Inverzni problemi velikih dimenzija kod obrade slika

Jeličić, Goran

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:457738

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Goran Jeličić

INVERZNI PROBLEMI VELIKIH DIMENZIJA KOD OBRADE SLIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, Rujan, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Hvala mojoj obitelji i prijateljima na potpori i ohrabrenjima. Najveće hvala mojoj mami, tati i seki na beskrajnom strpljenju, ljubavi i podršci koju mi neumorno pružaju. Bez vas ništa ne bi vrijedilo.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Matematički modeli i primjeri inverznog problema **2**
1.1 Matematički modeli problema 2
1.2 Primjeri inverznog problema 3

2 Neke tehnike regularizacije **8**
2.1 Linearani inverzni problemi 8
2.2 Separabilni inverzni problemi 18
2.3 Nelinearni inverzni problemi 24

3 Numeričke metode i primjeri **26**
3.1 Linearni primjer: Dekonvolucija 27
3.2 Separabilni nelinearni primjer: Slijepa Dekonvolucija više okvira 30
3.3 Nelinearni primjer: Tomosinteza 32

Bibliografija **35**

Uvod

Moderne tehnologije za obradu slika, kao što su kod velikih teleskopa, radara, medicinskih skenera i modernih mikroskopa uobičajeno kombiniraju uređaj koji prikuplja podatke te računalo koje sastavi dobivene podatke u slike koje korisnici mogu proučavati. Sastavljanje slike je uobičajeno proces koji se sastoji od rješavanja takozvanog inverznog problema, odnosno slika je rekonstruirana iz neizravnih mjerenja odgovarajućeg objekta. Inverzni problem je često "loše uvjetovan", ill-posed problem, odnosno male promjene kod izmjerenih podataka mogu dovesti do velikih promjena u rješenju, stoga potrebne su određene tehnike da bi se to riješilo. Budući da prikupljeni podaci uvijek sadrže makar malu količinu određenog šuma ili greške nije moguće pronači egzaktno rješenje već tražimo fizički realnu aproksimaciju rješenja. To radimo tako da postavimo odgovarajuči regularizirani problem iz kojega možemo računati odgovarajuće aproksimirano rješenje. Inverzni problem je sveprisutan u obradi slika. Dekonvolucija, rekonstrukcija slika, radarsko procesiranje slika, ove probleme zovemo problemi velikih dimenzija jer zahtijevaju procesiranje velike količine podataka i rješavanje sustava sa velikim brojem jednadžbi. Šezdesetih godina dvadesetog stoljeća matematičari su se počeli rigoroznije baviti proučavanjem inverznog problema a sa vremenom je zanimanje samo raslo. Ovaj rad dat će pregled nekoliko uobičajenih matematičkih modela, uključujuću linearan, sparabilan nelinearan i općeniti nelinearan model. Razmotrit ce se tehnike regularizacije i implementacije problema velikih dimenzija, sa posebnim fokusom na algoritme koje mogu iskoristiti specifičnu strukturu problema. Mogučnosti i potencijal opisanih algoritama ilustrirat će se primjerima iz dekonvolucije slika, slijepe dekonvolucije slika sa više okvira, i tomosinteze. Glavna literatura za rad je knjiga [6] a svi kodovi za ilustraciju teorije napisani su u Matlab okruženju.

Poglavlje 1

Matematički modeli i primjeri inverznog problema

1.1 Matematički modeli problema

Inverzni problemi su svi oni, gdje se na temelju mjerenih vrijednosti zaključuje o strukturi ili pojavi koja je mogla uzrokovati upravo takav skup vrijednosti. Opći matematički model koji opisuje takav proces dan je jednadžbom

$$\boldsymbol{b}_{exact} = F(\boldsymbol{x}_{exact}), \tag{1.1}$$

pri čemu x_{exact} predstavlja egzaktne vrijednosti koje računamo dok su b_{exact} izmjereni podaci bez eventualnih grešaka. F ovisi o izboru tehnike i smatramo ga poznatim operatorom a uobičajeno je F definiran na Hilbertovom prostoru tako da je neprekidan i zatvoren.
Nažalost najčešće je gotovo nemoguće prikupiti podatke koji ne sadžre šum ili greške, pa sljedeći model problema puno realnije opisuje proces.

$$\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{x}_{exact}) + \boldsymbol{\eta} \tag{1.2}$$

gdje η predstavlja šum i greške u mjerenim podacima.
Ako imamo $F(x) = Ax$ gdje je A linearan operator, inverzni problem za dane b i A nastoji odrediti aproksimacije za x_{exact}. U ovom slučaju govorimo o linearnom problemu i model ima oblik

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}_{exact} + \boldsymbol{\eta} \tag{1.3}$$

Ako imamo situaciju u kojoj se x može separirati na dvije različite komponente $x^{(l)}$ i $x^{(nl)}$ i ako vrijedi

$$F(x) = F(x^{(l)}x^{(l)}) = A(x^{(nl)})x^{(l)}$$

pri čemu je A linearan operator definiran preko $x^{(nl)}$, tada b linearno ovisi o $x^{(l)}$ a nelinearno o $x^{(nl)}$.
U ovom slučaju govorimo o separabilnom nelinearnom modelu

$$\boldsymbol{b} = A(\boldsymbol{x}^{(nl)})\boldsymbol{x}^{(l)} + \boldsymbol{\eta}, \tag{1.4}$$

a problem glasi: za dane $\boldsymbol{b}$ i A, pri čemu je A zadan parametarski, treba naći aproksimacije $x^{(nl)}_{exact}$ i $x^{(l)}_{exact}$. Posljednji slučaj koji ćemo spomenuti nije niti linearan niti separabilan i tada govorimo o općem nelinearnom problemu. Imamo model

$$\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{x}_{exact}) + \boldsymbol{\eta}, \tag{1.5}$$

a problem glasi: za dane $\boldsymbol{b}$ i F treba izračunati aprokosimacije x_{exact}.

1.2 Primjeri inverznog problema

U ovom radu spomenuti ćemo tri primjera koja vode k rješavanju inverznog problema, to su dekonvolucija slike (ili image deblurring), slijepa dekonvolucija slike sa više okvira i tomosinteza. Za svaki primjer opisati će se odgovarajući model i matematička podloga.

Dekonvolucija slike

Uzmimo primjer automobila koji prebrzo vozi ulicom i uslikan je od policijske kamere, velika je šansa da zbog kretanja automobila slika ili video budu mutni, odnosno loše vidljivosti, što može dovesti do teškoća kod prepoznavanja tablice automobila. U ovom slučaju naša slika je zamagljena zbog pokreta snimanog objekta odnosno sadrži takozvani "motion blur" [8]. Zadatak je umanjiti zamagljenje procesom dekonvolucije slike, odmagljivanje slike, i to je ključan dio poboljšavanja rezolucije i kontrasta slike. Matematički bi odmagljivanje opisali na sljedeći način, $x(t), t \in \mathbb{R}^d$ je skalarna funkcija koja opisuje stvarnu d-dimenzionalnu sliku. Tada je naša zamagljena slika opisana sa

$$b(s) = \int_\Omega k(s,t)x(t)dt + \eta(s), \tag{1.6}$$

gdje je $s \in \mathbb{R}^d$ a $\eta(s)$ predstavlja dodani šum koji se pojavio. Jezgra k(s,t) je funkcija koja opisuje iskrivljenu poziciju točke u slici i označavamo je kraticom (PSF), pri čemu je PSF

kratica od engleskog naziva "Point spread function". Prepoznajemo inverzni problem koji glasi: za dane k i b treba izračunati aproksimacije od x. Ako vrijedi $k(s,t) = k(s-t)$ tada kažemo da je PSF prostorno invarijantna, a naš integral u $\int_\Omega k(s-t)x(t)dt$ je konvolucija i stoga odgovarajući inverzni problem zovemo dekonvolucija. Na kraju diskretizacijom dobivamo naš linearan model inverznog problema

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}_{exact} + \boldsymbol{\eta}.$$

Matricu A smo dobili aproksimacijom integrala iskoristivši neku od formula za približnu integraciju funkcija. Ako u otvorenoj Newton-Cotesovoj formuli: $\int_a^b f(x)dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^m f(x_0 + kh_m)$, $h_m = \frac{b-a}{m+2}$, uzmemo da je $m = 0$ imamo formulu poznatu pod nazivom "formula srednje točke" i nju možemo koristiti. Nekada je moguće da PSF nije u potpunosti poznata funkcija već mora biti konstruirana eksperimentalno preko žarišnih točaka. Recimo u primjeru našeg nesavjesnog vozača koji svojim automobilom prebrzo vozi, PSF je određena smjerom i brzinom kojom se giba objekt. Za PSF koja je prostorno invarijantna, jedna slika žarišne točke i odgovarajući rubni uvjeti su dovoljni za definiciju matrice A, a za aproksimaciju našeg x možemo koristiti brzu Fourierovu transformaciju (FFT).

