmo duljine stranica paralelograma $OPTQ$ odnosno $|QP|$ i $|OQ|$.

U pravokutnom trokutu OCR vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{|OC|}{|OR|}$$

pa je

$$|OC| = \cos\alpha \cdot |OR|.$$

Označimo s N točku u kojoj pravac PT siječe x-os. U pravokutnom trokutu NCT vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{|CT|}{|NT|}$$

pa je

$$|CT| = \sin\alpha \cdot |NT|.$$

Uvrštavanjem $|OC| = x$, $|CT| = y$, $|OR| = |OQ| + |OP|$ i $|NT| = |OQ| - |OP|$ u prethodne dvije jednakosti, dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot (|OQ| + |OP|) \\ y = \sin\alpha \cdot (|OQ| - |OP|). \end{cases}$$

Dijeljenjem prve jednadžbe s $\cos\alpha$, a druge sa $\sin\alpha$ te zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$|OQ| = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right).$$

Iz toga slijedi

$$|OP| = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right).$$

Dakle, površina paralelograma $OPTQ$ jednaka je

$$\begin{aligned} P &= |OQ| \cdot |OP| \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha}\right) \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= \frac{1}{2}(x^2 \operatorname{tg}\alpha - y^2 \operatorname{ctg}\alpha). \end{aligned}$$

Označimo s A položaj točke T na pozitivnom dijelu x-osi. Točkom A povucimo paralelu s y-osi i označimo s B presjek s pravcem k. Označimo udaljenosti $|OA| = a$ i $|AB| = b$. Točkom A potom povucimo paralele s pravcima k i l i sjecišta s pravcima l i k označimo s E i F redom.

Dobiveni četverokut $OEAF$ je romb. Njegova površina jednaka je $P = \dfrac{ab}{2}$.

S obzirom da tražimo geometrijsko mjesto točaka T takvih da površina bude konstanta, izjednačit ćemo dobivene površine

$$\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{tg}\alpha - y^2 \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{ab}{2}.$$

U pravokutnom trokutu OAD vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \frac{b}{a} - y^2 \cdot \frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{2}.$$

Sređivanjem prethodne jednakosti dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

čime je dokazana tvrdnja da je spomenuta krivulja zaista hiperbola. □

Poglavlje 3

Svojstva krivulja drugog reda

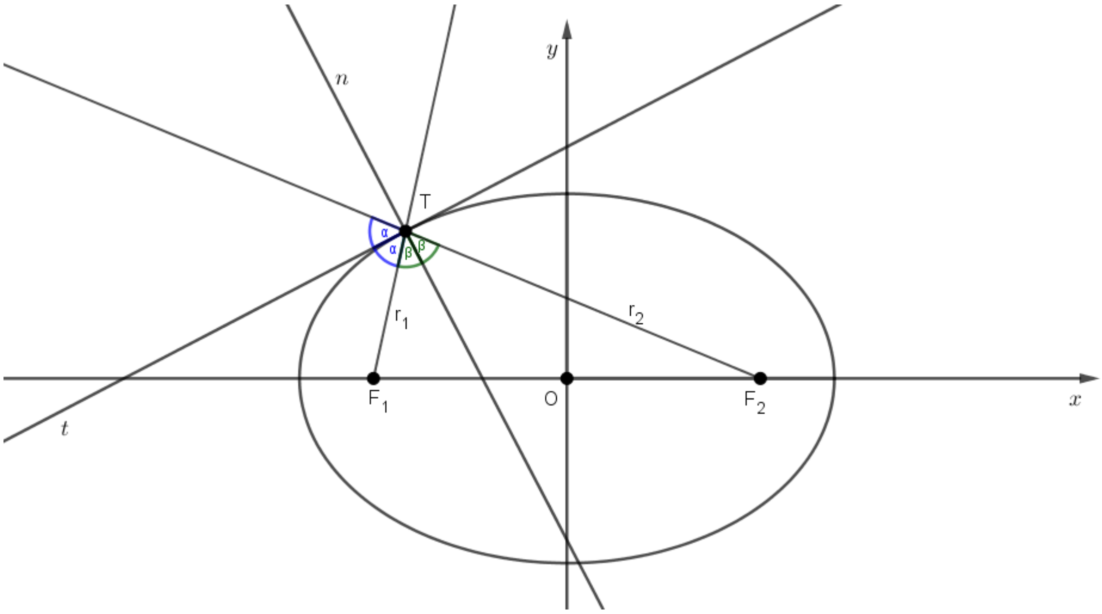
U ovom poglavlju dokazat ćemo koordinatnom metodom neka svojstva elipse, hiperbole i parabole. Svojstva su preuzeta iz izvora [10] i [11]. U izvoru [10] navedena svojstva većinom su dokazana sintetičkom metodom dok ćemo ovdje dokaze izvesti analitičkom, tj. koordinatnom metodom.

3.1 Elipsa

U sljedećim propozicijama odabran je koordinatni sustav takav da mu se ishodište nalazi u središtu elipse, a x-os podudara s velikom osi elipse.

Propozicija 3.1.1. *Tangenta t u točki T elipse raspolavlja vanjski, a normala n unutarnji kut što ga tvore dva radij-vektora točke T.*

Dokaz.
Neka je $T(x_1, y_1)$ bilo koja točka elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
Pravci F_1T i F_2T redom imaju jednadžbe $y = \dfrac{y_1}{x_1 + e}(x + e)$ i $y = \dfrac{y_1}{x_1 - e}(x - e)$.
Implicitni oblici tih jednadžbi su redom $y_1x - (x_1 + e)y + ey_1 = 0$ i $y_1x - (x_1 - e)y - ey_1 = 0$.
Simetrale kuta što ga zatvaraju radij-vektori točke T su zapravo simetrale pravaca F_1T i F_2T. Pokazat ćemo da su te simetrale ujedno tangenta i normala elipse u točki T.



Za proizvoljnu točku $U(x, y)$ koja se nalazi na simetrali pravaca F_1T i F_2T vrijedi da je jednako udaljena od oba pravca, odnosno $d(U, F_1T) = d(U, F_2T)$. Koristeći formulu za udaljenost točke od pravca, slijedi

$$\frac{|y_1 x - (x_1 + e)y + ey_1|}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 + e)^2}} = \frac{|y_1 x - (x_1 - e)y - ey_1|}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 - e)^2}}.$$

Uvrštavanjem $\sqrt{y_1^2 + (x_1 + e)^2} = r_1 = a + \varepsilon x_1$ i $\sqrt{y_1^2 + (x_1 - e)^2} = r_2 = a - \varepsilon x_1$ u prethodnu jednakost, slijedi

$$r_2 \cdot |y_1 x - (x_1 + e)y + ey_1| = r_1 \cdot |y_1 x - (x_1 - e)y - ey_1|,$$

odnosno

$$(a - \varepsilon x_1) \cdot |y_1 x - (x_1 + e)y + ey_1| = (a + \varepsilon x_1) \cdot |y_1 x - (x_1 - e)y - ey_1|.$$

Razlikujemo dva slučaja:

$$(a - \varepsilon x_1) \cdot [y_1 x - (x_1 + e)y + ey_1)] = (a + \varepsilon x_1) \cdot [y_1 x - (x_1 - e)y - ey_1)]$$

i

$$(a - \varepsilon x_1) \cdot [y_1 x - (x_1 + e)y + ey_1)] = -(a + \varepsilon x_1) \cdot [y_1 x - (x_1 - e)y - ey_1)].$$

1. slučaj
Sređivanjem jednakosti i uvrštavanjem $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ dobivamo

$$-aey + aey_1 - \frac{e}{a}x_1y_1x + \frac{e}{a}x_1^2y = aey - aey_1 + \frac{e}{a}x_1y_1x - \frac{e}{a}x_1^2y.$$

Množenjem jednakosti s $\dfrac{a}{e}$ te dijeljenjem s dva dobivamo

$$a^2y - a^2y_1 + x_1y_1x - x_1^2y = 0.$$

Budući da se točka $T(x_1, y_1)$ nalazi na elipsi, za njene koordinate vrijedi $x_1^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{b^2}y_1^2$ pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost imamo

$$b^2x_1xy_1 + a^2y_1^2y = a^2b^2y_1.$$

Dijeljenjem s $y_1 \neq 0$ dobije se

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

što je jednadžba tangente na elipsu u točki $T(x_1, y_1)$.

Analogno, u drugom slučaju dobivamo

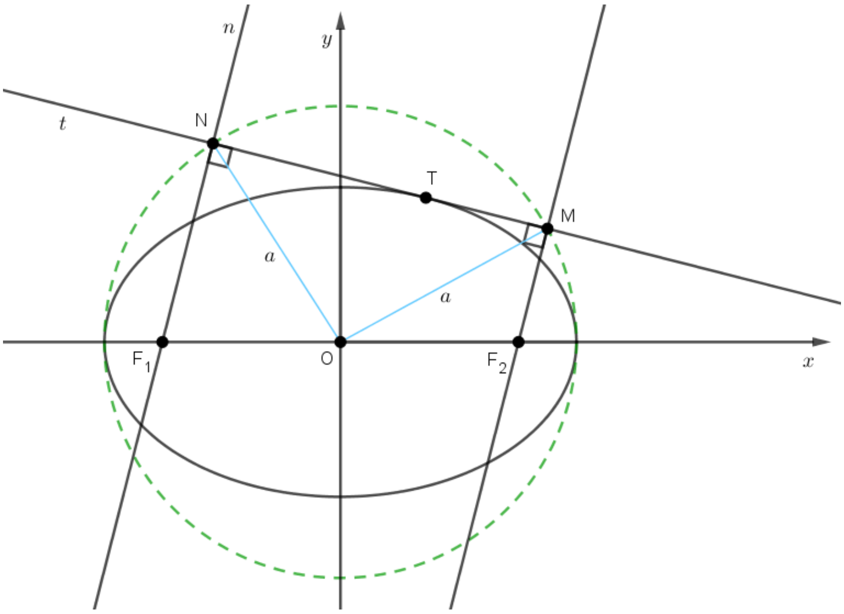
$$y = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}x - \frac{e^2}{b^2}y_1,$$

što je jednadžba normale na elipsu u točki $T(x_1, y_1)$.

