

# Klasični rezultati globalne teorije ravninskih krivulja

---

**Grabovac, Mateo**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:560233>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Mateo Grabovac

**Klasični rezultati globalne teorije  
ravninskih krivulja**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Doc. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

*Mojoj majci.*

<i>SADRŽAJ</i>	4
----------------	---

## **Sadržaj**

<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Euklidska i kruta gibanja u <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>2</b>
<b>3 Opća teorija krivulja</b>	<b>6</b>
<b>4 Ravninske krivulje</b>	<b>12</b>
<b>5 Hopfov teorem o indeksu rotacije</b>	<b>22</b>
<b>6 Izoperimetrijska nejednakost</b>	<b>26</b>
<b>7 Teorem o četiri tjemena</b>	<b>31</b>
<b>Literatura</b>	<b>35</b>
<b>Sažetak</b>	<b>36</b>
<b>Summary</b>	<b>37</b>
<b>Životopis</b>	<b>38</b>

## 1 Uvod

Diferencijalna geometrija bavi se proučavanjem geometrijskih svojstava elemenata prostora na kojima se mogu primjenjivati metode diferencijalnog računa. Diferencijalna geometrija nastala je i razvijala se u uskoj vezi s matematičkom analizom, koja je u značajnoj mjeri izrasla iz problema u geometriji.

Svoje početke duguje francuskom matematičaru Gaspardu Mongeu (1746.-1818.) koji 1795. godine objavljuje traktat o plohama *Une application d'analyse à la géométrie*, pa ga stoga nazivamo začetnikom diferencijalne geometrije. Svoje značajne doprinose u području diferencijalne geometrije dali su također švicarski matematičar, fizičar i astronom Leonhard Euler (1707.-1783.) i njemački matematičar i astronom Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.). Carl Friedrich Gauss 1827. godine objavljuje rad pod nazivom *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*. U tom djelu uvodi sistematsku upotrebu parametarskoga predočenja ploha, dvije osnovne kvadratne forme, sferno preslikavanje i na osnovi toga pojam zakrivljenosti u točki plohe. U istom djelu dokazan je i osnovni teorem o invarijantnosti zakrivljenosti plohe pri izometričnom preslikavanju, tzv. *Theorema egregium*. Taj rad postavio je temelje teorije ploha u njezinom modernom obliku. Od tada diferencijalna geometrija postaje neovisna grana matematike i danas je jedno od izrazito aktivnih područja istraživanja. Njene primjene su mnogobrojne, pogotovo u fizici, s posebnim naglaskom na teoriju relativnosti.

Cilj ovog diplomskog rada je predstavljanje klasičnih rezultata globalne teorije ravninskih krivulja u okvirima diferencijalne geometrije. Pritom ćemo dokazati tri teorema: Hopfov teorem o indeksu rotacije, Izoperimetrijsku nejednakost i Teorem o četiri tjemena.

## 2 Euklidska i kruta gibanja u $\mathbb{R}^n$

Neka je zadan unitarni prostor

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

sa standardnim (euklidskim) skalarnim produktom

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

i induciranom normom

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Neka je  $e_j$ , za  $1 \leq j \leq n$ , vektor iz  $\mathbb{R}^n$  čija je  $j$ -ta koordinata 1 a sve ostale 0. Tada je  $(e_j)_{j=1}^n$  ortonormirana baza za  $\mathbb{R}^n$ . Zovemo ju još i kanonska baza ili standardna ortonormirana baza (ONB) za  $\mathbb{R}^n$ .

Neka je  $M_n(\mathbb{R})$  skup svih realnih kvadratnih matrica reda  $n$ . Neka je  $I$  jedinična matrica u  $M_n(\mathbb{R})$  i neka je  $A^t$  transponirana matrica matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Svaku realnu  $n$ -torku  $(x_1, \dots, x_n)$  možemo prikazati i kao jednostupčanu matricu koristeći identifikaciju

$$(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Definicija 2.1.** Za matricu  $A \in M_n(\mathbb{R})$  kažemo da je ortogonalna ako vrijedi  $A^t A = A A^t = I$ .

Skup svih ortogonalnih matrica u  $M_n(\mathbb{R})$  označavamo s  $O(n)$ . Tada je  $O(n)$  grupa s obzirom na standardno množenje matrica.

**Propozicija 2.2.** Matrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je ortogonalna ako i samo ako njeni stupci čine ortonormiranu bazu za  $\mathbb{R}^n$ . Također, ako je  $A$  ortogonalna matrica tada vrijedi  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Definicija 2.3.** Za preslikavanje  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kažemo da je **euklidsko gibanje** ako čuva udaljenost, tj. ako vrijedi

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Primjer 2.4.** Svaka translacija  $x \mapsto x + b$  ( $b \in \mathbb{R}^n$ ) je euklidsko gibanje. Također, ako je  $A \in O(n)$  tada je i preslikavanje  $x \mapsto Ax$  euklidsko gibanje.

Kompozicija euklidskih gibanja je euklidsko gibanje. Posebno, svako preslikavanje  $F_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  oblika  $F_{A,b} : x \mapsto Ax + b$ , gdje su  $A \in O(n)$  i  $b \in \mathbb{R}^n$ , je također euklidsko gibanje.

**Teorem 2.5.** Preslikavanje  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je euklidsko gibanje ako i samo ako postoje  $A \in O(n)$  i  $b \in \mathbb{R}^n$  tako da vrijedi  $\phi = F_{A,b}$ . Pritom su matrica  $A$  i vektor  $b$  jedinstveno određeni s  $\phi$ .

Da bismo dokazali ovaj teorem potrebna nam je sljedeća tvrdnja:

**Propozicija 2.6.** Neka je  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  euklidsko gibanje takvo da vrijedi  $\phi(0) = 0$ . Tada vrijedi

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Posljedično, postoji ortogonalna matrica  $A \in O(n)$  takva da je  $\phi(x) = Ax$  za sve  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Dokaz.* Dokažimo prvo propoziciju. Za proizvoljne  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad (2)$$

Ako na mjesto  $x$  i  $y$  u gornjoj jednakosti stavimo  $\phi(x)$  i  $\phi(y)$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(y)\|^2 &= \|\phi(x)\|^2 - 2\langle \phi(x), \phi(y) \rangle + \|\phi(y)\|^2 \\ &= \|\phi(x) - \phi(0)\|^2 - 2\langle \phi(x), \phi(y) \rangle + \|\phi(y) - \phi(0)\|^2 \\ &= \|x - 0\|^2 - 2\langle \phi(x), \phi(y) \rangle + \|y - 0\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\langle \phi(x), \phi(y) \rangle + \|y\|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Iz  $\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\|$  slijedi  $\|\phi(x) - \phi(y)\|^2 = \|x - y\|^2$  pa izjednačavajući desne strane kod (2) i (3) dolazimo do tražene jednakosti (1).

Još je potrebno pokazati da je  $\phi(x) = Ax$  za neku  $A \in O(n)$ . Neka je  $f_j := \phi(e_j)$  za  $1 \leq j \leq n$ . Prema dokazanom,  $\phi$  čuva skalarni produkt, pa je  $(f_j)_{j=1}^n$  također ONB za  $\mathbb{R}^n$ . Neka je  $A \in M_n(\mathbb{R})$  matrica kojoj u  $j$ -tom stupcu stoje koeficijenti od  $f_j$  s obzirom na kanonsku bazu  $(e_j)_{j=1}^n$ . Iz propozicije 2.2. slijedi da je  $A \in O(n)$  i  $\phi(e_j) = Ae_j$  za sve  $1 \leq j \leq n$ . Stoga za svaki  $x \in \mathbb{R}^n$  vrijedi:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \langle \phi(x), f_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^n \langle \phi(x), \phi(e_j) \rangle \phi(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle Ae_j = Ax.$$

□



Sada dokažimo teorem 2.5.

*Dokaz.* Iz primjera 2.4. slijedi dokaz smjera ( $\Leftarrow$ ).

Za dokaz drugog smjera pretpostavimo da je  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  euklidsko gibanje. Definirajmo sada novo preslikavanje  $\phi'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  na način  $\phi'(x) := \phi(x) - \phi(0)$ . Tako definirano preslikavanje je također euklidsko gibanje i vrijedi  $\phi'(0) = 0$ . Prema propoziciji 2.6. postoji ortogonalna matrica  $A \in O(n)$  takva da je  $\phi'(x) = Ax$ , tj.

$$\phi(x) = F_{A, \phi(0)}(x) = Ax + \phi(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Budući da su stupci matrice  $A$  slike vektora standardne baze od  $\mathbb{R}^n$  po linearnom operatoru  $\phi'$ , matrica  $A$  je jedinstvena.  $\square$

Skup svih euklidskih gibanja prostora  $\mathbb{R}^n$  označimo s  $E(n)$ . Vrijedi

$$E(n) = \{F_{A,b} : A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ako promotrimo  $E(n)$  s obzirom na kompoziciju funkcija tada  $E(n)$  ima strukturu grupe. Zaista, neutralni element je identiteta  $I$ , produkt je dan s

$$F_{A,b} \circ F_{B,c} = F_{AB, Ac+b},$$

a inverz s

$$(F_{A,b})^{-1} = F_{A^{-1}, -A^{-1}b}.$$

Prema tome je  $E(n)$  grupa s obzirom na kompoziciju funkcija.

Budući da je determinanta invarijantna s obzirom na transponiranje matrica, koristeći Binet-Cauchyjev teorem, zaključujemo da je determinanta svake ortogonalne matrice jednaka  $\pm 1$ :

$$\det(AA^t) = \det I \Leftrightarrow \det(AA^t) = 1 \Leftrightarrow \det A \det A^t = 1 \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det A = \pm 1.$$

**Definicija 2.7.** Za matricu  $A \in O(n)$  kažemo da je **specijalna ortogonalna matrica** ako je  $\det A = 1$ . Skup svih specijalnih ortogonalnih matrica reda  $n$  označavamo s  $SO(n)$ .

Sljedeću standardnu činjenicu navodimo bez dokaza.

**Propozicija 2.8.** (a) Grupa  $SO(2)$  sastoji se točno od svih rotacija od  $\mathbb{R}^2$  oko ishodišta.

(b) Ako je  $A \in O(2)$  s  $\det A = -1$  tada je  $A = BC$ , gdje je  $C$  rotacija od  $\mathbb{R}^2$  oko ishodišta, a  $B$  refleksija oko nekog pravca u  $\mathbb{R}^2$  koji prolazi ishodištem.

**Napomena 2.9.** Standardni matrični prikaz rotacije prostora  $\mathbb{R}^2$  za kut  $\theta$  oko ishodišta je

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Propozicija 2.10.** Grupa  $SO(3)$  sastoji se točno od svih rotacija od  $\mathbb{R}^3$  s centrom u ishodištu.

**Napomena 2.11.** Standardni matrični prikazi rotacija prostora  $\mathbb{R}^3$  za kut  $\theta$  oko  $x$ ,  $y$  i  $z$ -osi dani su redom s

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definicija 2.12.** Neka je  $\phi = F_{A,b}$  euklidsko gibanje prostora  $\mathbb{R}^n$ . Ako je  $A \in SO(n)$  onda kažemo da je  $\phi$  **direktna izometrija** ili **kruto gibanje**. Ako je  $\det A = -1$ , onda kažemo da je  $\phi$  **indirektna izometrija** ili **nepravo gibanje**.

