Konačni Parsevalovi bazni okviri

Jurman, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Jurman

KONAČNI PARSEVALOVI BAZNI OKVIRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji i curi, koji su mi uvijek bili podrška i bez kojih ne bih uspio, kako na fakultetu tako i u životu.

Sadržaj

Uvod

U vektorskim prostorima vrlo su značajne baze i sustavi izvodnica. Pomoću baze za dani vektorski prostor, svaki se vektor tog vektorskog prostora može na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija elemenata iz baze. Baze su također i sustavi izvodnica za dani vektorski prostor. Sustav izvodnica je skup vektora koji razapinje vektorski prostor te se svaki vektor tog vektorskog prostora može prikazati kao linearna kombinacija tog skupa vektora, no ne na jedinstveni način kao baze. Ako pak nekoj bazi vektorskog prostora dodamo barem jedan element, tada taj skup više neće biti baza. No, taj skup ostat će sustav izvodnica za taj vektorski prostor i svaki vektor tog vektorskog prostora moći će se prikazati (sada više ne na jedinstveni način) kao linearna kombinacija elemenata iz tog skupa, sustava izvodnica. Posebna klasa baza za dani vektorski prostor su ortonormirane baze, čiji su elementi jedinične duljine i u parovima okomiti. Ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za vektorski prostor $\mathcal{H}$, tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Prema tome, poznavajući koeficijente $\langle x, e_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, možemo pomoću navedene formule rekonstruirati vektor x. Međutim, ako nemamo neki od koeficijenata $\langle x, e_i \rangle$, onda nećemo uvijek moći rekonstruirati x. Zato je od interesa naći skupove vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ u $\mathcal{H}$ koji imaju svojstvo da se svaki vektor x može rekonstruirati iz koeficijenata $\langle x, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ali koji će omogućiti sličnu rekonstrukciju i u slučaju kada se neki od ovih koeficijenata izgubi. Tako dolazimo do pojma baznog okvira. Ovo je tema koja se vrlo intenzivno proučava i o njoj postoji jako puno udžbenika i članaka. U ovom radu, najviše smo koristili [4] i [5].

U ovom radu govorit ćemo o baznim okvirima u unitarnim prostorima koji su upravo sustavi izvodnica tih prostora. Sam naslov rada govori nam da ćemo se najviše baviti jednom specifičnom vrstom baznih okvira koje ćemo zvati Parsevalovim baznim okvirima. Vidjet ćemo da oni posjeduju neka svojstva koje imaju i ortonormirane baze. No, na neki način su "bolji" od baza jer omogućavaju rekonstrukciju čak i uz gubitak nekih koeficijenata. Na početku rada upoznat ćemo se s baznim okvirima za konačnodimenzionalne prostore, njihovim karakteristikama i svojstvima. Kasnije ćemo se upoznati s Parsevalovim baznim okvirima. U ovome radu bit će spomenuti i dualni bazni okviri koji igraju važnu ulogu u teoriji baznih okvira.

Poglavlje 1

Bazni okviri

U ovom poglavlju bavimo se baznim okvirima u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Potpuno analogno se promatraju bazni okviri za $\mathbb{C}^n$ i upravo zato ćemo koristiti kompleksnu verziju skalarnog produkta. Dakle ako su $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ elementi iz $\mathbb{R}^n$(ili $\mathbb{C}^n$), tada je $\langle x, y\rangle$ oznaka za skalarni produkt vektora x i y zadan formulom $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$.

U ovome radu koristit ćemo notaciju skup vektora radije nego kolekcija vektora kad ćemo govoriti o baznim okvirima. Nijedna od te dvije notacije nije potpuno precizna. Naime, pod tim pojmom dopuštat ćemo ponavljanje istih vektora u skupu.

1.1 $\mathbb{R}^n$-bazni okviri

Definicija 1.1.1. *Neka je $k \geq n$. Kažemo da skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ u $\mathbb{R}^n$ ima* ***proširenje do baze za*** $\mathbb{R}^k$ *ako postoje vektori $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ iz $\mathbb{R}^{k-n}$ tako da je skup*

$$\left\{\begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} v_k \\ w_k \end{bmatrix}\right\}$$

baza za $\mathbb{R}^k$.

Pomoću pojma proširenja do baze za $\mathbb{R}^k$ definirat ćemo $\mathbb{R}^n$-bazni okvir.

Definicija 1.1.2. $\mathbb{R}^n$***-bazni okvir (eng. frame)*** *je konačan skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \geq n$ u $\mathbb{R}^n$ koji ima proširenje do baze za $\mathbb{R}^k$.*

Na sljedećem primjeru vidjet ćemo kako se nekom skupu vektora može pridodati drugi skup vektora tako da oni čine proširenje do neke baze.

Primjer 1.1.3. *Razmatramo skup vektora*

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Neka su vektori $\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}$. *Tada je*

$$\left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

baza za $\mathbb{R}^3$*, dakle* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *je* $\mathbb{R}^2$*-bazni okvir.*

Uočimo da ovo proširenje nije jedinstveno, tj. ako uzmemo $\{w_1', w_2', w_3'\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \right\}$ *također dobijemo bazu za* $\mathbb{R}^3$.

Primjer 1.1.4. *Razmatramo skup vektora*

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Očito je da za taj skup vektora ne postoji proširenje do baze za $\mathbb{R}^4$ *jer su treće koordinate svih vektora jednake* 0*. Prema definiciji 1.1.2 taj skup nije* $\mathbb{R}^3$*-bazni okvir.*

Svaka baza za $\mathbb{R}^n$ je očito $\mathbb{R}^n$-bazni okvir. Također, $\mathbb{R}^n$-bazni okvir koji ima n elemenata je nužno baza za $\mathbb{R}^n$. Međutim, iz definicije je jasno da nisu svi $\mathbb{R}^n$-bazni okviri baze. Sljedeća tvrdnja kaže da su svi $\mathbb{R}^n$-bazni okviri ujedno i sustavi izvodnica za $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.1.5. *Skup vektora iz* $\mathbb{R}^n$ *je* $\mathbb{R}^n$*-bazni okvir ako i samo ako je taj skup sustav izvodnica za* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$ te neka je $v_i = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \end{bmatrix}^T$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Uvedimo matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nk} \end{bmatrix},$$

te njene retke označimo s $u_1, u_2, \ldots, u_n$. S obzirom da je $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$, rang matrice A je n, što znači da je dimenzija prostora razapetog retcima od A također jednaka n. Označimo s $V = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$. Tada je V potprostor od $\mathbb{R}^k$ dimenzije n, pa je dimenzija od $V^\perp$ jednaka $k-n$, pri čemu $V^\perp$ označava ortogonalni komplement od V u $\mathbb{R}^k$. Neka je $\{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^k$ baza za $V^\perp$ te neka je $u_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \end{bmatrix}^T, i = n+1, n+2, \ldots, k$. Tada je $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ baza za $\mathbb{R}^k$, što znači da je rang matrice kojoj su retci upravo vektori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, tj. matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nk} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \ldots & a_{n+1,k} \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,2} & a_{n+2,3} & \ldots & a_{n+2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

jednak k. No tada stupci ove matrice čine bazu za $\mathbb{R}^k$. Još preostaje uočiti da stupci matrice A upravo proširuju vektore $u_1, u_2, \ldots, u_k$ iz $\mathbb{R}^n$ do baze za $\mathbb{R}^k$.

Ukoliko skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ne razapinje $\mathbb{R}^n$, dimenzija ljuske razapete retcima matrice A je manja od n, pa nije dovoljno pridodati samo $k-n$ redaka u matrici (1.1) kako bi se došlo do baze za $\mathbb{R}^k$. U tom slučaju $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ nije $\mathbb{R}^n$-bazni okvir. □

Uočimo i u ovom dokazu da proširenje do baze nije jedinstveno, jer smo za vektore $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_k$ mogli uzeti bilo koju bazu za bilo koji direktni komplement od V u $\mathbb{R}^k$, ne nužno za ortogonalni komplement.

1.2 Parsevalovi skupovi u $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.2.1. *Konačan skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ u $\mathbb{R}^n$ zove se **Parsevalov skup** ako zadovoljava **Parsevalov identitet**, tj. ako za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, v_i \rangle|^2. \tag{1.2}$$

Kao osnovni primjer Parsevalovih skupova mogu nam poslužiti ortonormirane baze, tj. one baze čiji su vektori jedinične duljine i međusobno su okomiti.

Primjer 1.2.2. *Neka je $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$. Tada je $\|f_i\| = 1$ za $i = 1, \ldots, n$, te $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. Ako je $x \in \mathbb{R}^n$ tada je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$*

jedinstveni realni brojevi. Za sve $j = 1, 2, \ldots, n$ *tada vrijedi*

$$\langle x, f_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle f_i, f_j \rangle = \alpha_j \langle f_j, f_j \rangle = \alpha_j.$$

Stoga je $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle f_i$ *za sve* $x \in \mathbb{R}^n$. *Uvrstimo li to u jednakost* (1.2) *dobivamo*

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle f_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, f_j \rangle f_j \right\rangle = \sum_{i=j=1}^{n} \langle x, f_i \rangle \langle f_j, x \rangle \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, f_i \rangle|^2.$$

Slijedi da svaka ortonormirana baza zadovoljava Parsevalov identitet.

U sljedećoj propoziciji dokazujemo da je Parsevalov identitet svojstvo koje garantira da je zadani skup $\mathbb{R}^n$-bazni okvir.

Propozicija 1.2.3. *Svaki Parsevalov skup za* $\mathbb{R}^n$ *je ujedno i* $\mathbb{R}^n$*-bazni okvir.*

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ Parsevalov skup u $\mathbb{R}^n$. Neka je V potprostor od $\mathbb{R}^n$ razapet skupom $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Da bismo pokazali da je $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ $\mathbb{R}^n$-bazni okvir, prema 1.1.5 treba pokazati da je $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$. Skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ je sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$ ako je $V = \mathbb{R}^n$, odnosno ako je $V^\perp = \{0\}$. Prema tome, dovoljno je pokazati da je $V^\perp = \{0\}$.

Neka je $x \in V^\perp$. Tada je $\langle x, v_i \rangle = 0$ za $i = 1, \ldots, k$. Tada iz (1.2) slijedi $\|x\|^2 = 0$ pa je $x = 0$, tj. $V^\perp = \{0\}$. □

U definiciji 1.1.2 naučili smo da $\mathbb{R}^n$-bazni okvir ima proširenje do baze za $\mathbb{R}^k$. Iz prethodne propozicije tada slijedi da, posebno, svaki Parsevalov skup za $\mathbb{R}^n$ ima proširenje do baze za $\mathbb{R}^k$. U sljedećoj tvrdnji pokazujemo i više. Preciznije, da se Parsevalov skup može proširiti do ortonormirane baze za $\mathbb{R}^k$.

Lema 1.2.4. *Parsevalov skup* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *za* $\mathbb{R}^n$ *ima proširenje do ortonormirane baze za* $\mathbb{R}^k$.

Dokaz. Neka je $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_k \end{bmatrix} \in M_{nk}$ matrica čiji su stupci vektori iz zadanog Parsevalovog skupa. Rang od V je jednak n, pa su retci od V linearno nezavisni. Također ćemo pokazati da su ti retci i ortonormirani. Pomoću Gramm-Schmidtovog algoritma lako ćemo konstruirati vektore iz $\mathbb{R}^k$ (kojih je $k - n$) koji u kombinaciji s retcima iz V (koji su također vektori iz $\mathbb{R}^k$) formiraju ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^k$. Pridodamo li tih $k - n$ vektora matrici V kao posljednjih $k - n$ redaka, dobivamo matricu reda k s ortonormiranim retcima.

Za vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$, s x^* označavamo vektor $x = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_k} \end{bmatrix}$. Primijetimo da je $x^* y = \langle y, x \rangle$, gdje koristimo kompleksnu verziju skalarnog produkta. Jednakost (1.2) možemo zapisati na sljedeći način:

$$x^* x = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle \langle v_i, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} x^* v_i v_i^* x,$$

odnosno,

$$x^* x = x^* \left(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* \right) x.$$

Kako ova jednakost mora vrijediti za sve $x \in \mathbb{R}^n$, slijedi da $\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*$ mora biti jednaka I_n, jediničnoj matrici n-tog reda. Izračunajmo elemente matrice $\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* &= \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a_{1i}} & \overline{a_{2i}} & \cdots & \overline{a_{ni}} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} a_{1i}\overline{a_{1i}} & a_{1i}\overline{a_{2i}} & \cdots & a_{1i}\overline{a_{ni}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni}\overline{a_{1i}} & a_{ni}\overline{a_{2i}} & \cdots & a_{ni}\overline{a_{ni}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} a_{1i}\overline{a_{1i}} & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}\overline{a_{2i}} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{1i}\overline{a_{ni}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} a_{ni}\overline{a_{1i}} & \sum_{i=1}^{k} a_{ni}\overline{a_{2i}} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} a_{ni}\overline{a_{ni}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Prema tome, na (i, j)-tom mjestu matrice $\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*$ nalazi se skalarni umnožak i-tog i j-tog retka matrice V. Dakle, ako su $u_1, u_2, \ldots, u_n$ retci od V, tada je $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ za $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Time smo dokazali da su retci matrice V ortonormirani.