$\square$

Propozicija 3.1.2. *Nožišta okomica spuštenih iz oba žarišta elipse na tangentu elipse leže na kružnici k polumjera a sa središtem u središtu elipse. Tu kružnicu nazivamo glavna kružnica elipse.*

Dokaz.
Neka je $T(x_1, y_1)$ točka elipse i neka je t tangenta na elipsu u točki T. Tangenta t ima jednadžbu $y = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \dfrac{b^2}{y_1}$. Jednadžba pravca n okomitog na t koji prolazi fokusom F_1 je $y = \dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x + e)$. Neka je točka N sjecište tangente t i okomice n. Odredimo njene koordinate.



$$\frac{a^2y_1}{b^2x_1}x + \frac{ea^2y_1}{b^2x_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1}$$
$$\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1} + \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x = \frac{b^2}{y_1} - \frac{ea^2y_1}{b^2x_1}$$
$$\frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{a^2b^2x_1y_1}x = \frac{b^4x_1 - ea^2y_1^2}{b^2x_1y_1}$$
$$x = \frac{a^2(b^4x_1 - ea^2y_1^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}.$$

Odredili smo apscisu točke N. Ordinatu ćemo dobiti uvrštavanjem apscise u jednadžbu tangente t.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot \frac{a^2(b^4x_1 - ea^2y_1^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2} + \frac{b^2}{y_1} \\ &= \frac{-b^6x_1^2 + ea^2b^2x_1y_1^2 + a^4b^2y_1^2 + b^6x_1^2}{y_1(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)} \\ &= \frac{a^2b^2y_1(ex_1 + a^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}. \end{aligned}$$

Dakle, $N\left(\frac{a^2(b^4x_1 - ea^2y_1^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}, \frac{a^2b^2y_1(ex_1 + a^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}\right)$.
Trebamo još pokazati da je $|ON| = a$.

Izračunajmo najprije $|ON|^2 = x_N^2 + y_N^2$.

$$\begin{aligned}
x_N^2 + y_N^2 &= \frac{a^4(b^4x_1 - ea^2y_1^2)^2}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2} + \frac{a^4b^4y_1^2(ex_1 + a^2)^2}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2} \\
&= \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^8x_1^2 - 2a^2b^4ex_1y_1^2 + e^2a^4y_1^4 + b^4e^2x_1^2y_1^2 + 2a^2b^4ex_1y_1^2 + a^4b^4y_1^2) \\
&= \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^8x_1^2 + e^2a^4y_1^4 + b^4e^2x_1^2y_1^2 + a^4b^4y_1^2).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $e^2 = a^2 - b^2$ u prethodnu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
|ON|^2 &= \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^8x_1^2 + (a^2 - b^2)a^4y_1^4 + b^4(a^2 - b^2)x_1^2y_1^2 + a^4b^4y_1^2) \\
&= \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^8x_1^2 + a^6y_1^4 - a^4b^2y_1^4 + a^2b^4x_1^2y_1^2 - b^6x_1^2y_1^2 + a^4b^4y_1^2).
\end{aligned}$$

Sada koristimo činjenicu da se točka T nalazi na elipsi pa njene koordinate zadovoljavaju jednakost $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$. Uvrštavanjem $b^2x_1^2 = a^2b^2 - a^2y_1^2$ dobivamo

$$\begin{aligned}
|ON|^2 = &\frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^6(a^2b^2 - a^2y_1^2) + a^6y_1^4 - a^4b^2y_1^4 + a^2b^2y_1^2(a^2b^2 - a^2y_1^2) \\
&+ \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(-b^4y_1^2(a^2b^2 - a^2y_1^2) + a^4b^4y_1^2) \\
= &\frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(a^2b^8 - a^2b^6y_1^2 + a^6y_1^4 - a^4b^2y_1^4 + a^4b^4y_1^2 - a^4b^2y_1^4) \\
&+ \frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(-a^2b^6y_1^2 + a^2b^4y_1^4 + a^4b^4y_1^2) \\
= &\frac{a^4}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(a^2b^8 - 2a^2b^6y_1^2 + a^6y_1^4 - 2a^4b^2y_1^4 + 2a^4b^4y_1^2 + a^2b^4y_1^2) \\
= &\frac{a^6}{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^2}(b^8 - 2b^6y_1^2 + a^4y_1^4 - 2a^2b^2y_1^4 + 2a^2b^4y_1^2 + b^4y_1^2).
\end{aligned}$$

Prepoznajemo da je izraz u zagradi kvadrat trinoma pa ga i zapisujemo u tom obliku. Imamo:

$$\begin{aligned}
|ON|^2 &= \frac{a^6}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}(a^2y_1^2+b^4-b^2y_1^2)^2 \\
&= \frac{a^2}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}\cdot a^4(a^2y_1^2+b^4-b^2y_1^2)^2 \\
&= \frac{a^2}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}[a^2(a^2y_1^2+b^4-b^2y_1^2)]^2 \\
&= \frac{a^2}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}(a^4y_1^2+a^2b^4-a^2b^2y_1^2)^2 \\
&= \frac{a^2}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}[a^4y_1^2+b^2(a^2b^2-a^2y_1^2)]^2
\end{aligned}$$

Ponovnim uvrštavanjem $b^2x_1^2 = a^2b^2 - a^2y_1^2$ dobivamo

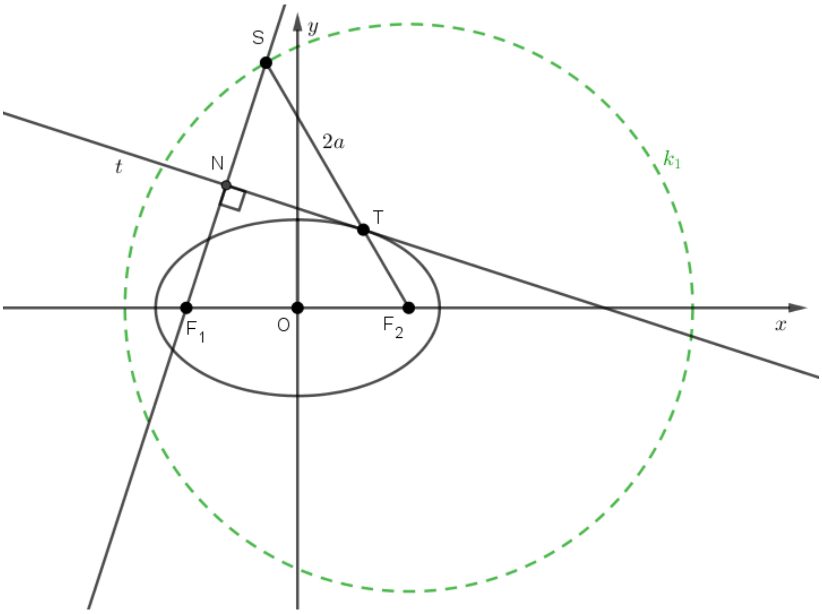
$$\begin{aligned}
|ON|^2 &= \frac{a^2}{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2}(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^2 \\
&= a^2.
\end{aligned}$$

S obzirom da je $|ON|^2 = a^2$, zaključujemo da je $|ON| = a$. Isto vrijedi i za nožište okomice spuštene iz fokusa F_2 pa je tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 3.1.3. *Točka koja je simetrična jednom žarištu elipse s obzirom na tangentu elipse naziva se suprotište tog žarišta s obzirom na tu tangentu. Sva suprotišta jednog žarišta leže na kružnici k_1 polumjera $2a$ sa središtem u drugom žarištu. Kružnica k_1 naziva se kružnica suprotišta prvog žarišta.*

Dokaz.
Neka je $T(x_1, y_1)$ točka elipse, t tangenta na elipsu u točki T i neka je $S(x_S, y_S)$ točka simetrična fokusu F_1 s obzirom na tangentu t_1. Neka je $N(x_N, y_N)$ nožište okomice povučene iz fokusa F_1 na tangentu t. U dokazu propozicije 3.1.2 odredili smo koordinate točke N i pokazali da vrijedi $x_N^2 + y_N^2 = a^2$. Koordinate točke S dobit ćemo koristeći činjenicu da je N polovište dužine $\overline{FS}$.