Označimo skupove krutih i nepravih gibanja redom sa  $E^+(n)$  i  $E^-(n)$ :

$$E^\pm(n) = \{F_{A,b} : A \in O(n), \det A = \pm 1, b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Primijetimo da je  $E^+(n)$  podgrupa od  $E(n)$ .

**Definicija 2.13.** Za uređenu ONB  $(f_j)_{j=1}^n$  prostora  $\mathbb{R}^n$  kažemo da je **pozitivno orijentirana** ako je determinanta ortogonalne matrice  $A$  kojoj u  $j$ -tom stupcu stoje koeficijenti od  $f_j$  s obzirom na standardnu bazu  $(e_j)_{j=1}^n$  jednaka 1. Kažemo da je  $(f_j)_{j=1}^n$  **negativno orijentirana** ako je  $\det A = -1$ .

- Uređena ONB  $(f_1, f_2)$  u  $\mathbb{R}^2$  pozitivno je orijentirana ako i samo ako do  $f_2$  možemo doći rotacijom  $f_1$  za  $\pi/2$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a negativno orijentirana ako od  $f_1$  do  $f_2$  možemo doći rotacijom za  $\pi/2$  u smjeru kazaljke na satu.
- Uređena ONB  $(f_1, f_2, f_3)$  u  $\mathbb{R}^3$  pozitivno (desno) je orijentirana ako i samo ako vrijedi  $f_3 = f_1 \times f_2$ , a negativno (lijevo) orijentirana ako je  $f_3 = -f_1 \times f_2$ .

**Napomena 2.14.** Veći dio ovog poglavlja je preuzet iz [4].

### 3 Opća teorija krivulja

**Definicija 3.1.** Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  interval. **Parametrizirana krivulja** u  $\mathbb{R}^n$  je glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ako za parametriziranu krivulju vrijedi da je  $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$ , za sve  $t \in I$ , onda za nju kažemo da je **regularna**.

**Definicija 3.2.** Ako je  $c$  regularna parametrizirana krivulja, tada vektor  $\dot{c}(t)$  nazivamo **vektorom brzine** krivulje  $c$  u trenutku  $t$ . Njegovu normu  $\|\dot{c}(t)\|$  nazivamo **brzina** od  $c$  u trenutku  $t$ . Također, vektor  $\ddot{c}(t)$  nazivamo **vektorom akceleracije**, a normu  $\|\ddot{c}(t)\|$  **akceleracijom** krivulje  $c$  u trenutku  $t$ . **Trag** parametrizirane krivulje definiramo kao skup  $c^* := c(I) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Napomena 3.3.** Interval  $I$  u definiciji može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren. Također,  $I$  može biti ograničen ili neograničen.

**Primjer 3.4.** Neka su  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  i  $v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ . Tada je trag regularne parametrizirane krivulje oblika

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, c(t) = v_0 + tv$$

pravac u  $\mathbb{R}^n$ .

**Primjer 3.5.** Neka je  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  i  $r \in \mathbb{R}$ . Tada je trag regularne parametrizirane krivulje oblika

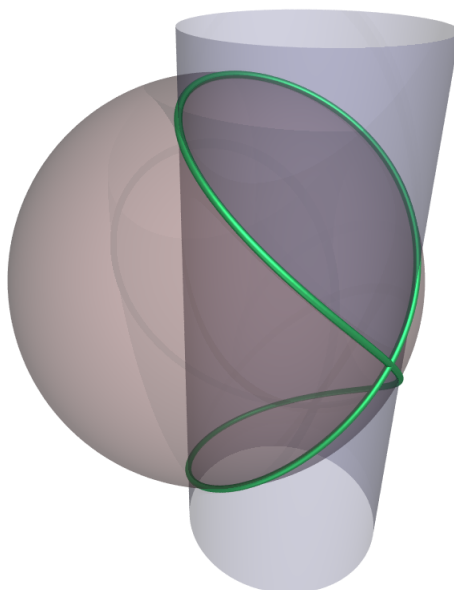
$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (p + r \cos t, q + r \sin t)$$

kružnica u  $\mathbb{R}^2$  s centrom u  $(p, q)$  radijusa  $r$ .

**Primjer 3.6. Vivijanijev prozor** (Vivijanijeva krivulja) je trag regularne parametrizirane krivulje

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(\frac{t}{2})).$$

Vivijanijev prozor možemo dobiti kao presjek dviju ploha, sfere i kružnog cilindra.



Slika 1: Vivijanijev prozor

**Definicija 3.7.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja i neka je  $J \subset \mathbb{R}$  neki drugi interval. Svaki difeomorfizam  $\varphi : J \rightarrow I$  se naziva **parametarska transformacija** od  $c$ . Za parametriziranu krivulju  $\tilde{c} := c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  kažemo da je **reparametrizacija** od  $c$ .

Reparametrizacije će nam biti jako korisne u daljnjem radu. Najprije istaknimo neke očite činjenice. Trag reparametrizirane krivulje isti je kao i trag početne parametrizirane krivulje. Također se regularnost kod reparametriziranja čuva, pa je reparametrizacija regularne krivulje također regularna krivulja.

**Definicija 3.8. Krivulja** je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja, pri čemu dvije parametrizirane krivulje smatramo ekvivalentnima ako se jedna iz druge može dobiti reparametrizacijom.

**Trag krivulje** definiramo kao trag bilo koje njezine parametrizacije.

**Definicija 3.9.** Za parametarsku transformaciju  $\varphi : J \rightarrow I$  kažemo da **čuva orijentaciju** ako je  $\dot{\varphi}(t) > 0$  za sve  $t \in J$ . Kažemo da  $\varphi$  **mijenja orijentaciju** ako je  $\dot{\varphi}(t) < 0$  za sve  $t \in J$ . Za regularnu parametiziranu krivulju  $c$  i njenu reparametrizaciju  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  kažemo da su **iste orijentacije** ako  $\varphi$  čuva orijentaciju. Ako  $\varphi$  mijenja orijentaciju onda kažemo da su  $c$  i  $\tilde{c}$  **suprotne orijentacije**.

**Definicija 3.10. Orijetirana krivulja** je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja, pri čemu dvije parametrizirane krivulje smatramo ekvivalentnima ako se jedna iz druge može dobiti reparametrizacijom koja čuva orijentaciju.

Očito svaka orijentirana krivulja određuje točno jednu krivulju. S druge strane, svaka krivulja ima točno dvije orijentacije, tj. postoje točno dvije orijentirane krivulje koje određuju danu krivulju.

**Definicija 3.11.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna parametrizirana krivulja. Ako je  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  za sve  $t \in I$ , kažemo da je  $c$  **jedinične brzine** ili da je **parametrizirana duljinom luka**. Ako je pak  $\|\dot{c}(t)\|$  konstantna (ne nužno 1) onda kažemo da je  $c$  **parametrizirana proporcionalno duljini luka**.

**Teorem 3.12.** Za svaku regularnu parametriziranu krivulju  $c$  postoji parametarska transformacija  $\varphi$  takva da je reparametrizacija  $c \circ \varphi$  parametrizirana duljinom luka.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna parametrizirana krivulja i neka je  $t_0 \in I$  fiksna. Definirajmo novu funkciju  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(s) := \int_{t_0}^s \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Kako je  $\psi'(s) = \|\dot{c}(s)\| > 0$  za sve  $s \in I$ , preslikavanje  $\psi$  je strogo rastuće pa onda i injektivno. Dakle  $\psi$  je parametarska transformacija koja čuva orijentaciju. Označimo njen glatki inverz s  $\varphi = \psi^{-1} : J \rightarrow I$ . Tada vrijedi

$$\dot{\varphi}(t) = \psi'(\varphi(t))^{-1} = \|\dot{c}(\varphi(t))\|^{-1},$$

pa je

$$\|(c \circ \varphi)'(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t))\|^{-1} \|\dot{c}(\varphi(t))\| = 1.$$

Dakle, reparametrizacija  $c \circ \varphi$  od  $c$  je parametrizirana duljinom luka.  $\square$

Funkciju  $\psi$  iz prethodnog dokaza obično zovemo **funkcija duljine luka** od  $c$  od točke  $c(t_0)$ .

**Propozicija 3.13.** Pretpostavimo da su  $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dvije parametrizacije duljinom luka iste krivulje te neka je  $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$  parametarska transformacija takva da je  $c_1 = c_2 \circ \varphi$ . Tada je

$$\varphi(t) = \pm t + t_0$$

za neko  $t_0 \in \mathbb{R}$ , pri čemu je predznak pozitivan ako su  $c_1$  i  $c_2$  iste orijentacije, odnosno negativan ako su suprotne orijentacije.

*Dokaz.* Vrijedi

$$1 = \|\dot{c}_1(t)\| = \|\dot{c}_2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\| = \|\dot{c}_2(\varphi(t))\| |\dot{\varphi}(t)| = |\dot{\varphi}(t)|.$$

Prema tome je  $\varphi(t) = \pm t + t_0$  za neko  $t_0 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Napomena 3.14.** Neka je  $A \in O(n)$  ortogonalna matrica i  $b \in \mathbb{R}^n$ . Tada je preslikavanje  $F(x) = Ax + b \in E(n)$  euklidsko gibanje. Ako je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  krivulja parametrizirana duljinom luka, tada je i  $F \circ c$  također krivulja parametrizirana duljinom luka. Naime, vrijedi  $(F \circ c)'(t) = A\dot{c}(t)$  pa je

$$\|(F \circ c)'(t)\| = \|A\dot{c}(t)\| = \|\dot{c}(t)\| = 1.$$

**Definicija 3.15.** Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja. **Duljina** od  $c$  je definirana kao

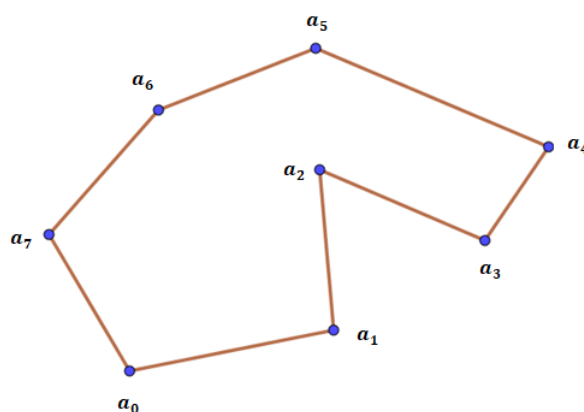
$$l[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Lako se vidi da je duljina parametrizirane krivulje invarijantna s obzirom na reparametrizaciju. Budući da duljina krivulje ne ovisi o izboru parametrizacije možemo govoriti samo o duljini krivulje, a ne o duljini parametrizirane krivulje. Možemo vidjeti zašto su nam parametrizacije duljinom luka posebno zanimljive. Ako je  $c : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  krivulja parametrizirana duljinom luka, onda je

$$l[c|_{[t_1, t_2]}] = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1.$$

Dakle, krivulja parametrizirana duljinom luka ima jednaku duljinu kao i njezin parametarski interval.

**Definicija 3.16.** Neka su  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  vektori takvi da je  $a_i \neq a_{i+1}$  za sve  $i = 0, \dots, k-1$ . Uređena  $k+1$ -torka  $P = (a_0, \dots, a_k)$  u  $\mathbb{R}^n$  naziva se **poligon**.