Slijepa dekonvolucija slike sa više okvira

Slijepa dekonvolucija slike sa više okvira je proces otkrivanja originalne slike iz niza promatranih zamagljenih slika. Radi jednostavnosti koristit ćemo kratki naziv MFBD koji dolazi iz engleskog jezika, "Multi frame blind deconvolution". MFBD se često koristi u astronomiji. U nizu promatranih slika, svaka slika ima drugačiji šum odnosno svaka slika ima drugačiji operator zamagljivanja. Neka je niz promatranih slika istog objekta modeliran na sljedeći način:

$$\boldsymbol{b}_i = A(\boldsymbol{x}_i^{(nl)})\boldsymbol{x}_{exact}^{(l)} + \boldsymbol{\eta}_i, \tag{1.7}$$

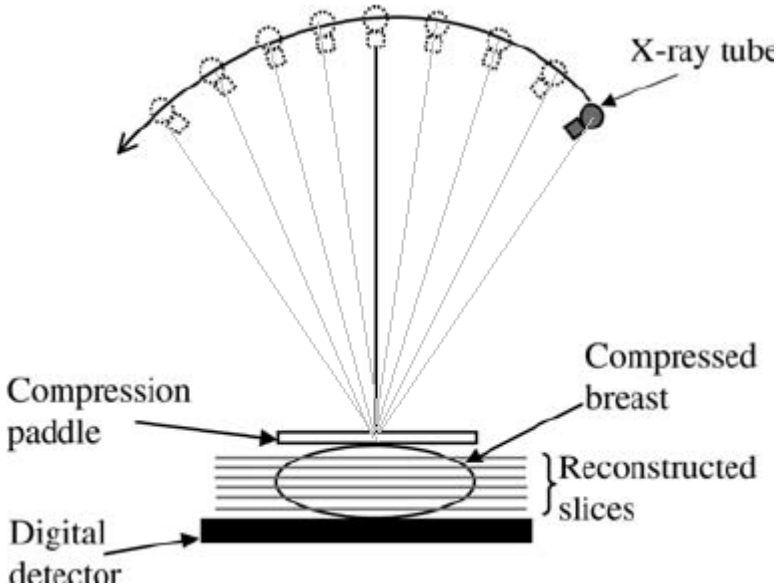
gdje je $i = 1, 2, ..., m$. Ako se sada vratimo na naš separabilan problem (1.4) imamo

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x_{exact}^{(l)} = \begin{bmatrix} x_1^{(l)} \\ x_2^{(l)} \\ \vdots \\ x_m^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A(x_1^{(nl)}) & & & \\ & A(x_2^{(nl)}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(x_m^{(nl)}) \end{pmatrix}.$$

Tomosinteza

Tomosinteza je trodimenzinalna tehnika procesiranja slike rekonstrukcijom nekoliko planarnih radiografa. Tjekom proces prikupljanja podataka o promatranom objektu u tomo-

sintezi rendgenska cijev se kreće oko detektora, koji je najčešće u stanju mirovanja, i snima niz 2D projekcija objekta iz raznih kuteva i svaki član tog niza nam daje neke informacije o promatranom objektu te na kraju dobivamo njegovu 3D sliku. Tomosinteza je danas najčešće korištena u pretragama prsnog koša i dojki. Kada je u pitanju prsni koš tomosinteza je alternativa za CT kao znatno jeftinija opcija i opcija sa znatno manjom radijacijom pacijenta. Kao geometrijsku ilustraciju kako funkcionira tomosinteza dojke imamo sliku (1.1).



Slika 1.1: Primjer tomosinteze dojke. Slika je preuzeta iz [7]

Tomosintezu spominjemo jer se veza između niza 2D projekcija objekta i samog 3D objekta može postaviti kao nelinearan inverzni problem. Matematički model koji ćemo opisati odgovara isključivo za polienergetski rendgen dojke. Budući da govorimo o 3D objektima trebali bi se upoznati i sa pojmom voksel, on predstavlja vrijednost na regularnoj mreži u trodimenzionalnom prostoru. Voksel je najmanji dio prostora koji se može obrađivati ili promatrati, moguće je napraviti analogiju između voksela i piksela koji predstavlja obradivi dio dvodimenzionalne slike. Voksel uz svoju vrijednost nema eksplicitno zadane koordinate u prostoru već se njegov položaj određuje u odnosu na druge voksele to jest njegov položaj u strukturi koji čini sliku. U procesuiranja slike kod rendgena dojke uobičajeno je interpretirati voksele kao kompoziciju masnih tkiva, žljezdanih tkiva ili kombinaciju i masnih i žljezdanih tkiva. Svaki voksel, u prostoru objekta, može se prikazati kao dio tkiva. Nekada je potrebno unaprijed znati samu gustoću tkiva ili barem koeficjent prigušenja. Koeficjent prigušenja je konstanta koja određuje kojim intenzitetom rendgenska zraka prolazi kroz samo tkivo. Kada je rendgen u pitanju koeficjent prigušenja se najčešće označava sa

μ i mjeri se u cm^{-1}. Ukoliko je μ velik to bi značilo da zraka vrlo brzo slabi prolazeći kroz neko sredstvo, dok mali μ znači da je sredstvo relativno transparentno u odnosu na zraku. Pretpostavimo sada da je naš 3D objekt diskretiziran u regularnu mrežu voksela a da je svaka 2D projekcija objekta diskretizirana u regularnu mrežu piksela. Broj voksela u mreži je N a broj piksela u mreži iznosi M. Broj voksela, N, se najčešće kreće u rangu od nekoliko milijardi dok se broj piksela, M, pak kreće u rangu od oko nekoliko milijuna. Za svaki voksel, $j = 1, 2, ..., N$, koeficjent prigušenja može se zapisati kao

$$\mu(e)^{(j)} = s(e)x_{excat}^{(j)} + z(e), \tag{1.8}$$

gdje $x_{excat}^{(j)}$ predstavlja postotak žljezdanog tkiva za voksel j u "stvarnoj" slici objekta a $s(e)$ i $z(e)$ su poznati koeficjenti ovisni o energiji rendgenske zrake. Ovakva dekompozicija je vrlo slična pristupu koji se koristi kod CT-a gdje se koeficjent prigušenja zadaje preko fotoelektrične komponente i komponente raspršenja. 2D projekcije se dohvaćaju pod raznim kutevima iz unaprijed određenog raspona, iznosi energije fotona se mogu diskretizirati u fiksni broj energetskih razina. Pretpostavimo da imamo n_θ projekcija i n_e spomenutih energetskih razina. U praksi su te vrijednosti uobičajeno $n_\theta = 21$ i $n_e = 43$. Za određeni kut projekcije izračunamo trag monokromatske zrake za jednu energetsku razinu te nakon toga sumiramo po svim razinama. Neka je $a^{(ij)}$ duljina zrake koja prolazi kroz voksel j, pridonoseći pikselu i. Tada je diskretizirani trag monokromatske zrake za piksel i opisan sa

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(e)^{(j)} a^{(ij)} = s(e) \sum_{j=1}^{N} x_{excat}^{(j)} a^{(ij)} + z(e) \sum_{j=1}^{N} a^{(ij)}. \tag{1.9}$$

Koristeći standardni matematički model za radiografiju prijenosa, vrijednost i-tog piksela za θ-tu bešumnu projekciju slike, uključujući iznose energije svih fotona prisutnih u spektru, dana je sa

$$b_\theta^{(i)} = \sum_{e=1}^{n_e} \varrho(e) exp(-\sum_{j=1}^{N} \mu(e)^{(j)} a^{(ij)}), \tag{1.10}$$

gdje je $\varrho(e)$ produkt trenutne energije fotona i broja fotona. Radi pojednostavljenja notacije uvodimo $M \times N$ matricu A_θ sa vrijednostima $a^{(ij)}$ na pozicijama i, j. Ako uvrstimo matricu A u (1.9) dobijemo i-ti zapis u vektoru:

$$s(e)A_\theta x_{exact} + z(e)A_\theta 1, \tag{1.11}$$

gdje je 1 vektor jedinica dok je x_{exact} vektor koji na j-tom mjestu ima vrijednost $x_{exact}^{(j)}$. Nadalje, sada našu nezamagljenu sliku, bez šuma možemo prikazati vektorski na sljedeći način. Nezamagljena projekcija izvrednjavanjem po komponentama dana je sa:

$$b_\theta = \sum_{e=1}^{n_e} \varrho(e) exp(-[s(e)A_\theta x_{exact} + z(e)A_\theta 1]). \tag{1.12}$$

Gdje je b_θ vektor sa komponentama $b_\theta^{(i)}$.
Rekonstrukcija tomosinteze je nelinearan inverzni problem kojemu je cilj aproksimirati x_{exact} pomoću danog niza projekcija zadanog objekta sagledanog iz raznih kuteva, b_θ, $\theta = 1, 2, ..., n_\theta$. Sada se možemo vratiti na naš model nelinearnog inverznog problema zadanog u (1.5), gdje je

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_\theta} \end{bmatrix}, \qquad F(x) = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_e} \varrho(e) exp(-[s(e)A_1 x_{exact} + z(e)A_1 1]) \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^{n_e} \varrho(e) exp(-[s(e)A_{n_\theta} x_{exact} + z(e)A_{n_\theta} 1]) \end{bmatrix}$$

Poglavlje 2

Neke tehnike regularizacije

Početkom 20. stoljeća matematičar Jacques Hadamard definirao je dobro uvjetovan problem kao onaj koji zadovoljava sljedeća tri uvjeta: rješenje postoji, rješenje je jedinstveno, te je rješenje neprekidno ovisno od danim podacima. Problem na koji nailazimo kod aproksimacije rješenja inverznog problema je taj što je problem najčešće "loše uvjetovan" odnosno ne zadovoljava sva tri Hadamardova uvjeta. Regularizacijom smatramo niz tehnika pomoću kojih pokušavamo "loše uvjetovan" problem modificirati i ispraviti nestabilnosti koje postoje. Regularizacija je tehnika kojom želimo pretpostaviti neku situaciju, izračunati teoretski efekt koje taj model uzrokuje, te usporediti s opaženim efektima. Možemo recimo pretpostavljati količinu šuma ili glatkoću rješenja. Svaka tehnika regularizacije iziskuje odabir određenih parametara o kojima ovisi. Teorija regularizacije linearnog inverznog problema je mnogo razvijenija od teorije za nelinearan problem. Linearni problemi su dobar temelj za ilustraciju problema i izazova koji se mogu pojaviti kod rješavanja inverznih problema velikih dimenzija a neke tehnike se mogu koristiti i kod nelinearnog inverznog problema.

2.1 Linearani inverzni problemi

Pretpostavimo da imamo linearan inverzni problem dan sa (1.3) gdje su b i A poznati a trebamo izračunati aproksimaciju od x_{exact}. Iznimno koristan alat kod proučavanja i rješavanja lineranog inverznog problema je dekompozicija matrice na singularne vrijednosti (SVD), gdje je SVD skračenica od singular value decomposition. SVD je važna dekompozicija matrice bilo s teorijske ili praktične strane. U sljedećem teoremu dana je definicija SVD dekompozicije te tvrdnja o njezinoj egzistenciji za svaku matricu. Navodimo samo tvrdnju teorema, dok se dokaz može naći u standardnim udžbenicima iz numeričke analize, npr. [3].