Vrijedi $x_N = \dfrac{-e + x_S}{2}$, odnosno $x_S = 2x_N + e$ i $y_N = \dfrac{0 + y_S}{2}$, odnosno $y_S = 2y_N$. Odredimo udaljenost $|F_2S|$.

$$\begin{aligned} |F_2S| &= \sqrt{(x_S - x_F)^2 + (y_S - y_F)^2} = \sqrt{(2x_N + e - e)^2 + (2y_N - 0)^2} \\ &= \sqrt{4x_N^2 + 4y_N^2} = \sqrt{4(x_N^2 + y_N^2)} = \sqrt{4a^2} = 2a. \end{aligned}$$

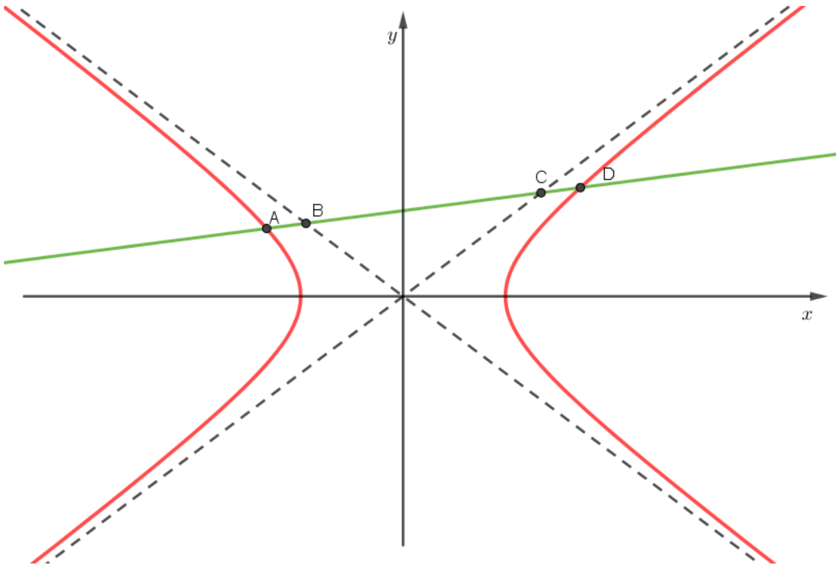
Analogno se pokaže da ako je S suprotište fokusa F_2 s obzirom na tangentu t, onda je $|F_1S| = 2a$. Vidimo da je udaljenost uvijek konstantna i ne ovisi o izboru tangente pa zaključujemo da sva suprotišta jednog fokusa leže na kružnici sa središtem u drugom žarištu, polumjera $2a$. □

3.2 Hiperbola

U sljedećim propozicijama, odabran je koordinatni sustav takav da mu se ishodište nalazi u središtu hiperbole, a x-os podudara s realnom osi hiperbole.

Propozicija 3.2.1. *Odresci neke sekante hiperbole između asimptota i hiperbole su međusobno jednaki.*

Dokaz. Neka je pravac $y = kx + l$ sekanta hiperbole. Točke u kojima sekanta siječe hiperbolu označimo s A i D, a točke u kojima siječe asimptote B i C.



Koordinate točaka A i D dobit ćemo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + l \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Uz uvjet da je $l^2 + b^2 - a^2k^2 > 0$, dobije se

$$A\left(\frac{a^2kl - ab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{b^2 - a^2k^2}, \frac{b^2l - kab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{b^2 - a^2k^2}\right),$$

$$D\left(\frac{a^2kl + ab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{b^2 - a^2k^2}, \frac{b^2l + kab\sqrt{l^2 + b^2 - a^2k^2}}{b^2 - a^2k^2}\right).$$

Koordinate točke B dobit ćemo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y = -\dfrac{b}{a}x. \end{cases}$$

Slijedi da je $B\left(\dfrac{-al}{b+ka}, \dfrac{bl}{b+ka}\right)$.

Koordinate točke C dobit ćemo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y = \dfrac{b}{a}x. \end{cases}$$

Slijedi da je $C\left(\dfrac{al}{b-ka}, \dfrac{bl}{b-ka}\right)$.

Izračunajmo kvadrate traženih udaljenosti.

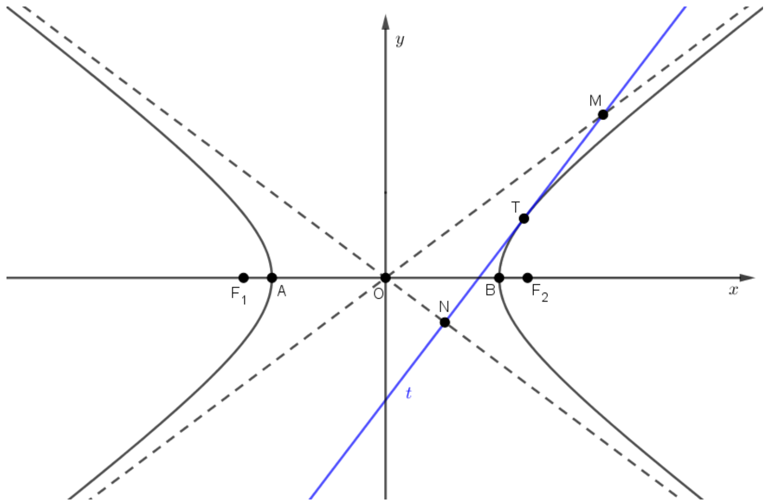
$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \left(\frac{-al}{b+ka} - \frac{a^2kl - ab\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2}}{b^2-a^2k^2}\right)^2 + \left(\frac{bl}{b+ka} - \frac{b^2l - kab\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2}}{b^2-a^2k^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{ab(\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2} - l)}{b^2-a^2k^2}\right)^2 + \left(\frac{kab(\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2} - l)}{b^2-a^2k^2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2b^2(1+k^2)}{(b^2-a^2k^2)^2}\left(\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2} - l\right)^2. \end{aligned}$$

Analogno se za $|CD|^2$ dobije

$$|CD|^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{(b^2-a^2k^2)^2}\left(\sqrt{l^2+b^2-a^2k^2} - l\right)^2.$$

Dakle, $|AB| = |CD|$, pa je dokaz završen. □

Propozicija 3.2.2. *Diralište tangente hiperbole raspolavlja odrezak te tangente između asimptota.*



Dokaz.

Neka je $T(x_1, y_1)$ dirališe tangente t hiperbole i neka su M i N sjecišta tangente t s asimptotama. Odredimo koordinate tih točaka. Jednadžba tangente t glasi

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

a jednadžbe asimptota su

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Neka je M sjecište tangente t s asimptotom $y = \frac{b}{a}x$, a N sjecište t s asimptotom $y = -\frac{b}{a}x$. Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \end{cases}$$

dobije se

$$M\left(\frac{a^2 b}{x_1 b - a y_1}, \frac{a b^2}{x_1 b - a y_1}\right).$$

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \end{cases}$$

dobije se

$$N\left(\frac{a^2b}{x_1b+ay_1},\frac{-ab^2}{x_1b+ay_1}\right).$$

Polovište dužine $\overline{MN}$ ima koordinate $\left(\frac{x_M+x_N}{2},\frac{y_M+y_N}{2}\right)$.
Uvrštavanjem x koordinata točaka M i N u navedenu formulu dobije se sljedeće:

$$\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{x_1b-ay_1}+\frac{a^2b}{x_1b+ay_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2b^2x_1}{x_1^2b^2-a^2y_1^2}\right)=\frac{a^2b^2x_1}{x_1^2b^2-a^2y_1^2}. \tag{3.1}$$

Uvrštavanjem y koordinata točaka M i N u navedenu formulu dobije se sljedeće:

$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{x_1b-ay_1}-\frac{ab^2}{x_1b+ay_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2b^2y_1}{x_1^2b^2-a^2y_1^2}\right)=\frac{a^2b^2y_1}{x_1^2b^2-a^2y_1^2}. \tag{3.2}$$

Budući da se točka T nalazi na hiperboli, njene koordinte zadovoljavaju jednadžbu: $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$. Uvrštavanjem navedene jednakosti u (3.1) i (3.2) dobivamo

$$\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{a^2b^2x_1}{a^2b^2}=x_1,$$
$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{a^2b^2y_1}{a^2b^2}=y_1,$$

pa zaključujemo da je polovište dužine $\overline{MN}$ upravo točka $T(x_1,y_1)$.

□

Propozicija 3.2.3. *Produkt udaljenosti neke točke hiperbole od obiju asimptota je konstantan.*

Dokaz. Neka je $T(x_1,y_1)$ točka hiperbole $\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}=1$, p_1 asimptota $y=\frac{b}{a}x$, i p_2 asimptota $y=-\frac{b}{a}x$. Izračunat ćemo udaljenost točke T od obiju asimptota i nakon toga njihov produkt.

Udaljenost točke $T_0(x_0,y_0)$ od pravca p čija je jednadžba $y=kx+l$ dana je formulom

$$d(T_0,p)=\frac{|kx_0+l-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Slijedi da je

$$d(T,p_1) = \frac{\left|\frac{b}{a}x_1 - y_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}}, \quad d(T,p_2) = \frac{\left|\frac{-b}{a}x_1 - y_1\right|}{\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 + 1}}.$$

Produkt navedenih udaljenosti je

$$d(T,p_1)\cdot d(T,p_2) = \frac{\left|\frac{b}{a}x_1 - y_1\right| \cdot \left|\frac{-b}{a}x_1 - y_1\right|}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = \frac{\left|y_1^2 - \left(\frac{b}{a}x_1\right)^2\right|}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}.$$

Budući da se točka T nalazi na hiperboli, za njene koordinate vrijedi $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}x_1^2 - b^2$. Uvrštavanjem navedenog u produkt udaljenosti dobivamo

$$d(T,p_1)\cdot d(T,p_2) = \frac{\left|\frac{b^2}{a^2}x_1^2 - b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2\right|}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1} = \frac{b^2}{\frac{b^2+a^2}{a^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Zaključujemo da produkt udaljenosti neke točke hiperbole od obiju asimptota ne ovisi o izboru točke, odnosno produkt je konstantan.