Slika 2: Poligon

Geometrijski gledano, vektori  $a_i$  bi predstavljali vrhove poligona te takva dva uzastopna vrha mogu biti spojeni odgovarajućim segmentom čija je duljina  $\|a_{i+1} - a_i\|$ . Pritom bi duljina poligona trebala biti jednaka sumi duljina svih takvih segmenata, tj:

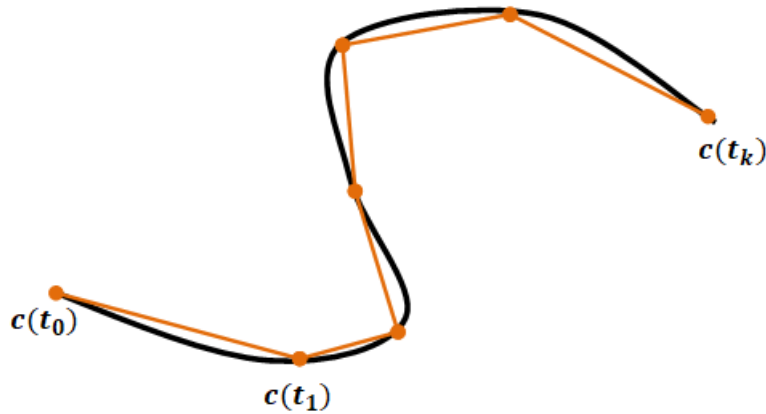
$$l[P] := \sum_{i=0}^{k-1} \|a_{i+1} - a_i\|.$$

Naravno, do duljine parametrizirane krivulje možemo doći i aproksimirajući tu krivulju poligonima i definirajući njezinu duljinu kao odgovarajući limes duljina upisanih poligona, ako taj limes postoji. No, takav pristup vodi do istog koncepta kao u definiciji 3.15. zahvaljujući sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 3.17.** *Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja. Tada za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da za svaku subdiviziju  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  od  $[a, b]$  s korakom podjele manjim od  $\delta$  vrijedi*

$$|l[c] - l[P]| < \epsilon,$$

gdje je  $P = (c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k))$  poligon na krivulji  $c$ .



Slika 3: Aproksimacija duljine pomoću poligona

**Definicija 3.18.** Ako za regularnu parametriziranu krivulju  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  postoji  $L > 0$  takav da je  $c(t + L) = c(t)$  za sve  $t \in \mathbb{R}$  te je  $L$  najmanji broj s takvim svojstvom onda kažemo da je krivulja **periodična s periodom  $L$** . Krivulju nazivamo **zatvorenom krivuljom** ako ona dopušta periodičnu parametrizaciju.

Svake dvije parametrizacije duljinom luka iste zatvorene krivulje imaju isti period i nužno su periodične. No, jasno je da svaka parametrizacija zatvorene krivulje ne mora nužno biti periodična.

**Definicija 3.19.** Ako zatvorena krivulja dopušta periodičnu regularnu parametrizaciju  $c$  s periodom  $L$  tako da je restrikcija  $c|_{[0,L)}$  injekcija onda kažemo da je ona **jednostavno zatvorena krivulja**.

**Napomena 3.20.** • Slika 1 preuzeta je sa [https://en.wikipedia.org/wiki/Viviani27s\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Viviani27s_curve)

- Veći dio ovog poglavlja je preuzet iz [4].



## 4 Ravninske krivulje

U ovom dijelu rada bavit ćemo se posebno ravninskim krivuljama. Parametrizirana **ravninska** krivulja je svaka parametrizirana krivulja  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Na isti način kao i u prošlom poglavlju definiramo pojmove regularne parametrizirane ravninske krivulje, ravninske krivulje te orijentirane ravninske krivulje, pa ih ovdje nećemo posebno definirati. Za početak ovog poglavlja uvodimo pojam normalnog polja.

**Definicija 4.1.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizirana ravninska krivulja jedinične brzine. **Normalno polje** od  $c$  je funkcija  $n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{c}(t).$$

Dakle,  $n(t)$  je dobiven rotacijom  $\dot{c}(t)$  za  $\pi/2$  obrnuto od smjera kazaljke na satu, pa  $(\dot{c}(t), n(t))$  čini pozitivno orijentiranu ONB za  $\mathbb{R}^2$  u svakom trenutku  $t \in I$ . Kako je  $c$  jedinične brzine, za svako  $t \in I$  vrijedi

$$1 = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \stackrel{d}{\implies} 0 = \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle + \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle = 2\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle.$$

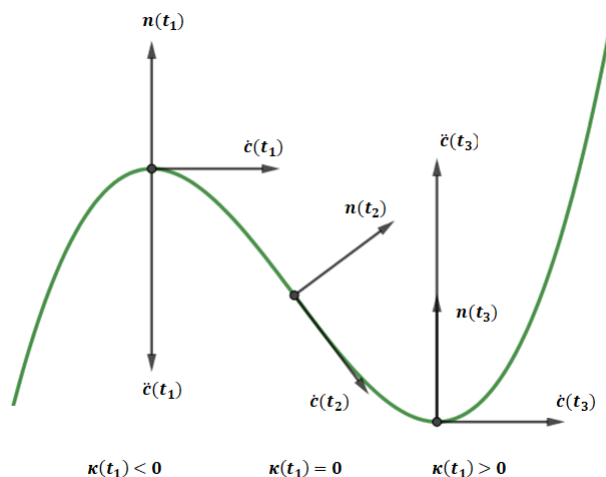
Budući da je dobiveni skalarni umnožak nula, to su vektori brzine  $\dot{c}(t)$  i akceleracije  $\ddot{c}(t)$  međusobno okomiti za sve  $t \in I$ . Prema tome je  $\ddot{c}(t)$  skalarni multipl vektora normale  $n(t)$ , tj.

$$\ddot{c}(t) = \bar{\kappa}(t)n(t).$$

Prema tome je

$$\bar{\kappa}(t) = \langle n(t), \ddot{c}(t) \rangle = \det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t)).$$

**Definicija 4.2.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ravninska krivulja parametrizirana duljinom luka. Tada funkciju  $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo **orijentirana zakrivljenost** od  $c$ , a funkciju  $|\bar{\kappa}|$  nazivamo **apsolutna zakrivljenost** od  $c$  i obično označavamo samo s  $\kappa$ .



Slika 4: Orijehtirana zakrivljenost

Orijentirana zakrivljenost ima i svoje geometrijsko značenje. Naime, ako se parametrizirana krivulja svija u smjeru njezinog vektora normale onda je  $\bar{\kappa}$  pozitivna, a negativna je ako se svija suprotno od smjera njezinog vektora normale. Također, ako je  $\|\dot{c}\| = 1$  tada je  $c$  parametrizacija dijela pravca ako i samo ako je  $\kappa = 0$ .

**Primjer 4.3.** Odredimo orijentiranu zakrivljenost kružnice s centrom u  $(p, q)$  i radijusa  $r$ . Parametrizacija duljinom luka glasi  $c(t) = (p + r \cos(t/r), q + r \sin(t/r))$ , pa vrijedi

$$\dot{c}(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r)) \quad i \quad n(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r)),$$

pa je

$$\ddot{c}(t) = 1/r(-\cos(t/r), -\sin(t/r)) = (1/r)n(t).$$

Dakle,  $\bar{\kappa} = 1/r$ .

**Napomena 4.4.** Orijehtirana zakrivljenost krivulje parametrizirane duljinom luka se ne mijenja s obzirom na djelovanje grupe krutih gibanja  $E^+(2)$ . Naime, neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  krivulja parametrizirana duljinom luka te neka je  $F_{A,b} \in E(2)$ . Definirajmo novu krivulju  $\tilde{c} := F_{A,b} \circ c$  s pripadnom orijentiranom zakrivljenošću  $\tilde{\kappa}$ . Vrijedi  $\dot{\tilde{c}} = A \cdot \dot{c}$  i  $\ddot{\tilde{c}} = A \cdot \ddot{c}$ . Također vrijedi

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \dot{c} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{c} = An.$$

Prema tome je

$$\ddot{c} = A \cdot \ddot{c} = A(\bar{\kappa}n) = \bar{\kappa}An = \bar{\kappa}\tilde{n} \implies \bar{\kappa} = \kappa.$$

Ako je  $F_{A,b}$  nepravno gibanje (tj.  $\det A = -1$ ) onda je  $\bar{\kappa} = -\kappa$ .

**Definicija 4.5.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regularna parametrizirana krivulja. Neka je  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  neka reparametrizacija od  $c$  duljinom luka iste orijentacije kao i  $c$  s orijentiranom zakrivljenošću  $\bar{\kappa}$ . Funkciju  $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{\kappa} := \bar{\kappa} \circ \varphi^{-1}$  nazivamo **orijentirana zakrivljenost** od  $c$ , a funkciju  $\kappa := |\bar{\kappa}|$  zovemo **apsolutna zakrivljenost** od  $c$ .

U sljedećoj propoziciji donosimo formulu za računanje orijentirane zakrivljenosti krivulja.

**Propozicija 4.6.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regularna parametrizirana krivulja. Tada za sve  $t \in I$  vrijedi

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

*Dokaz.* Neka je  $\tilde{c} = c \circ \varphi$  neka reparametrizacija od  $c$  duljinom luka koja čuva orijentaciju i neka je njezina orijentirana zakrivljenost dana s  $\bar{\kappa}$ . Vrijedi

$$\dot{\tilde{c}} = \dot{\varphi} \cdot (\dot{c} \circ \varphi) \quad i \quad \ddot{\tilde{c}} = \ddot{\varphi} \cdot (\dot{c} \circ \varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot (\ddot{c} \circ \varphi).$$

Prema tome je

$$\det(\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}) = \det(\dot{\varphi} \cdot (\dot{c} \circ \varphi), \ddot{\varphi} \cdot (\dot{c} \circ \varphi) + \dot{\varphi}^2 \cdot (\ddot{c} \circ \varphi)) = \dot{\varphi}^3 \det(\dot{c} \circ \varphi, \ddot{c} \circ \varphi)$$

i

$$1 = \|\dot{\tilde{c}}\|^3 = \dot{\varphi}^3 \|\dot{c} \circ \varphi\|^3.$$

Budući da vrijedi  $\bar{\kappa} = \|\dot{\tilde{c}}\|^3 \det(\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}})$ , slijedi

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa} \circ \varphi^{-1} = \frac{\det((\dot{c} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, (\ddot{c} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\|(\dot{c} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\|^3} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}.$$

□

**Primjer 4.7.** Traktrisa je regularna parametrizirana krivulja dana s

$$c : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\operatorname{tg}(t/2))).$$

Odredimo njezinu orijentiranu zakrivljenost. Budući da parametrizacija nije dana duljinom luka koristimo se upravo dobivenim rezultatom:

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \frac{1}{\sin t} - \sin t & -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \end{vmatrix}}{\|(\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t)\|^3} = \frac{\operatorname{ctg}^2 t}{(\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t})^3} = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}.$$

**Propozicija 4.8. (Frenet-Serretove formule)** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ravninska parametrizirana krivulja parametrizirana duljinom luka. Neka je  $\bar{\kappa}$  orijentirana zakrivljenost od  $c$  te neka je  $n$  pripadno normalno polje od  $c$ . Tada za sve  $t \in I$  vrijedi*

$$(\ddot{c}(t), \dot{n}(t)) = (\bar{\kappa}(t) \cdot n(t), -\bar{\kappa}(t) \cdot \dot{c}(t)).$$