Teorem 2.1.1. *Ako je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tada postoje unitarne matrice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je*

$$U^*AV = \Sigma,$$

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{min\{m,n\}})$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_{min(m,n)} \geq 0$. Brojeve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{min(m,n)}$ zovemo singularne vrijednosti matrice A. Stupce matrice U zovemo lijevi, a stupce matrice V desni singularni vektori matrice A. Singularna dekompozicija matrice A se označava sa $A = U\Sigma V^*$

Neka su $u_1, u_2, ..., u_{min(m,n)}$ stupci matrice U i $v_1, v_2, ..., v_{min(m,n)}$ stupci matrice V Uz navedene oznake lako se vidi da vrijedi

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T = \sum_{i=1}^{min\{m,n\}} u_i\sigma_i v_i^T. \tag{2.1}$$

Ako imamo da je $m < n$ tada SVD definiramo za matricu A^T. Nakon iskaza teorema o postojanju dekompozicije trebamo uvesti i pojam generaliziranog inverza za matrice koje nisu kvadratne. Generalizirani inverz poopćava pojam inverza na pravokutne matrice i matrice koje nisu punog ranga a označavamo ga sa A^+ ili $A^\dagger$. Generalizirani inverz ponekad nazivamo i Moore-Penroseov pseudoinverz, postoje tri ekvivalentne definicije: Funkcijska, Mooreova i Penroseova. Navesti ćemo Penroseovu definiciju.

Definicija 2.1.2. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, njezin generalizirani inverz je jedinstvena matrica $A^\dagger$, takva da vrijedi:*

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, \\ (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger, \\ (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ako je $A = U\Sigma V^T$. Tada je generalizirani inverz za matricu A dan sa,

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T. \tag{2.3}$$

Gdje je $\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a Σ_1 dijagonalna matrica sa ne-nul singularnim vrijednostima na dijagonali.

Ako je $m \geq n$ i matrica A punog ranga tada aproksimaciju od x_{exact} možemo dobiti preko inverznog rješenja,

$$x_{inv} = A^\dagger b = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b_{exact}}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T \eta}{\sigma_i} v_i. \tag{2.4}$$

Ono je ujedno i rješenje linearnog problema najmanjih kvadrata.

$$\min_x ||Ax - b|| .$$

U gornjoj formuli možemo lako vidjeti da se inverzno rješenje sastoji od dva dijela, od $x_{exact} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b_{exact}}{\sigma_i} v_i$ i greške $error = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T \eta}{\sigma_i} v_i$, a u_i i v_i su singularni vektori od A. Kod loše uvjetovanog inverznog problema sljedeće činjenice vrijede za matricu A:

- Matrica A ima singularne vrijednosti σ_i koje propadaju u 0.
- Singularni vektori koji pripadaju "malim" singularnim vrijednostima imaju tendenciju oscilirati više nego singularni vektori koji pripadaju "velikim" singularnim vrijednostima.
- Komponente $|u_i^T b_{exact}|$ propadaju brže nego singularne vrijednosti σ_i, tu činjenicu nazivamo diskretnim Picardovim uvjetom.

Iz prve dvije točke vidimo da dijeljenje sa malim singularnim vrijednostima znatno uvečava grešku. Obzirom da inverznim rješenjem dominiraju takve komponente dobivamo vrlo lošu aproksimaciju rješenja x_{exact}. No iz treće točke možemo vidjeti da postoje načini kojima možemo rekonstruirati dobru aproksimaciju rješenja.

Možemo pokušati filtrirati odgovarajuće komponente za male singularne vrijednosti i gledati samo komponente koje odgovaraju velikim singularnim vrijednostima. Sada bi rješenje dobiveno SVD filtriranjem bilo dano sa

$$x_{filt} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i, \tag{2.5}$$

što je ustvari krnja SVD metoda ili TSVD a gdje θ_i zovemo faktorima filtriranja za koje vrijedi

$$\theta_i \approx \begin{cases} 1, & \text{za velike } \sigma_i \\ 0, & \text{za male } \sigma_i \end{cases}.$$

Odnosno, izfiltrirali smo samo velike singularne vrijednosti dok smo male singularne vrijednosti odbacili.

Tikhonov filter

Postoje različite varijante odabira faktora filtriranja, jedan od mogućih odabira je i Tikhonov filter koji je ime dobio po ruskom matematičaru Andreyu Nikolayevichu Tikhonovu.

$$\theta_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}.$$

Gdje je α parametar o kojem ovisi metoda filtriranja. Prikladne vrijednosti parametra α ovise o matrici A, njezinim singularnim vrijednostima i singularnim vektorima, ali ovise i o vektoru b. Odabir konkretnih parametara nije trivijalan i postoje razne metode za izračun optimalnog parametra, a mi ćemo detaljnije opisati metode GCV (Generalized Cross Validation), W-GCV (Wighted Generalized Cross Validation), te načelo odstupanja (Discrepancy principle).
Pretpostavimo da je x_{reg} rješenje dobiveno nekom metodom. Načelo odstupanja, također često zvano Morozov-o načelo odstupanja, kaže da rješenje tražimo tako da vrijedi

$$\left\|b - Ax_{reg}\right\|_2 = \tau \left\|\eta\right\|_2 ,$$

gdje je $\tau > 1$ predefiniran broj. Ovo je vjerojatno i najjednostavnija metoda za implementaciju i postoje znatni teorijski rezultati utvrđeni uz prisustvo šuma. Potrebno je imati vrlo dobru ocjenu za $\|\eta\|_2$.
Glavna ideja iza GCV-a kaže da sa dobrim regulariziranim rješenjem možemo dobro predvidjeti eventualnu rupu u promatranim podacima. Odnosno, ukoliko imamo n mjerenja te jedan rezultat izbacimo tvrdimo da pomoću $n - 1$ preostalih mjerenja možemo izračunati vrijednost koja nedostaje.
Opći oblik regresijskog modela je

$$y = A\beta + \epsilon \tag{2.6}$$

gdje su y i ϵ n-dimenzionalni vektori, β p-dimenzionalan vektor a A $n \times p$ matrica.
Neka je vektor ϵ Gaussova slučajna varijabla s očekivanjem nula i varijancom σ^2 koja označava odstupanja od zavisnosti koja nisu opisana modelom, takav ϵ nazivamo slučajna greška i pišemo $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$. Možemo vidjeti da za vektor ϵ vrijedi

$$E\epsilon = 0,$$
$$E\epsilon\epsilon^\tau = \sigma^2 I$$

gdje je I $n \times n$ identiteta.
Za $p \geq 3$, postoji procjena od β sa srednjom kvadratnom greškom manjom nego li je Gauss-Markov procjena

$$\beta(0) = (A^\tau A)^{-1} A^\tau y.$$

Procjena $\beta(0)$ je rješenje linearnog problema najmanjih kvadrata i u slučaju kada je $n \geq p$ i matrica A punog stupčanog ranga u gornjoj jednadžbi govorimo o generaliziranom inverzu. Jedan od najpoznatijih rezultata u statistici dokazuje da procjena parametara β putem najmanjih kavdrata ima najmanju varijancu među svim linearnim nepristranim procjenama. Međutim kako restrikcija na isključivo nepristrane procjene nije mudra koriste se procjene poput ridge regresije, metode sažimanja koja sažima koeficijente regresije stavljanjem tzv.

kazne na njihovu veličinu.
Golub i Heat, [4], promatraju familiju ridge procjena $\beta(\lambda)$ danu s

$$\beta(\lambda) = (A^\tau A + n\lambda I)^{-1} A^\tau y. \tag{2.7}$$

Pri čemu je procjena $\beta(\lambda)$ posteriorna sredina od β ako vrijedi

$$\beta \sim \mathrm{N}(0, aI),$$
$$\lambda = \sigma^2 / na.$$

$\beta(\lambda)$ je ujedno i rješenje problema koji glasi:

Naći β takav da vrijedi

$$\|\beta\| = \gamma,$$

uz uvjet da vrijedi i

$$\frac{1}{n} \|y - A\beta\| = min,$$

gdje $\|\cdot\|$ predstavlja euklidsku normu.
Vidimo da je gornji problem ekvivalentan problemu traženja minimuma za izraz

$$\frac{1}{n} \|y - A\beta\|^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator.
Ako se prisjetimo malo regularizacije kod rješavanja problema najmanjih kvadrata, [10], uočiti ćemo sličnost sa gornjim problemom.
Kada tražimo rješenje problema oblika

$$\min_\beta \|A\beta - y\|$$

najčešće korištena metoda za stabiliziranje oscilirajućih rješenja problema najmanjih kvadrata je uvođenje uvjeta na rješenje β oblika:

$$\|Q(\beta - \beta_0)\|^2 \leq \sigma^2.$$

Gdje su:

- β_0 opcionalna incijalna aproksimacija od β
- Q je matrična reprezentacija linearnog operatora uvjeta
- σ^2 je konstanta koja određuje jačinu uvjeta

Aproksimacija β_λ dobiva se rješavanjem problema

$$\min_\beta (\|y - A\beta\|^2 + \lambda \|Q(\beta - \beta_0\|^2)$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator čija vrijednost ovisi o σ^2 a rješenje je oblika

$$\beta_\lambda = (A^T A + \lambda^2 Q^T Q)^{-1}(A^T y + \lambda^2 Q^T Q\beta_0)$$