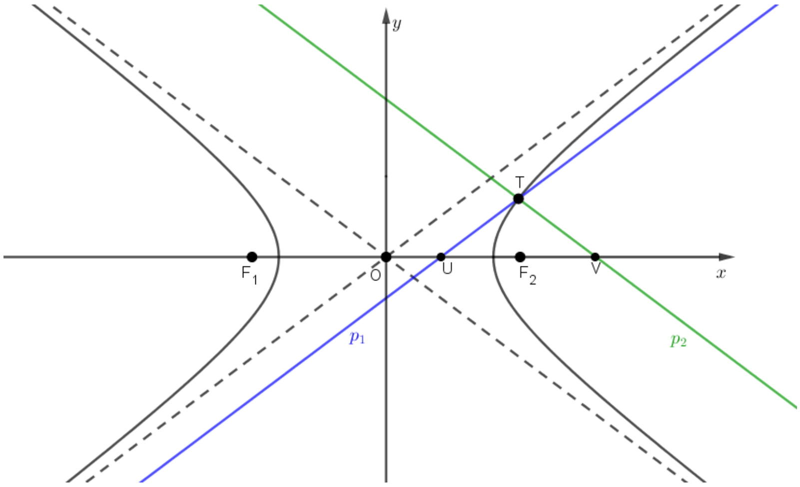
□

Propozicija 3.2.4. *Povučemo li nekom točkom T hiperbole paralele s asimptotama, te paralele sijeku realnu os u dvije točke U i V tako da vrijedi*

$$|OU|\cdot|OV| = a^2,$$

pri čemu je O centar hiperbole.

Dokaz.
Neka je točka $T(x_1, y_1)$ točka hiperbole $\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2} = 1$. Jednadžba pravca p_1 koji prolazi točkom T paralelnog s asimptotom $y = \frac{b}{a}x$ je $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$, a jednadžba pravca p_2 paralelnog s asimptotom $y = -\frac{b}{a}x$ je $y - y_1 = -\frac{b}{a}(x - x_1)$. Točke U i V dobit ćemo presjekom x- osi i pravaca p_1 i p_2 redom.



$$\begin{aligned} 0 - y_1 &= \frac{b}{a}(x - x_1) \\ \frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}x_1 - y_1 \\ x &= x_1 - \frac{a}{b}y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 - y_1 &= -\frac{b}{a}(x - x_1) \\ \frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}x_1 + y_1 \\ x &= x_1 + \frac{a}{b}y_1. \end{aligned}$$

Dakle, $U\left(x_1 - \frac{a}{b}y_1, 0\right)$, $V\left(x_1 + \frac{a}{b}y_1, 0\right)$.

Izračunajmo produkt udaljenosti $|OU| \cdot |OV|$.

$$|OU| \cdot |OV| = \left|x_1 - \frac{a}{b}y_1\right| \cdot \left|x_1 + \frac{a}{b}y_1\right| = \left|x_1^2 - \frac{a^2}{b^2}y_1^2\right| = \left|\frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{b^2}\right|.$$

Budući da se točka T nalazi na hiperboli, za njene koordinate vrijedi sljedeće:

$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$. Uvrštavanjem navedenog u produkt udaljenosti dobivamo

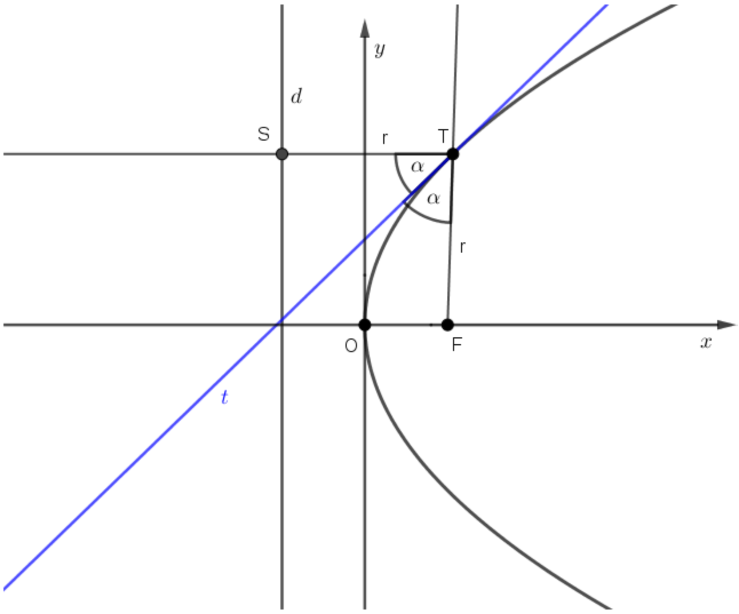
$$|OU| \cdot |OV| = \left|\frac{a^2b^2}{b^2}\right| = a^2.$$

□

3.3 Parabola

U sljedećim propozicijama, odabran je koordinatni sustav takav da mu se ishodište nalazi u tjemenu parabole, a x os podudara s osi parabole.

Propozicija 3.3.1. *Tangenta u nekoj točki parabole raspolavlja kut što ga tvore radij-vektori te točke.*



Dokaz.

Neka je t tangenta u točki $T(x_1, y_1)$ parabole $y^2 = 2px, p > 0$. Jednadžba te tangente je $yy_1 = p(x + x_1)$. Neka je točka S na direktrisi takva da su $\overline{TF}$ i $\overline{TS}$ radij vektori točke T. Po definiciji parabole, trokut TSF je jednakokračan. U jednakokračnom trokutu vrijedi da simetrala kuta nasuprot osnovice prolazi polovištem osnovice i okomita je na nju. Neka je t_1 simetrala kuta $\angle FTS$. Naći ćemo jednadžbu pravca t_1 i pokazati da je taj pravac ujedno i tangenta na parabolu u točki T. Koordinate navedenih točaka su: $T(x_1, y_1), F\left(\frac{p}{2}, 0\right), S\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$. Neka je P polovište dužine $\overline{FS}$. Slijedi da je

$$P\left(\frac{\frac{p}{2} - \frac{p}{2}}{2}, \frac{0 + y_1}{2}\right),$$

odnosno

$$P\left(0, \frac{y_1}{2}\right).$$

Pravac FS ima jednadžbu

$$y - 0 = \frac{y_1 - 0}{-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

odnosno

$$y = \frac{y_1}{-p}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Simetrala kuta t_1 okomita je na pravac FS i prolazi točkom P pa je njezina jednadžba

$$y - \frac{y_1}{2} = \frac{p}{y_1}(x - 0),$$

odnosno

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s y_1 dobije se

$$yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2}.$$

Kada iskoristimo činjenicu da se točka T nalazi na paraboli i da vrijedi $y_1^2 = 2px_1$, dobije se

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

što je zapravo jednadžba tangente t u točki T.

□

Propozicija 3.3.2. *Nožišta okomica spuštenih iz žarišta na tangente parabole leže na njezinoj tjemenoj tangenti.*

Dokaz. Neka je $yy_1 = p(x + x_1)$ jednadžba tangente parabole $y^2 = 2px$ u točki $T(x_1, y_1)$. Koeficijent smjera tangente je $\frac{p}{y_1}$. Okomica na tangentu je pravac čiji je koeficicijent smjera $-\frac{y_1}{p}$ pa okomica koja prolazi žarištem parabole ima jednadžbu

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}.$$

Označimo s N nožište te okomice na tangentu. Točka N se nalazi i na tangenti i na okomici pa ćemo njene koordinate dobiti rješavanjem sustava

$$\begin{cases} yy_1 = p(x + x_1) \\ y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}. \end{cases}$$

Slijedi $x_N = 0, y_N = \frac{px_1}{y_1}$. Budući da tjemena tangenta ima jednadžbu $x = 0$, zaključujemo da se točka N nalazi na tjemenoj tangenti.

□

Propozicija 3.3.3. *Točku S osnosimetričnu žarištu F s obzirom na tangentu parabole nazivamo suprotište žarišta. Sva suprotišta žarišta leže na ravnalici.*

Dokaz. Budući da je točka $S(x_S, y_S)$ osnosimetrična žarištu $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, nalazi se na pravcu FN, gdje je N nožište okomice spuštene iz F na tangentu. Osim toga, vrijedi i da je $|SN| = |NF|$, odnosno točka N je polovište dužine $\overline{SF}$. Računamo x koordinatu točke S. Vrijedi

$$x_N = \frac{x_S + x_F}{2}.$$

U propoziciji 3.3.2 smo dokazali da točka N leži na tjemenoj tangenti, odnosno da joj je apscisa jednaka 0. Uvrštavanjem x koordinata točaka F i N slijedi

$$0 = \frac{x_S + \frac{p}{2}}{2},$$

odnosno

$$x_S = -\frac{p}{2}.$$

Zaključujemo da se točka S nalazi na ravnalici $x = -\frac{p}{2}$.