*Dokaz.* Jednakost  $\ddot{c} = \bar{\kappa} \cdot n$  je točno definicija orijentirane zakrivljenosti  $\bar{\kappa}$ . Diferenciranjem jednakosti  $\langle n, n \rangle = 1$  dobivamo da je  $\dot{n}(t)$  okomit na  $n(t)$  za sve  $t \in I$ , pa stoga  $\dot{n}(t)$  mora biti skalarni multipl od  $\dot{c}(t)$ , tj.  $\dot{n}(t) = \alpha(t) \cdot \dot{c}(t)$  za neko  $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ . Diferenciranjem jednakosti  $\langle n, \dot{c} \rangle = 0$  dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{n}(t), \dot{c}(t) \rangle + \langle n(t), \ddot{c}(t) \rangle \\ &= \langle \alpha(t) \cdot \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle + \langle n(t), \bar{\kappa}(t) \cdot n(t) \rangle \\ &= \alpha(t) + \bar{\kappa}(t). \end{aligned}$$

Dakle,  $\alpha = -\bar{\kappa}$ , pa je  $\dot{n} = -\bar{\kappa} \cdot \dot{c}$  kao što se i tvrdilo.  $\square$

**Lema 4.9.** *Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizirana krivulja jedinične brzine. Onda postoji funkcija  $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $C^\infty$  takva da za sve  $t \in I$  vrijedi*

$$\dot{c}(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t)). \quad (4)$$

*Nadalje, ako je  $\tilde{\vartheta}$  neka druga takva funkcija, tada postoji  $k \in \mathbb{Z}$  takav da je  $\tilde{\vartheta}(t) = \vartheta(t) + 2k\pi$  za sve  $t \in I$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo za početak da postoji neka funkcija  $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi (4). Diferenciramo li jednakost

$$\dot{c}(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t)) = (\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t))$$

po varijabli  $t$  dolazimo do

$$\ddot{c}_1(t) = -\sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) = -\dot{c}_2(t) \dot{\vartheta}(t) \quad i \quad \ddot{c}_2(t) = \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t) = \dot{c}_1(t) \dot{\vartheta}(t)$$

za sve  $t \in [a, b]$ . Budući da je  $\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2 = 1$  onda je i  $\dot{\vartheta} = \dot{c}_1 \ddot{c}_2 - \dot{c}_2 \ddot{c}_1$ .

Odaberimo jedan fiksni  $t_0 \in I$  i odaberimo  $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$  takav da vrijedi  $\dot{c}(t_0) = (\cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0)$ . Za  $t \in I$  definirajmo funkciju

$$\vartheta(t) := \vartheta_0 + \int_{t_0}^t (\dot{c}_1(s) \ddot{c}_2(s) - \dot{c}_2(s) \ddot{c}_1(s)) ds.$$

Očito je  $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$ . Ta funkcija je sigurno klase  $C^\infty$  na  $I$ . Definirajmo sada dvije funkcije  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$F := \dot{c}_1 \cos \vartheta + \dot{c}_2 \sin \vartheta \quad i \quad G := \dot{c}_1 \sin \vartheta - \dot{c}_2 \cos \vartheta.$$

Tada vrijedi

$$\dot{F} = (\dot{c}_1 + \dot{c}_2 \vartheta) \cos \vartheta + (\ddot{c}_2 - \dot{c}_1 \dot{\vartheta}) \sin \vartheta.$$

Budući da je  $\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2 = 1$  onda je i  $\dot{c}_1 \ddot{c}_1 + \dot{c}_2 \ddot{c}_2 = 0$ , pa je i

$$\dot{c}_1 + \dot{c}_2 \vartheta = \dot{c}_1 + \dot{c}_2 (\dot{c}_1 \ddot{c}_2 - \dot{c}_2 \ddot{c}_1) = \dot{c}_1 + \dot{c}_2 \dot{c}_1 \ddot{c}_2 - (1 - \dot{c}_1^2) \dot{c}_1 = \dot{c}_1 (\dot{c}_1 \ddot{c}_1 + \dot{c}_2 \ddot{c}_2) = 0.$$

Analogno se dobije da vrijedi i  $\ddot{c}_2 - \dot{c}_1 \dot{\vartheta} = 0$ .

Prema tome je  $\dot{F} = 0$ , pa je  $F$  konstantna funkcija. Analogno se dobije i da je  $G$  konstantna funkcija. Budući da je

$$F(t_0) = \dot{c}_1(t_0) \cos \vartheta_0 + \dot{c}_2(t_0) \sin \vartheta_0 = \cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \vartheta_0 = 1$$

i

$$G(t_0) = \dot{c}_1(t_0) \sin \vartheta_0 - \dot{c}_2(t_0) \cos \vartheta_0 = 0$$

za sve  $t \in I$ . Iz ovoga zaključujemo da je

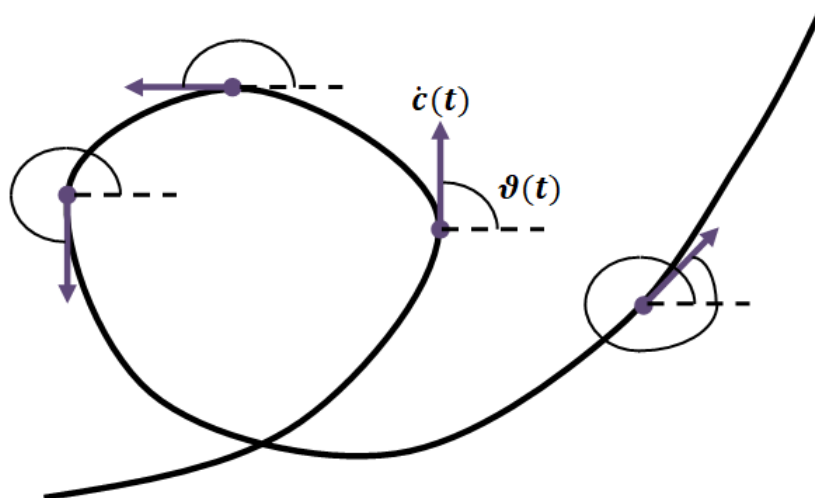
$$\dot{c}_1(t) = \cos \vartheta(t) \quad \text{i} \quad \dot{c}_2(t) = \sin \vartheta(t),$$

kao što smo i tvrdili.

Također, ako je  $\tilde{\vartheta} : I \rightarrow \mathbb{R}$  neka druga funkcija klase  $C^\infty$  za koju vrijedi  $\dot{c}(t) = (\cos \tilde{\vartheta}(t), \sin \tilde{\vartheta}(t))$  za svaki  $t \in I$ , onda je sigurno  $\tilde{\vartheta}(t) = \vartheta(t) + 2\pi k(t)$  za neki cijeli broj  $k(t)$ . Znamo da su obje funkcije  $\vartheta$  i  $\tilde{\vartheta}$  neprekidne pa onda mora biti i  $k : t \rightarrow k(t)$  neprekidna. No, budući da je  $I$  povezan, a  $k$  poprima samo cjelobrojne vrijednosti,  $k$  mora biti konstantna funkcija. Dakle,  $\tilde{\vartheta} = \vartheta + 2k\pi$  za neko  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definicija 4.10.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ravninska parametrizirana krivulja jedinične brzine. Funkciju  $\vartheta$  iz prethodne leme zovemo **kutna funkcija** od  $c$ .

Geometrijski gledano, vektor  $\vartheta(t)$  mjeri kut između vektora brzine krivulje i  $x$ -osi. Budući da taj kut nije jedinstveno određen (određen je do na cjelobrojni višekratnik od  $2\pi$ ) jednoznačnost tog kuta možemo postići tako da npr. tražimo da on pripada intervalu  $[0, 2\pi)$ . No, tada bi kutna funkcija  $\vartheta$  imala prekide prve vrste u pojedinim točkama. Lema 4.9. kaže da  $\vartheta$  možemo odabrati tako da ona bude glatka funkcija na  $I$ .



Slika 5: Kutna funkcija

**Napomena 4.11.**

- Kutna funkcija je jednoznačno određena početnim uvjetom  $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$ , za  $t_0 \in I$ .
- Vrijednost  $\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$  je jednoznačno određena s  $c$  te  $t_1, t_2 \in I$ , odnosno ne ovisi o izboru kutne funkcije.
- Iz (4) slijedi  $n(t) = (-\sin \vartheta(t), \cos \vartheta(t))$ , pa je

$$\ddot{c}(t) = (-\sin \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t), \cos \vartheta(t) \cdot \dot{\vartheta}(t)) = \dot{\vartheta}(t)(-\sin \vartheta(t), \cos \vartheta(t)) = \dot{\vartheta}(t)n(t).$$

Dakle, za svako  $t \in I$  vrijedi

$$\bar{\kappa}(t) = \dot{\vartheta}(t).$$

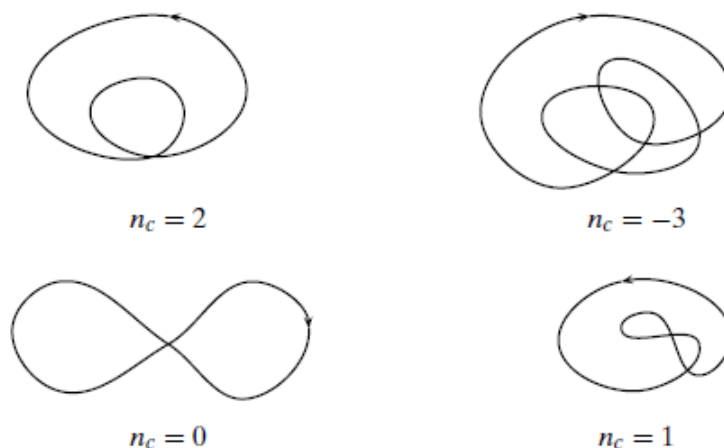
Iz ovoga vidimo da orijentirana zakrivljenost  $\bar{\kappa}$  mjeri promjenu kuta između vektora brzine  $\dot{c}$  i fiksne osi.

**Definicija 4.12.** Neka je dana ravninska krivulja  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizirana duljinom luka i neka je njezin period  $L$ . Ako je  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  njezina pripadna kutna funkcija, tada broj

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0))$$

nazivamo **indeks rotacije** od  $c$ .

Naime, indeks rotacije je cijeli broj koji nam intuitivno govori koliko se puta interval  $[0, L]$ , gdje je  $L$  period krivulje, omotava oko kružnice obrnuto od smjera kazaljke na satu. Ako je on pozitivan, krivulja se omotava obrnuto od smjera kazaljke na satu, a ako je negativan krivulja se omotava u smjeru kazaljke na satu.



Slika 6: Indeks rotacije

**Lema 4.13.** Neka su  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dvije parametrizacije duljinom luka iste zatvorene krivulje. Ako su  $c_1$  i  $c_2$  iste orijentacije onda je  $n_{c_1} = n_{c_2}$ , a ako su  $c_1$  i  $c_2$  različite orijentacije onda je  $n_{c_1} = -n_{c_2}$ .

*Dokaz.* Budući da znamo da je svaka parametrizacija duljinom luka zatvorene krivulje periodična i da svake dvije takve parametrizacije iste krivulje imaju jednak period, to nam daje da su  $c_1$  i  $c_2$  periodične s istim periodom, nazovimo ga  $L$ . Neka je  $\varphi$  parametarska transformacija za koju vrijedi  $c_1 = c_2 \circ \varphi$ . Prema propoziciji 3.13. vrijedi

$$\varphi(t) = \pm t + t_0,$$

gdje predznak ovisi o tome da li  $\varphi$  čuva ili mijenja orijentaciju. Neka je  $\vartheta_2$  kutna funkcija od  $c_2$ .