Sada vidimo gore spomenutu sličnost sa našim problemom minimiziranja izraza

$$\frac{1}{n} \|y - A\beta\|^2 + \lambda \|\beta\|^2$$

čije rješenje je dano izrazom

$$\beta(\lambda) = (A^\tau A + n\lambda I)^{-1} A^\tau y.$$

Za svaki problem postoji $\lambda > 0$ za koji je očekivana srednja kvadratna pogreška $E\|\beta - \beta(\lambda)\|^2$ manja od Gauss-Markov procjene, međutim vidimo da λ koji minimizira $E\|\beta - \beta(\lambda)\|^2$ ovisi o σ^2 i nepoznatom β. Uspjeh regularizacije ovisi o dobrom izboru λ te za to postoji nekoliko načina, a jedan od njih je i GCV metoda.
GCV procjena od λ u (2.7) dana je kao minimizator za $V(\lambda)$ dan sa,

$$V(\lambda) = \frac{\frac{1}{n}\|(I - A(\lambda))y\|^2}{[\frac{1}{n}\text{Trag}(I - A(\lambda))]^2},$$

gdje je

$$A(\lambda) = A(A^\tau A + n\lambda I))^{-1} A^\tau.$$

Ovakva procjena je rotacijsko-invarijantna verzija regularne CV, cross-validation, metode. Neka je $T(\lambda)$ srednja kvadratna pogreška za $A\beta$, to jest vrijedi

$$T(\lambda) = \frac{1}{n} \|A\beta - A\beta(\lambda)\|^2 .$$

Ako sada iskoristimo činjenicu da je

$$\beta(\lambda) = (A^\tau A + n\lambda I)^{-1} A^\tau y$$

te uvrstimo u jednadžbu za $T(\lambda)$, dobijemo

$$T(\lambda) = \frac{1}{n} \left\|A\beta - A(A^T A + n\lambda I)^{-1} A^T y\right\|^2 .$$

Dobivena jednadžba je, ako iskoristimo $A(\lambda) = A(A^\tau A + n\lambda I))^{-1} A^\tau$, ekvivalentna sljedećoj jednadžbi.

$$T(\lambda) = \frac{1}{n} \|A\beta - A(\lambda)y\|^2$$

Uz činjenicu da je $y = A\beta + \epsilon$, i uz malo raspisivanja, dobijemo

$$T(\lambda) = \frac{1}{n}[\|(I - A(\lambda))A\beta\|^2 - 2\epsilon^T(I - A(\lambda))A\beta + \epsilon^T A^2(\lambda)\epsilon].$$

Kada na dobivenu jednadžbu za $T(\lambda)$ djelujemo sa očekivanjem

$$ET(\lambda) = \frac{1}{n}[\|(I - A(\lambda))A\beta\|^2 - 2E(\epsilon^T)(I - A(\lambda))A\beta + E(\epsilon^T A(\lambda)^2\epsilon)]$$

i uz svojstva od ϵ, očekivanje od ϵ je 0 a varijanca $\sigma^2 I$ imamo

$$ET(\lambda) = \frac{1}{n}[\|(I - A(\lambda))A\beta\|^2 + E(\mathrm{Trag}A^2(\lambda)\epsilon\epsilon^T)].$$

Zbog linearnosti očekivanja i $E(\epsilon\epsilon^T) = \sigma^2 I$ konačno dolazimo do očekivanja od $T(\lambda)$

$$ET(\lambda) = \frac{1}{n}\|(I - A(\lambda))A\beta\|^2 + \frac{\sigma^2}{n}\mathrm{Trag}A^2(\lambda).$$

Za $n > p$, Golub i Heat u [4] koriste procjenu za $ET(\lambda)$ danu sa

$$\widetilde{T}(\lambda) = \frac{1}{n}\|(I - A(\lambda))y)\|^2 - \frac{2\hat{\sigma}^2}{n}\mathrm{Trag}(I - A(\lambda)) + \hat{\sigma}^2,$$

gdje je

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}\left\|(I - A(A^\tau A)^{-1}A^\tau)y\right\|^2.$$

GCV procjena, za velike n, od λ minimizira $ET(\lambda)$ bez nužnosti da se minimizira i σ^2, kao posljedica toga GCV se može koristiti kod problema kada je $n - p$ malen, ili kada je model dan sa

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_{i,j}\beta_j + \epsilon_i,$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

Sada se možemo vratiti malo unazad i ako pretpostavimo d a je α regularizacijski parametar korišten za dobivanje x_{reg}, GCV metoda traži α takav da minimizira funkciju,

$$V(\alpha) = \frac{\left\|b - Ax_{reg}\right\|^2}{(\mathrm{Trag}(I - A\hat{A_{reg}})^2}. \tag{2.8}$$

Gdje $\hat{A_{reg}}$ dobijemo iz eksplicitnog rješenja za x_{reg}

$$x_{reg} = (A^T A - \alpha^2 I)^{-1}A^T b.$$

tako da uzmemo

$$\hat{A_{reg}} = (A^T A - \alpha^2 I)^{-1} A^T.$$

U praksi se događa da GCV metodom izabrani Tikhonov parametar bude premalen i dobiveno rješenje nije dovoljno glatko odnosno sadrži previše šuma. Da bi se taj problem zaobišao za neke klase problema uvodimo i težinski parametar odnosno težinsku varijantu GCV metode. Kod W-GCV metode α tražimo na način da minimiziramo težinsku funkciju

$$V_\omega(\alpha) = \frac{\left\|b - Ax_{reg}\right\|^2}{(\mathrm{Trag}(I - \omega A\hat{A_{reg}})^2}.$$

Možemo primjetiti da nam ako uzmemo $\omega = 1$ W-GCV metoda ustvari daje GCV metodu, za $\omega > 1$ dobijamo glađa rješenja dok za $\omega < 1$ dobivamo manje glatka rješenja. Težinski parametar ω se dobija eksperimentalno a u [2] možemo vidjeti neke primjere biranja ω.

Budući da SVD izračun može biti skup za velike matrice, ta metoda za rješavanje problema najmanjih kvadrata se često izbjegava kod inverznih problema velikih dimenzija, s druge strane SVD je dobar odabir ukoliko se radi o struktuiranoj matrici. Na primjer, ako imamo matricu A koja se može raspisati kao Kroneckerov produkt dviju matrica,

$$A = A_r \otimes A_c = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r)}A_c & a_{12}^{(r)}A_c & a_{13}^{(r)}A_c & \dots & a_{1n}^{(r)}A_c \\ a_{21}^{(r)}A_c & a_{22}^{(r)}A_c & a_{23}^{(r)}A_c & \dots & a_{2n}^{(r)}A_c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(r)}A_c & a_{n2}^{(r)}A_c & a_{n3}^{(r)}A_c & \dots & a_{nn}^{(r)}A_c \end{bmatrix}$$

gdje su A_c $m \times m$ matrica te A_r $n \times n$ matrica sa vrijednostima $a_{ij}^{(r)}$ SVD filtriranje je vrlo korisno.

Nekada nam je korisnije koristiti neku alternativnu faktorizaciju, na primjer spektralnu faktorizaciju. Iako svaka matrica ima SVD, spektralnu faktorizaciju imaju samo kvadratne matrice koje zadovoljavaju uvijet $A^*A = AA^* = I$. Pa sada pretpostavimo da imamo dijagonalnu matricu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

te unitarnu matricu Q, odnosno matricu Q koja zadovoljava uvijet $QQ^* = Q^*Q = I$, gdje je I identiteta. Q^* je hermitski adjungirana matrica unitarne matrice Q. Stupci matrice Q su svojstveni vektori pripadajućih svojstvenih vrijednosti matrice A, dok se na dijagonali matrice Λ nalaze upravo svojstvene vrijednosti matrice A. Sada našu matricu A možemo raspisati kao,

$$A = Q\Lambda Q^*.$$

Prednost spektralne faktorizacije je ta što je prikladnija za računanje od SVD-a. U poglavlju u kojem prikazujemo konkretne primjere, za linearni inverzni problem kod dekonvolucije koristili smo upravo spektralnu faktorizaciju.

Iterativne metode regularizacije

Alternativan pristup varijacijskoj regularizaciji je da iterativnim metodama rješavamo problem najmanjih kvadrata

$$\min_x ||Ax - b||^2 .$$

Mnogi algoritmi kao što su recimo, Landweber, metoda konjugiranih gradijenata (na primjer (CGLS) metoda konjugiranih gradijenata za najmanje kvadrate ili (LSQR) koju koristimo za rješenje velikih linearnih sustava jednadžbi i problema najmanjih kvadrata) itd. se mogu koristiti kao metode za regularizaciju.Većina iterativnih metoda regularizacije može biti postavljena u opći okvir povezan s rješavanjem minimizacijskog problema

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T A^T Ax - x^T A^T b.$$

Gdje je svako rješenje iteracije dano sa

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k M_k(A^T b - A^T A x_k) = x_k + \rho_k M_k r_k,$$

pri čemu je $r_k = A^T b - A^T A x_k$. Uz prikladan odabir ρ_k i M_k možemo se domoći i koristiti neke od gore spomenutih metoda. Landweberova metoda nazvana je po Američkom znanstveniku Loisu Landweberu koji se u svojoj karijeri bavio hidrodinamikom a u povijesti je ostao najpoznatiji upravo po spomenutoj metodi. Landweberova metoda prvi je put predstavljena 1950e godine a glavna ideja metode je da se uzme $\rho_k = const$, to jest da se ρ ne mjenja kroz iteracije, dok za M_k uzimamo da je identiteta, $M_k = I$. Problem je što metoda sporo konvergira te se stoga ne koristi često kod linearnih problema, no može biti vrlo korisna kod rješavanja inverznih problema velikih dimenzija. Kada bismo sada uzeli $M_0 = I$ ali $M_{k+1} = I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}$, gdje su $s_k = x_{k+1} - x_k$ i $y_k = A^T A(x_{k+1} - x_k)$, i $\rho_k = arg\min_{\rho>0} f(x_k - \rho r_k)$ dobivamo metodu konjugiranih gradijenata. Metoda konjugiranih gradijenata je iterativna metoda iz Krylovljevih potprostora, za rješavanje sustava

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b, x \in \mathbb{R}^n,$$
$$A^T = A$$
$$y^T Ay > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ y \neq 0.$$

Iz poslijednja dva retka vidimo da je matrica sustava A simetrična pozitivno definitna. Općenito metoda konjugiranih gradijenata konvergira mnogo brže nego Landweberova metoda. U primjerima koristiti ćemo CGLS (Conjugate Gradient method for Least Squares) metodu.