□

Sljedeća tvrdnja je očita posljedica leme 1.2.4, a odnosi se na karakterizaciju Parsevalovog skupa vektora.

Korolar 1.2.5. *Konačan skup vektora* $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ *u* $\mathbb{R}^n$ *je Parsevalov skup ako i samo ako su retci matrice*

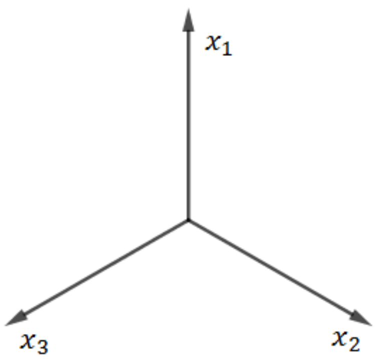
$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix}$$

ortonormirani vektori u $\mathbb{R}^k$.

Pogledajmo sada jedan primjer Parsevalovog skupa koji nije ortonormirana baza.

Primjer 1.2.6. *Neka je zadan vektorski prostor* $\mathbb{R}^2$*, te neka je*

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$



Slika 1.1: Mercedes-Benz bazni okvir

Vektori x_1, x_2 *i* x_3 *su prikazani na slici 1.1. Ovaj bazni okvir često se zove Mercedes-Benz bazni okvir. Naziv je dobio iz očitih razloga. Matrica* $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$*, gdje su* x_1, x_2 *i* x_3 *vektori u stupcima, a* y_1 *i* y_2 *vektori u retcima, izgleda ovako:*

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(0 \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 0,$$

dakle y_1 i y_2 su ortogonalni. Nadalje,

$$\|y_1\| = \sqrt{\langle y_1, y_1\rangle} = \sqrt{0^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{12}+\frac{6}{12}} = 1,$$

$$\|y_2\| = \sqrt{\langle y_2, y_2\rangle} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}+\frac{2}{12}+\frac{2}{12}} = 1.$$

Stoga, retci matrice $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ su ortonormirani pa prema lemi 1.2.5 znači da su vektori x_1, x_2 i $x_3 \in \mathbb{R}^2$ primjer Parsevalovog skupa vektora.

Primijetimo također, da je za svaki $x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ zadovoljena poznata jednakost koja vrijedi za sve ortonormirane baze

$$x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \langle x, x_3\rangle x_3. \tag{1.3}$$

Zaista, imamo

$$\langle x, x_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}b, \quad \langle x, x_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}b, \quad \langle x, x_3\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}b,$$

pa direktnim uvrštavanjem slijedi (1.3).

Uočimo da je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Stoga, uz rastav $x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \langle x, x_3\rangle x_3$ vrijedi i

$$x = (\langle x, x_1\rangle + \alpha)\, x_1 + (\langle x, x_2\rangle + \alpha)\, x_2 + (\langle x, x_3\rangle + \alpha)\, x_3$$

za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proanalizirajmo još malo ovaj primjer. Vektori x_1, x_2 i x_3 čine sustav izvodnica za $\mathbb{R}^2$ (ujedno i $\mathbb{R}^2$-bazni okvir), ali ne čine bazu jer su linearno zavisni (pošto ih je 3 u dvodimenzionalnom prostoru). Oni također čine Parsevalov skup vektora, pa za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi (1.3), a to je jednakost koja vrijedi za sve ortonormirane baze. Jednadžbu (1.3) drugim riječima možemo izreći da koeficijenti u prikazu vektora x pomoću $\{x_1, x_2, x_3\}$ iznose $\{\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \langle x, x_3\rangle\}$. Primijetimo još, pošto su vektori x_1, x_2 i x_3 linearno zavisni, da koeficijenti uz x_1, x_2 i x_3 vektora x nisu jedinstveni.

1.3 Općeniti Parsevalovi bazni okviri

U ovoj sekciji definiramo Parsevalove bazne okvire za proizvoljne konačnodimenzionalne unitarne prostore. Naravno, u slučaju $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ ovaj pojam će se podudarati s već uvedenim pojmom Parsevalovih skupova u $\mathbb{R}^n$ iz prošle sekcije.

Neka je $\mathcal{H}$ n-dimenzionalan unitaran prostor. U našim primjerima imat ćemo euklidske prostore $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Definicija 1.3.1. *Skup vektora* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathcal{H}$ *zove se* ***Parsevalov bazni okvir*** *za* $\mathcal{H}$ *ako za svaki* $x \in \mathcal{H}$ *vrijedi*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i \rangle|^2. \tag{1.4}$$

Skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathcal{H}$ *zove se* ***napeti bazni okvir*** *za* $\mathcal{H}$ *ako za svaki* $x \in \mathcal{H}$ *vrijedi*

$$A\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i \rangle|^2 \tag{1.5}$$

za neki $A > 0$.

U primjeru 1.2.2 smo vidjeli da je svaki ortonormirani skup vektora u $\mathbb{R}^n$ ujedno i Parsevalov bazni okvir. Isti dokaz se može primijeniti i u slučaju proizvoljnog unitarnog prostora $\mathcal{H}$. No, postoje i Parsevalovi bazni okviri koji nisu ortonormirane baze.

Jednakost (1.4) nam daje definiciju Parsevalovog baznog okvira. U primjeru 1.2.6 smo vidjeli još jedno svojstvo koje posjeduju Parsevalovi bazni okviri, a to je jednakost (1.3). Drugim riječima, svaki se vektor x može rekonstruirati koristeći skalarne produkte $\langle x, x_i \rangle$ kao koeficijente. U sljedećoj propoziciji dokazat ćemo da su ta dva svojstva ekvivalentna. Prvo navodimo lemu koju ćemo koristiti.

Lema 1.3.2. *Neka su* $\mathcal{H}_1$ *i* $\mathcal{H}_2$ *unitarni prostori nad istim poljem, te* $\Theta : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *izometrija, tj. neka vrijedi* $\|\Theta x\| = \|x\|$ *za svaki* $x \in \mathcal{H}_1$. *Tada* Θ *čuva skalarni produkt, tj. vrijedi*

$$\langle \Theta x, \Theta y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}_1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ redom unitarni prostori. Tada vrijedi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1. \tag{1.6}$$

Ova jednakost se provjeri direktno koristeći jednakost $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y \rangle$ i svojstva skalarnog produkta. Također, imamo

$$\langle \Theta x, \Theta y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\Theta x + \Theta y\|^2 - \|\Theta x - \Theta y\|^2\right), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1. \tag{1.7}$$

Kako je Θ izometrija, vrijedi

$$\|\Theta x \pm \Theta y\| = \|\Theta(x \pm y)\| = \|x \pm y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1,$$

pa se desne strane u jednakostima (1.6) i (1.7) podudaraju. Slijedi da je $\langle \Theta x, \Theta y\rangle = \langle x, y\rangle$ za sve $x, y \in \mathcal{H}_1$. U slučaju kompleksnih unitarnih prostora $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ dokaz se provodi na isti način, ali umjesto (1.6) kompleksni skalarni produkt zadovoljava

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

□

Propozicija 1.3.3. *Skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$ ako i samo ako sljedeća formula vrijedi za svaki x iz $\mathcal{H}$*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle x_i. \tag{1.8}$$

Jednakost (1.8) zove se **rekonstrukcijska formula za Parsevalov bazni okvir**.

Dokaz. Neka $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ zadovoljava (1.8). Tada je prema definiciji 1.3.1 taj skup Parsevalov bazni okvir ako za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi jednakost (1.4). Provjerimo:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle x_i, x\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \left\langle \langle x, x_i\rangle x_i, x\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle \langle x_i, x\rangle = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Dakle, vrijedi jednakost (1.4) pa je jedan smjer ekvivalencije dokazan.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ Parsevalov bazni okvir, tj. da zadovoljava jednakost (1.4). Neka je $\Theta : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^k$ linearni operator zadan kao

$$\Theta x = \begin{bmatrix} \langle x, x_1\rangle \\ \langle x, x_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x, x_k\rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle e_i,$$

gdje je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^k$. Tada je

$$\|\Theta x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2 = \|x\|^2,$$

tj. Θ je izometrija. Prema prethodnoj lemi, Θ čuva skalarni produkt, tj. za sve $x, y \in \mathcal{H}$ vrijedi $\langle \Theta x, \Theta y\rangle = \langle x, y\rangle$. Sada želimo potvrditi da (1.8) vrijedi za svaki $x \in \mathcal{H}$. U sljedećem koraku neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Tada imamo

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j\rangle u_j = \sum_{j=1}^{n} \langle \Theta x, \Theta u_j\rangle u_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle \overline{\langle u_j, x_i\rangle} u_j = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, u_j\rangle u_j,$$

što nam daje

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Time smo dokazali da vrijedi (1.8) te je i drugi smjer ekvivalencije dokazan. □

Sljedeća propozicija dat će nam formule koje dimenziju konačnodimenzionalnog vektorskog prostora $\mathcal{H}$ te trag linearnog operatora A na $\mathcal{H}$ dovode u veze s Parsevalovim baznim okvirima.

Propozicija 1.3.4. *Neka je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalni vektorski prostor, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$ te A linearni operator na $\mathcal{H}$. Tada vrijedi*

$$\dim \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2,$$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} \langle Ax_i, x_i \rangle.$$

Dokaz. Neka je $n = \dim \mathcal{H}$ i neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Tada je

$$n = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} |\langle e_j, x_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} |\langle x_i, e_j \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2.$$

U drugoj jednakosti smo koristili činjenicu da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$, a u zadnjoj da je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$.

Za trag linearnog operatora vrijedi

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \langle Ae_j, e_j \rangle.$$

Nadalje, koristeći rekonstrukcijsku formulu $Ae_j = \sum_{i=1}^{k} \langle Ae_j, x_i \rangle x_i$ iz propozicije 1.3.3 i linearnost skalarnog produkta dobivamo

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle Ae_j, x_i \rangle x_i, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \langle Ae_j, x_i \rangle \langle x_i, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, A^* x_i \rangle \langle x_i, e_j \rangle.$$

U sljedećem koraku zamijenit ćemo poredak suma. Koristeći svojstvo linearnosti skalarnog produkta i definiciju adjungiranog operatora A^* slijedi

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\langle x_i, e_j\rangle\langle e_j, A^*x_i\rangle = \sum_{i=1}^{k}\left\langle \sum_{j=1}^{n}\langle x_i, e_j\rangle e_j, A^*x_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, A^*x_i\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle Ax_i, x_i\rangle.$$

□

Parsevalovi bazni okviri i ortonormirane baze dijele dva značajna svojstva. Prvo svojstvo je rekonstrukcijska formula iz jednadžbe (1.4), a drugo svojstvo je jednadžba (1.8) iz definicje Parsevalovih baznih okvira. Naravno, postoji i razlika između Parsevalovih baznih okvira i ortonormiranih baza. Tako je, primjerice, skup vektora u primjeru 1.2.6 Parsevalov bazni okvir, a nije ortonormirana baza. U istome primjeru je očito da skup vektora nije međusobno okomit, dok su s druge strane norme svih vektora jednake (kao i u ortonormiranim bazama).

1.4 Napeti bazni okviri u $\mathbb{R}^2$

U ovoj točki bavit ćemo se najjednostavnijim vektorskim prostorom, prostorom $\mathbb{R}^2$ i napetim baznim okvirima u tom prosotru ([5] i [2]). Znamo da je kanonska baza za prostor $\mathbb{R}^2$ skup $\{e_1, e_2\}$, gdje je $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, a $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ te da se svaki vektor $x \in \mathbb{R}^2$ može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija vektora e_1 i e_2. Drugim riječima, svi vektori iz $\mathbb{R}^2$ su oblika $\alpha e_1 + \beta e_2$ za neke jedinstvene realne brojeve α i β. Skalari α i β mogu se odrediti pomoću skalarnog produkta neka dva vektora a i b iz $\mathbb{R}^2$ koji je zadan kao

$$\langle a, b\rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi,$$

gdje su $|a|$ i $|b|$ duljine vektora a i b, a φ kut između vektora a i b. Pošto je skup $\{e_1, e_2\}$ Parsevalov bazni okvir, lako se iz jednakosti (1.8) vidi da tada za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2.$$

Tada je $\alpha = \langle x, e_1\rangle$, a $\beta = \langle x, e_2\rangle$. Jednakost (1.8) smo nazvali rekonstrukcijska formula za Parsevalov bazni okvir. U prvoj točki rekli smo da za sve ortonormirane baze također vrijedi (1.8). Dakle, osim vektora e_1 i e_2, možemo uzeti, primjerice, vektore e_1 i $-e_2$, $-e_1$ i e_2, $-e_1$ i $-e_2$ ili bilo koja dva jedinična međusobno okomita vektora jer oni čine ortonormirani skup za $\mathbb{R}^2$.

Na pitanje postoje li 3 ili više vektora, tj. postoje li vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za $n \geq 3$ takvi da jednakost

$$x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \ldots + \langle x, x_n\rangle x_n \tag{1.9}$$

vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ odgovara nam propozicija 1.3.3. Ona nam pokazuje da ovo svojstvo zadovoljava bilo koji Parsevalov bazni okvir za $\mathbb{R}^2$.