Ako  $\varphi$  čuva orijentaciju tada je

$$\tilde{c}_1(t) = \tilde{c}_2(t + t_0) = (\cos(\vartheta_2(t + t_0)), \sin(\vartheta_2(t + t_0))),$$

pa je  $\vartheta_1 := \vartheta_2 \circ \varphi$  kutna funkcija od  $c_1$ .

Prema tome je onda i  $\tilde{\vartheta}_1(t) := \vartheta_1(t + L)$  kutna funkcija od  $c_1$ . Vrijedi:

$$\begin{aligned}
2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) &= (\vartheta_2(L) - \vartheta_2(0)) - (\vartheta_1(L) - \vartheta_1(0)) \\
&= \vartheta_1(L - t_0) - \vartheta_1(-t_0) - \vartheta_1(L) + \vartheta_1(0) \\
&= (\tilde{\vartheta}_1(-t_0) - \tilde{\vartheta}_1(0)) - (\vartheta_1(-t_0) - \vartheta_1(0)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pa je naravno  $n_{c_2} = n_{c_1}$ , što smo i htjeli.

Promotrimo sada slučaj kada  $\varphi$  mijenja orijentaciju. Naime, kako je  $\varphi(t) = -t + t_0$  vrijedi:

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1(t) &= -\dot{c}_2(-t + t_0) \\
&= -(\cos(\vartheta_2(-t + t_0)), \sin(\vartheta_2(-t + t_0))) \\
&= (\cos(\vartheta_2(-t + t_0) + \pi), \sin(\vartheta_2(-t + t_0) + \pi)),
\end{aligned}$$

pa je  $\vartheta_1(t) := \vartheta_2(-t + t_0) + \pi$  kutna funkcija od  $c_1$ .

Budući da je opet  $\tilde{\vartheta}_1(t) := \vartheta_1(t + L)$  kutna funkcija od  $c_1$  imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
2\pi(n_{c_2} + n_{c_1}) &= (\vartheta_2(L) - \vartheta_2(0)) + (\vartheta_1(L) - \vartheta_1(0)) \\
&= \vartheta_1(-L + t_0) - \vartheta_1(t_0) + \vartheta_1(L) - \vartheta_1(0) \\
&= (\vartheta_1(-L + t_0) - \vartheta_1(0)) - (\tilde{\vartheta}_1(-L + t_0) - \tilde{\vartheta}_1(0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Prema tome je naravno  $n_{c_2} = -n_{c_1}$ . □

Prethodna lema nam opravdava sljedeću definiciju.

**Definicija 4.14. Indeks rotacije** orijentirane zatvorene ravninske krivulje definiran je kao indeks rotacije bilo koje njezine parametrizacije duljinom luka (iste orijentacije).

**Teorem 4.15.** *Neka je  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ravninska parametrizirana krivulja jedinične brzine s periodom  $L$ . Tada vrijedi*

$$\int_0^L \bar{\kappa}(t) dt = 2\pi n_c. \quad (5)$$

*Dokaz.* Neka je  $c$  ravninska krivulja parametrizirana duljinom luka i neka je  $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  njezina kutna funkcija. Budući da je  $\dot{\vartheta}(t) = \bar{\kappa}(t)$  za sve  $t \in \mathbb{R}$  (prema napomeni 4.11.) imamo:

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \dot{\vartheta}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \bar{\kappa}(t) dt$$

što smo i trebali dokazati. □



Navedeni integral nazivamo **ukupna orijentirana zakrivljenost** od  $c$ . Na kraju ovog odjeljka dajemo sljedeći važan rezultat.

**Teorem 4.16. (Fundamentalni teorem za ravninske krivulje).** *Za svaku glatku funkciju  $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$  postoji ravninska krivulja  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizirana duljinom luka čija je orijentirana zakrivljenost jednaka  $\bar{\kappa}$ .*

*Ako je  $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  neka druga takva parametrizirana krivulja, tada postoji direktna izometrija  $F_{A,b} \in E^+(2)$  takva da vrijedi  $\tilde{c} = F_{A,b} \circ c$ .*

*Dokaz.* Neka je dana neka glatka funkcija  $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Uzmimo jedan fiksni  $t_0 \in I$  i definirajmo funkciju  $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vartheta(t) := \int_{t_0}^t \bar{\kappa}(s) ds$$

i funkciju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(t) = \left( \int_{t_0}^t \cos \vartheta(s) ds, \int_{t_0}^t \sin \vartheta(s) ds \right).$$

Vektor brzine od  $c$  je jednak

$$\dot{c}(t) = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$$

pa vrijedi da je  $\|\dot{c}(t)\| = 1$ , odnosno  $c$  je jedinične brzine. Prema napomeni 4.11. orijentirana zakrivljenost krivulje  $c$  je jednaka

$$\dot{\vartheta}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \bar{\kappa}(s) ds = \bar{\kappa}(t).$$

Prema tome  $c$  je naša tražena parametrizirana krivulja.

Pretpostavimo sada da je  $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  neka druga krivulja parametrizirana duljinom luka, a čija je orijentirana zakrivljenost također jednaka  $\bar{\kappa}$ . Neka je njezina kutna funkcija  $\tilde{\vartheta}$ . Tada za sve  $t \in I$  vrijedi:

$$\dot{\tilde{c}}(t) = (\cos \tilde{\vartheta}(t), \sin \tilde{\vartheta}(t)).$$

Neka nam je opet  $t_0 \in I$  fiksni. Vrijedi:

$$\tilde{c}(t) = \left( \int_{t_0}^t \cos \tilde{\vartheta}(s) ds, \int_{t_0}^t \sin \tilde{\vartheta}(s) ds \right) + \tilde{c}(t_0). \quad (6)$$

Prema napomeni 4.11. vrijedi  $\bar{\kappa} = \dot{\tilde{\vartheta}}$ , pa imamo:

$$\tilde{\vartheta}(t) = \int_{t_0}^t \bar{\kappa}(s) ds + \tilde{\vartheta}(t_0) = \vartheta(t) + \tilde{\vartheta}(t_0). \quad (7)$$

Neka je

$$b := \tilde{c}(t_0), \quad \theta := \tilde{\vartheta}(t_0) \quad i \quad A := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & q \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ubacimo li (7) u (6) dobivamo:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t) &= \left( \int_{t_0}^t \cos(\vartheta(s) + \theta) ds, \int_{t_0}^t \sin(\vartheta(s) + \theta) ds \right) + b \\ &= \left( \cos \theta \int_{t_0}^t \cos \vartheta(s) ds - \sin \theta \int_{t_0}^t \sin \vartheta(s) ds, \sin \theta \int_{t_0}^t \cos \vartheta(s) ds + \cos \theta \int_{t_0}^t \sin \vartheta(s) ds \right) + b \\ &= F_{A,b} \left( \int_{t_0}^t \cos \vartheta(s) ds, \int_{t_0}^t \sin \vartheta(s) ds \right) \\ &= F_{A,b}(c(t)). \end{aligned}$$

□

**Napomena 4.17.** • Slika 6 preuzeta je iz [3].

- Veći dio ovog poglavlja preuzet je iz [4] i [3].

## 5 Hopfov teorem o indeksu rotacije

U ovom poglavlju ćemo dokazati prvi važni rezultat kojim se bavi ovaj rad, a to je Hopfov teorem o indeksu rotacije. Da bismo ga dokazali, koristit ćemo generalizaciju leme 4.9. koju ćemo navesti bez dokaza.

Prije nego krenemo s lemom, podsjetimo se definicije zvjezdastog skupa s obzirom na neku točku.

**Definicija 5.1.** Za skup  $S \subset \mathbb{R}^n$  kažemo da je **zvjezdast** s obzirom na točku  $x_0 \in S$  ako je za svaku točku  $x \in S$  spojnica  $(1-t)x_0 + tx, t \in [0, 1]$ , sadržana u  $S$ .

**Lema 5.2. (Lema o podizanju puteva).** Neka je  $S \subset \mathbb{R}^2$  zvjezdast skup s obzirom na točku  $x_0 \in S$ . Tada za svako neprekidno preslikavanje  $f : S \rightarrow \mathbb{S}^1$ , gdje je  $\mathbb{S}^1$  jedinična kružnica u  $\mathbb{R}^2$ , postoji neprekidno preslikavanje  $\vartheta : S \rightarrow \mathbb{R}$  takvo da vrijedi

$$f(x) = (\cos \vartheta(x), \sin \vartheta(x)) \quad (8)$$

za sve  $x \in S$ . Preslikavanje  $\vartheta$  je jednoznačno određeno početnim uvjetom  $\vartheta(x_0) = \vartheta_0$ .

**Napomena 5.3.** Važno je napomenuti da do traženog preslikavanja  $\vartheta$  možemo lako doći ako preslikavanje  $f : S \rightarrow \mathbb{S}^1$  nije surjekcija. Pretpostavimo da točka  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  nije sadržana u slici od  $f$ . Tada je preslikavanje

$$\psi_k : \langle \varphi + 2(k-1)\pi, \varphi + 2k\pi \rangle \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus (\cos \varphi, \sin \varphi), \psi_k(t) := (\cos t, \sin t)$$

homeomorfizam za svako  $k \in \mathbb{Z}$ . Prema tome je preslikavanje zadano s

$$\vartheta := \psi_k^{-1} \circ f : S \rightarrow \langle \varphi + 2(k-1)\pi, \varphi + 2k\pi \rangle$$

neprekidno preslikavanje za koje vrijedi (8).

Dokažimo sada glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorem 5.4. (Hopfov teorem o indeksu rotacije).** Indeks rotacije jednostavno zatvorene ravninske krivulje je  $\pm 1$ .