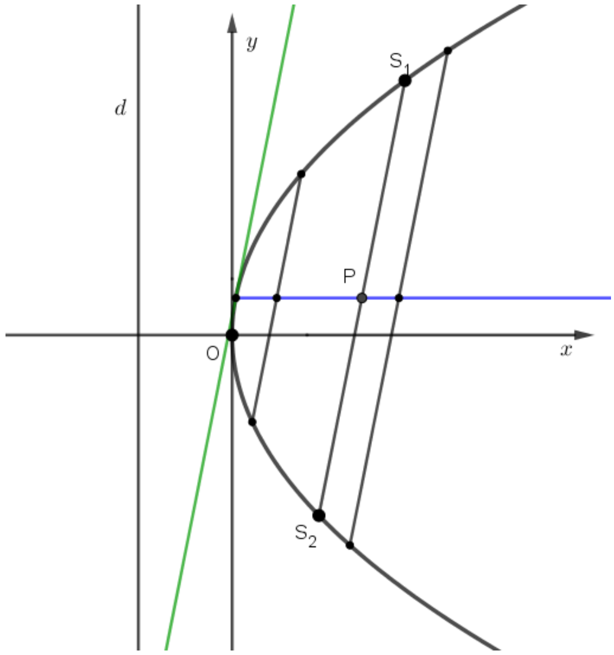
□

Propozicija 3.3.4. *Neka je dana tetiva parabole. Polovište svih tetiva paralelnih s danom tetivom čine polupravac paralelan s osi parabole. Nazivamo ga promjerom konjugiranom danoj tetivi. Tangenta paralelna danoj tetivi naziva se konjugiranom tangentom.*

Dokaz.
Neka je $y = kx + l$ pramen pravaca paralelnih zadanoj tetivi, pri čemu je $k \in \mathbb{R}$ fiksan, a $l \in \mathbb{R}$ varijabilan. Označimo sa $S_1(x_1, y_1)$ i $S_2(x_2, y_2)$ sjecišta dane tetive i parabole. Koordinate tih točaka su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Budući da želimo pokazati da polovišta dužina $\overline{S_1S_2}$ leže na pravcu paralelnom s osi x, računat ćemo samo ordinate sjecišta.



Uvrštavanjem $x = \dfrac{y - l}{k}$ u jednadžbu parabole, dobivamo

$$y^2 = 2p\frac{y - l}{k},$$

odnosno

$$ky^2 - 2py + 2pl = 0.$$

Koordinate polovišta tetive $\overline{S_1 S_2}$ su

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $ky^2 - 2py + 2pl = 0$ je $y_1 + y_2 = \dfrac{2p}{k}$ pa slijedi

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{p}{k}\right).$$

Vidimo da ordinata polovišta uvijek ima istu vrijednost (za zadanu parabolu i zadanu tetivu) tj. ne ovisi o parametru l. Zaključujemo da polovišta svih tetiva paralelnih zadanoj leže na pravcu $y = \dfrac{p}{k}$ koji je paralelan s osi parabole.

$\square$

Propozicija 3.3.5. *Tangente t_1 i t_2 parabole u krajnjim točkama D_1 i D_2 neke tetive sijeku se u točki na pravcu koji sadrži promjer koji je konjugiran toj tetivi. Dirališe Q pripadne konjugirane tangente q jednako je udaljeno od polovišta tetive $\overline{D_1D_2}$ i sjecišta tangenata t_1 i t_2.*

Dokaz. Neka je t_1 tangenta s diralištem u $D_1(x_1, y_1)$, a t_2 tangenta s diralištem u $D_2(x_2, y_2)$. $t_1...yy_1 = p(x + x_1)$ $t_2...yy_2 = p(x + x_2)$ Označimo sa $S(x_S, y_S)$ sjecište tangenti t_1 i t_2. Koordinate točke S dobit ćemo rješavajem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} yy_1 = p(x + x_1) \\ yy_2 = p(x + x_2). \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = \dfrac{p(x + x_1)}{y_1}$ iz prve jednadžbe u drugu dobivamo

$$\frac{p(x + x_1)}{y_1} \cdot y_2 = p(x + x_2)$$

$$y_2 \cdot p(x + x_1) = y_1 \cdot p(x + x_2)$$

$$(y_2 - y_2)x = x_2y_1 - x_1y_2$$

$$x = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}.$$

Kada dobivenu apscisu točke S uvrstimo u jednu od jednadžbi, dobije se $y = p \cdot \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

Dakle, $S\left(\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}, p \cdot \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)$.

U propoziciji 3.3.4 smo pokazali da polovišta paralelnih tetiva parabole leže na pravcu $y = \dfrac{p}{k}$, gdje je k koeficijent smjera pravca koji odsjeca spomenute tetive. Koeficijent smjera tetive $\overline{D_1D_2}$ je $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pa vidimo da točka S također leži na pravcu $y = \dfrac{p}{k}$. Zaključujemo da se S zaista nalazi na pravcu koji sadrži promjer konjugiran tetivi $\overline{D_1D_2}$.

Preostaje pokazati da je $|SQ| = |QP|$, gdje je P polovište $\overline{D_1D_2}$.

Točka Q se nalazi na pravcu $y = \dfrac{p}{k}$ i na tangenti $y = kx + l$. Da bi pravac $y = kx + l$ zaista bio tangenta parabole $y^2 = 2px$, mora zadovoljavati uvjet dodira, tj. mora vrijediti $p = 2kl$. Odavde slijedi da je $l = \dfrac{p}{2k}$, pa je jednadžba tangente oblika $y = kx + \dfrac{p}{2k}$.

Dakle, x koordinatu točke Q dobit ćemo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + \dfrac{p}{2k} \\ y = \dfrac{p}{k}. \end{cases}$$

Izjednačavanjem navedenih jednadžbi dobije se da je $x_Q = \dfrac{p}{2k^2}$.

Pokazat ćemo da je točka Q polovište dužine $\overline{SP}$.

$$\begin{aligned} \frac{x_S + x_P}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_2 - y_1} + \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1 y_1 + x_2 y_2}{2(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2(x_2 - x_1) + y_1(x_2 - x_1)}{2(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{1}{2k} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{1}{2k} \cdot \frac{p}{k} \\ &= \frac{p}{2k^2} \\ &= x_Q. \end{aligned}$$

□

Propozicija 3.3.6. *Sjecište triju tangenata parabole i žarište parabole vrhovi su tetivnog četverokuta.*

Dokaz. Četverokut je tetivan ako mu se može opisati kružnica. Pokazat ćemo da žarište parabole leži na kružnici opisanoj sjecištima tangenata parabole. Neka su t_1, t_2 i t_3 tangente parabole $y^2 = 2px$ s diralištima u točkama $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ i $T_3(x_3, y_3)$ redom. Tangente imaju sljedeće jednadžbe

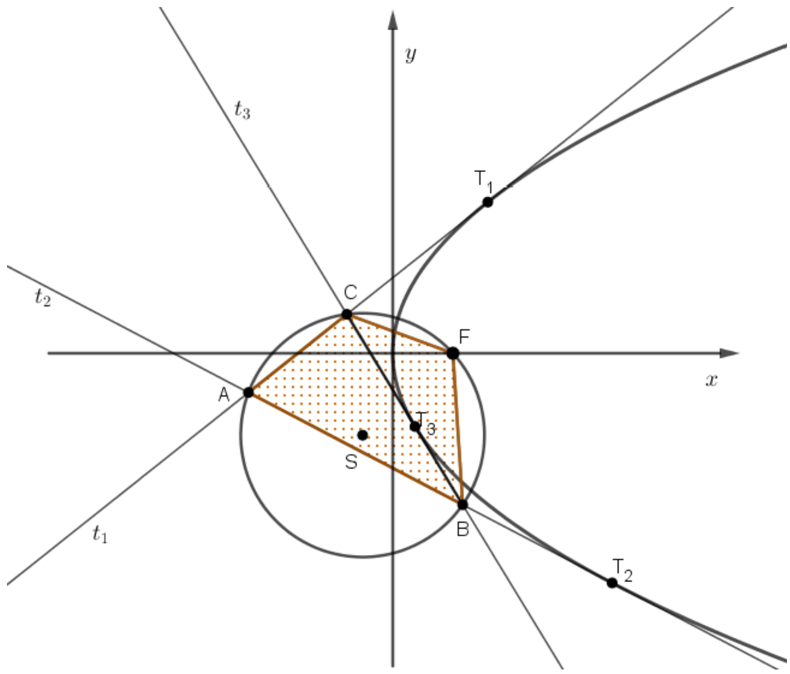
$$t_1 ... yy_1 = p(x + x_1),$$

$$t_2 ... yy_2 = p(x + x_2),$$

$$t_3 ... yy_3 = p(x + x_3),$$

odnosno

$$t_1 ... yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2},$$
$$t_2 ... yy_2 = px + \frac{y_2^2}{2},$$
$$t_3 ... yy_3 = px + \frac{y_3^2}{2}.$$



Slika 3.1: Tetivni četverokut

Neka su točke A, B i C presjeci tangenata, $A = t_1 \cap t_2$, $B = t_2 \cap t_3$ i $C = t_1 \cap t_3$. Koordinate tih točaka dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi navedenih tangenata. Slijedi:

$$A\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),\ B\left(\frac{y_2 y_3}{2p}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right),\ C\left(\frac{y_1 y_3}{2p}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Središte trokutu ABC opisane kružnice odredit ćemo kao presjek simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Polovišta stranica P_{AB} i P_{AC} imaju koordinate

$$P_{AB} = \left(\frac{y_2(y_1 + y_3)}{4p}, \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}\right)$$

i

$$P_{AC} = \left(\frac{y_1(y_2 + y_3)}{4p}, \frac{2y_1 + y_2 + y_3}{4} \right).$$

Koeficijent smjera pravca AB je

$$k_{AB} = \frac{\frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{y_2 y_3}{2p} - \frac{y_1 y_2}{2p}} = \frac{\frac{y_3 - y_1}{2}}{\frac{y_2(y_3 - y_1)}{2p}} = \frac{p}{y_2}.$$