U primjeru 1.2.6 vidjeli smo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$x = \langle x, x_1 \rangle x_1 + \langle x, x_2 \rangle x_2 + \langle x, x_3 \rangle x_3,$$

gdje je $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, a $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Pogledajmo sada sljedeći primjer.

Primjer 1.4.1. *Neka je skup vektora* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *jednak skupu* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. *Ako je* $x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, *tada je*

$$\langle x, x_1 \rangle = a, \quad \langle x, x_2 \rangle = a + b, \quad \langle x, x_3 \rangle = b, \quad \langle x, x_4 \rangle = a - b.$$

Iz toga vidimo da je

$$\langle x, x_1 \rangle x_1 + \langle x, x_2 \rangle x_2 + \langle x, x_3 \rangle x_3 + \langle x, x_4 \rangle x_4 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (a+b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (a-b) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix} = 3x.$$

Očito vektori x_1, x_2, x_3 *i* x_4 *ne zadovoljavaju* (1.9) *jer na kraju jednakosti stoji* $3x$ *umjesto* x. *Ipak, jasno je da je ova relacija jednako dobra kao i* (1.9).

Da bi vektori u primjeru 1.4.1 zadovoljavali (1.9) moramo ih pomnožiti odgovarajućim skalarom. Pogledajmo sada skup vektora iz primjera 1.4.1 koji su pomnoženi s odgovarajućim skalarom tako da zadovoljavaju (1.9).

Primjer 1.4.2. *Neka je skup vektora* $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ *u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *jednak skupu* $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} x_1, \frac{\sqrt{3}}{3} x_2, \frac{\sqrt{3}}{3} x_3, \frac{\sqrt{3}}{3} x_4 \right\}$, *gdje su* x_1, x_2, x_3, x_4 *vektori iz primjera 1.4.1. Tada je*

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tada je

$$\langle x, y_1 \rangle y_1 + \langle x, y_2 \rangle y_2 + \langle x, y_3 \rangle y_3 + \langle x, y_4 \rangle y_4$$

$$= \frac{1}{3} \left(\langle x, x_1 \rangle x_1 + \langle x, x_2 \rangle x_2 + \langle x, x_3 \rangle x_3 + \langle x, x_4 \rangle x_4 \right) = \frac{1}{3} \cdot 3x = x$$

za svaki $x \in \mathbb{R}^2$.

Vidimo da skup vektora $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ u primjeru 1.4.2 zadovoljava (1.9), dok skup vektora $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ iz primjera 1.4.1 ne zadovoljava (1.9) već zadovoljava relaciju koja je malo općenitija od (1.9). Dakle za vektore u primjeru 1.4.1 vrijedi da je za svaki $x \in \mathbb{R}^2$

$$3x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \langle x, x_3\rangle x_3 + \langle x, x_4\rangle x_4.$$

Ako to generaliziramo na n vektora, motivirani primjerom 1.4.1, promatrat ćemo vektore $x_1, x_2, \dots, x_n$ za koje postoji $A > 0$ tako da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$Ax = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \ldots + \langle x, x_n\rangle x_n. \tag{1.10}$$

Sada želimo dati jednu geometrijsku interpretaciju i karakterizaciju ovakvih vektora. Dakle, neka su zadani vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$. Znamo da se svaki od tih vektora može zapisati kao

$$x_k = |x_k|(\cos\varphi_k e_1 + \sin\varphi_k e_2), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdje je $|x_k|$ duljina vektora x_k, $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, a φ_k kut koji vektor x_k zatvara sa pozitivnim dijelom x osi, tj. s vektorom e_1. Pošto jednakost (1.10) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}^2$, tada vrijedi i za vektore e_1 i e_2. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= \sum_{k=1}^{n}\langle e_1, x_k\rangle x_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|\cos\varphi_k\Big)|x_k|\Big(\cos\varphi_k e_1 + \sin\varphi_k e_2\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos^2\varphi_k e_1 + |x_k|^2\sin\varphi_k\cos\varphi_k e_2\Big),\\
Ae_2 &= \sum_{k=1}^{n}\langle e_2, x_k\rangle x_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|\sin\varphi_k\Big)|x_k|\Big(\cos\varphi_k e_1 + \sin\varphi_k e_2\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin^2\varphi_k e_1 + |x_k|^2\sin\varphi_k\cos\varphi_k e_2\Big).
\end{aligned}$$

Iz tih relacija vidimo da je

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos^2\varphi_k\Big) = A, \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin^2\varphi_k\Big) = A, \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin\varphi_k\cos\varphi_k\Big) = 0,$$

iz čega je očito

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos^2\varphi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin^2\varphi_k\Big), \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin\varphi_k\cos\varphi_k\Big) = 0.$$

Također vidimo da je

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos^2\varphi_k\Big) - \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin^2\varphi_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos^2\varphi_k - |x_k|^2\sin^2\varphi_k\Big) = 0.$$

Koristeći se formulama za kosinus i sinus dvostrukog kuta dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\cos 2\varphi_k\Big) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|^2\sin 2\varphi_k\Big) = 0. \tag{1.11}$$

Napomenimo samo da u svim koracima vrijede ekvivalencije pa ovaj račun možemo provesti unatrag. Drugim riječima ako vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadovoljavaju (1.11), onda oni zadovoljavaju i (1.10) za neki $A > 0$.

Sada definirajmo vektore

$$w_k = |x_k|^2\cos 2\varphi_k e_1 + |x_k|^2\sin 2\varphi_k e_2, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Takve vektore zovemo **dijagram vektorima** pridruženim vektorima $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Iz same definicije vektora w_k vidimo da je dijagram vektor vektora x_k ustvari vektor čija je duljina jednaka kvadratu duljine pripadajućeg vektora, tj. $|x_k|^2$, a čiji je kut koji zatvara s pozitivnim dijelom x osi dvostruko veći (do na puni krug) od kuta kojeg pripadajući vektor x_k zatvara s pozitivnim dijelom x osi, tj. $2\varphi_k$. Ovi rezultati daju nam sljedeći teorem.

Teorem 1.4.3. *Vektori* $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}^2$ *zadovoljavaju* (1.11) *ako i samo ako njihovi dijagram vektori* $w_1, w_2, \ldots w_n$ *zadovoljavaju*

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ zadovoljava (1.11). Tada je

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \ldots + w_n &= \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\cos 2\varphi_k e_1 + |x_i|^2\sin 2\varphi_k e_2\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\cos 2\varphi_k\Big)e_1 + \sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\sin 2\varphi_k\Big)e_2 = 0, \end{aligned}$$

jer je prema (1.11) $\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\cos 2\varphi_k\Big) = 0$ i $\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\sin 2\varphi_k\Big) = 0$.

Ako $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zadovoljavaju $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 0$ tada je

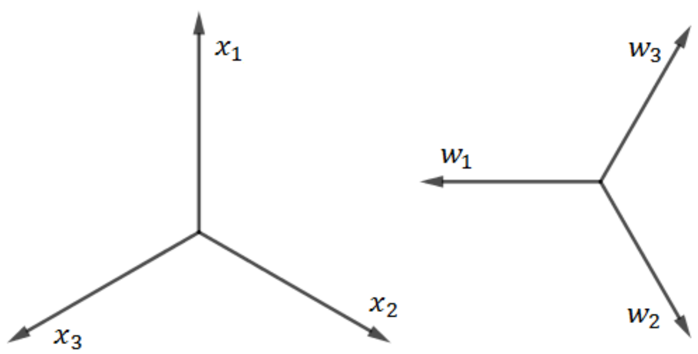
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\cos 2\varphi_k e_1 + |x_i|^2\sin 2\varphi_k e_2\Big) = 0,$$

pa mora vrijediti $\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\cos 2\varphi_k\Big) = 0$ i $\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i|^2\sin 2\varphi_k\Big) = 0$. Dakle, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ zadovoljavaju (1.11). $\square$

Znamo da skup vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljavaju (1.9) odnosno (1.10) zovemo Parsevalovim odnosno napetim baznim okvirima za $\mathbb{R}^2$. Također, prije smo napomenuli da ako vektori zadovoljavaju (1.11), onda zadovoljavaju i (1.10) tj. oni čine napeti bazni okvir. Dakle, prema teoremu 1.4.3, vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čine napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ ako i samo ako je zbroj pripadnih dijagram vektora $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jednak nulvektoru. Pogledajmo sada na primjerima kako bi izgledali vektori i njihovi pripadni dijagram vektori iz primjera 1.2.6 i 1.4.2.

Primjer 1.4.4. *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ neka je $\{x_1, x_2, x_3\}$ jednak skupu*

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}\right\}.$$



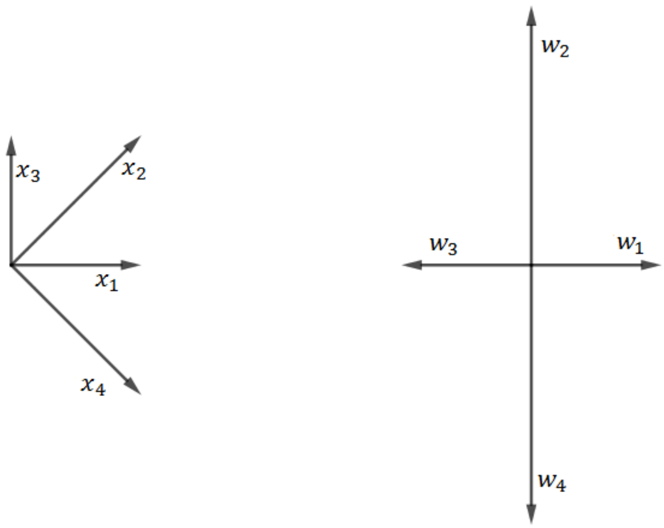
Slika 1.2: Vektori i pripadajući dijagram vektori

Na slici 1.2 možemo vidjeti kako se dobivaju pripadajući dijagram vektori od odgovarajućih vektora x_1, x_2, x_3. Vidimo, primjerice, da vektor x_1, duljine $\sqrt{\frac{2}{3}}$ zatvara s pozitivnim dijelom x osi kut $\frac{\pi}{2}$, dok je njegov pripadajući dijagram vektor w_1 duljine $\frac{2}{3}$ (što je kvadrat od $\sqrt{\frac{2}{3}}$) zatvara s pozitivnim dijelom x osi kut π (što je dvostruko veći kut od $\frac{\pi}{2}$).

Primjer 1.4.5. *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ neka je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ jednak skupu*

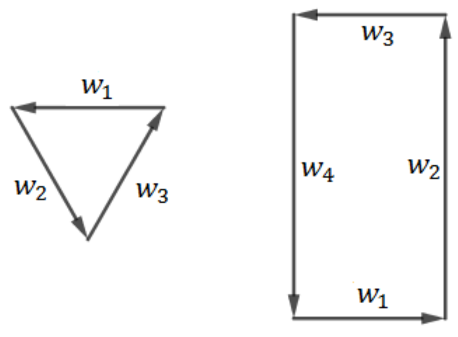
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Na slici 1.3 možemo vidjeti kako se dobivaju pripadajući dijagram vektori od odgovarajućih vektora x_1, x_2, x_3, x_4. Vidimo, primjerice, da vektor x_2, duljine $\sqrt{2}$ zatvara s *pozitivnim dijelom x osi kut* $\frac{\pi}{4}$*, dok je njegov pripadajući dijagram vektor* w_2 *duljine* 2 *(što je kvadrat od* $\sqrt{2}$*) zatvara s pozitivnim dijelom x osi kut* $\frac{\pi}{2}$ *(što je duplo veći kud od* $\frac{\pi}{4}$*).*



Slika 1.3: Vektori i pripadajući dijagram vektori

U teoremu 1.4.3 smo naučili da vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čine napeti bazni okvir ako i samo ako njihovi dijagram vektori zadovoljavaju $w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 0$. Ako posložimo dijagram vektore iz primjera 1.4.4 i 1.4.5 kao na slici 1.4 vidimo da je njihov zbroj jednak nulvektoru. Dakle, vektori iz primjera 1.4.4 i 1.4.5 prema teoremu 1.4.3 čine napete bazne okvire za $\mathbb{R}^2$.

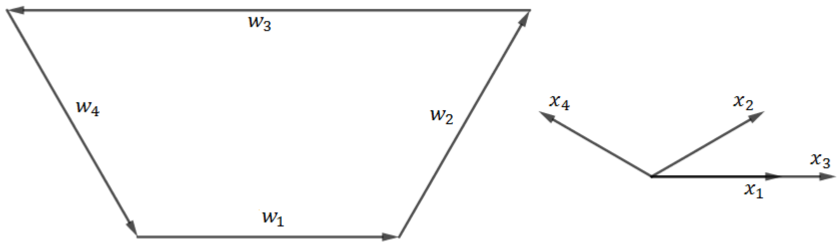


Slika 1.4: Dijagram vektori iz primjera 1.4.4 i 1.4.5

Uočimo dakle, da nam teorem 1.4.3 govori kako možemo konstruirati napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$. Uzmimo neke vektore $w_1, w_2, \ldots, w_n$ za koje vrijedi da je $w_1 + w_2 + \ldots w_n = 0$. Da bismo konstruirali napeti bazni okvir, prema 1.4.3 mora vrijediti da su $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dijagram vektori odgovarajućih vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji tada čine napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$. Dakle, trebamo pronaći "originale" odgovarajućih dijagram vektora. To znači da svaki x_k ima duljinu $\sqrt{|w_k|}$ te zatvara kut $\frac{\varphi_k}{2}$ s pozitivnim dijelom x osi, gdje je $|w_k|$ duljina vektora w_k, a φ_k kut koji vektor w_k zatvara s pozitivnim dijelom x osi. Pogledajmo na primjeru kako bismo konstruirali jedan napeti bazni okvir.