- Dokaz.* 1. Neka je  $c = (c_1, c_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizacija dane krivulje duljinom luka s periodom  $L$  tako da je  $c|_{[0,L]}$  injekcija. Neka je  $x_0 := \max\{c_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Kako je trag od  $c$  kompaktan, zaista postoji maksimum. Neka je  $p \in \mathbb{R}^2$  neko sjecište od  $c^*$  (trag krivulje  $c$ ) s pravcem  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}$ . Također, možemo postići da je  $c(0) = p$  služeći se parametarskom transformacijom oblika  $t \mapsto t + t_0$ . Neka je  $G$  polupravac  $\{p + s \cdot (1, 0) : s > 0\}$ . Tada je sigurno  $c^* \cap G = \emptyset$ . Sigurno je  $\dot{c}_1 = 0$  jer  $c_1$  u 0 postiže maksimum. Kako je  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  mora biti  $\dot{c}(0) = (0, \pm 1)$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $\dot{c}(0) = (0, 1)$ .
2. Neka je  $S := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$ . Tada je  $S$  sigurno zvjezdast skup s obzirom na točku  $(0, 0)$ . Neka je  $f : S \rightarrow \mathbb{S}^1$  preslikavanje definirano na način:

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|}, & \text{za } t_2 > t_1 \text{ i } (t_1, t_2) \neq (0, L) \\ \dot{c}(t), & \text{za } t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0), & \text{za } (t_1, t_2) = (0, L) \end{cases}.$$

Kako je  $c$  jednostavno zatvorena, lako se provjeri da je  $f$  dobro definirana neprekidna funkcija. Izaberimo funkciju  $\vartheta : S \rightarrow \mathbb{R}$  za  $f$  kao u lemi 5.2. Budući da je  $\dot{c}(t) = f(t, t)$ , onda je  $t \mapsto \vartheta(t, t)$  kutna funkcija za  $c$ . Za njezin indeks rotacije vrijedi

$$2\pi n_c = \vartheta(L, L) - \vartheta(0, 0) = \vartheta(L, L) - \vartheta(0, L) + \vartheta(0, L) - \vartheta(0, 0). \quad (9)$$

3. Važno je primijetiti da se točka  $(1, 0)$  ne nalazi u slici preslikavanja  $t \mapsto f(0, t)$  ( $t \in [0, L]$ ). Znamo da je vektor  $(0, 1) = \dot{c}(0) = f(0, 0) = -f(0, L)$  okomit na vektor  $(1, 0)$ . Ako bi pak bilo  $(1, 0) = f(0, t)$  za  $t \in \langle 0, L \rangle$ , onda bi vrijedilo

$$(1, 0) = \frac{c(t) - p}{\|c(t) - p\|} \implies c(t) = p + \|c(t) - p\| \cdot (1, 0).$$

To bi naravno značilo da točka  $c(t)$  leži na polupravcu  $G$ , što je u kontradikciji s 1. dijelom dokaza. Prema napomeni 5.3. slika preslikavanja  $t \mapsto \vartheta(0, t)$  ( $t \in [0, L]$ ) je sadržana u nekom intervalu koji je oblika  $\langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Iz  $f(0, L) = -\dot{c}(0) = (0, -1)$  vrijedi da je  $\vartheta(0, L) = 3\pi/2 + 2k\pi$ , a iz  $f(0, 0) = \dot{c}(0) = (0, 1)$  vrijedi da je  $\vartheta(0, 0) = \pi/2 + 2k\pi$ . Prema tome je

$$\vartheta(0, L) - \vartheta(0, 0) = \pi.$$

Analogno bismo zaključili da  $(-1, 0)$  nije u slici preslikavanja  $t \mapsto f(t, L)$ ,  $t \in [0, L]$ , otkuda slijedi

$$\vartheta(L, L) - \vartheta(0, L) = \pi.$$

Na kraju, vratimo li ove rezultate u (9) dobivamo

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi,$$

čime smo dokazali ovaj teorem. Da smo u prvom dijelu dokaza uzeli  $\dot{c}(0) = (0, -1)$  koristili bismo parametarsku transformaciju  $t \mapsto -t$  koja mijenja orijentaciju pa time mijenja samo predznak indeksa rotacije.

□

Sada kada smo dokazali Hopfov teorem o indeksu rotacije možemo na smislen način definirati sljedeće važne pojmove za parametrizacije ravninskih jednostavno zatvorenih krivulja.

**Definicija 5.5.** Ako je indeks rotacije parametrizacije  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  jedinične brzine ravninske jednostavno zatvorene krivulje jednak 1 za nju kažemo da je **pozitivno orijentirana**. S druge strane, za nju kažemo da je **negativno orijentirana** ako je njezin indeks rotacije jednak  $-1$ .

**Definicija 5.6.** Neka je dana neprekidna funkcija  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sa svojstvom da je  $c(a) = c(b)$  i neka je restrikcija  $c|_{[a,b]}$  injekcija. Podskup od  $\mathbb{R}^2$  koji je jednak slici neke takve funkcije  $c$  naziva se **kontura**.

Naravno, u terminima krivulja, jasno je da je trag svake jednostavne zatvorene ravninske krivulje kontura.

**Teorem 5.7. (Jordanov teorem o krivulji).** Neka je  $C = c([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$  kontura. Tada se komplement  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  sastoji od dva disjunktna putevima povezana otvorena skupa i  $C$  je zajednički rub svakog od njih. Jedan od tih povezanih otvorenih skupova je neomeđen i nazivamo ga **vanjsko područje** konture  $C$  dok je drugi omeđen i nazivamo ga **unutrašnje područje** konture  $C$ . Unutrašnje područje označavamo s  $\text{int}(C)$ .

Ovaj teorem nećemo dokazivati u ovom radu, ali napomenimo da pomoću njega također možemo definirati pojam pozitivne i negativne orijentacije za orijentirane jednostavno zatvorene krivulje.

**Definicija 5.8.** Neka je  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizacija jednostavno zatvorene krivulje jedinične brzine s periodom  $L$  i neka je  $c|_{[0,L]}$  injekcija. Tada je:

- $c$  pozitivno orijentirana ako i samo ako za svako  $t \in [0, L)$  postoji  $\delta > 0$  takav da za sve  $s \in \langle 0, \delta \rangle$  vrijedi  $c(t) + s \cdot n(t) \in \text{int}(c^*)$ , odnosno ako pripadno normalno polje  $t \mapsto n(t)$  pokazuje prema unutrašnjem području od  $c^*$ .
- $c$  negativno orijentirana ako i samo ako pripadno normalno polje  $t \mapsto n(t)$  pokazuje prema vanjskom području od  $c^*$ .

## 6 Izoperimetrijska nejednakost

U ovom poglavlju dokazat ćemo jedan rezultat iz globalne teorije ravninskih krivulja koji potječe još iz antičkih vremena. Naime, pitanje koje si postavljamo je sljedeće: koja od svih regularnih jednostavno zatvorenih ravninskih krivulja fiksne duljine  $l$  definira rub područja koje ima najveću moguću površinu?

Prije nego krenemo dokazivati naš glavni teorem u ovom poglavlju, potrebna nam je formula za računanje površine unutrašnjeg područja jednostavno zatvorene ravninske krivulje. Sljedeći teorem nam govori o tome.

**Teorem 6.1. (Gauss-Greenov teorem).** *Neka je  $c = (c_1, c_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena ravninska krivulja i neka je  $D \subset \mathbb{R}^2$  unutrašnjost traga od  $c$ . Tada, za svaki par funkcija  $f_1, f_2 \in C^1(\overline{D})$  definiranih i klase  $C^1$  u okolini  $D$  vrijedi:*

$$\int_a^b [f_1(c(t))\dot{c}_1(t) + f_2(c(t))\dot{c}_2(t)] dt = \int_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2. \quad (10)$$

Iz ovog teorema izvire sljedeća lema koja će nam koristiti u dokazu glavnog rezultata ovog poglavlja.

**Lema 6.2.** *Neka je  $c = (c_1, c_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena ravninska krivulja i neka je  $D \subset \mathbb{R}^2$  unutrašnjost traga od  $c$ . Ako s  $A(D)$  označimo površinu od  $D$ , tada vrijedi*

$$A(D) = \int_a^b c_1 \dot{c}_2 dt = - \int_a^b \dot{c}_1 c_2 dt. \quad (11)$$

*Dokaz.* Neka su  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije dane sa  $f_1((x_1, x_2)) = -x_2$  i  $f_2((x_1, x_2)) = x_1$ . Tada je prema (10)

$$A(D) = \int_D dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_a^b (c_1 \dot{c}_2 - \dot{c}_1 c_2) dt.$$

Sada vrijedi da je

$$\int_a^b (c_1 \dot{c}_2 + \dot{c}_1 c_2) dt = \int_a^b (c_1 \cdot c_2)' dt = c_1(b)c_2(b) - c_1(a)c_2(a) = 0;$$

pa je

$$\int_a^b c_1 \dot{c}_2 dt = - \int_a^b \dot{c}_1 c_2 dt.$$

□

Sada dokazujemo glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorem 6.3. (Izoperimetrijska nejednakost)** *Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pozitivno orijentirana jednostavno zatvorena regularna ravninska krivulja duljine  $L$ . Ako je  $D \subset \mathbb{R}^2$  unutrašnjost traga te krivulje, onda je*

$$4\pi A(D) \leq L^2. \quad (12)$$

*Štoviše, jednakost se postiže ako i samo ako je trag od  $c$  kružnica.*

*Dokaz.* Neka je  $k > 0$  i neka je  $c^k = kc$  krivulja dobivena primjenjujući na  $c$  homotetiju s koeficijentom  $k$ . Tada je duljina od  $c^k$  jednaka  $kL$ , a površina njezinog unutrašnjeg područja je jednaka  $k^2A(D)$ .

Dakle, ako zamijenimo  $c$  s  $c^{2\pi/L}$ , možemo pretpostaviti da je  $L = 2\pi$ , pa je dovoljno dokazati da je

$$A(D) \leq \pi,$$

pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je trag krivulje  $c$  kružnica.

Naravno, možemo pretpostaviti da je  $c$  parametrizirana duljinom luka, pri čemu je  $a = 0$  i  $b = 2\pi$ . Štoviše, koristeći odgovarajuće kruto gibanje možemo također pretpostaviti da je  $c_1(0) = c_1(\pi) = 0$ .

Prema (11),

$$A(D) = \int_0^{2\pi} c_1 \dot{c}_2 ds;$$

pa će biti dovoljno dokazati da su oba integrala od 0 do  $\pi$  i od  $\pi$  do  $2\pi$  od  $c_1 \dot{c}_2$  najviše  $\pi/2$ , s jednakošću ako i samo ako je trag od  $c$  kružnica.

Najprije primijetimo da vrijedi

$$\int_0^\pi c_1 \dot{c}_2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (c_1^2 + \dot{c}_2^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + c_1^2 - \dot{c}_1^2) ds, \quad (13)$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer je  $c$  parametrizirana duljinom luka.

Budući da vrijedi  $c_1(0) = c_1(\pi) = 0$ , postoji funkcija  $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $C^1$  takva da je

$$c_1(s) = u(s) \sin s.$$

Posebno vrijedi  $\dot{c}_1 = \dot{u} \sin s + u \cos s$ , pa (13) daje

$$\int_0^\pi c_1 \dot{c}_2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2 s + u^2(\sin^2 s - \cos^2 s) - 2u\dot{u} \sin s \cos s) ds.$$

No,

$$\int_0^\pi (u^2(\sin^2 s - \cos^2 s) - 2u\dot{u} \sin s \cos s) ds = - \int_0^\pi \frac{d}{ds} [u^2 \sin s \cos s] ds = 0,$$



pa vrijedi

$$\int_0^\pi c_1 \dot{c}_2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \dot{u}^2 \sin^2 s) ds \leq \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

što smo i htjeli. Analogno bismo dobili istu nejednakost za integral od  $\pi$  do  $2\pi$  pa je tako teorem dokazan.

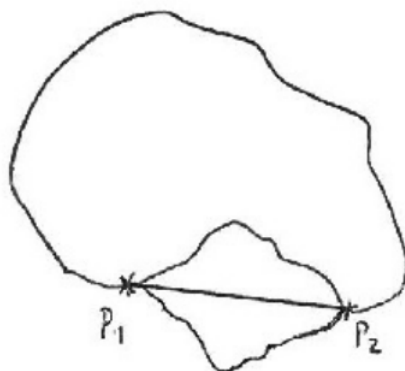
Ako je trag od  $c$  kružnica onda je  $A(D) = \pi$ , pa se jednakost u (12) zaista postiže. Obratno, ako pođemo od jednakosti u (12), onda ona mora vrijediti i u (13) i u (14). Iz jednakosti u potonjem vidimo da je  $\dot{u} = 0$  pa je  $c_1(t) = a \sin t$  za odgovarajući  $a \in \mathbb{R}$ . Ali iz jednakosti u (13) vidimo  $c_1 = \dot{c}_2$ , pa je  $c_2(t) = -a \cos t + d$  za odgovarajući  $d \in \mathbb{R}$ . Dakle, trag od  $c$  je kružnica.  $\square$

Na kraju ovog poglavlja demonstrirat ćemo i skicu "geometrijskog dokaza" izoperimetrijske nejednakosti kojeg je, prema [5], osmislio Jakob Steiner.