Slijedi da je koeficijent smjera simetrale stranica $\overline{AB}$

$$k'_{AB} = -\frac{y_2}{p}.$$

Analogno, imamo da je

$$k_{AC} = \frac{\frac{y_1 + y_3}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{y_1 y_3}{2p} - \frac{y_1 y_2}{2p}} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{2}}{\frac{y_1(y_3 - y_2)}{2p}} = \frac{p}{y_1},$$

pa je

$$k'_{AC} = -\frac{y_1}{p}.$$

Iz toga slijedi da simetrale stranica AB i AC imaju jednadžbe

$$s_{AB} ... y = -\frac{y_2}{p} x + \frac{y_2^2(y_1 + y_3)}{4p^2} + \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4},$$

$$s_{AC} ... y = -\frac{y_1}{p} x + \frac{y_1^2(y_2 + y_3)}{4p^2} + \frac{2y_1 + y_2 + y_3}{4}.$$

Koordinate središta S kružnice opisane trokutu ABC dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = -\frac{y_2}{p} x + \frac{y_2^2(y_1 + y_3)}{4p^2} + \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4} \\ y = -\frac{y_1}{p} x + \frac{y_1^2(y_2 + y_3)}{4p^2} + \frac{2y_1 + y_2 + y_3}{4}. \end{cases}$$

Slijedi

$$S\left(\frac{p}{4} + \frac{y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3}{4p}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4} - \frac{y_1 y_2 y_3}{4p^2} \right).$$

Polumjer kružnice je $R = |AS| = |BS| = |CS|$. Slijedi

$$R^2 = \left(\frac{p}{4} + \frac{y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3}{4p} - \frac{y_1y_2}{2p}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{4} - \frac{y_1y_2y_3}{4p^2} - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$R^2 = \left(\frac{p}{4} + \frac{-y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3}{4p}\right)^2 + \left(\frac{-y_1 - y_2 + y_3}{4} - \frac{y_1y_2y_3}{4p^2}\right)^2.$$

Preostaje još pokazati da i žarište $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ hiperbole pripada navedenoj kružnici. Odredimo kvadrat udaljenosti $|FS|$.

$$|FS|^2 = \left(\frac{y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3}{4p} - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{4} - \frac{y_1y_2y_3}{4p^2}\right)^2.$$

Raspisivanjem prethodnog izraza dobije se da je on jednak upravo R^2 pa slijedi da je $|FS| = R$. Zaključujemo da se žarište F nalazi na kružnici opisanoj trokutu ABC pa je četverokut $ABFC$ tetivan i time je dokaz gotov.

□

Propozicija 3.3.7. *Ako tangenta t neke točke T parabole siječe os u točki U , a normala u točki V i pri tome je K nožište okomice iz točke T na os, onda vrijedi:*

$$|UA| = |AK|, \qquad |UF| = |FV|.$$

Dokaz. Tangenta t parabole u točki $T(x_1, y_1)$ ima jednadžbu $yy_1 = p(x + x_1)$, a normala n parabole u istoj točki ima jednadžbu $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$. S obzirom da se sve točke U, V, K i A nalaze na osi parabole (x-osi), znamo da im je ordinata jednaka 0. Potrebno je odrediti apscise navedenih točaka. Apscisu točke U dobit ćemo određivanjem presjeka tangente t s osi x.

$$\begin{aligned} 0 \cdot y_1 &= p(x + x_1) \\ 0 &= p(x + x_1) \\ x + x_1 &= 0 \\ x &= -x_1. \end{aligned}$$

Dakle, $U(-x_1, 0)$.

Apscisu točke V dobit ćemo određivanjem presjeka normale n s osi x.

$$\begin{aligned}
0 - y_1 &= -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \\
-y_1 &= -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{p}x_1 \\
\frac{y_1}{p}x &= \frac{y_1}{p}x_1 + y_1 \\
x &= x_1 + p.
\end{aligned}$$

Dakle, $V(x_1 + p, 0)$. Točka K ima istu apscisu kao i točka T, pa slijedi $K(x_1, 0)$. Koordinate žarišta i tjemena su nam također poznate. $A(0, 0), F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Izračunajmo udaljenosti $|UA|, |AK|, |UF|$ i $|FV|$.

$$\begin{aligned}
|UA| &= |x_U| = |-x_1| = x_1, \\
|AK| &= |x_K| = |x_1| = x_1, \\
|UF| &= |x_F - x_U| = \left|\frac{p}{2} - (-x_1)\right| = \frac{p}{2} + x_1, \\
|FV| &= |x_V - x_F| = \left|x_1 + p - \frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2} + x_1.
\end{aligned}$$

Vidimo da vrijedi $|UA| = |AK|, |UF| = |FV|$, pa je time tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 4

Konike u srednjoškolskom obrazovanju

Definiciju, jednadžbu i temeljna svojstva elipse, hiperbole i parabole, učenici rade u trećem razredu srednje škole. U ovom poglavlju prikazat ćemo neke od zadataka vezanih uz krivulje drugog reda, koji su se pojavljivali na matematičkim natjecanjima. Svi odabrani zadatci su za natjecatelje koji pohađaju četvrti razred srednje škole te su riješeni koordinatnom metodom.

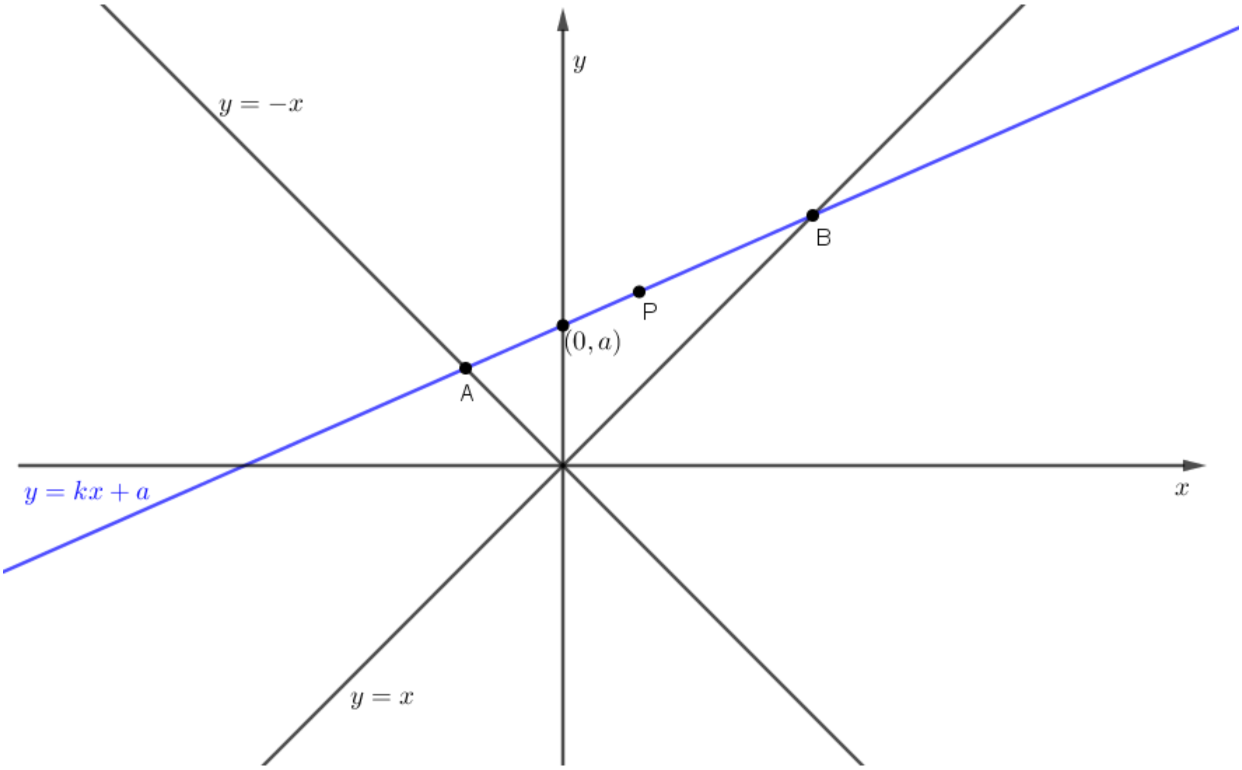
Prvo ćemo prikazati rješenje primjera koji se pojavio na državnom natjecanju školske godine 2006./2007. u B kategoriji. Primjer je preuzet iz izvora [4].

Primjer 4.0.1. *Pravac kroz* $(0, a)$ *siječe simetrale kvadranata koordinatnog sustava u točkama* A *i* B*. Pokažite da polovište dužine* $\overline{AB}$ *leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.*

Rješenje:
Neka je p pravac koji prolazi točkom $(0, a)$. Njegova jednadžba je oblika $y = kx + a$. Simetrale kvadranata koordinatnog sustava su pravci čije su jednadžbe $y = -x$ i $y = x$.