Primjer 1.4.6. *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *neka je* $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *jednak skupu*

$$\left\{\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\\sqrt{12}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-\sqrt{12}\end{bmatrix}\right\}.$$



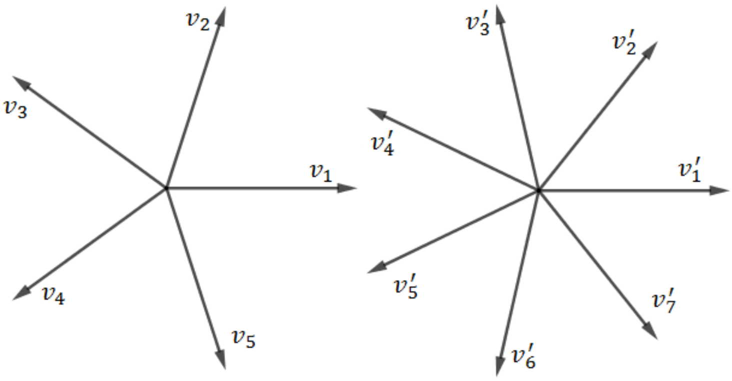
Slika 1.5: Dijagram vektori i pripadajući "originalni vektori"

Na slici 1.5 možemo vidjeti kako se od odgovarajućih dijagram vektora w_1, w_2, w_3, w_4 *dobiju "originalni" vektori* x_1, x_2, x_3, x_4 *koji tada čine napeti bazni okvir za* $\mathbb{R}^2$.

Pogledajmo sada jedan primjer u kojemu ćemo imati dva skupa vektora koji su svi norme 1. U prvome skupu imat ćemo 5, a u drugome 7 vektora. Oni će biti smješteni tako da će kut između susjednih vektora biti jednak $\frac{2\pi}{5}$, odnosno $\frac{2\pi}{7}$. Drugim riječima ako svi vektori imaju isti početak, vrhovi svakog vektora su točno vrhovi pravilnog peterokuta, odnosno sedmerokuta.

Primjer 1.4.7. *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *neka su* v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 *i* $v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7$ *vektori*

$$v_i = \begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi i}{5}\\\sin\frac{2\pi i}{5}\end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, 4, \quad v'_i = \begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi i}{7}\\\sin\frac{2\pi i}{7}\end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, 6.$$



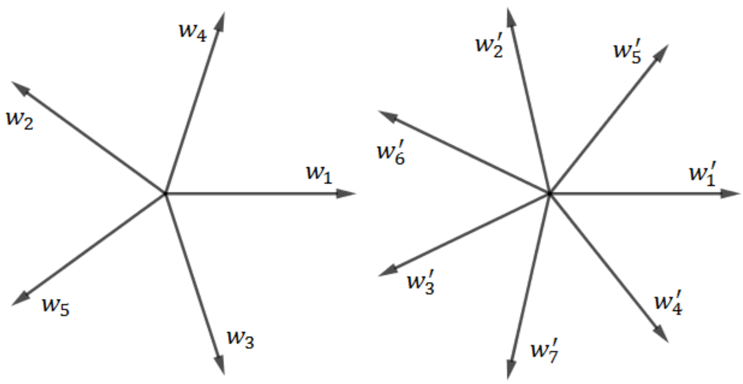
Slika 1.6: Vektori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 i $v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6', v_7'$

Vektori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 i $v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6', v_7'$ smješteni su kao na slici 1.6. Znamo da je norma odgovarajućih dijagram vektora jednaka kvadratu norme "originalnih" vektora, a kut koji zatvaraju odgovarajući dijagram vektori sa pozitivnim dijelom x-osi jednak je dvostrukom kutu koji zatvaraju "originalni" vektori sa pozitivnim dijelom x-osi. Pošto je norma svakog vektora jednaka 1, znamo da je i norma odgovarajućih dijagram vektora jednaka 1. Lako je pokazati da je tada

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_3, \quad w_3 = v_5, \quad w_4 = v_2, \quad w_5 = v_4,$$

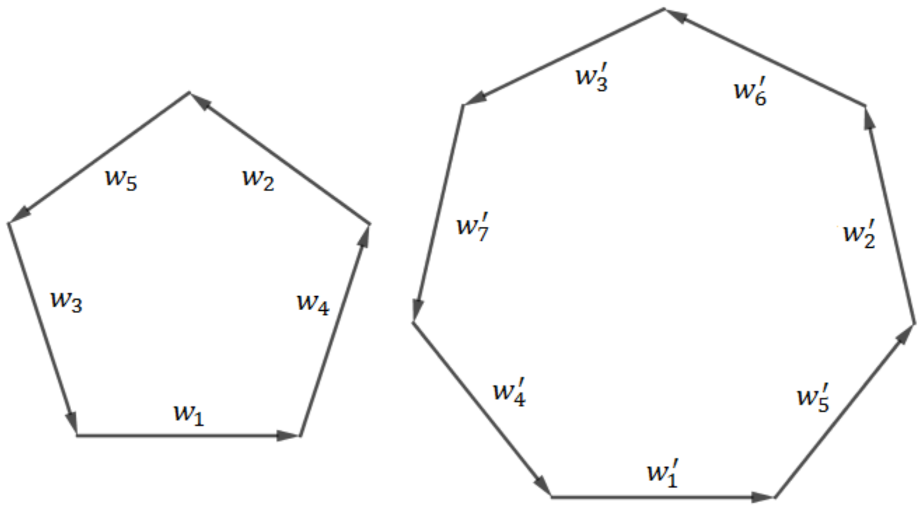
te da je

$$w_1' = v_1', \quad w_2' = v_3', \quad w_3' = v_5', \quad w_4' = v_7', \quad w_5' = v_2', \quad w_6' = v_4', \quad w_7' = v_6'.$$



Slika 1.7: Dijagram vektori w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 i $w_1', w_2', w_3', w_4', w_5', w_6', w_7'$

Odgovarajuće dijagram vektore možemo vidjeti na slici 1.7. Vidimo da je skup dijagram vektora isti kao i "originalan" skup, samo što su vektori permutirani.



Slika 1.8: Vektori w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 i $w_1', w_2', w_3', w_4', w_5', w_6', w_7'$

Ako posložimo odgovarajuće dijagram vektore kao na slici 1.8 vidimo da je zbroj dijagram vektora oba skupa jednak nulvektoru. Dakle, prema 1.4.3 znamo da skupovi $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *i* $\{v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6', v_7'\}$ *formiraju napete bazne okvire za* $\mathbb{R}^2$.

Motivirani prethodnim primjerom možemo izreći sljedeću propoziciju generaliziranu na skup od k vektora.

Propozicija 1.4.8. *Za* $k \geq 3$, *skup vektora* $\left\{\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi j}{k} \\ \sin\frac{2\pi j}{k} \end{bmatrix}\right\}_{j=0}^{k-1}$ *je napeti bazni okvir za* $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Odgovarajući dijagram vektori tada su $\left\{\begin{bmatrix} \cos\frac{4\pi j}{k} \\ \sin\frac{4\pi j}{k} \end{bmatrix}\right\}_{j=0}^{k-1}$. Možemo napisati kompleksni broj modula 1 kao

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tada imamo poznati rezultat da je suma k-tih korijenova od jedinice jednaka nuli, što ćemo dokazati koristeći geometrijske identitete. Tada je

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(\cos\frac{4\pi j}{k} + i\sin\frac{4\pi j}{k}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{4\pi ij}{k}} = \frac{1 - e^{\frac{4\pi ik}{k}}}{1 - e^{\frac{4\pi i}{k}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{4\pi i}{k}}} = 0.$$

Ovaj rezultat napisan u $\mathbb{R}^2$ formi je

$$\sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \cos \frac{4\pi j}{k} \\ \sin \frac{4\pi j}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

Poglavlje 2

Općeniti bazni okviri i pridruženi operatori

2.1 Općeniti bazni okviri

U ovoj točki definirat ćemo bazne okvire u općenitim konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima $\mathcal{H}$. Parsevalovi bazni okviri za $\mathcal{H}$, koje smo upoznali u prethodnoj točki, bit će posebna vrsta općenitih baznih okvira. Također, $\mathbb{R}^n$-bazni okviri, kojima smo započeli ovaj rad bit će bazni okviri za $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$.

Definicija 2.1.1. ***Bazni okvir za unitarni prostor*** *$\mathcal{H}$ je skup vektora $\{x_i\}_{i\in I}$ iz $\mathcal{H}$ za koji postoje konstante $0 < A \le B < \infty$ takve da za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi*

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \le B\|x\|^2. \tag{2.1}$$

Konstante A i B zovemo redom **donja i gornja granica baznog okvira** $\{x_i\}_{i\in I}$. Primijetimo da je svaki pozitivan $A' < A$ također donja granica, a svaki konačan $B' > B$ gornja granica baznog okvira $\{x_i\}_{i\in I}$. U daljnjem tekstu ćemo bez dodatnih napomena pretpostavljati da su A i B optimalne granice baznih okvira, tj. A je najveća donja granica, a B je najmanja gornja granica. Bazne okvire za koje vrijedi da je $A = B$ zovemo **napetim baznim okvirima**. Bazne okvire za koje vrijedi da je $A = B = 1$ zovemo **Parsevalovim baznim okvirima** (što se očito podudara s ranije navedenom definicijama Parsevalovih baznih okvira za $\mathcal{H}$, napetih baznih okvira za $\mathcal{H}$, te Parsevalovog skupa u $\mathbb{R}^n$).

U ovom radu ćemo se baviti konačnodimenzionalnim prostorima i konačnim baznim okvirima. Znači, $\dim\mathcal{H} < \infty$ i $\operatorname{card} I < \infty$. Uočimo da u tom slučaju gornja ograda uvijek postoji. Naime, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ konačan skup vektora u $\mathcal{H}$, tada primjenjujući

Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijevu nejednakost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \|x\|^2 \cdot \|x_i\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2\right) \cdot \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Stoga, možemo uzeti $B = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2$.

Znamo da je svaki ortonormirani skup uvijek Parsevalov bazni okvir. Također je lako pokazati da konačna unija Parsevalovih ili napetih baznih okvira također formira napeti bazni okvir.

Propozicija 2.1.2. *Konačna unija baznih okvira za $\mathcal{H}$ čini novi bazni okvir za $\mathcal{H}$. Konačna unija napetih baznih okvira za $\mathcal{H}$ čini novi napeti bazni okvir za $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Dokaz provodimo za dva (napeta) bazna okvira. Zaista, neka su $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ i $\{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ dva bazna okvira za $\mathcal{H}$. Neka su njihove granice A i B, odnosno C i D. Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad C\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{l} |\langle x, y_i\rangle|^2 \leq D\|x\|^2,$$

odakle slijedi

$$(A + C)\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{l} |\langle x, y_i\rangle|^2 \leq (B + D)\|x\|^2.$$

Prema tome, $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l\}$ je bazni okvir za $\mathcal{H}$ s granicama $A + C$ i $B + D$.

Ako su $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ i $\{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ napeti bazni okviri, tada je $A = B$ i $C = D$, pa je $A + C = B + D$, što znači da je $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l\}$ napeti bazni okvir za $\mathcal{H}$. □

U lemi 1.1.5 dokazali smo da je skup vektora iz $\mathbb{R}^n$ ujedno i $\mathbb{R}^n$-bazni okvir ako i samo ako je taj skup sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$. Isti rezultat vrijedi i za općenite bazne okvire u konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, što govori i sljedeća propozicija. Pretpostavka da je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor se ne smije odbaciti. Naime, tvrdnja ne vrijedi za beskonačnu dimenziju.