*Dokaz.* Neka je  $c$  krivulja kao u teoremu. Geometrijski ćemo pokazati da je za danu duljinu  $L$ , najveća površina unutrašnjeg područja  $D$  upravo područje unutar kružnice.

1. Područje mora biti konveksno.

Ako područje nije konveksno, možemo uvijek naći neke dvije točke  $P_1$  i  $P_2$  na  $c^*$  čija je spojnica izvan unutrašnjeg područja  $D$ . Iskoristimo tu spojnicu kao os simetrije kako bismo dio od  $c^*$  između točaka  $P_1$  i  $P_2$  osnosimetrično preslikali s druge strane spojnice. Možemo primijetiti da se duljina  $L$  nije promijenila a  $A(D)$  je postao veći. Postupak možemo ponavljati dok god  $D = \text{int}(c^*)$  ne postane konveksan.



Slika 7: Osa simetrija za nekonveksno područje

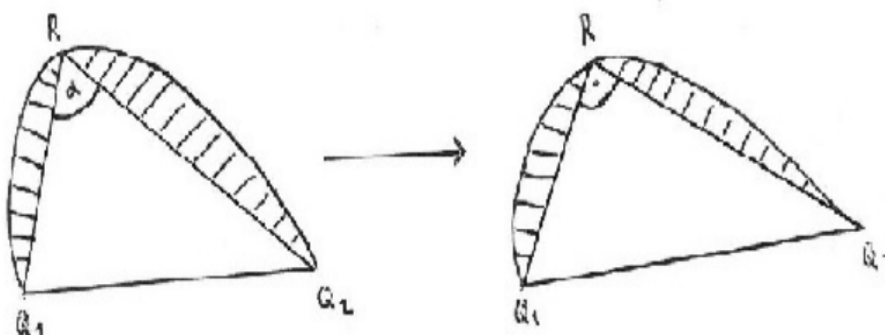
2.  $D$  se sastoji od dva dijela jednake veličine.

Izaberimo sada dvije točke  $Q_1$  i  $Q_2$  na  $c^*$ . Dok  $Q_1$  možemo izabrati slobodno,  $Q_2$  mora biti točka koja, s obzirom na  $Q_1$ , dijeli  $c^*$  na dva dijela iste duljine. To znači da će se  $Q_2$  pojaviti točno nakon  $L/2$  ako se po  $c^*$  krećemo od  $Q_1$ . Ako konstruiramo spojnicu  $\overline{Q_1Q_2}$  dobili smo dva nova područja  $D_1$  i  $D_2$  i vrijedi  $A(D_1) + A(D_2) = A(D)$ . Ako  $A(D_1)$  i  $A(D_2)$  nisu jednaki onda, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je  $A(D_1) > A(D_2)$ . U tom slučaju opet možemo iskoristiti  $\overline{Q_1Q_2}$  kao os simetrije kako bismo osnosimetrično preslikali  $D_1$ , pri čemu smo dobili veće područje od početnog a da se nije promijenila duljina  $L$  od  $c(t)$ . Dakle,  $A(D_1) = A(D_2)$ .

3. Označimo s  $c_1$  restrikciju od  $c$  s početkom u  $Q_1$  i krajem u  $Q_2$ , te s  $c_2$  restrikciju od  $c$  s početkom u  $Q_2$  i krajem u  $Q_1$ . Tvrdimo da su tragovi od  $c_1$  i  $c_2$  polukružnice. .

Pokazali smo prije da mora biti  $A(D_1) = A(D_2)$  pa je stoga dovoljno pokazati, bez smanjenja općenitosti, da je  $c_1^*$  polukružnica. Pretpostavimo da  $c_1^*$  nije polukružnica. Tada, prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice, postoji točka  $R$  na  $c_1^*$  takva da kut  $\alpha = \angle Q_1RQ_2$  ne iznosi  $90^\circ$ . Neka duljine spojnice  $\overline{Q_1R}$  i  $\overline{RQ_2}$  ostanu nepromijenjene, ali promijenimo kut  $\alpha$  kako bismo maksimizirali površinu trokuta  $\triangle Q_1RQ_2$ . Pritom će se naravno  $Q_1$  i  $Q_2$  pomaknuti, pri čemu će se također promijeniti spojnicu  $\overline{Q_1Q_2}$ . Ovaj postupak ne mijenja veličinu i oblik osjenčanog dijela iz slike 8. Također, duljina luka krivulje  $c_1(t)$  je ostala nepromijenjena, ali za  $\alpha = 90^\circ$  imamo veću površinu za  $\triangle Q_1RQ_2$  nego prije. Međutim, ovime dolazimo do kontradikcije s našom pretpostavkom. Tako  $c_1^*$  mora biti polukružnica.

□



Slika 8: Promjena kuta zbog maksimiziranja površine

Koliko je teorem o izoperimetrijskoj nejednakosti oduvijek bio zanimljiv govori nam jedna zanimljiva priča iz Vergilijeve Eneide o utemeljenju grada Kartage. Prema [5] Vergilije izvještava kako je kraljica Didona iz Fenicije morala pobjeći od svog brata u Sjevernu Afriku. Jednom kada je došla, sklopila je dogovor s lokanim poglavarom: u zamjenu za svoje bogatstvo mogla je dobiti toliko zemlje koliko je mogla obujmiti kožom jednog vola. Nakon što je vol žrtvovan kraljica Didona je isjekla kožu vola u vrlo tanke pruge i povezala ih. Od kože je obujmila jedan polukrug koji je s prirodnom granicom mora dao područje koje je bilo toliko veliko da nitko nije takvo što očekivao. Tako je na toj zemlji osnovan antički grad i država Kartaga. Izgleda da je kraljica intuitivno bila svjesna izoperimetrijske nejednakosti te ju je znala primijeniti u praktične svrhe.

**Napomena 6.4.** • Slika 7 preuzeta je iz [5], Fig. 1.

- Slika 8 preuzeta je iz [5], Fig. 2.

## 7 Teorem o četiri tjemena

Orijentirana zakrivljenost  $\bar{\kappa}$  zatvorene ravninske krivulje je neprekidna funkcija definirana na kompaktnom skupu pa uvijek dopušta minimum i maksimum. Posebno,  $\bar{\kappa}(t) = 0$  u najmanje dvije točke. Neočekivani rezultat iz globalne teorije ravninskih krivulja nam kaže da je derivacija orijentirane zakrivljenosti regularne jednostavno zatvorene krivulje jednaka nuli u najmanje četiri točke. Naime, time se bavi naš zadnji glavni teorem u ovom radu, Teorem o četiri tjemena.

**Definicija 7.1.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regularna parametrizirana ravninska krivulja. Kažemo da  $c$  ima **tjeme** u trenutku  $t_0 \in I$  ako vrijedi  $\dot{\bar{\kappa}}(t_0) = 0$ .

**Lema 7.2.** Neka je  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompaktan skup koji sadrži više od jedne točke. Tada postoji jedinstveni krug s minimalnim radijusom koji sadrži  $K$ .

*Dokaz.* Neka je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija dana s

$$f(p) = \max_{x \in K} \|x - p\|.$$

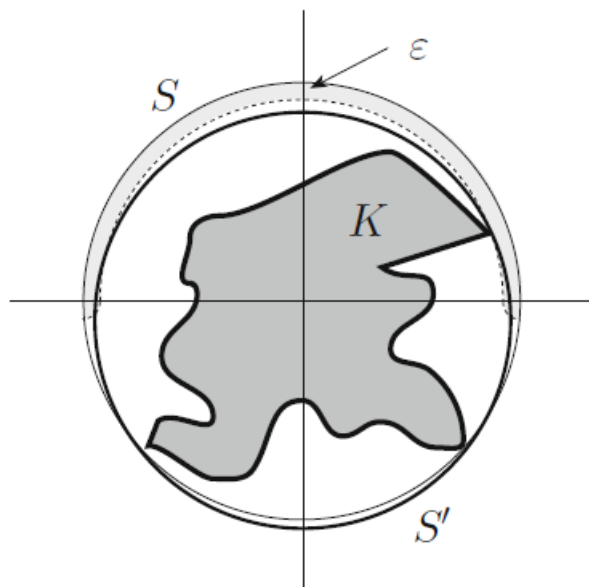
Kako  $K$  sadrži više od jedne točke vrijedi  $f(p) > 0$  za sve  $p \in \mathbb{R}^2$ . Štoviše, krug sa središtem u  $p$  i radijusa  $R$  sadrži  $K$  ako i samo ako je  $R \geq f(p)$ . Nadalje, jasno je da  $f(p) \rightarrow +\infty$  kako  $\|p\| \rightarrow +\infty$  pa  $f$  ima minimalnu točku  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  i  $R_0 = f(p_0) > 0$  je minimalni radijus kruga koji sadrži  $K$ .

Konačno, pokažimo jedinstvenost takvog kruga. Pretpostavimo da je  $K$  sadržan u dva različita kruga  $D_1$  i  $D_2$ , oba s radijusom  $R_0$ . Tada vrijedi  $K \subseteq D_1 \cap D_2$ . No, budući da se presjek dvaju različitih krugova jednakih radijusa nalazi u krugu manjeg radijusa, tu dolazimo do kontradikcije s izborom  $R_0$ , pa je krug minimalnog radijusa koji sadrži  $K$  jedinstven.  $\square$

**Definicija 7.3.** Neka je  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompaktan skup koji sadrži najmanje dvije točke. Rub kruga s minimalnim radijusom koji sadrži  $K$  se naziva kružnica opisana oko  $K$ .

**Lema 7.4.** Neka je  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompaktan skup koji sadrži više od jedne točke i neka je  $S$  kružnica opisana oko  $K$ . Tada  $K$  presijeca svaku polukružnicu od  $S$ . Posebno,  $S \cap K$  sadrži najmanje dvije točke, a ako sadrži točno dvije, one su antipodalne.

*Dokaz.* Možemo pretpostaviti da se središte od  $S$  nalazi u ishodištu i neka joj je  $R$  radijus. Dovoljno je pokazati da  $K$  presijeca gornju polukružnicu  $S_+$ . Kako su  $S_+$  i  $K$  kompaktni, kad bi bili disjunktni onda bi njihova udaljenost  $\epsilon$  bila strogo



Slika 9: Opisana kružnica krivulje

pozitivna. Prema tome bi  $K$  bio sadržan u skupu koji se sastoji od kruga kojem je rub  $S$  i kojem je uklonjena okolina radijusa  $\epsilon$  od gornje polukružnice (vidjeti sliku 9). Ali, lako je pokazati da se taj skup nalazi unutar kružnice  $S'$  sa središtem na  $y$ -osi i radijusom strogo manjim od  $R$ , pri čemu dolazimo do kontradikcije.  $\square$

Glavna ideja koju želimo pokazati je da svaki presjek traga regularne jednostavno zatvorene krivulje i opisane mu kružnice daje barem dva tjemena. Da bismo to dokazali potrebne su nam još dvije leme.