Odredimo sjecište pravca $y = -x$ s pravcem p :

$$\begin{aligned}
-x &= kx + a \\
-x - kx &= a \\
x(-1 - k) &= a \\
x &= -\frac{a}{1 + k} \\
y &= \frac{a}{1 + k}.
\end{aligned}$$



Dakle, sjecište pravaca $y = -x$ i p je točka

$$A\left(-\frac{a}{1+k}, \frac{a}{1+k}\right).$$

Odredimo sjecište pravca $y = x$ s pravcem p :

$$x = kx + a$$

$$x - kx = a$$

$$x(1-k) = a$$

$$x = \frac{a}{1-k}$$

$$y = \frac{a}{1-k}.$$

Dakle, sjecište pravaca $y = x$ i p je točka

$$B\left(\frac{a}{1-k}, \frac{a}{1-k}\right).$$

Koordinate polovište P dužine $\overline{AB}$ su

$$x_P = \frac{-\dfrac{a}{1+k} + \dfrac{a}{1-k}}{2} = \frac{-a(1-k) + a(1+k)}{2(1-k^2)} = \frac{ak}{1-k^2},$$

$$y_P = \frac{\dfrac{a}{1+k} + \dfrac{a}{1-k}}{2} = \frac{a(1-k) + a(1+k)}{2(1-k^2)} = \frac{a}{1-k^2}.$$

Dakle

$$P\left(\frac{ak}{1-k^2}, \frac{a}{1-k^2}\right).$$

Očito vrijedi $y = \dfrac{x}{k}$, odnosno $k = \dfrac{x}{y}$. Uvrštavanjem navednog u $y = \dfrac{a}{1-k^2}$ dobivamo

$$y = \frac{a}{1 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}.$$

Sređivanjem dolazimo do jednadžbe hiperbole

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{a^2}{4},$$

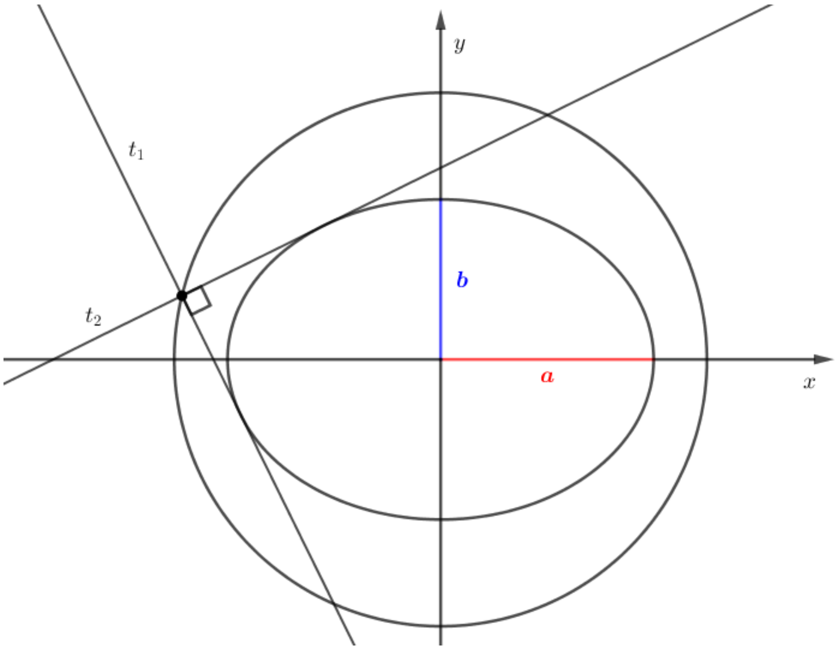
odnosno

$$\frac{\left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4}} - \frac{x^2}{\dfrac{a^2}{4}} = 1.$$

Dakle, polovišta P dužine $\overline{AB}$ opisuju hiperbolu navedene jednadžbe. Središte te hiperbole je točke $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ i hiperbola ima fokuse na osi ordinata.

Sada ćemo dokazati propoziciju koja se pojavila na školskom natjecanju u A kategoriji školske godine 2007./2008. Propozicija je preuzeta iz izvora [5].

Propozicija 4.0.2. *Zadana je elipsa s jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dokaži da sva sjecišta po dvije međusobno okomite tangente ove elipse leže na istoj kružnici.*



Slika 4.1: Okomite tangente elipse

Dokaz.
Neka su t_1 i t_2 dvije međusobno okomite tangente elipse

$$t_1 ... y = kx + l_1,$$

$$t_2 ... y = -\frac{1}{k}x + l_2.$$

Iz uvjeta dodira pravaca t_1 i t_2 i elipse, imamo

$$a^2k^2 + b^2 = l_1^2, \quad a^2 + k^2b^2 = k^2l_2^2. \tag{4.1}$$

Koordinate sjecišta tangenti su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx + l_1 \\ y = -\dfrac{1}{k}x + l_2. \end{cases}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
kx + l_1 &= -\frac{1}{k}x + l_2\\
k^2x + kl_1 &= -x + kl_2\\
(k^2+1)x &= kl_2 - kl_1\\
x &= \frac{k(l_2 - l_1)}{k^2+1}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$y = \frac{k^2(l_2 - l_1)}{k^2+1} + l_1 = \frac{k^2 l_2 + l_1}{k^2+1}.$$

Zbrajanjem $x^2 + y^2$ dobivamo

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \frac{k^2(l_2 - l_1)^2}{(k^2+1)^2} + \frac{(k^2 l_2 + l_1)^2}{(k^2+1)^2}\\
&= \frac{k^2 l_2^2 - 2k^2 l_2 l_1 + k^2 l_1^2 + k^4 l_2^2 + 2k^2 l_2 l_1 + l_1^2}{(k^2+1)^2}\\
&= \frac{k^2 l_2^2 (k^2+1) + l_1^2 (k^2+1)}{(k^2+1)^2}\\
&= \frac{(k^2+1)(k^2 l_2^2 + l_1^2)}{(k^2+1)^2}\\
&= \frac{k^2 l_2^2 + l_1^2}{k^2+1}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (4.1) u prethodnu jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \frac{a^2 + k^2 b^2 + a^2 k^2 + b^2}{k^2+1}\\
&= \frac{k^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2}{k^2+1}\\
&= \frac{(a^2 + b^2)(k^2+1)}{k^2+1}\\
&= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

Dakle vidimo da sva sjecišta po dvije medusobno okomite tangente ove elipse leže na kružnici $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

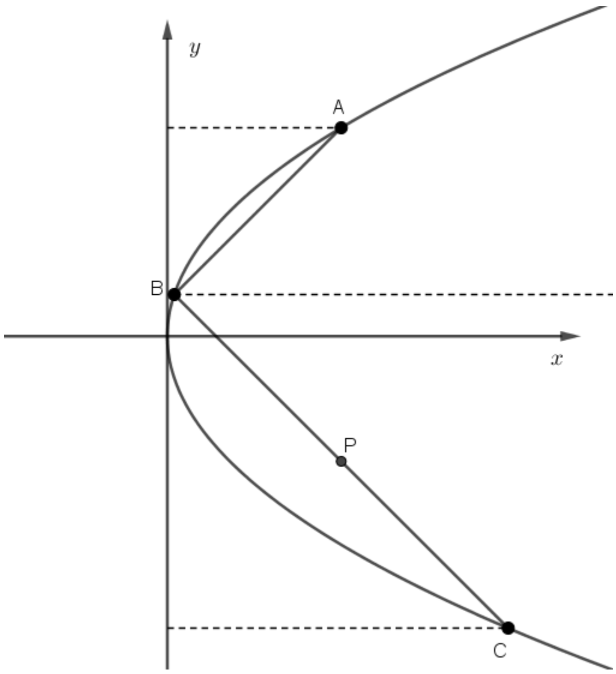
□

Sada ćemo riješiti primjer koji se pojavio na županijskom natjecanju u A kategoriji školske godine 2009./2010. Primjer je preuzet iz izvora [3].

Primjer 4.0.3. *Dana je parabola $y^2 = 2px$, $p > 0$. Na paraboli su dane točke A, B i C (A ima najveću, a C najmanju ordinatu) tako da je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ paralelna s x-osi. Ako je duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os jednaka $4p$, odredi ordinatu polovišta dužine $\overline{BC}$.*

Rješenje:

Koordinate točaka A, B i C su $A\left(\frac{y_A^2}{2p}, y_A\right)$, $B\left(\frac{y_B^2}{2p}, y_B\right)$, $C\left(\frac{y_C^2}{2p}, y_C\right)$.



Slika 4.2: Parabola

Budući da je simetrala $\sphericalangle ABC$ paralelna s x-osi, zaključujemo da pravci AB i BC s pozitivnim dijelom x-osi zatvaraju suplementarne kutove. To znači da su im koeficijenti smjera suprotni, odnosno $k_{AB} = -k_{BC}$. Slijedi

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_B - y_A}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_A^2}{2p}} &= -\frac{y_C - y_B}{\frac{y_C^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} \\
\frac{y_B - y_A}{y_B^2 - y_A^2} &= -\frac{y_C - y_B}{y_C^2 - y_B^2} \\
\frac{1}{y_B + y_A} &= -\frac{1}{y_C + y_B} \\
y_B + y_A &= -y_C - y_B \\
y_A + 2y_B + y_C &= 0. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Budući da je duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os jednaka $4p$, to možemo zapisati kao $y_A - y_C = 4p$, odnosno $y_A = y_C + 4p$. Uvrštavanjem u (4.2) dobivamo

$$y_C + 4p + 2y_B + y_C = 0$$

$$2y_B + 2y_C = -4p$$

$$y_B + y_C = -2p$$

$$\frac{y_B + y_C}{2} = -p$$

pa je ordinata polovišta P dužine $\overline{BC}$ jednaka $y_P = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -p$.

Posljednju ćemo dokazati propoziciju koja se pojavila na školskom natjecanju u A kategoriji školske godine 2013./2014. Propozicija je preuzeta iz izvora [1].