Propozicija 2.1.3. *Neka je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je zadan konačan skup $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ iz $\mathcal{H}$. Tada je sljedeće ekvivalentno:*

(i) $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ *je bazni okvir za $\mathcal{H}$.*

(ii) $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ *je sustav izvodnica za $\mathcal{H}$.*

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Koristeći obrat po kontrapoziciji, pretpostavimo da $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nije sustav izvodnica za $\mathcal{H}$. Tada postoji nenul vektor x iz ortogonalnog komplementa $M^{\perp}$, gdje je M linearna ljuska skupa vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pošto je x ortogonalan na svaki x_i za $i \in 1, 2, \ldots, k$, vrijedi da je $\sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i\rangle|^2 = 0$. Stoga skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ne bi imao pozitivnu donju granicu baznog okvira A te iz tog razloga ne bi bio bazni okvir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo da skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nije bazni okvir za $\mathcal{H}$. S obzirom da za konačne bazne okvire gornja granica uvijek postoji, zaključujemo da ne postoji donja granica A. Dakle, za svaki pozitivan realan broj m, postoji vektor $y_m \in \mathcal{H}$ takav da je $\|y_m\| = 1$ i da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle y_m, x_i\rangle|^2 < \frac{1}{m}, \quad \|y_m\|^2 = \frac{1}{m}.$$

Pošto je $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ ograničen niz, tada prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ ima konvergentan podniz $\{y_{m_j}\}_j$. Neka je y limes niza $\{y_{m_j}\}_j$. Dakle, takav da $\lim_{j\to\infty} \|y_{m_j} - y\| = 0$. Tada iz Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijeve nejednakosti slijedi $\lim_{j\to\infty}\langle y_{m_j}, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle$ za sve $i = 1, 2, \ldots, k$, pa je

$$0 = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |\langle y_{m_j}, x_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle y, x_i\rangle|^2.$$

Tada je $\langle y, x_i\rangle = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, k$, tj. y je ortogonalan na svaki x_i za $i = 1, 2, \ldots, k$ iz čega slijedi da je ili $y = 0$ ili skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ne razapinje $\mathcal{H}$. Kako je $y = \lim_{j\to\infty} y_{m_j}$, to je i $\|y\| = \lim_{j\to\infty} \|y_{m_j}\|$, jer je norma neprekidna funkcija. Svi vektori y_{m_j} su jedinični, pa je zato i y jedinični vektor, dakle, $y \neq 0$. Time smo dokazali da skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nije sustav izvodnica za $\mathcal{H}$ čime je i drugi smjer dokazan. □

2.2 Rekonstrukcijska formula

U prijašnjim točkama spomenuli smo rekonstrukcijsku formulu (1.8) za Parsevalove bazne okvire. Za općenite bazne okvire, također imamo rekonstukcijsku formulu, ali je kompliciranija od one za Parsevalove bazne okvire. O tome nam govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$. Tada postoji bazni okvir $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ takav da se svaki $x \in \mathcal{H}$ može rekonstruirati formulama*

$$x = \sum_{i=1}^{k}\langle x, y_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k}\langle x, x_i\rangle y_i. \tag{2.2}$$

Svaki bazni okvir $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ koji zadovoljava (2.2) zove se **dualni bazni okvir** od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Dokaz. Kao i u dokazu propozicije 1.3.3 koristit ćemo linearni operator $\Theta : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^k$ definiran kao

$$\Theta x = \begin{bmatrix} \langle x, x_1 \rangle \\ \langle x, x_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, x_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Pokazat ćemo da je Θ injektivan, tj. da je jezgra od Θ upravo $\{0\}$. Neka je $x \in \mathcal{H}$ takav da je $\Theta x = 0$. Tada je $\langle x, x_i \rangle = 0$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Pošto je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ sustav izvodnica za $\mathcal{H}$, možemo zaključiti da je $x = 0$. Stoga je Θ bijektivan na svojemu rangu. Neka je $\Theta^* : \mathbb{C}^k \to \mathcal{H}$ adjungirani operator operatora Θ. Tada je $\Theta^*\Theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ također injektivan. Zaista, ako je $\Theta^*\Theta x = 0$ tada je $\|\Theta x\|^2 = \langle \Theta x, \Theta x \rangle = \langle \Theta^*\Theta x, x \rangle = 0$, pa je $\Theta x = 0$ i zato je $x = 0$. Prema teoremu o rangu i defektu slijedi da je $\Theta^*\Theta$ i surjektivan, dakle i invertibilan operator.

Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^k$. Tada je

$$\Theta x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle e_i.$$

Za svaki $x \in \mathcal{H}$ i za svaki j, prema definiciji adjungiranog operatora imamo

$$\langle x, \Theta^* e_j \rangle = \langle \Theta x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \langle x, x_j \rangle,$$

odakle slijedi $\langle x, \Theta^* e_j - x_j \rangle = 0$ za svaki $j = 1, 2, \ldots, k$ i svaki $x \in \mathcal{H}$. Uzmemo li $x = \Theta^* e_j - x_j$, dobit ćemo $\|\Theta^* e_j - x_j\| = 0$, dakle $\Theta^* e_j = x_j$, i tako za sve $j = 1, 2, \ldots, k$. Označimo $S = \Theta^*\Theta$. Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo

$$S x = \Theta^*\Theta x = \Theta^* \left(\sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle e_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle \Theta^* e_i,$$

dakle,

$$S x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i. \tag{2.3}$$

Sada definirajmo $y_i = S^{-1} x_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$x = S^{-1} S x = S^{-1} \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle S^{-1} x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle y_i.$$

To nam daje jednu od jednakosti iz (2.2). Nadalje, pošto je S hermitski operator ($S = S^*$), slijedi da je i S^{-1} hermitski operator pa je

$$x = SS^{-1}x = \sum_{i=1}^{k} \langle S^{-1}x, x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, S^{-1}x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i\rangle x_i.$$

To nam daje drugu jednakost u (2.2).

Da bi dokazali da je $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ bazni okvir, trebamo pokazati da postoje odgovarajuće granice baznih okvira. Neka su A i B redom donja i gornja granica baznog okvira $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Koristeći definiciju baznog okvira i činjenicu da je S^{-1} hermitski operator pronaći ćemo granice baznog okvira $\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \dots, S^{-1}x_k\}$. Prvo, iz ograničenosti operatora S^{-1} slijedi $\|S^{-1}x\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|x\|$ za svaki $x \in \mathcal{H}$. Nadalje, iz ograničenosti od S slijedi $\|x\| = \|SS^{-1}x\| \leq \|S\| \cdot \|S^{-1}x\|$, pa je $\frac{1}{\|S\|} \cdot \|x\| \leq \|S^{-1}x\|$ za sve $x \in \mathcal{H}$. Konačno,

$$\frac{A}{\|S\|^2}\|x\|^2 \leq A\|S^{-1}x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, S^{-1}x_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle S^{-1}x, x_i\rangle|^2 \leq B\|S^{-1}x\|^2 \leq B\|S^{-1}\|^2\|x\|^2.$$

□

2.3 Operatori analize i sinteze

U dokazu propozicije 1.3.3 koristili smo linearan operator kojeg smo označili s Θ. U ovome dijelu definirat ćemo taj operator te ćemo dublje istražiti njegova svojstva i rezultate. U ovome dijelu uvijek ćemo pretpostaviti da svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ ima vektorski oblik s obzirom na fiksiranu bazu $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ iz $\mathcal{H}$.

Definicija 2.3.1. *Neka je $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathcal{H}$. Operator $\Theta : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^k$ definiran kao*

$$\Theta x = \begin{bmatrix} \langle x, x_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, x_k\rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle e_i$$

*zovemo **operator analize** od $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, gdje je $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^k$.*

Dakle, u dokazu propozicije 1.3.3 koristili smo operator analize. Osim operatora analize Θ, važnu ulogu u proučavanju baznih okvira ima i Θ^*, njegov adjungirani operator.

Kao što smo vidjeli u dokazu propozicije 2.2.1, ako je Θ^* adjungirani operator operatoru Θ, tada je $\Theta^* e_i = x_i$, što nam daje $\Theta^*\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}\right) = \Theta^*\left(\sum_{i=1}^{k} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$. Tada je kompozicija $\Theta^*\Theta$ dana sljedećom formulom

$$\Theta^*\Theta x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i. \tag{2.4}$$

Definicija 2.3.2. *Andjungirani operator Θ^* operatora analize zove se* ***operator sinteze****. Operator $S = \Theta^*\Theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zove se* ***operator baznog okvira****.*

Napomenimo da te operatore možemo definirati za bilo koji skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ iz $\mathcal{H}$ koji i ne mora biti bazni okvir.

U jednoj od narednih tvrdnji vidjet ćemo koje svojstvo od Θ (i Θ^*) karakterizira operatore analize i sinteze pridružene baznom okviru.

Propozicija 1.3.3 nam govori da za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i$ ako i samo ako je skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ Parsevalov bazni okvir. Dakle, očito je da je operator baznog okvira S identiteta, tj. $Sx = x$ za svaki $x \in \mathcal{H}$ ako i samo ako je skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$. Očita posljedica toga je da je operator baznog okvira S skalarni multipl od jediničnog operatora ako i samo ako je skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ napet bazni okvir.

Iz definicije 2.3.1 slijedi

$$\|\Theta x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i \rangle|^2, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Time smo dokazali sljedeću tvrdnju.

Propozicija 2.3.3. *Neka je $\mathcal{H}$ vektorski prostor, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathcal{H}$ i Θ operator analize za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Tada je sljedeće ekvivalentno:*

(i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$.

(ii) Θ je izometrija iz $\mathcal{H}$ u $\mathbb{C}^k$.

(iii) Operator baznog okvira je identiteta.

Dokažimo sad analognu tvrdnju za općenite bazne okvire.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $\mathcal{H}$ vektorski prostor, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathcal{H}$ i Θ operator analize za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Tada je sljedeće ekvivalentno:*

(i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je bazni okvir za $\mathcal{H}$.

(ii) Θ je injektivan operator iz $\mathcal{H}$ u $\mathbb{C}^k$.

(iii) Operator baznog okvira je invertibilan operator na $\mathcal{H}$.

Nadalje, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$, tada su $A = \frac{1}{\|\Theta^{-1}\|^2}$ i $B = \|\Theta\|^2$ granice baznog okvira gdje je $\Theta^{-1} : \Theta(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ inverz od Θ.

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Koristit ćemo obrat po kontrapoziciji. Neka je $\Theta x = 0$ za neki $x \neq 0$ iz $\mathcal{H}$. To znači da je $\langle x, x_i \rangle = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$. Dakle, x je ortogonalan na svaki x_i. Zbog toga, x nije u ljuski od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pošto bazni okvir mora biti sustav izvodnica, prema lemi 1.1.5, slijedi da $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nije bazni okvir za $\mathcal{H}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Pošto je $\mathbb{C}^k = \mathrm{Ker}(\Theta^*) \oplus \mathrm{Im}(\Theta)$, ako je $y \neq 0$ iz $\mathrm{Im}(\Theta)$, tada je $\Theta^* y \neq 0$. Ako pretpostavimo da je Θ injektivno preslikavanje, znamo da za svaki $x \neq 0$ iz $\mathcal{H}$ za koji je $\Theta x \neq 0$ vrijedi da je $\Theta^*\Theta x \neq 0$. Dakle, pošto je $\Theta^*\Theta$ linearan operator na $\mathcal{H}$, on mora biti i invertibilan.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ako je $S = \Theta^*\Theta$ invertibilan operator na $\mathcal{H}$, neka je $y_i = S^{-1}x_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada je $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle x_i$ koristeći se propozicijom 2.2.1. Zbog toga $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ razapinje $\mathcal{H}$ i zbog toga je bazni okvir za $\mathcal{H}$.

Da bismo odredili granice baznog okvira, nadovezat ćemo se na jednakost (2.5). Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir. Imamo da je $\sum_{i=1}^{k} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \|\Theta x\|^2 \leq \|\Theta\|^2 \|x\|^2$ za sve $x \in \mathcal{H}$, što dokazuje da je $\|\Theta\|^2$ gornja granica baznog okvira. Pošto je Θ bijekcija na $\Theta(\mathcal{H})$, imamo da je $\|x\|^2 = \|\Theta^{-1}\Theta x\|^2 \leq \|\Theta^{-1}\|^2 \|\Theta x\|^2$ za sve $x \in \mathcal{H}$. Iz toga proizlazi da je $\frac{\|x\|^2}{\|\Theta^{-1}\|^2} \leq \|\Theta x\|^2$. Dakle, $\frac{1}{\|\Theta^{-1}\|^2}$ je donja granica baznog okvira za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. □

Uzmimo standardnu ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ za $\mathbb{C}^k$ i neku ortonormiranu bazu $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ za $\mathcal{H}$. Operatorima analize i sinteze pridružit ćemo njihove matrične prikaze u ovom paru baza. Te matrične prikaze ćemo ponovno označavati s Θ i Θ^*. Kako je $\Theta^*(e_i) = x_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$, tada se u stupcima od Θ^* nalaze prikazi vektora $x_1, x_2, \ldots, x_k$ u bazi $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Dakle,

$$\Theta^* = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Naravno, tada je matrični prikaz od Θ u paru baze $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ i $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ upravo

$$\Theta = \begin{bmatrix} \leftarrow & x_1^* & \rightarrow \\ \leftarrow & x_2^* & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & x_k^* & \rightarrow \end{bmatrix}.$$

Propozicija 2.3.5. *Neka je* $T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \in M_{nk}$. *Tada vrijedi:*

(i) $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *je bazni okvir za* $\mathbb{C}^k$ *ako i samo ako je rang matrice* T *jednak* n.

(ii) $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *je napeti bazni okvir za* $\mathbb{C}^n$ *ako i samo ako je skup vektora smještenih u retke matrice* T *u parovima ortogonalan skup vektora s istom normom. Posebno,* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *je Parsevalov bazni okvir za* $\mathbb{C}^n$ *ako i samo ako je skup vektora smještenih u retke matrice* T *ortonormirani skup.*

Dokaz. Prvo uočimo da je T matrični zapis operatora sinteze $\Theta^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, gdje smo i u domeni i u kodomeni odabrali standardne ortonormirane baze.

Sada je rang od T jednak n ako i samo ako je rang operatora Θ^* također jednak n, što znači da je Θ^* surjekcija. Prema lemi 2.3.4 to znači da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathbb{C}^n$. To dokazuje (i).