**Lema 7.5.** *Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regularna ravninska krivulja parametrizirana duljinom luka s orijentiranom zakrivljenosti  $\bar{\kappa} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i tragom  $C$ . Također, neka je  $S$  pozitivno orijentirana kružnica radijusa  $R > 0$ . Pretpostavimo da postoji  $s_0 \in [a, b]$  takav da se  $\dot{c}(s_0)$  poklapa sa jediničnim vektorom brzine na  $S$  u  $p_0 = c(s_0) \in S$ . Tada:*

1. *ako postoji okolina  $U$  oko  $p_0$  takva da  $U \cap C$  leži unutar zatvorenog kruga kojemu je  $S$  rub onda vrijedi  $\bar{\kappa}(s_0) \geq 1/R$ ;*
2. *ako postoji okolina  $U$  oko  $p_0$  takva da  $U \cap C$  leži u komplementu otvorenog kruga kojemu je  $S$  rub onda vrijedi  $\bar{\kappa}(s_0) \leq 1/R$ .*

*Dokaz.* Pretpostavka da se  $\dot{c}(s_0)$  poklapa s jediničnim vektorom tangente na  $S$  u  $p_0$  znači da je  $Rn(s_0) = -(p_0 - x_0)$ , gdje je  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  središte od  $S$  a  $n$  normalno polje

od  $c$ . Definirajmo funkciju  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  formulom  $h(s) = \|c(s) - x_0\|^2$ . Odmah vidimo da je  $h(s_0) = R^2$ . Štoviše, vidimo da je  $\dot{h}(s_0) = 2\langle \dot{c}(s_0), p_0 - x_0 \rangle = 0$  i  $\ddot{h}(s_0) = 2(1 - \bar{\kappa}(s_0)R)$ . Budući da je  $s_0$ , u slučaju (1) točka lokalnog maksimuma za  $h$ , a u slučaju (2) točka lokalnog minimuma za  $h$ , vrijedi tvrdnja.  $\square$

**Lema 7.6.** *Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pozitivno orijentirana regularna jednostavno zatvorena ravninska krivulja parametrizirana duljinom luka. Neka je  $C = c^*$  trag te krivulje i neka joj je  $\bar{\kappa} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  orijentirana zakrivljenost. Neka je  $S$  kružnica radijusa  $R > 0$  opisana oko  $c^*$ . Neka su  $p_1 = c(s_1)$ ,  $p_2 = c(s_2) \in C \cap S$  dvije različite točke takve da je  $s_1 < s_2$ . Tada ili se trag od  $c|_{[s_1, s_2]}$  nalazi unutar  $S$  ili postoji točka  $s_0 \in \langle s_1, s_2 \rangle$  takva da je  $\bar{\kappa}(s_0) < 1/R$ .*

*Dokaz.* Neka je  $S$  također pozitivno orijentirana. Štoviše, do na translaciju ravnine, možemo pretpostaviti da je središte od  $S$  u ishodištu. Definirajmo funkciju  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(s) = \|c(s)\|^2$ . Tada funkcija  $h$  postiže maksimume u točkama presjeka  $C$  i  $S$ . Derivirajući  $h$  nalazimo da je u tim točkama  $C$  tangencijalna na  $S$ . Štoviše, budući da je  $\text{int}(C) \subset \text{int}(S)$  i da su obje krivulje pozitivno orijentirane, orijentirani se vektori normale (onda i vektori brzine) od  $c$  i  $S$  u ovim točkama poklapaju.

Do na rotaciju, možemo pretpostaviti da  $p_1$  i  $p_2$  pripadaju istom pravcu  $l$  okomitom na  $x$ -os i da je  $p_1$  ispod  $p_2$ . Kako  $S$  i  $c$  imaju jednak vektor brzine u  $p_1$ , trag  $C_1$  od  $c|_{\langle s_1, s_2 \rangle}$  presijeca desnu poluravninu određenu s  $l$ . Ako je  $C_1$  sadržan u  $S$ , onda smo gotovi. U suprotnom postoji točka  $q_1 \in C_1$  koja pripada otvorenom krugu, kojemu je  $S$  rub, te da kružnica kroz  $p_1$ ,  $q_1$  i  $p_2$  ima radijus  $R' > R$ .

Translatirajmo prema lijevo ovu kružnicu kako bismo dobili kružnicu  $S'$  koja presijeca  $C_1$  u točki  $q_0 = c(s_0)$ , ali tako da bi nam svaka daljnja translacija ulijevo dala kružnicu disjunktne s  $C_1$ . Posebno, koristeći analogon funkcije  $h$ , odmah vidimo da se  $C$  i  $S'$  diraju u  $q_0$ .

Štoviše,  $c$  i  $S'$  imaju isti vektor brzine u  $q_0$ . Zaista, razmotrimo jednostavno zatvorenu krivulju dobivenu pridružujući  $C_1$  polupravcima kojima su završne točke  $p_1$  i  $p_2$ . Lako se vidi da ova krivulja dijeli ravninu na dva dijela, koja ćemo zvati lijevi i desni dio. Budući da je  $c$  pozitivno orijentirana, unutrašnje područje od  $C$  se potpuno nalazi u lijevom dijelu. Prema našoj konstrukciji za  $S'$ , unutrašnje područje od  $S'$  se također nalazi u lijevom dijelu (budući da leži lijevo od polupravaca koji počinju u  $p_1$  i  $p_2$ ). No, ovo povlači da u  $q_0$  orijentirani vektor normale od  $S'$  i orijentirani vektor normale od  $c$  (za koje već znamo da su paralelni) pokazuju prema lijevom dijelu pa se i poklapaju.

Sada možemo iskoristiti lemu 7.5. pa dobivamo da je  $\bar{\kappa}(s_0) \leq 1/R' < 1/R$ , što smo i željeli dokazati.  $\square$

Sada smo spremni dokazati glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorem 7.7. (Teorem o četiri tjemena).** *Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizacija duljinom luka jednostavno zatvorene krivulje. Tada  $c$  ima barem četiri tjemena.*

*Dokaz.* Neka je  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  pozitivno orijentirana regularna jednostavno zatvorena krivulja parametrizirana duljinom luka i neka je njen trag  $c^* = C$ . Ako je  $S$  pozitivno orijentirana kružnica opisana oko  $C$ , do na translaciju ravnine možemo pretpostaviti da je središte od  $S$  u ishodištu i da je  $R > 0$  njen radijus.

Prema prvom dijelu dokaza leme 7.6. možemo vidjeti da se vektori brzine od  $S$  i  $c$  u točkama presijecanja poklapaju. Lema 7.5. onda povlači da je orijentirana zakrivljenost od  $c$  veća ili jednaka od  $1/R$  u svakoj točki presijecanja.

Neka su sada  $p_0, p_1 \in C \cap S$  dvije različite točke. Prema lemi 7.4. znamo da one postoje. Do na promjenu domene od  $c$  možemo pretpostaviti da je  $p_0 = c(a)$  i  $p_1 = c(s_1)$ , za neki  $s_1 \in \langle a, b \rangle$ . Ako trag  $c|_{[a, s_1]}$  leži na  $S$ , orijentirana zakrivljenost  $\bar{\kappa}$  od  $c$  je konstantna na cijelom  $[a, s_1]$  pa imamo beskonačno mnogo tjemena. U suprotnom, lema 7.6. nam kaže da se minimum od  $\bar{\kappa}$  na  $[a, s_1]$  pojavljuje u točki  $s_0 \in \langle a, s_1 \rangle$ , pa smo pronašli tjeme od  $c$ . Također, ako istu lemu primijenimo na  $p_1$  i  $p_0 = c(b)$  dolazimo do još jedne točke minimuma  $s'_0 \in \langle s_1, b \rangle$  pa tako i do još jednog tjemena. No, između dvije točke minimuma mora se pojaviti točka maksimuma, različita od njih, budući da je  $\bar{\kappa}(s_1) \geq 1/R$ , pa smo našli treće tjeme u  $\langle s_0, s'_0 \rangle$ . Također, iz istog razloga, dolazimo do četvrtog tjemena u  $[a, s_0] \cup \langle s'_0, b \rangle$ . Time je dokaz teorema završen.

□

**Napomena 7.8.** • Slika 9 preuzeta je iz [1], Fig. 2.9.

## Literatura

- [1] B. Abate, F. Tovena, *Curves and surfaces*, Springer, Italy, 2006.
- [2] T. Banchoff, S. Lovett, *Differential Geometry of Curves and Surfaces, second edition*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [3] C. Bar, *Elementary differential geometry*, Cambridge university press, New York, 2010.
- [4] I. Gogić, *Diferencijalna geometrija*, interna skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2018.
- [5] A. Hehl, *The Isoperimetric Inequality, Proseminar Curves and Surfaces*, Universitaet Tuebingen, Tuebingen, 2013., dostupna na <https://www.math.uni-tuebingen.de/ab/GeometrieWerkstatt/IsoperimetricInequality.pdf>



## Sažetak

Izoperimetrijska nejednakost, Hopfov teorem o indeksu rotacije i Teorem o četiri tjemena su jedni od glavnih rezultata koje su matematičari otkrili proučavajući globalna svojstva ravninskih krivulja u okvirima diferencijalne geometrije. U ovom diplomskom radu dajemo prikaz osnova teorije ravninskih krivulja te dokazujemo tri navedena teorema.

Glavni dio ovog rada je podijeljen na šest poglavlja. U prvom poglavlju definiramo kruta i nepravna euklidska gibanja, dok u drugom poglavlju definiramo krivulje i prikazujemo neka njihova osnovna svojstva. U trećem poglavlju koncentriramo se samo na ravninske krivulje i za njih definiramo pojmove orijentirane zakrivljenosti, kutne funkcije i indeksa rotacije. U istom poglavlju dokazujemo i fundamentalni teorem za ravninske krivulje. U četvrtom i petom poglavlju redom dokazujemo Hopfov teorem o indeksu rotacije i Izoperimetrijsku nejednakost, dok u zadnjem poglavlju uvodimo pojam tjemena krivulje i konačno dokazujemo Teorem o četiri tjemena.

## Summary

Isoperimetric inequality, Hopf's winding theorem and the Four vertex theorem are one of the main results discovered by mathematicians while studying the global properties of plane curves in the framework of differential geometry. In this graduate thesis we present basics of the theory of plane curves and prove the three aforementioned theorems.

The main part of this paper is divided into six chapters. In the first chapter we define rigid and non-rigid Euclidean motions, while in the second chapter we define curves and present some of their basic properties. In the third chapter, we focus only on the plane curves and for them we define the concepts of oriented curvature, angular function and winding number. In the same chapter we also prove the fundamental theorem for plane curves. In the fourth and fifth chapter we prove the Hopf's winding theorem (Hopf's Umlaufsatz) and the Isoperimetric inequality, respectively, while in the last chapter we introduce the concept of a vertex of a curve and finally prove the Four vertex theorem.

## **Životopis**

Rođen sam 6. travnja 1993. godine u Imotskom kao četvrto od petero djece. Osnovnoškolsko obrazovanje, koje završavam 2007. godine, pohađam u osnovnoj školi Stjepan Radić u Imotskom. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja upisujem Gimnaziju dr. Mate Ujevića u Imotskom, gdje 2011. godine završavam jezični smjer. Iste godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer. Nakon završenog preddiplomskog studija, na istom fakultetu 2015. godine, upisujem diplomski studij matematike, nastavnički smjer.