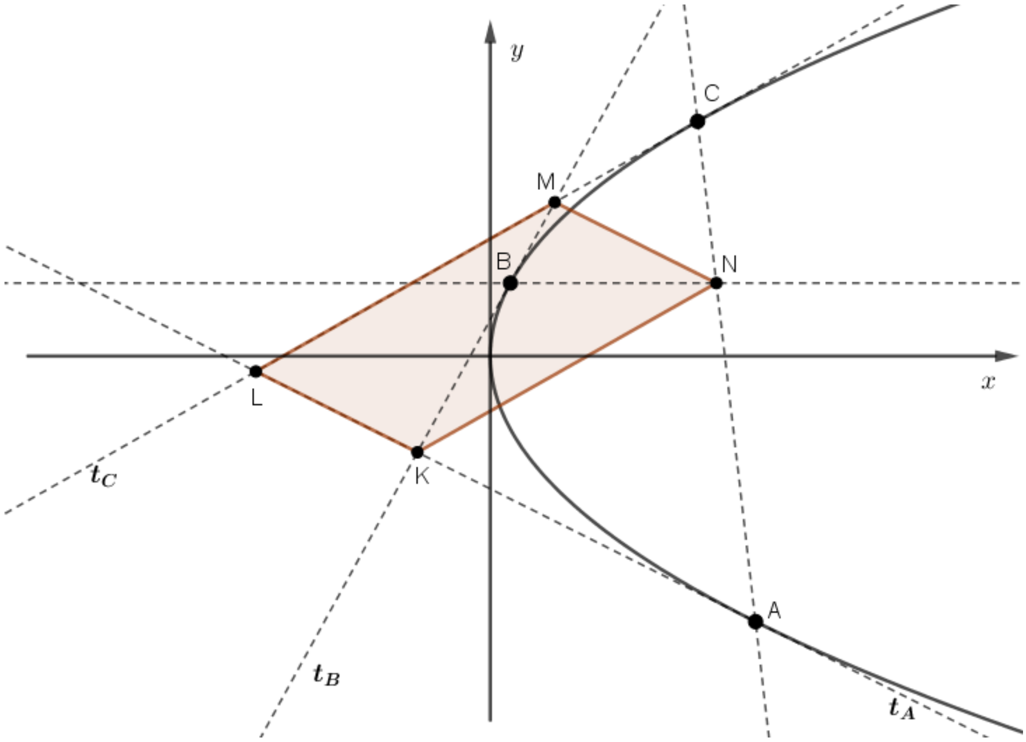
Propozicija 4.0.4. *Točkama A, B i C parabole povučene su tangente na tu parabolu. One se u parovima sijeku u točkama K, L i M tako da je KL tangenta u točki A , KM tangenta u točki B, a LM tangenta u točki C. Presjek pravca AC i paralele s osi parabole kroz točku B je točka N. Dokaži da je četverokut $KLMN$ paralelogram.*

Dokaz.
Neka je $y^2 = 2px$ jednadžba parabole i neka su t_A, t_B i t_C tangente parabole povučene u točkama $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$. Jednadžbe tih tangenti su:

$$t_A ... yy_A = p(x + x_A),$$

$$t_B ... yy_B = p(x + x_B),$$

$$t_C ... yy_C = p(x + x_C).$$



Slika 4.3: Četverokut $KLMN$

Točke K, L i M su sjecišta odgovarajućih tangenti pa njihove koordinate dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi.

Rješavanjem sustava

$$\begin{cases} yy_A = p(x + x_A) \\ yy_B = p(x + x_B) \end{cases}$$

dobivamo

$$K = \left(\frac{y_A x_B - x_A y_B}{y_B - y_A}, \frac{p(x_B - x_A)}{y_B - y_A} \right).$$

Budući da točke A, B i C leže na paraboli, za njihove koordinate vrijedi

$$x_A = \frac{y_A^2}{2p}, x_B = \frac{y_B^2}{2p}, x_C = \frac{y_C^2}{2p}.$$

Uvrštavanjem navedenog u koordinate točke K dobivamo

$$K\left(\frac{y_A\cdot\dfrac{y_B^2}{2p}-y_B\cdot\dfrac{y_A^2}{2p}}{y_B-y_A}, p\cdot\frac{\dfrac{y_B^2}{2p}-\dfrac{y_A^2}{2p}}{y_B-y_A}\right),$$

odnosno

$$K\left(\frac{y_Ay_B}{2p},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Analogno se dobiju i koordinate točaka L i M:

$$L\left(\frac{y_Ay_C}{2p},\frac{y_A+y_C}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{y_By_C}{2p},\frac{y_B+y_C}{2}\right).$$

Pravac AC ima jednadžbu

$$y-y_A=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}(x-x_A),$$

a paralela s x-osi kroz točku B ima jednadžbu $y=y_B$. Rješavanjem sustava tih dviju jednadžbi dobivamo koordinate točke N. Slijedi

$$N\left(\frac{(y_B-y_A)(x_C-x_A)}{y_C-y_A}+x_A, y_B\right).$$

Koristeći činjenicu da točke A, B i C leže na paraboli, dobivamo

$$N\left(\frac{y_Ay_B-y_Ay_C+y_By_C}{2p}, y_B\right).$$

Da bismo dokazali da je četverokut $KLMN$ paralelogram, dovoljno je dokazati da mu se dijagonale raspolavljaju, odnosno da se polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ podudaraju.

$$P_{KM}=\left(\frac{x_K+x_M}{2},\frac{y_K+y_M}{2}\right)=\left(\frac{y_Ay_B+y_By_C}{4p},\frac{y_A+2y_B+y_C}{4}\right),$$

$$P_{LN}=\left(\frac{x_L+x_N}{2},\frac{y_L+y_N}{2}\right)=\left(\frac{y_Ay_B+y_By_C}{4p},\frac{y_A+2y_B+y_C}{4}\right).$$

Vidimo da se polovišta dužina podudaraju pa zaključujemo da je četverokut $KLMN$ paralelogram.

□

Napomena: Zadatak se mogao riješiti na još nekoliko načina. Četverokut je paralelogram ako su mu nasuprotne stranice paralelne, pa se nakon određivanja koordinata točaka K, L, M i N moglo pokazati da je $KL \parallel MN$ i $LM \parallel KN$. Također, četverokut je paralelogram ako su mu nasuprotne stanice jednake duljine, pa se nakon određivanja koordinata točaka K, L, M i N moglo pokazati da je $|KL| = |MN|$ i $|LM| = |KN|$.

Bibliografija

[1] M. Bašić, Ž. Buranji, Ž. Hanjš, K.A. Škreb, V. Weber, *Matematička natjecanja 2013./2014*, Element, Zagreb, 2015.

[2] M. Bombardelli, Ž. Milin Šipuš, *Analitička geometrija*, Predavanja i zadaci za vježbu, web stranici pristupljeno 18. 6. 2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf`

[3] Ž. Hanjš, *Matematička natjecanja 2009./2010*, Element, Zagreb, 2011.

[4] Ž. Hanjš, M. Krnić, *Matematička natjecanja 2006./2007*, Element, Zagreb, 2008.

[5] Ž. Hanjš, M. Krnić, *Matematička natjecanja 2007./2008*, Element, Zagreb, 2009.

[6] A. Marić, *Čunjosječnice*, Element, Zagreb, 2004.

[7] I. Mirošević, N. Koceić-Bilan, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, web stranici pristupljeno 14. 6. 2019.
`https://hrcak.srce.hr/file/212655`

[8] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[9] M. Suvalj, *Krivulje drugog reda i primjene*, Diplomski rad, web stranici pristupljeno 16. 5. 2019.
`http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/SUV03.pdf`

[10] S. Varošanec, *Krivulje drugog reda*, Skripta, web stranici pristupljeno 10. 5. 2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/nacrt20-36.pdf`

[11] web stranici pristupljeno 10. 5. 2019.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/konikesvoj.pdf`

[12] web stranici pristupljeno 9. 8. 2019.
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Notes/Geometry/conics-2015.pdf

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se različitim pristupima krivuljama drugog reda.
Na početku rada naveli smo metričke definicije elipse, hiperbole i parabole. Potom smo krivulje drugog reda definirali na još nekoliko načina: pomoću Papus-Boškovićeve definicije, algebarske definicije te kao presjek stožaste plohe ravninom. Dokazali smo da su navedene definicije ekvivalentne metričkoj definiciji svake od krivulja. U drugom dijelu rada naveli smo svojstva elipse, hiperbole i parabole te ih dokazali koordinatnom metodom. Prikazano je i nekoliko zadataka s matematičkih natjecanja te su odabrani zadatci riješeni koordinatnom metodom.

Summary

In this thesis, we considered different approaches to the second-order curves.
In the first part of the thesis, we gave metric definitions of ellipse, hyperbola and parabola. Then we defined the second-order curves in several other ways using the Pappus-Bošković definition, the algebraic definition, and as intersection of a conical surface. We have proved that the above definitions are equivalent to the metric definition of each of the curves.
In the second part of the thesis we stated the properties of an ellipse, hyperbola and parabola and proved them with coordinate method. We also presented several mathematical competitions problems and solved them with coordinate method.

Životopis

Moje ime je Danica Govorko. Rođena sam 21. ožujka 1995. godine u Splitu. Svoje obrazovanje započela sam 2001. godine u Osnovnoj školi Vrgorac u Vrgorcu. Potom sam upisala srednju školu Tina Ujevića, smjer opće gimnazije, također u Vrgorcu. Maturirala sam 2013. godine te u srpnju iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2017. godine upisala sam i diplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički, na istom fakultetu.