2.2 Separabilni inverzni problemi

Kao primjer separabilnog nelinearnog inverznog problema, (1.4), spomenuli smo slijepu dekonvoluciju sa više okvira. Pokazati ćemo kako možemo iskoristiti svojstvo separabilnosti našeg problema da bismo došli do rješenja. Pogledajmo regularizirani Tikhonov problem najmanjeg kvadrata,

$$\min_{x^{(l)},x^{(nl)}} \{\left\|A(x^{(nl)})x^{(l)} - b\right\|_2^2 + \alpha^2 \left\|x^{(l)}\right\|_2^2\} = \min_{x^{(l)},x^{(nl)}} \left\|\begin{bmatrix} A(x^{(nl)}) \\ \alpha I \end{bmatrix} x^{(l)} - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}\right\|_2^2. \tag{2.9}$$

Spomenuti ćemo tri načina kako riješiti separabilni inverzni nelinearan problem.

Potpuno spareni problem

Nelinearan problem najmanjih kvadrata u (2.9) možemo zapisati na sljedeći način,

$$\min_x \phi(x) = \min_x \frac{1}{2} \|\rho(x)\|_2^2, \tag{2.10}$$

gdje vrijedi

$$\rho(x) = \rho(x^{(l)}, x^{(nl)}) = \begin{bmatrix} A(x^{(nl)}) \\ \alpha I \end{bmatrix} x^{(l)} - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x^{(l)} \\ x^{(nl)} \end{bmatrix}.$$

Nelinearan problem najmanjeg kvadrata rješava se metodom iteracija. Zapisat ćemo generalni algoritam metode iteracija.

Algoritam 1: Generalni oblik metode iteracija

1 Odaberemo incijalni $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^{(l)} \\ x_0^{(nl)} \end{bmatrix}$

2 Za $k = 0, 1, 2, ...$ *ponavljaj*
   (I) Odaberimo smjer koraka d_k.
   (II) Izračunajmo duljinu koraka τ_k
   (III) Korigiraj aproksimaciju $x_{k+1} = x_k + \tau_k d_k$
   (IV) Ukoliko je postignut cilj prekini iteracije

3 Kraj

Uobićajeno je d_k izabrati kao aproksimaciju smjera Newton-ove metode. Stoga d_k tražimo koristeći Hessian i gradijent funkcije cilja i uzimamo da je

$$d_k = -(\hat{\boldsymbol{H}}(\phi(x_k)))^{-1}\nabla\phi(x_k),$$

pri čemu je $\hat{\boldsymbol{H}}(\phi)$ aproksimacija od $\boldsymbol{H}(\phi)$ a $\nabla\phi = \boldsymbol{J}_\rho^T\rho$ gdje je $\boldsymbol{J}_\rho$ Jakobijan. Za duljinu koraka τ_k se često uzima 1 ali i $\tau_k \in (0, 1)$.
Prije nego napišemo izraz $\boldsymbol{J}_\rho$ prikazati ćemo vezu između Jakobijana te Hessiana i gradijenta.
Ako gledamo izraz

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(r_j(x))^2 = \frac{1}{2}\left\|r(x)\right\|_2^2,$$

funckcija cilja je suma kvadrata nelinearnih funkcija. Prema definiciji gradijent ∇f funkcije više varijabli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je vektorsko polje čije su komponente parcijalne derivacije funkcije f

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Hessian $\boldsymbol{H}(f)$ funkcije $f(x)$ je kvadratna matrica parcijalnih derivacija drugog reda funkcije $f(x)$, Hessian se još naziva i matrica konstanti sila (engl. force constant matrix).

$$\boldsymbol{H}(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Jakobijan i Hessian se mogu izraziti preko gradijenta.

$$\boldsymbol{J}_r = \begin{bmatrix} \nabla r_1(x)^T \\ \nabla r_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla r_m(x)^T \end{bmatrix},$$

to jest vrijedi

$$\boldsymbol{H}(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{J}_{\nabla f}(\boldsymbol{x})^T,$$

$$\boldsymbol{x} = x_1, x_2, ..., x_n$$

Tada možemo pisati sljedeće:

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} r_j(x)\nabla r_j(x) = J_r^T r(x)$$

$$\boldsymbol{H}(f(x)) = \sum_{j=1}^{m} \nabla r_j(x)\nabla r_j(x)^T + \sum_{j=1}^{m} r_j(x)\boldsymbol{H}(r_j(x)) = J_r^T J_r + \sum_{j=1}^{m} r_j(x)\boldsymbol{H}(r_j(x))$$

Iz $\nabla f(x) = \boldsymbol{J}_r^T r(x)$ vidimo da je naš $\nabla\phi$ uistinu $\nabla\phi = \boldsymbol{J}_\rho^T\rho$.
Podsjetimo se da uz $\nabla\phi = \boldsymbol{J}_\rho^T\rho$ također vrijedi:

$$\min_x \phi(x) = \min_x \frac{1}{2}\|\rho(x)\|_2^2,$$

$$d_k = -(\hat{\boldsymbol{H}}(\phi(x_k)))^{-1}\nabla\phi(x_k),$$

te sada možemo zapisati Jacobijevu matricu za ρ, $\boldsymbol{J}_\rho$, na sljedeći način

$$\boldsymbol{J}_\rho = \left[\frac{\partial\rho(x^{(l)},x^{(nl)})}{\partial x^{(l)}} \quad \frac{\partial\rho(x^{(l)},x^{(nl)})}{\partial x^{(nl)}}\right].$$

Za nelinearan problem najmanjeg kvadrata češće korištena metoda je modifikacija Newton-ove metode za pronalazak minimuma funkcije. Dobila je ime po Carl Friedrich Gaussu i Isaacu Newtonu, Gauss-Newton-ova metoda za razliku od Newton-ove može biti korištena samo za minimizaciju sume kvadratnih funkcija. Također možemo vidjeti da se kod Gauss-Newton metode aproksimacija od $\boldsymbol{H}(\phi)$ može prikazati preko Jakobijana od ρ i da je dana na sljedeći način

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\phi) \approx \boldsymbol{J}_\rho^T\boldsymbol{J}_\rho.$$

Gauss-Newton-ova metoda metoda može biti vrlo korisna ali problem u svakom koraku može stvarati konstrukcija d_k. Primjetimo da dimenzija matrice Jakobijana odgovara broju piksela slike, $x^{(l)}$, i broju parametara u $x^{(nl)}$, stoga možemo dobiti i matricu reda veličine $10^6 \times 10^6$. Stoga je umjesto Gauss-Newton metode poželjnije koristiti recimo (nelinearnu) metodu konjugiranih gradijenata. Kako naravno ništa ne dolazi "besplatno" metoda konjugiranih gradijenata je možda bolja po svakoj iteraciji, ali je potreban veći broj iteracija da bi se postigla tražena vrijednost, nekada znatno veći broj iteracija.

Nespareni(razdvojeni) problem

Vjerojatno najjednostavnija ideja za rješavanje separabilnog nelinearnog problema je ta da ga se razdvoji na dva problema, jedan koji će sadržavati $x^{(l)}$ odnosno jedan koji će sadržavati $x^{(nl)}$ i pritom rješavamo jedan linearan i jedan nelinearan problem.

Algoritam 2: Blok metoda iteracija

1 Odaberimo incijalni $x_0^{(nl)}$

2 Za $k = 0, 1, 2, ...$ *ponavljaj*

(I) Odaberimo α_k i rješavajmo:

1) Linearan problem

$$x_k^{(l)} = arg\min_{x^{(l)}} \left\| A(x_k^{(nl)})x_k^{(l)} - b \right\|_2^2 + \alpha_k^2 \left\| x^{(l)} \right\|_2^2$$

2) Nelinearan problem

$$x_{k+1}^{(nl)} = arg\min_{x^{(nl)}} \left\| A(x_k^{(nl)})x_k^{(l)} - b \right\|_2^2 + \alpha_k^2 \left\| x^{(l)} \right\|_2^2$$

(II) Ukoliko je postignut cilj prekini iteracije

Kraj

Linearan problem možemo rješavati na način koji smo opisali u prethodnom dijelu rada koji se bavi upravo linearnim problemom, dok za nelinearan problem zahtijeva korištenje još jedne iterativne metode kao što je naprimjer također spomenuta Gauss-Newton-ova. Problem kod ove metode može stvarati spora konvergencija.

Varijabilna projekcija

Varijablina projekcija je svođenje rješavanja separabilnog problema na problem minimiziranja sume kvadrata u nelinearnom parametru koju su prvi predstavili matematičari Victor Pereyra i G.H. Golub. U [4] se može vidjeti detaljnija analiza rezultata koje koristimo u radu.

Pogledajmo ponovno jednadžbu pod (2.9),

$$\min_x \phi(x) = \min_x \frac{1}{2} \|\rho(x)\|_2^2 .$$

Iskoristimo činjenice da je $\phi(x^{(l)}, x^{(nl)})$ linearan u $x^{(l)}$ i da $x^{(nl)}$ sadrži manje parametara nego $x^{(l)}$. Za razliku od metode opisane u prethodnom dijelu ovdje ne planiramo eksplicitno separirati varijable već implicitno eliminirati linearne parametre. Definirajmo sada

$$\psi(x^{(nl)}) = \phi(x^{(l)}(x^{(nl)}), x^{(nl)})$$

gdje je $x^{(l)}(x^{(nl)})$ rješenje od

$$\min_{x^{(l)}} \phi(x^{(l)}, x^{(nl)}) = \min_{x^{(l)}} \left\| \begin{bmatrix} A(x^{(nl)}) \\ \alpha I \end{bmatrix} x^{(l)} - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 . \tag{2.11}$$

Sada možemo iskoristiti Gauss-Newton-ov metodu, a da bi se ta metoda mogla koristiti najprije moramo odrediti $\nabla\psi(x^{(nl)})$. Ako uzmemo u obzir da je $x^{(l)}(x^{(nl)})$ rješenje jednadžbe u (2.11), tada vrijedi $\frac{\partial\phi}{\partial x^{(l)}(x^{(nl)})} = 0$, stoga slijedi

$$\nabla\psi(x^{(nl)}) = \frac{dx^{(l)}}{dx^{(nl)}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{(l)}} + \frac{\partial\phi}{\partial x^{(nl)}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{(nl)}}.$$

A kako se Jakobijan može izraziti preko gradijenta, Jakobijan za ρ dan je sa

$$\boldsymbol{J}_\rho = \frac{\partial(A(x^{(nl)})x^{(l)})}{\partial x^{(nl)}}.$$

Tako da sada imamo zapis $\nabla\psi$ slijedećeg oblika,

$$\nabla\psi(x^{(nl)}) = \boldsymbol{J}_\rho^T\rho.$$

Konstruiranje Jakobijana J_ρ nije trivijalno , ali je često prigodnije od konstruiranja Jakobijana J_ρ. Problem varijabilne stope konvergencije za dva seta parametara $x^{(l)}$ i $x^{(nl)}$je eliminirana. Velika prednost varijabilne projekcije kao metode rješavanja inverznih problema velikih dimenzija što metode spomenute u poglavlju "Linearani inverzni problemi" mogu rješavati regularizirani linearni problem najmanjeg kvadrata u svakoj iteraciji, te uključiti i sheme za procjenu parametara regularizacije. Gauss-Newton metoda zahtjeva implementaciju funkcije modela, rezidualnu funkciju te Jakobijan rezidualne funkcije.