$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je napeti bazni okvir za $\mathbb{C}^n$ ako i samo ako je $\Theta^*\Theta = A \cdot I$, tj. ako i samo ako je

$$\langle \Theta^*\Theta e_i, e_j \rangle = A\langle e_i, e_j \rangle = A \cdot \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prema tome,

$$\langle \Theta e_i, \Theta e_j \rangle = \langle \Theta^*\Theta e_i, e_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

i

$$\|\Theta e_i\| = \sqrt{\langle \Theta e_i, \Theta e_i \rangle} = \sqrt{A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uočimo da su $\Theta e_1, \Theta e_2, \ldots, \Theta e_n$ stupci matrice Θ, dakle, stupci od $T^* = \Theta$ su međusobno ortogonalni i svi jednake duljine. To znači da su retci od T međusobno ortogonalni i svi jednake duljine.

U slučaju Parsevalovog baznog okvira je $A = 1$, pa se gornja tvrdnja svodi na to da retci od T čine ortonormirani skup. □

Motivirani ovim rezultatom, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.6. *Matrica* $T \in M_{nk}$ *zove se* ***matrica baznog okvira*** *ako je ranga* n. *Matrica* T *zove se* ***matrica Parsevalovog baznog okvira*** *ako je* $TT^* = I$. *Matrica* T *zove se* ***matrica napetog baznog okvira*** *ako je* $TT^* = \lambda I$ *za neki realan broj* $\lambda > 0$.

Nakon što smo definirali matricu baznog okvira, matricu Parsevalovog baznog okvira i matricu napetog baznog okvira, dolazimo do sljedeće korisne propozicije o baznim okvirima i povezanosti između granicama baznih okvira i svojstvenih vrijednosti matrica.

Propozicija 2.3.7. *Neka je* $T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix} \in M_{nk}$ *i neka su* λ_{min} *i* λ_{max} *redom minimalna i maksimalna svojstvena vrijednost od* TT^*. *Tada je sljedeće ekvivalentno:*

(i) $\lambda_{min} > 0$.

(ii) $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *je bazni okvir za* $\mathbb{C}^n$.

Nadalje, ako vrijede (i) i (ii), optimalne granice baznog okvira $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *su* λ_{min} *i* λ_{max}.

Dokaz. Pošto je $TT^* = S$ operator baznog okvira za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ pozitivan operator, svojstvene vrijednosti za S su sve nenegativni realni brojevi. Tada je $\lambda_{min} > 0$ ako i samo ako je S invertibilna, pa je prema lemi 2.3.4 $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir ako i samo ako je $\lambda_{min} > 0$.

Gornja granica baznog okvira je $\|\Theta\|^2 = \|\Theta^*\Theta\| = max\{\sigma(\Theta^*\Theta)\} = \lambda_{max}$. Svojstvene vrijednosti od $(\Theta^*\Theta)^{-1}$ su recipročne vrijednosti svojstvenih vrijednosti operatora $\Theta^*\Theta$. Zato je najveća svojstvena vrijednost operatora $(\Theta^*\Theta)^{-1}$ upravo $\frac{1}{\lambda_{min}}$. Još se treba sjetiti da je donja granica baznog okvira jednaka $\frac{1}{\|\Theta^{-1}\|^2}$, dakle λ_{min}. □

Kada smo definirali operator analize Θ, operator sinteze Θ^*, govorili smo i o svojstvima operatora baznog okvira $S = \Theta^*\Theta$. Kod operatora baznog okvira, operator analize i operator sinteze komponirali smo na točno određen način. Ako ih komponiramo suprotnim redoslijedom dobit ćemo drugi operator. Operator $G = \Theta\Theta^*$ zovemo **Grammov operator**. Grammov operator igra važnu ulogu u teoriji baznih okvira. Elementi u matričnom zapisu Grammovog operatora su skalarni produkti vektora baznih okvira, dakle Grammov operator izgleda ovako:

$$G = \Theta\Theta^* = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_2, x_1\rangle & \cdots & \langle x_k, x_1\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_k, x_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_k\rangle & \langle x_2, x_k\rangle & \cdots & \langle x_k, x_k\rangle \end{bmatrix}.$$

Uočimo da su elementi na dijagonali matričnog zapisa Grammovog operatora redom $\|x_i\|^2$ za $i = 1, 2, \ldots, k$, upravo kvadrati norme elemenata baznog okvira. Slijedi karakterizacija Parsevalovog baznog okvira pomoću matričnog zapisa Grammovog operatora.

Propozicija 2.3.8. *Skup vektora* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru* $\mathcal{H}$ *je Parsevalov bazni okvir za* $\mathcal{H}$ *ako i samo ako je pripadajući Grammov operator* G *ortogonalni projektor (tj. vrijedi* $G = G^* = G^2$*) ranga* n.

Dokaz. Kao što smo već spomenuli, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je Parsevalov bazni okvir ako i samo ako je operator baznog okvira $\Theta^*\Theta$ jedinični operator. Neka je G odgovarajući Grammov operator $\Theta\Theta^*$. Očito je $G^* = G$ i $G^2 = (\Theta\Theta^*)(\Theta\Theta^*) = \Theta(\Theta^*\Theta)\Theta^* = \Theta I\Theta^* = G$, što pokazuje da je G ortogonalni projektor na sliku od Θ. Zbog $G\Theta = \Theta$ slijedi $n = r(\Theta) = r(G\Theta) \leq r(G) \leq n$, pa je rang od G jednak n. □

2.4 Kanonski Parsevalovi bazni okviri

Pošto je operator baznog okvira S uvijek pozitivan invertibilan operator, to znači da postoji i operator $S^{\frac{1}{2}}$ koji je također pozitivan operator. Također, inverz od S je pozitivan operator, a to znači da postoji i $S^{-\frac{1}{2}}$.

Propozicija 2.4.1. *Neka je $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ sa operatorom baznog okvira S. Tada je $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \dots, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$. Bazni okvir $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \dots, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$ nazivamo* ***kanonski Parsevalov bazni okvir*** *pridružen baznom okviru $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.*

Dokaz. Pokazat ćemo da $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \dots, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$ zadovoljava iz propozicije 1.3.3 rekonstrukcijsku formulu (1.8), što dokazuje da je tada taj skup Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$. U računu koji slijedi koristimo definiciju operatora baznog okvira S i svojstvo da je $S^{-\frac{1}{2}}$ linearan i hermitski operator. Tada vrijedi

$$x = S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}x = S^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{k}\left\langle S^{-\frac{1}{2}}x, x_i\right\rangle x_i = S^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{k}\left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}x_i\right\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k}\left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}x_i\right\rangle S^{-\frac{1}{2}}x_i.$$

Posljednja jendakost nam predstavlja operator baznog okvira za $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \dots, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$ s obzirom na vektor x. Pošto je to uvijek jednako x, dokazali smo Parsevalovu rekonstrukcijsku formulu iz propozicije 1.3.3. Dakle, $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \dots, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$ je Parsevalov bazni okvir. □

Pogledajmo sada jedan primjer u kojemu imamo zadani bazni okvir te pomoću operatora baznog okvira S određujemo kanonski Parsevalov bazni okvir.

Primjer 2.4.2. *Neka je u $\mathbb{C}^2$ zadan skup vektora $\{x_1, x_2, x_3\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Tada je $\{x_1, x_2, x_3\}$ bazni okvir za $\mathbb{C}^2$ jer je to očito sustav izvodnica za $\mathbb{C}^2$.*

Operator analize $\Theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ dan je formulom $\Theta x = \begin{bmatrix}\langle x, x_1\rangle\\ \langle x, x_2\rangle\\ \langle x, x_3\rangle\end{bmatrix}$, odnosno ako je $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, tada je $\Theta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1 + x_2\end{bmatrix}$.

Operator sinteze je $\Theta^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$,

$$\Theta^*\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 + \alpha_3\\\alpha_2 + \alpha_3\end{bmatrix}.$$

Prema tome, operator $S = \Theta^*\Theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *zadan je kao*

$$\Theta^*\Theta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \Theta^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Matrični zapis od operatora baznog okvira $S = \Theta^*\Theta$ *u kanonskoj bazi za* $\mathbb{C}^2$ *je* $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Tada je matrični zapis od* $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, *a matrični zapis od* $S^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}$. *Iz toga slijedi da je* $\left\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, S^{-\frac{1}{2}}x_3\right\} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\right\}$. *Prema propoziciji 2.4.1 taj skup je Parsevalov bazni okvir što se lako provjeri da za svaki* $x \in \mathbb{C}^2$ *vrijedi* $x = \sum_{i=1}^{3} \langle x, v_i \rangle v_i$, *gdje je* $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, S^{-\frac{1}{2}}x_3\right\}$.

Poglavlje 3

Dualni bazni okviri

U ovome poglavlju više ćemo istraživati rekonstrukcijsku formulu (2.2) iz propozicije 2.2.1. U toj propoziciji definirali smo dualne bazne okvire. Dualni bazni okviri su bitni za rekonstrukciju, a Parsevalovi bazni okviri su oni koji su sami sebi dualni. Ta svojstva ćemo ovdje promatrati.

3.1 Kanonski dualni bazni okviri

Ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$, tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi rekonstrukcijska formula

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i.$$

S druge strane, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ općeniti bazni okvir za $\mathcal{H}$, tada ne vrijedi napisana rekonstrukcijska formula. Naime, ako je S operator baznog okvira koji je dan formulom koja vrijedi za svaki $x \in \mathcal{H}$

$$S x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i, \tag{3.1}$$

možemo zamijeniti x sa $S^{-1}x$ u danoj formuli (pošto je S pozitivan i invertibilan operator na $\mathcal{H}$). Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi rekonstrukcijska formula

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left\langle S^{-1}x, x_i \right\rangle x_i.$$

Nadalje, ako s obje strane jednakosti (3.1) primijenimo S^{-1}, dobivamo dualnu verziju rekonstrukcijeke formule, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle S^{-1} x_i.$$

Dakle, u kombinaciji s danim rezultatima, dobivamo primjer rekonstrukcijske formule iz propozicije 2.2.1:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left\langle x, S^{-1} x_i \right\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle S^{-1} x_i, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Skup vektora $\left\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \ldots, S^{-1}x_k\right\}$ zove se **kanonski dualni bazni okvir** od skupa vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Taj skup će zasigurno biti bazni okvir pošto je S^{-1} invertibilan operator pa će zbog toga skup $\left\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \ldots, S^{-1}x_k\right\}$ biti sustav izvodnica za $\mathcal{H}$. Također je očito da je tada $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dualni bazni okvir za $\left\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \ldots, S^{-1}x_k\right\}$.

Međutim, zbog redundancije koje bazni okviri posjeduju, postojat će drugi skupovi vektora $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ iz $\mathcal{H}$, koji nisu kanonski dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, a koji će zadovoljavati rekonstrukcijsku formulu

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle x_i, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

3.2 Dualni bazni okviri

Definicija 3.2.1. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$. Skup vektora $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ iz $\mathcal{H}$ zovemo **dualni bazni okvir** za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ako $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ zadovoljava rekonstrukcijsku formulu*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle x_i, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

*Ako je $y_i = S^{-1}x_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$, tada ga zovemo **kanonski dualni bazni okvir**. Ako $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ nije kanonski dualni bazni okvir, tada se zove **alternativni dualni bazni okvir**.*

Pokažimo da, ako $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ zadovoljava jednadžbu $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i \rangle x_i$ za svaki $x \in \mathcal{H}$, da tada također zadovoljava jednadžbu $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle y_i$ za svaki $x \in \mathcal{H}$.

Neka su Θ_x i Θ_y operatori analize za bazne okvire $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ redom. Tada je, za svaki x,

$$\Theta_x^*\Theta_y(x) = \Theta_x^*\left(\sum_{i=1}^{k}\langle x, y_i\rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, y_i\rangle\Theta_x^*(e_i) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, y_i\rangle x_i.$$

Dakle, $\Theta_x^*\Theta_y = I$. Tada je $\Theta_y^*\Theta_x = \left(\Theta_x^*\Theta_y\right) = I$, pa je $\Theta_y^*\Theta_x(x) = x$ za sve $x \in \mathcal{H}$. Kako je

$$\Theta_y^*\Theta_x(x) = \Theta_y^*\left(\sum_{i=1}^{k}\langle x, x_i\rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, x_i\rangle\Theta_y^*(e_i) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, x_i\rangle y_i,$$

slijedi tvrdnja.

Drugim riječima, vektori $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ su sustav izvodnica za isti prostor kao i vektori $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Također, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$, tada je i bilo koji njegov dualni bazni okvir također bazni okvir za $\mathcal{H}$.

Neki bazni okviri imat će samo pripadajuće kanonske dualne bazne okvire, dok će neki imati i alternativne dualne bazne okvire. Proučavat ćemo uvjete pod kojima će bazni okviri imati alternativne dualne bazne okvire.

Propozicija 3.2.2. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ baza za za $\mathcal{H}$. Tada je njegov pripadajući dualni bazni okvir jedinstven.*

Dokaz. Neka su $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ i $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ dualni bazni okviri od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Trebamo dokazati da su oni jednaki.