Algoritam 3: Gaus-Newton-ova varijabilna projekcija

1 Odaberemo incijalni $x_0^{(nl)}$
2 Za $k = 0, 1, 2, ...$ *ponavlja j*
(I) Odaberemo α_k
(II) $x_k^{(l)} = arg\min_{x^{(l)}} \left\| \begin{bmatrix} A(x^{(nl)}) \\ \alpha_k I \end{bmatrix} x^{(l)} - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2$
(III) $r_k = b - A(x_k^{(nl)})x_k^{(l)}$
(IV) $d_k = arg\min_d \left\| \boldsymbol{J}_\rho d + r_k \right\|_2$
to jest d_k je rješenje problema najmanjih kvadrata $d_k = -(\boldsymbol{J}_\rho^T\boldsymbol{J}_\rho)^{-1}\boldsymbol{J}_\rho^T r_k$ ili
$\boldsymbol{J}_\rho^T\boldsymbol{J}_\rho d_k = -\boldsymbol{J}_\rho^T r_k$
(V) Odredimo τ_k
(VI) $x_{k+1}^{(nl)} = x_k^{(nl)} + \tau_k d_k$
3 Kraj

U gornjem algoritmu za korak k τ_k računamo tako da će svaki $k+1$ korak biti "značajno

bolji" od prethodnog koraka k. Da bi prepoznali kada je korak "značajno bolji" koristimo se uvjetom Armijo. Armijo uvjet glasi

$$\psi(x_k^{(nl)} + \tau_k d_k) \leq \psi(x_k^{(nl)}) + \mu\tau_k \nabla\psi^T(x_k^{(nl)})d_k.$$

Za danu konstantu $\mu \in < 0, 1 >$. Detaljnije o uvjetu Armijo i još nekim strategijama za odabir duljine koraka može se naći u [9].

2.3 Nelinearni inverzni problemi

Regularizacija općeg nelinearnog inverznog problema je mnogo izazovnija nego u linearnom ili separabilnom nelinearnom slučaju, SVD nam recimo kod nelinearnog problema nije dostupan. Nelinearan inverzni problem se javlja kod mnogih realnih primjera i zbog toga se intenzivno istražuju metode regularizacije i rješavanja problema. Jedan mogući pristup rješavanju nelinearnog problema je taj da oblik $F(x) = b$ preformuliramo u $F(x) - b = 0$. Pa možemo imati

$$x_{k+1} = x_k + \phi_k p_k, \tag{2.12}$$

pri čemu p_k rješava

$$J(x_k)p = b - F(x_k), \tag{2.13}$$

gdje je $J(x_k)$ Jakobijan od F.
U svakoj iteraciji nelinearna funkcija se iznova linearizira oko trenutne vrijednosti. Iako generalno nije simetrično, matrično množenje koje uključuje Jakobijan čiji elementi su prve derivacije od $F(x)$ je izračunljivo. Glavne mane ovog pristupa su te da postojanje i jednistvenost rješenja nisu osigurane, i rješenje ovisi o izgledu Jakobijana. Nadalje, ne postoji priordan odabir funkcije čijim bi proučavanje mogli lakše odabrati duljinu koraka ϕ_k. Još jedan pristup rješavanju nelinearnog problema je taj da uključimo pretpostavke statističke distribucije modela i maksimiziramo odgovarajuću vjerojatnosnu funkciju. Uzmimo za primjer, model aditivnog Gaussovog šuma. Pod određenim uvjetima on odgovara rješavanju sljedećeg nelinearnog problema najmanjih kvadrata:

$$\min_x \frac{1}{2} \|b - F(x)\|_2^2 . \tag{2.14}$$

Budući da je ovo standardan optimizacijski problem, Newtonov pristup je moguć. Za naš gore navedeni problem najmanjeg kvadrata gradijent možemo zapisati kao $g(x) = J(x)^T(F(x) - b)$, a Hessian $H(x) = J(x)^T J(x) + Z(x)$, gdje $Z(x)$ sadrži druge derivacije od $F(x)$. Glavna prednost ove metode je što za minimizaciju možemo koristiti razne metode, sa druge strane potencijalna negativnost ove metode je ta što druge derivacije mogu biti iznimno komplicirane za računanje dok nam probleme mogu stvarati i negativne svojstvene vrijednosti koje se pojavljuju u $Z(x)$. Ako se sada sjetimo Landweberove metode iz poglavlja "Iterativne metode regularizacije", nelinearnu Landweberovu iteraciju možemo zapisati na sljedeći način,

$$x_{k+1} = x_k + J(x_k)^T(b - F(x_k)).$$

Gornja jednadžba se svodi na standardnu Landweberovu iteraciju ukoliko je $F(x)$ linearan. Za probleme velikih dimenzija preferirani odabir je Gauss-Newton-ov algoritam za koji uzimamo

$$H \approx J(x_k)^T J(x_k),$$

na taj način osiguravamo pozitivnu semidefinitnost. Metoda nije preporučljiva za velike rezidualne probleme. Nelinearna metoda konjugiranih gradijenata ili kvazi-Newton-ove metode poput LBFGS (Limited Memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) mogu također biti dobre alternative. Pronalazak globalnog minimizatora za nelinearne optimizacijske probleme je u načelu iznimno kompliciran, jedan od razloga je što konveksnost funkcije cilja nije garantiran kao u linearnom slučaju. Stoga postoji mogučnost da algoritam zapne u lokalnom minimumu rješenja. Kada se bavimo loše uvjetovanim problemima, generalni pristup za konstrukciju regularizacije je taj da se spare iterativni pristup sa nekim kriterijem zaustavljanja, naprimjer Morozovim načelom odstupanja (Morozov's discrepancy principle) da bismo dobili zadovoljavajuće rješenje. Za metode slične Newtonovoj uobičajeno je ukomponirati dodatnu regularizaciju za unutarnji susatav iz razloga što Jakobijan ili Hessian mogu postati loše uvjetovani. Dobar odabir je uključiti linearnu Tikhonovu regularizaciju u (2.13) i tada dobijemo

$$(J(x_k)^T J(x_k) + \alpha^2 I)p = J(x_k)^T (b - F(x_k)), \tag{2.15}$$

što je ekvivalentno Levenberg-Marquardt iteraciji, [1], gdje je p_k rješenje Tikhonovog minimizacijskog problema

$$\min_p \|F(x_k) + J(x_k)p - b\|_2^2 + \alpha^2 \|p\|_2^2 ,$$

gdje je $F(x)$ lineariziran oko x_k. Regularizaciju za unutarnji sustav je također moguće dobiti rješavanjem unutarnjeg sustava, ali ne potpuno precizno, i na taj način dozvoliti prijevremeni izlaz iz iteracije. Takve metode zovemo "Inexact Newton" metode i one rješavaju Newton-ove jednadžbe samo približno i na neodređen način. Prijevremeno stopiranje unutarnjih iteracija je dobar način da se ovaj pristup učini praktičnim za probleme velikih dimenzija te ujedno provede regularizacija unutarnjeg sustava. Fleksibilnost oko odabira operatora regularizacije je zgodna, ali odabrati dobar parametar regularizacije može biti računski zahtjevan zadatak, osobito za probleme velikih dimenzija. Uobičajeni pristup za regularizaciju nelinearnog loše uvjetovanog inverznog problema je taj da koristimo standardne iterativne metode da bismo rješili (2.14), a regularizaciju postigli prijevremenim stopiranjem iteracija. Prijevremeno stopiranje iteracija se još naziva i "early stopping" te se koristi u strojnom učenju, oblik je regularizacije koja se koristi radi izbjegavanja "overfitting-a" kada se program trenira iterativnim metodama, kao na primjer gradijentnom metodom silazaka.

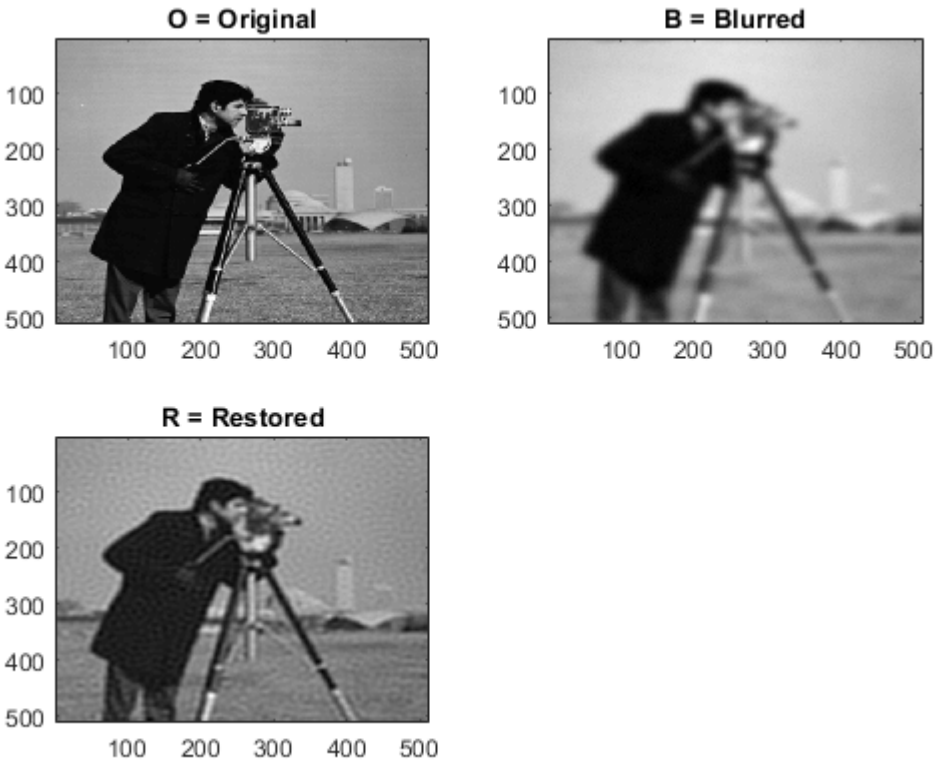
Poglavlje 3

Numeričke metode i primjeri

U ovom poglavlju mogučnosti i potencijal opisanih algoritama ilustrirat ćemo primjerima iz dekonvolucije slika, slijepe dekonvolucije slika sa više okvira i tomosinteze.

3.1 Linearni primjer: Dekonvolucija

Za primjer smo koristili set standardnih test slika preuzet sa interneta. Koristili smo crno bijelu sliku, iz preuzetog seta, čovjeka koji stoji pred kamerom. Upravo ta slika je inaće vrlo često korištena slika upravo za testiranje algoritma odmagljivanja slika. Razlog čestoj uporabi je što nema objekata na rubu slike već je dio koji odmagljujemo pozicioniran u samom središtu slike. U matlabu smo na matricu koja predstavlja fotografiju djelovali sa PSF vektorom i dodali 1% Gaussovog šuma. PSF je konstruirana putem Gaussovog operatora zamagljenja.



Slika 3.1: Slika preuzeta sa internet stranice http://www.imageprocessingplace.com

Za računanje rješenja koristili smo Tikhonovu regularizaciju sa jednim parametrom. Za dobijanje optimalnog parametra α, o kojem ovisi filtiranje, koristili smo GCV metodu koja traži α takav da minimizira (2.8). Ovdje možemo vidjeti MATLAB kod koji smo koristili za računanje parametra α, gdje je G naš $V(\alpha)$ u (2.8).

MATLAB CODE:

```
ffunction alpha = gcv(s, bhat)
[s, idx] = sort(abs(s));
s = flipud(s);
idx = flipud(idx);
bhat = abs( bhat(idx) );
n = length(s);
rho = zeros(n-1,1);
rho(n-1) = bhat(n)^2;
G = zeros(n-1,1);
G(n-1) = rho(n-1);
for k=n-2:-1:1
  rho(k) = rho(k+1) + bhat(k+1)^2;
  G(k) = rho(k)/(n - k)^2;
end
for k=1:n-2,
  if (s(k)==s(k+1))
     G(k) = inf;
  end
end
% trazimo minimizator za GCV .
[minG,reg_min] = min(G);
alpha = s(reg_min(1));
% reg_min je index filtriranja a alpha parameter filtriranja.
% To jest, svaka singularna vrijednost < alpha je filtrirana, to jest odbacena.
end
```

Linearan inverzni problem ima oblik (1.3) gdje je matrica A strukturirana matrica koja ovisi o PSF i za takvu matricu A postoji spektralna dekompozicija $A = F^*\Lambda F$, gdje matrica F predstavlja d-dimenzionalnu Fourierovu transformaciju i zadovoljava $F^*F = I$. Matricu F ne treba eksplicitno konstruirati već se umjesto toga koristimo brzom Fourierovom transformacijom to jest FFT funkcijama da bi implementirali matrično i vektorsko množenje sa F i F^*. Tako da smo ustvari riješenje dobili FFT baziranom Tikhonovom regularizacijom gdje smo za traženje optimalnog parametra za filtiranje koristili gore prikazanu funkciju, gcv, koju pozivamo u funkciji tik_fft. U funkciji tik_fft ovisno o parametru α filtriramo samo komponente koje nam odgovaraju i tražimo filtrirano rješenje oblika (2.5) gdje je θ_i dan sa,

$$\theta_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}.$$

MATLAB CODE:

```
function [X, alpha] = tik_fft(B, PSF, center)
D = conj(s).*s + abs(alpha)^2;
bhat = conj(s) .* bhat;
% bhat je vektor koji sadrzi spektralne koeficjente zamagljene slike, matrice B
% bhat = fft2(B)
% s je vektor koji sadrzi spektralne vrijednosti matrice zamagljenja, PSF_rs
% S = fft2( circshift(PSF, 1-center) ); te onda s = S(:);
xhat = bhat ./ D; % theta iz gornje jednadzbe
xhat = reshape(xhat, size(B));
X = real(ifft2(xhat));
```

Gore navedene kodove smo sve stavili u jednu MATLAB skriptu koja zamagli originalnu sliku te pomoću funkcije tik_fft rekonstruira istu. Na slici 3.1 možemo vidjeti sve tri slike, original, zamagljenu te rekonstruiranu sliku. Matlab kod korišten za dani primjer:

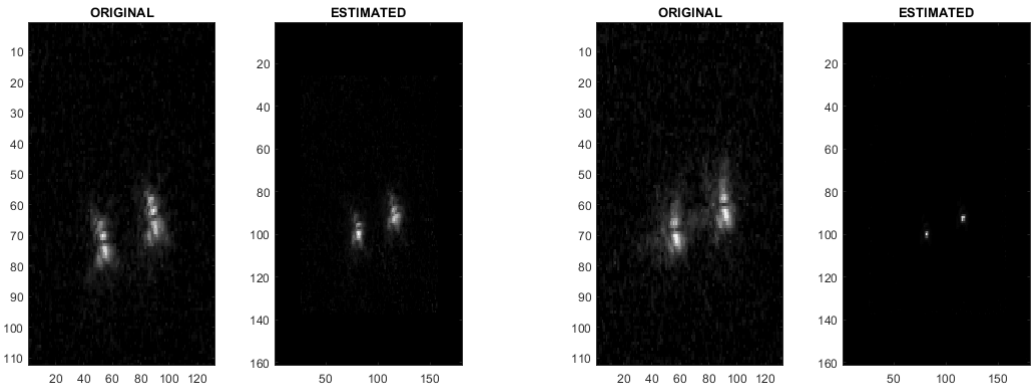
MATLAB CODE:

```
O = double(imread('cameraman.tif'));
% Za kreiranje PSF-a koristimo Gaussov operator zamagljenja
[PSF, center] = psfGauss([512,512], 6);
% Prosirimo po potrebi PSF na velicinu koja odgovara originalnoj slici
PSF_rs = padPSF(PSF, size(O));
S = fft2(circshift(PSF_rs, 1-center));
% Sliku maglimo konvolucijom originalne matrice i PSF_rs te
% Dodajemo 1% suma zamagljenoj slici, takav da je ||e||/||Ax|| = 0.01
B = real(ifft2(S .* fft2(O)));
E = randn(size(B));
E = E / norm(E,'fro');
B = B + 0.01*norm(B,'fro')*E;
[R, alpha] = tik_fft(B, PSF_rs, center);

% parametri m i n predstavljaju dimenziju i ovise o parametru dim
function [PSF, center] = psfGauss(dim, s)
    x = -fix(n/2):ceil(n/2)-1;
    y = -fix(m/2):ceil(m/2)-1;
    [X,Y] = meshgrid(x,y);
    PSF = exp( -(X.^2)/(2*s(1)^2) - (Y.^2)/(2*s(2)^2) );
    PSF = PSF / sum(PSF(:));
    if nargout == 2
        [mm, nn] = find(PSF == max(PSF(:)));
        center = [mm(1), nn(1)];
    end
end
```

3.2 Separabilni nelinearni primjer: Slijepa Dekonvolucija više okvira

Za primjer smo koristili listu od 40 slika zvijezđa Epsilon Lyrea-e, poznatog i kao "Double Double zvjezde". Lista slika preuzeta je sa web stranice Max Planck instituta a uslikane su od strane Josefa Popsela u Capella observatoriju. Korištena je implementacija algoritma danog u [5]. Na slici 3.2 možemo vidjeti usporedbu jedne od 40 originalnih snimaka zvijezda i rekonstruirane odmagljene slike. Tako na dvije slike lijevo vidimo usporedbu prvog originalnog snimka i rekonstrukcije u tom trenutku dok na desnoj strani vidimo posljednji originalni snimak i rekonstrukciju nakon što je program prošao kroz sve snimke. Jasno vidmo kako se na rekonstruiranoj slici jasno vide dvije zvijezde sa znatno manje maglice nego li je na originalnom snimku. Cilj MFBD metode je da iz seta od m dobive-

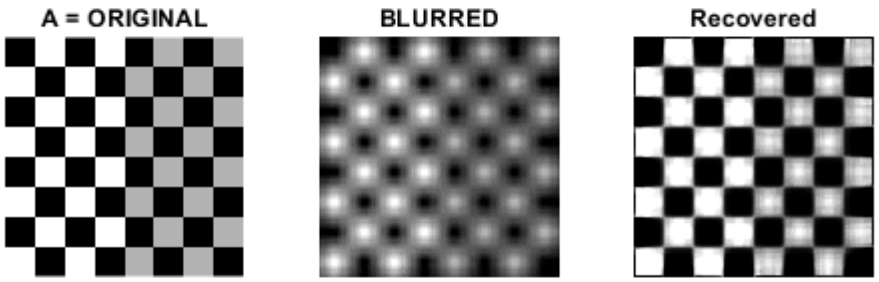


Slika 3.2: Epsilon Lyrae, usporedba originala i rekonstrukcije

nih originalnih zamagljenih slika objekta istovremeno rekonstruira aproksimaciju stvarne slike. Metoda istodobno konstruira i PSF odgovarajuć za svaku pojedinačnu promatranu zamagljenu sliku, ili parametre koji definiraju PSF. U ovom slučaju nismo kao u prethodnom sami maglili sliku jer smo koristili stvarni set slika, ali može se kao i u prethodnom primjeru koristiti Gaussov operator zamagljivanja uz dodavanje 1% šuma. Kao još jedan primjer napravili smo slijepu dekonvoluciju, ali iz jednog okvira, na primjeru jedne slike crno bijele šahovske ploće. Ovdje smo koristili funkciju za slijepu dekonvoluciju (BD) integriranu u MATLAB-u. Šahovsku ploću smo sami kreirali, zamaglili je te nakon toga rekonstruirali. Koristili smo MATLAB funkcije fspecial za kreiranje PSF vektora te imnoise za dodavanje šuma i tako zamaglili originalnu sliku.