Prema definiciji dualnog baznog okvira, za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\langle x, y_i\rangle - \langle x, z_i\rangle\right) x_i = \sum_{i=1}^{k}\langle x, y_i\rangle x_i - \sum_{i=1}^{k}\langle x, z_i\rangle x_i = x - x = 0.$$

Pošto je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan skup, iz sume

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\langle x, y_i\rangle - \langle x, z_i\rangle\right) x_i = 0$$

slijedi da je $\langle x, y_i - z_i\rangle = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$. Prema tome, svaki $y_i - z_i$ je ortogonalan na x. Pošto je $x \in \mathcal{H}$ proizvoljan, imamo da je svaki $y_i - z_i$ jednak nulvektoru, pa je $y_i = z_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Iz toga slijedi da $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ima jedinstveni dualni bazni okvir. $\square$

Pogledajmo sada jedan primjer baze i njenog kanonskog dualnog baznog okvira (koji je jedinstven).

Primjer 3.2.3. *Neka je u* $\mathbb{R}^3$ *zadan skup vektora* $\{x_1, x_2, x_3\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. *Tada je* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *baza za* $\mathbb{R}^3$ *jer je to očito linearno nezavisan skup od 3 elemenata u trodimenzionalnome vektorskome prostoru.*

Operator analize $\Theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dan je formulom* $\Theta x = \begin{bmatrix}\langle x, x_1\rangle\\ \langle x, x_2\rangle\\ \langle x, x_3\rangle\end{bmatrix}$, *odnosno ako je* $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, *tada je* $\Theta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_1+x_2\\x_2\end{bmatrix}$.

Operator sinteze je $\Theta^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\Theta^*\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_1\end{bmatrix}.$$

Prema tome, operator $S = \Theta^*\Theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadan je kao*

$$\Theta^*\Theta\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \Theta^*\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_1+x_2\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2\\x_1+x_3\end{bmatrix}.$$

Matrični zapis operatora baznog okvira $S = \Theta^*\Theta$ *u kanonskoj bazi za* $\mathbb{R}^3$ *je* $S = \begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. *Tada je matrični zapis od* $S^{-1} = \begin{bmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{bmatrix}$. *Kanonski dualni bazni okvir od* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *je tada* $\{y_1, y_2, y_3\} = \{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, S^{-1}x_3\}$. *Dakle,* $\{y_1, y_2, y_3\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$. *Lako se provjeri da za svaki* $x \in \mathbb{R}^3$ *vrijedi* $x = \sum_{i=1}^{3}\langle x, y_i\rangle x_i$ *i* $x = \sum_{i=1}^{3}\langle x, x_i\rangle y_i$.

Prema tome, ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ baza za $\mathcal{H}$, onda je kanonski dualni bazni okvir $\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \ldots, S^{-1}x_k\}$ jedini dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Dakle, jedinstvenost dualnog baznog okvira je uspostavljena ako je bazni okvir upravo baza. No, vrijedi i obrat.

Propozicija 3.2.4. *Neka je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *bazni okvir za* $\mathcal{H}$. *Tada* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *ima jedinstveni dualni bazni okvir ako i samo ako je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *baza.*

Dokaz. Jedan smjer je dokazan u propoziciji 3.2.2.

Za dokaz drugog smjera, koristit ćemo obrat po kontrapoziciji. Pretpostavimo da $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nije baza. Tada je $\Theta(\mathcal{H}) \neq \mathbb{C}^k$, gdje je Θ operator analize od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Neka je P ortogonalni projektor na $\Theta(\mathcal{H})^\perp$ i neka je $T : \Theta(\mathcal{H})^\perp \to \mathcal{H}$ bilo koji linearan operator različit od nuloperatora. Tada je $TPe_i \neq 0$ za neki i, gdje je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^k$. Ako je $y_i = S^{-1}x_i + TPe_i$, tada je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ različit od $\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \ldots, S^{-1}x_k\}$. Napomenimo da za svaki $x, y \in \mathcal{H}$, imamo

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, TPe_i\rangle x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle PT^*x, e_i\rangle\langle x_i, y\rangle = \left\langle PT^*x, \sum_{i=1}^{k} \langle y, x_i\rangle e_i \right\rangle = \langle PT^*x, \Theta(y)\rangle = 0.$$

Tako je $\sum_{i=1}^{k} \langle x, TPx_i\rangle x_i = 0$ za svaki $x \in \mathcal{H}$. Iz toga slijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \langle x, y_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}x_i + TPe_i \right\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}x_i \right\rangle x_i + \sum_{i=1}^{k} \langle x, TPe_i\rangle x_i = x + 0 = x,$$

iz čega slijedi da je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ također dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Dakle, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ima više od jednog dualnog baznog okvira. □

Sljedeća propozicija daje nam karakterizaciju svih dualnih baznih okvira od nekog baznog okvira, pri čemu koristimo operator baznog okvira S.

Propozicija 3.2.5. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ i neka je S pripadajući operator baznog okvira. Tada je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ako i samo ako postoji skup $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ takav da je $y_i = S^{-1}x_i + z_i$ i vrijedi $\Theta_z(\mathcal{H}) \perp \Theta_x(\mathcal{H})$, gdje su Θ_x i Θ_z redom operatori analize od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Neka je $z_i = y_i - S^{-1}x_i$. Tada za svaki $u \in \mathcal{H}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{k} \langle u, z_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u, y_i - S^{-1}x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u, y_i\rangle x_i - \sum_{i=1}^{k} \langle u, S^{-1}x_i\rangle x_i = u - u = 0.$$

Iz toga slijedi da

$$\langle \Theta_z(u), \Theta_x(v)\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, z_i\rangle\langle x_i, v\rangle = 0$$

vrijedi za svaki $u, v \in \mathcal{H}$. Zbog toga je $\Theta_z(\mathcal{H}) \perp \Theta_x(\mathcal{H})$.

Da bismo pokazali drugi smjer ekvivalencije, pretpostavimo da postoji skup vektora $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ takav da je $y_i = S^{-1}x_i + z_i$ i pretpostavimo da je $\Theta_z(\mathcal{H}) \perp \Theta_x(\mathcal{H})$. Tada imamo

$$\sum_{i=1}^{k} \langle u, z_i \rangle \langle x_i, v \rangle = 0, \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

iz čega slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{k} \langle u, z_i \rangle x_i = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Zbog ovih rezultata, slijedi da za svaki $u \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \langle u, y_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle u, S^{-1}x_i \rangle x_i + \sum_{i=1}^{k} \langle u, z_i \rangle x_i = u + 0 = u.$$

Dakle, $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ je dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. □

Napomenimo samo da u ovoj propoziciji, skup $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ ne mora biti bazni okvir za $\mathcal{H}$.

Još ćemo navesti jednu propoziciju u kojoj je dana karakterizacija kanonsog dualnog baznog okvira

Propozicija 3.2.6. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ i neka je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dualni bazni okvir od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Tada je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ kanonski dualni bazni okvir ako i samo ako je*

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, y_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, w_i \rangle|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

za sve $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ koji su dualni bazni okviri od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Dokaz. Iz propozicije 3.2.5 znamo da postoji skup $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ takav da je $w_i = S^{-1}x_i + z_i$ i $\Theta_x(\mathcal{H}) \perp \Theta_z(\mathcal{H})$, gdje su Θ_x i Θ_z redom operatori analize od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ i $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Tada možemo napraviti sljedeći račun, koristeći definiciju operatora analize da napišemo $\langle x, x_i \rangle = \langle \Theta_x x, e_i \rangle$ gdje je $x \in \mathcal{H}$ i gdje je e_i i-ti element standardne baze za $\mathbb{C}^k$. Dakle,

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, w_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, S^{-1}x_i \rangle + \langle x, z_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle S^{-1}x, x_i \rangle + \langle x, z_i \rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\langle \Theta_x(S^{-1}x), e_i \rangle + \langle \Theta_z(x), e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle \Theta_x(S^{-1}x) + \Theta_z(x), e_i \rangle|^2$$

$$= \|\Theta_x(S^{-1}x) + \Theta_z(x)\|^2 = \|\Theta_x(S^{-1}x)\|^2 + \|\Theta_z(x)\|^2,$$

jer je $\Theta_x(S^{-1}x) \perp \Theta_z(x)$, pa možemo primjeniti Pitagorin poučak. Dakle, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x, w_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, S^{-1}x_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\langle x, z_i\rangle|^2.$$

Suma $\sum_{i=1}^{k} |\langle x, z_i\rangle|^2$ je strogo veća od nule za neki $x \in \mathcal{H}$ osim ako je z_i nula. Tada je $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ kanonski dualni bazni okvir. □

Bazni okviri zbog svoje redundancije te dualni bazni okviri važni su u rekonstrukciji vektora. Stoga je ovaj zaključak vrlo bitan. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ bazni okvir (sustav izvodnica) za $\mathcal{H}$, ali nije baza. Dakle, taj skup je linearno zavisan. Svaki se vektor $x \in \mathcal{H}$ može rekonstruirati kao $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle y_i$, gdje je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dualni bazni okvir za $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pošto je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ sustav izvodnica za $\mathcal{H}$, tada postoji neki vektor koji se može zapisati preko ostalih. Neka je to, primjerice, vektor x_k. U tom slučaju, skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ je i dalje bazni okvir (sustav izvodnica) za $\mathcal{H}$. Pretpostavimo da smo izgubili koeficijent $\langle x, x_k\rangle$. Tada više ne možemo primijeniti navedenu rekonstrukcijsku formulu. Međutim, ako uzmemo dualni bazni okvir $\{z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}\}$ za $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, tada vrijedi $x = \sum_{i=1}^{k-1} \langle x, x_i\rangle z_i$ i tako, bez $\langle x, x_k\rangle$, rekonstruiramo x. Jedan način konstrukcije dualnog baznog okvira za $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ opisan je u [1].

Ako je skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$, tada je on sam sebi dualan jer za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi $x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i\rangle x_i$. Dakle, Parsevalovi bazni okviri su bazni okviri koji su sami sebi dualni.

Poglavlje 4

Rekonstrukcija vektora

4.1 Numerički algoritmi

Neka je $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom baznog okvira S. Pretpostavimo da su koeficijenti $\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \dots, \langle x, x_k\rangle$ poznati. Želimo rekonstruirati x koristeći te koeficijente i vektore $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ baznog okvira. U dokazu propozicije 2.2.1 iz jednakosti (2.3) znamo da to možemo napraviti računajući $\{S^{-1}x_1, S^{-1}x_2, \dots, S^{-1}x_k\}$ i koristeći rekonstrukcijsku formulu

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle S^{-1} x_i.$$

Međutim, za primjenu ove formule moramo invertirati operator baznog okvira S, što je najčešće kompliciran zadatak.

Alternativa za rekonstruiranje vektora x je korištenje algoritma koji će proizvesti sve točniju aproksimaciju vektora x koristeći vektore baznog okvira i pripadajuće koeficijente. U ovome dijelu navest ćemo tri takva algoritma.

(i) **Algoritam baznog okvira:** Neka je $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s granicama baznog okvira A i B. Za dani $x \in \mathcal{H}$ rekurzivno definiramo niz vektora (u_k) na sljedeći način.

$$u_0 = 0,$$

$$u_k = u_{k-1} + \tfrac{2}{A+B} S(x - u_{k-1}), \quad k \geq 1.$$

Uočimo da se vrijednost izraza $S(x-u_{k-1})$, koji se pojavljuje u definiciji od u_k, računa kao

$$S(x - u_{k-1}) = Sx - Su_{k-1} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{k-1}, x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle x, x_i\rangle - \langle u_{k-1}, x_i\rangle\right) x_i,$$

dakle, koristeći poznate koeficijente $\langle x, x_1\rangle, \langle x, x_2\rangle, \ldots, \langle x, x_n\rangle$. Brzina konvergencije ovog algoritma dana je sa

$$\|x - u_k\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^k \|x\|.$$

Zaista, imamo da je

$$\begin{aligned} x - u_k &= (x - u_{k-1}) - \frac{2}{A+B} S(x - u_{k-1}) = \left(I - \frac{2}{A+B}S\right)(x - u_{k-1}) \\ &= \left(I - \frac{2}{A+B}S\right)^k (x - u_0), \end{aligned}$$

što dobijemo induktivno. Koristeći svojstvo da za svaki operator A vrijedi $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ te $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, dobivamo

$$\|x - u_k\| \leq \left\|I - \frac{2}{A+B}S\right\|^k \cdot \|x\|. \tag{4.1}$$

Nadalje, imamo da je

$$\begin{aligned} A \cdot I \leq S &\leq B \cdot I, \\ \frac{2A}{A+B} \cdot I \leq \frac{2}{A+B} \cdot S &\leq \frac{2B}{A+B} \cdot I, \\ I - \frac{2A}{A+B} \cdot I \geq I - \frac{2}{A+B} \cdot S &\geq I - \frac{2B}{A+B} \cdot I, \\ \frac{A-B}{A+B} \cdot I \leq I - \frac{2}{A+B} \cdot S &\leq \frac{B-A}{A+B} \cdot I. \end{aligned}$$

Odavde je $\left\|I - \frac{2}{A+B} \cdot S\right\| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1$. Sada iz (4.1) slijedi

$$\|x - u_k\| \leq \left\|I - \frac{2}{A+B} \cdot S\right\|^k \cdot \|x\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^k \|x\|.$$

(ii) **Čebiševljev algoritam:** Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ sa granicama baznog okvira A i B. Označimo

$$\rho = \frac{B-A}{B+A}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{A}}{\sqrt{B} + \sqrt{A}}.$$

Definiramo niz $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ iz $\mathcal{H}$ i odgovarajuće brojeve $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ kao

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{2}{B+A} S x, \quad \lambda_1 = 2,$$

i za $k \geq 2$,

$$\lambda_k = \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{4}\lambda_{k-1}}$$

i

$$u_k = \lambda_k \left(u_{k-1} - u_{k-2} + \frac{2}{B+A} S(x - u_{k-1}) \right) + u_{k-2}.$$

Tada niz $\{u_k\}$ konvergira k x iz $\mathcal{H}$ i brzina konvergencije Čebiševljevog algoritma je

$$\|x - u_k\| \leq \frac{2\sigma^k}{1 + \sigma^{2k}} \|x\|.$$

(iii) **Algoritam konjugiranog gradijenta:** Za razliku od prijašnja dva algoritma, ovaj algoritam radi bez poznavanja granica baznog okvira. No, brzina konvergencije ovisi o granicama baznog okvira.

Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ sa granicama baznog okvira A i B. Neka je $x \in \mathcal{H}$ nenul vektor. Definirajmo tri niza: $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ iz $\mathcal{H}$ te odgovarajuće skalare $\{\lambda_k\}_{k=-1}^{\infty}$ sa

$$u_o = 0, \quad r_o = p_o = Sx, \quad p_{-1} = 0,$$

i za $k \geq 0$,

$$\lambda_k = \frac{\langle r_k, p_k \rangle}{\langle p_k, Sp_k \rangle},$$

$$u_{k+1} = u_k + \lambda_k p_k,$$

$$r_{k+1} = r_k - \lambda_k S p_k,$$

$$p_{k+1} = S p_k - \frac{\langle Sp_k, Sp_k \rangle}{\langle p_k, Sp_k \rangle} p_k - \frac{\langle Sp_k, Sp_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, Sp_{k-1} \rangle} p_{k-1}.$$

Niz u_k iz $\mathcal{H}$ konvergira k vektoru x.

4.2 GGSP algoritam

Znamo iz jednakosti (2.3) da se svaki vektor $x \in \mathcal{H}$ uvijek može rekonstruirati iz vrijednosti $(\langle x, x_i \rangle)_{i=1}^n$ kao

$$x = SS^{-1}x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle S^{-1} x_i,$$

gdje je S operator baznog okvira $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. No, kao što smo spomenuli, određivanje inverza S^{-1} operatora baznog okvira S bio bi kompliciran zadatak. Naravno, taj račun bio bi puno lakši ako bismo odabrali bazni okvir čiji je operator baznog okvira jednak identiteti.

Zbog toga je lakše raditi sa Parsevalovim baznim okvirima čiji je operator baznog okvira upravo jednak identiteti.

Mi bismo od zadanog skupa vektora u konačnodimenzionalnome vektorskome prostoru $\mathcal{H}$ željeli odrediti Parsevalov bazni okvir za prostor koji razapinje taj skup. Mogli bismo pomoću Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije dobiti skup koji se sastoji od ortonormirane baze za taj prostor te bi ostali vektori bili nulvektori. No s tim ne bismo puno postigli. Zbog toga bismo nekako trebali generalizirati Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije koji bi nam dao Parsevalov bazni okvir koji nije ortonormirana baza. Drugim riječima, trebamo algoritam koji će biti upotrebljiv i za linearno zavisan skup vektora.

Algoritam kojeg ćemo opisati je dizajniran tako da svaki put kad je dodan jedan vektor na već modificirani skup vektora, formira se novi modificirani skup vektora. Nadalje pošto je ovaj algoritam generalizacija Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije, ako je zadan linearno nezavisan skup za neki potprostor, algoritam će taj skup modificirati u ortonormiranu bazu za taj potprostor.

Sada ćemo opisati rad algoritma. Neka je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. U generalizirani Gram-Scmidtov posupak ortogonalizacije za dobivanje Parsevalovog baznog okvira (GGSP) unosimo $n \in \mathbb{N}$ vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{H}$, a ispisuje se Parsevalov bazni okvir $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \mathcal{H}$ za ljusku od $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Procedura je sljedeća.

for $k := 1$ **to** n **do**
begin
  if $x_k = 0$ **then**
    $g_k := 0;$
  else
  begin
    $g_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, g_j \rangle g_j;$
    if $g_k \neq 0$ **then**
      $g_k := \frac{1}{\|g_k\|} g_k;$
    else
      begin
        for $i := 1$ **to** $k-1$ **do** $g_i := g_i + \frac{1}{\|x_k\|^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\|x_k\|^2}} - 1\right)\langle g_i, x_k \rangle x_k;$
        $g_k := \frac{1}{\sqrt{1+\|x_k\|^2}} x_k;$
      end;
    end;
  end;

Ovaj algoritam nam dakle daje Parsevalov bazni okvir za ljusku od $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Čak štoviše, u svakoj iteraciji nam također daje specijalni Parsevalov bazni okvir za svaku ljusku od $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, gdje je $k = 1, 2, \ldots, n$.

Iz propozicije 2.4.1 znamo da se od skupa vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ može dobiti Parsevalov bazni okvir $\{S^{-\frac{1}{2}}x_1, S^{-\frac{1}{2}}x_2, \ldots, S^{-\frac{1}{2}}x_n\}$, gdje je S operator baznog okvira. No, u GGSP-u mi ne računamo $S^{-\frac{1}{2}}((x_i)_{i=1}^n)$. Umjesto toga, u svakoj iteraciji, kada dodajemo novi vektor koji je linearno zavisan već modificiranim vektorima, primjenjujemo $S^{-\frac{1}{2}}$ tim modificiranim vektorima i novom vektoru, gdje je S ovdje operator baznog okvira za taj novi skup vektora. Ako pak dodamo novi vektor koji je linearno nezavisan već modificiranome skupu vektora, taj vektor ortogonaliziramo koristeći Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije.

Uočimo da uvjet $g_k = 0$ znači da se pridodani vektor $x_k \neq 0$ nalazi u linearnoj ljusci prethodno dobivenih vektora $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$. Pretpostavimo da je $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ Parsevalov bazni okvir za linearnu ljusku od $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ što označimo s $\mathcal{H}_1$. Tada je $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}, x_k\}$ bazni okvir za $\mathcal{H}_1$, koji nije Parsevalov, jer $x_k \neq 0$.

Izračunajmo sada njegov pripadni kanonski Parsevalov bazni okvir. Prvo izračunajmo operator baznog okvira za $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}, x_k\}$. On je

$$Sx = \sum_{i=1}^{k-1} \langle x, g_i \rangle g_i + \langle x, x_k \rangle x_k = x + \langle x, x_k \rangle x_k.$$

U ovom računu smo koristili činjenicu da je $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}_1$. Direktnim računom se provjeri da je

$$S^{-\frac{1}{2}}x = x + \frac{1}{\|x_k\|^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \|x_k\|^2}} - 1\right)\langle x, x_k \rangle x_k.$$

Prema tome, kanonski Parsevalov bazni okvir pridružen baznom okviru $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}, x_k\}$ je $\{S^{-\frac{1}{2}}g_1, S^{-\frac{1}{2}}g_2, \ldots, S^{-\frac{1}{2}}g_{k-1}, S^{-\frac{1}{2}}x_k\}$. Uočimo, $S^{-\frac{1}{2}}g_i = g_i + \frac{1}{\|x_k\|^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\|x_k\|^2}} - 1\right)\langle g_i, x_k \rangle x_k$ za $i = 1, 2, \ldots, k-1$, a $S^{-\frac{1}{2}}x_k = \frac{1}{\sqrt{1+\|x_k\|^2}} \cdot x_k$, dakle, upravo vektori koje algoritam daje u k-tom koraku u slučaju kada je $g_k = 0$, tj. u slučaju kada x_k pripada linearnoj ljusci skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$.

Ako je $g_k \neq 0$ tada algoritam od niza $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ daje niz $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}, \frac{g_k}{\|g_k\|}\}$, gdje je $g_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, g_j \rangle g_j$. Drugim riječima, u ovom slučaju, kada se dimenzija prostora razapetog vektorima $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ povećava "dodavanjem" sljedećeg vektora x_k, prvih $k-1$ vektora se ne mijenja.

Označimo sa $\mathcal{H}_2$ linearnu ljusku od $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}, x_k\}$. Očito je $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2$. Neka je P ortogonalni projektor na $\mathcal{H}_1$. Tada je $Pg_j = g_j$ za $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Nadalje,

$$g_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, Pg_j \rangle g_j = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle Px_k, g_j \rangle g_j.$$

Kako je $Px_k \in \mathcal{H}_1$ i $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}_1$, iz toga slijedi $\sum_{j=1}^{k-1} \langle Px_k, g_j \rangle g_j = Px_k$. Zato je $g_k = x_k - Px_k = (I-P)x_k$, pa je dodani vektor $\frac{(I-P)x_k}{\|(I-P)x_k\|}$. Uočimo da je $I - P$ ortogonalni projektor na jednodimenzionalni potprostor razapet vektorom g_k. Zato je $(I-P)x = \langle x, g_k \rangle g_k$ za sve $x \in \mathcal{H}_2$.

Konačno, pošto je je $Px \in \mathcal{H}_1$ i $\{g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}\}$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}_1$, za svaki $x \in \mathcal{H}_2$ vrijedi

$$x = Px + (I-P)x = \sum_{j=1}^{k-1} \langle Px, g_j \rangle g_j + \langle x, g_k \rangle g_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle x, Pg_j \rangle g_j + \langle x, g_k \rangle g_k = \sum_{j=1}^{k} \langle x, g_j \rangle g_j,$$

što znači da je i u ovom slučaju dobiven Parsevalov bazni okvir.

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, D. Bakić, *Dual frames compensating for erasures*, Glasnik Matematički, 52 (2017)(1), 131-146.

[2] Lj. Arambašić, M. Kolarek, *Napeti bazni okviri*, Poučak, 77 (2019)(2), 29-38.

[3] P. G. Casazza, G. Kutyniok, *A generalization of Gram-Schmidt orthogonalization generating all Parseval frames*, Advances in Computational Mathematics, 27 (2007)(1), 65-78.

[4] P. G. Casazza, G. Kutyniok, *Finite frames*, Birkhauser, New York, 2013.

[5] D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for Undergraduates*, American Mathematical Society, Providence, 2007.

[6] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga , Zagreb, 2003.

[7] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2006.

Sažetak

Ovaj rad sastoji se od četiri cjeline. U prvoj cjelini definiramo $\mathbb{R}^n$-bazni okvir i istražujemo njegova svojstva. Nakon toga definiramo Parsevalove skupove u $\mathbb{R}^n$ pomoću kojih definiramo Parsevalove bazne okvire. Donosimo karakteristike koje su važne za njih te dajemo jedan primjer Parsevalovog baznog okvira iz kojeg se lijepo vide njegove specifičnosti. Na kraju cjeline govorimo o napetim baznim okvirima u prostoru $\mathbb{R}^2$ te dajemo njihovu geometrijsku interpretaciju.

U drugoj cjelini, za proizvoljne konačnodimenzionalne unitarne prostore definiramo općenite bazne okvire, čime proširujemo pojam $\mathbb{R}^n$-baznih okvira. U toj cjelini istražujemo rezultate i svojstava operatora analize i sinteze, kao i operator baznog okvira te Grammov operator.

U trećoj cjelini bavimo se dualnim baznim okvirima, opisujemo njihova svojstva te spominjemo kanonske dualne bazne okvire. Specifično svojstvo Parsevalovih baznih okvira je da su to bazni okviri koji su sami sebi dualni, te su zbog doga najpogodniji u rekonstrukciji vektora. Na kraju rada predstavljamo numeričke algoritme pomoću kojih se mogu rekonstruirati vektori bez invertiranja operatora baznog okvira.

Summary

This thesis consists of four parts. In the first part we define the $\mathbb{R}^n$-frame and investigate its properties. Then we define Parseval sets in $\mathbb{R}^n$, which we use to define Parseval frames. We present their most important properties, and give an example of a Parseval frame which shows their advantages among other frames. At the end of this chapter we consider tight frames in $\mathbb{R}^2$ and give their geometric interpretation.

In the second part we define general frames for arbitrary finitedimensional inner product spaces, which extends the term of $\mathbb{R}^n$-frames. In this chapter we investigate results and properties of the analysis and synthesis operators, as well as the frame operator, and Grammian operator.

In the third part we examine dual frames, describe their properties, in particular the canonical dual frames. Specific property of Parseval frames is that they are frames which are dual to itself, and therefore optimal for reconstruction of vectors. Finally, we present numerical algorithms which can be used to reconstruct vectors without inverting the frame operator.

Životopis

Rođen sam 6. listopada 1995. godine u Čakovcu, a živim u Macincu gdje sam 2002. godine upisao Osnovnu školu dr. Ivana Novaka Macinec. Nakon toga sam 2010. godine upisao Gimnaziju Josipa Slavenskog Čakovec. Srednju školu završio sam 2014. godine, te iste godine upisao preddiplomski studij matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2017. godine, na istom sam fakultetu upisao diplomski studij matematike; smjer: nastavnički.