MATLAB CODE:

```
I = checkerboard(12);
PSF = fspecial('gaussian',11,10);
V = .0001;
BlurredNoisy = imnoise(imfilter(I,PSF),'gaussian',0,V);
WT = zeros(size(I));
WT(5:end-4,5:end-4) = 1;
INITPSF = ones(size(PSF));
[J P] = deconvblind(BlurredNoisy,INITPSF,20,10*sqrt(V),WT);
```



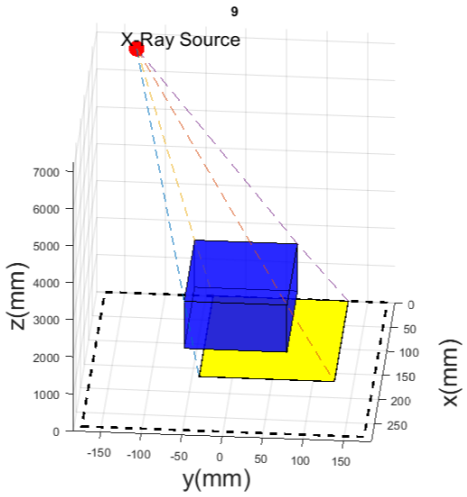
Slika 3.3: Šahovska ploča

3.3 Nelinearni primjer: Tomosinteza

Polienergetska digitalna tomosinteza je jedan primjer nelinearnog inverznog problema. Za prikazati primjer tomosinteze koristili smo besplatni paket za MATLAB [11] koji je open-source i konstantno se nadograđuje. Paket koristi Digital breast tomosynthesis(DBT) metodu za rekonstrukciju slike. Moguć je izbor između četri tipa DBT rekonstrukcije. Mi smo odabrali MLEM, Maximum-Likelihood Estimation-Maximization, metodu. Za rekonstrukciju smo kao set podataka koristili "Shepp-Logan phantom" trening set. Shepp Logan phantom je konstrukcija modela ljudske glave i koristi se u razvoju i testiranju algoritma za rekonstrukciju slika. Originalnu 2D sliku Shepp Logan fantoma možemo vidjeti na slici 3.4. Simulirano je 3D skeninranje ljudske glave konusnom zrakom čiji izvor pro-

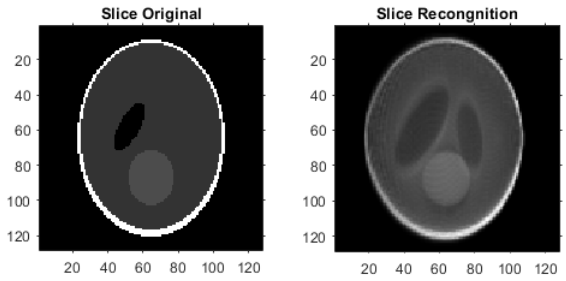
Slika 3.4: 2D Shepp-Logan fantom

lazi kroz devet različitih položaja po y-osi u smjeru sa desna na lijevo, a jedan od položaja možemo vidjeti na slici3.5. Simulirano snimanje vrši se kroz 8 iteracija i za svaku je po-



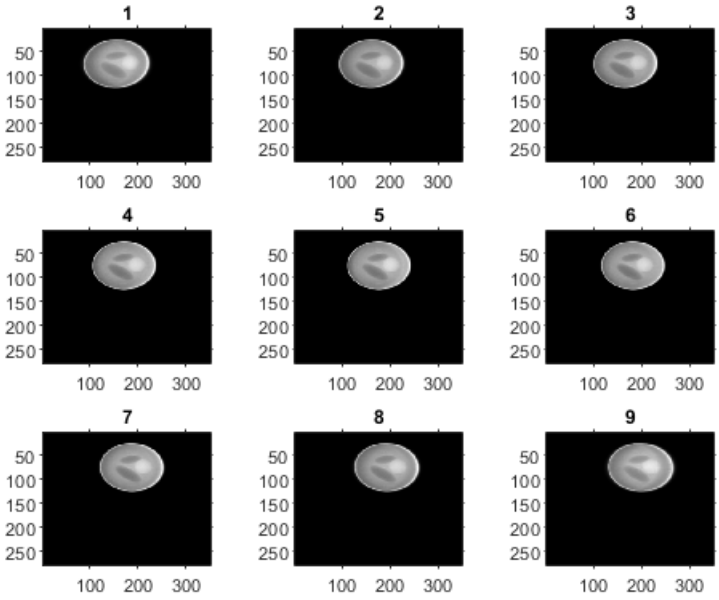
Slika 3.5: 3D prikaz konusne zrake u devetom položaju

trebno oko 6 sekundi, simuliranje je izvođeno na standardnom laptopu. U svakoj iteraciji gledamo jedan horizontalni segment slike i snimamo iz 9 različitih položaja te onda tražimo njenu projekciju. Na slici 3.6 možemo vidjeti usporedbu jednog originalnog snimka te rekonstruiranu sliku u tom trenutku. Dok na slici 3.7 možemo vidjeti dobivenu projekciju iz



Slika 3.6: Usporedba originalnog snimka u četvrtom položaju i rekonstrukcije u petoj iteraciji

svake od 9 točaka u posljednjoj iteraciji. Možemo primjetiti kako je dobivena projekcija dosta vjerna originalu na slici 3.4. Čitav program korišten za ovaj primjer može se naći na internet adresi https://github.com/LAVI-USP/DBT-Reconstruction.



Slika 3.7: Prikaz dobivene projekcije iz svih 9 točaka

Bibliografija

[1] Guillaume Bal, Wolf Naetar, Otmar Scherzer i John Schotland, The levenberg-marquardt iteration for numerical inversion of the power density operator, arXiv e-prints, https://arxiv.org/pdf/1211.6034.pdf, 2012.

[2] Julianne Chung, James G. Nagy i Dianne P. O'Leary, A weighted-gcv method for lanczos-hybrid regularization, ETNA, Kent State University, Vol.28, str.149–167, 2008.

[3] Zlatko Drmač, Vjeran Hari, Miljenko Marušić, Mladen Rogina, Sanja Singer, and Saša Singer, Numerička analiza, predavanja i vježbe. PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 2003.

[4] Gene H.Golub, Michael Heath i Grace Wahba, Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter, Technometrics, Vol.21, str.215–223, 1979.

[5] Stefan Harmeling, Suvrit Sra, Michael Hirsch, and Bernhard Scholkopf, Multiframe blind deconvolution, super-resolution, and saturation correction via incremental EM, conference paper in 17th International Conference on Image Processing, str.3313–3316, 2010.

[6] Scherzer Otmar, Handbook of Mathematical Methods in Imaging, Springer reference, 2015.

[7] Anders Tingberg, X-ray tomosythesis: A review of its use for breast and chest imaging, Radiation Protection Dosimetry, Vol.139, str.100–107, 2016.

[8] Ruxin Wang i Dacheng Tao, Recent progress in image deblurring, arXiv e-prints, https://arxiv.org/pdf/1409.6838.pdf, 2014.

[9] Jorge Nocedal, Stephen J. Wright, Numerical Optimization, Springer reference, 1999.

[10] Nela Bosner, Znanstveno računanje 1, predavanja, PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, $https://web.math.pmf.unizg.hr/\sim nela/$

[11] Vimieiro, Rodrigo B., Open-Source Reconstruction Toolbox for Digital Breast Tomosynthesis, XXVI Brazilian Congress on Biomedical Engineering, Springer Singapore, 2019, str. 349–354,

Sažetak

Inverzni problemi velikih dimenzija pojavljuju se u različitim primjenama u sklopu obrade slika. Zbog numeričke osjetljivosti rješavanja takvih problema, efikasne metode regularizacije su potrebne kako bi se izračunala suvisla rješenja. Ovaj rad dao bi pregled nekoliko uobičajenih matematičkih modela, uključujući linearni model, separabilan nelinearan model, i općeniti nelinearan model. Razmotriti će se tehnike regularizacije i implementacije problema velikih dimenzija, sa posebnim fokusom na algoritme koje mogu iskoristiti specifičnu strukturu problema. Mogučnosti i potencijal opisanih algoritama ilustrirat će se primjerima iz dekonvolucije slika, slijepe dekonvolucije slika sa više okvira i tomosinteze. Na kraju bi se teorija ilustrirala konkretnim primjerima izraženim u MATLAB okruženju.

Summary

Large-scale inverse problems occur in a variety of applications in image processing. Due to the numerical sensitivity of solving such problems, effective regularization methods are needed in order to calculate it coherent solutions. This thesis gives an overview of a few common mathematical models, including linear model, separable nonlinear model, and generalize nonlinear model. Regularization and implementation techniques are considered, with a particular focus on algorithms that can take advantage of the specific problem structure. The possibilities and potential of described algorithms are illustrated with examples from image deconvolution, blind frame deconvolution, and tomosynthesis. Finally, the theory is illustrated with concrete examples expressed in the MATLAB environment.

Životopis

Goran Jeličić rođen je 03.06.1989. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu Julija Klovića te potom VI. gimnaziju. Godine 2009 upisuje preddiplomski studiji na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2013. upisuje diplomski sveučilišni studij, smjer Primjenjena matematika.