

# K-Riemannov integral

---

**Nikšić, Ante**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:368877>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Ante Nikšić

# **K-Riemannov integral**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Sanja Varošaneć

Zagreb, rujan 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se mentorici prof.dr.sc. Sanji Varošanc na izvrsnom vođenju, pomoći i savjetima pri pisanju ovog diplomskog rada, a najviše od svega na njezinom strpljenju i razumijevanju.*

*Također, zahvaljujem Anđelki i Heli koje su bile uz mene, poticale me i ohrabrivale te učinile sve ove godine zabavnijima i lakšima.*

*Na kraju, veliku zahvalnost dugujem svojoj obitelji; mami i bratu na beskonačnom razumijevanju i bezuvjetnoj podršci, a posebno tati kojem sam dao obećanje i koji mi je posljednjih godina bio velika motivacija u pisanju ovog diplomskog rada i završetku studija.*

*Bez vas to ne bi bilo moguće. Veliko hvala svima.*

# Sadržaj

Uvod	1
1 Osnovni pojmovi i definicije	2
2 Konstrukcija $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala	9
3 Svojstva $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala	16
4 Poveznica između radijalne $\mathbb{K}$ -derivacije i $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala	28
5 Hermite-Hadamardova nejednakost	31
Sažetak	37
Summary	38
Životopis	39

## Uvod

U ovom radu uvodimo pojam  $\mathbb{K}$ -Riemannov integral kao prirodnu generalizaciju uobičajenog Riemannovog integrala i proučavamo njegova svojstva. Ponovit ćemo osnovne pojmove o Riemannovom integralu, a zatim ćemo pokazati konstrukciju  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala te definirati pojam radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije i pokušati saznati postoji li poveznica između radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije i  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala.

U završnom dijelu rada proširit ćemo klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s  $\mathbb{K}$ -Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s  $\mathbb{K}$ -konveksnosti.

# 1 Osnovni pojmovi i definicije

U ovom diplomskom radu koristit ćemo sljedeće oznake: za skupove prirodnih, racionalnih i realnih brojeva koristimo uobičajene oznake  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{R}$  respektivno. Sa  $I$  ćemo označavati otvoreni interval u  $\mathbb{R}$ , a sa  $\mathbb{K}$  potpolje od  $\mathbb{R}$ . Skup  $\mathbb{K} \cap \langle 0, \infty \rangle$  označavat ćemo sa  $\mathbb{K}_+$ . Simbol  $[a, b]_A$  će označavati  $A$ -konveksnu ljusku od  $\{a, b\}$ , gdje je  $A \subseteq \mathbb{R}$ , tj.

$$[a, b]_A = \left\{ \alpha a + (1 - \alpha)b : \alpha \in A \cap [0, 1] \right\}.$$

U slučaju da je  $A = \mathbb{R}$ , koristit ćemo standardni simbol  $[a, b]$  umjesto  $[a, b]_{\mathbb{R}}$ . Skupovi  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{R}$  su polja, no u skupu  $\mathbb{R}$  možemo promatrati i druga polja osim  $\mathbb{Q}$ . Jedan primjer potpolja u  $\mathbb{R}$  dan je u sljedećem primjeru.

**Primjer 1.1.** *Neka je  $p \in \mathbb{N}$  prost broj. Skup  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  je polje.*

Za dokaz te tvrdnje trebamo provjeriti jesu li  $(\mathbb{Q}(\sqrt{p}), +)$  i  $(\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \setminus \{0\}, \cdot)$  Abelove grupe te vrijedi li distributivnost množenja prema zbrajanju. Zbrajanje je zatvoreno u  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  jer ako uzmemo dva elementa iz  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ :  $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$ ,  $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ , tada je

$$x_1 + x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p},$$

a to je element od  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  zbog zatvorenosti zbrajanja u skupu  $\mathbb{Q}$ . Za umnožak vrijedi sljedeće:

$$x_1 \cdot x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1a_2 + b_1b_2p) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{p},$$

a to je element od  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  zbog zatvorenosti množenja i zbrajanja u  $\mathbb{Q}$ . Sva svojstva kao što su asocijativnost i komutativnost zbrajanja i množenja te distributivnost vrijede jer su nasljeđena od istih svojstava u  $\mathbb{R}$ . Neutralni element za zbrajanje je  $0 = 0 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ , a za množenje  $1 = 1 + 0\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . Ako je  $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ , tada je  $-a - b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  njemu suprotni element. Recipročni element od  $a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  je  $\frac{1}{a + b\sqrt{p}}$  i na prvi pogled nije očito da pripada  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ . No racionalizacija nazivnika daje sljedeće

$$\frac{1}{a + b\sqrt{p}} = \frac{1}{a + b\sqrt{p}} \cdot \frac{a - b\sqrt{p}}{a - b\sqrt{p}} = \frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 - pb^2} = \frac{a}{a^2 - pb^2} - \frac{b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p}$$

što je očito element iz  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ .

Dakle,  $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$  je polje.

□

Ovime smo pokazali da skup  $\mathbb{R}$  ima i drugih potpolja osim skupa  $\mathbb{Q}$ . Međutim, ako je  $\mathbb{K}$  neko potpolje od  $\mathbb{R}$ , tada ovo sadrži  $\mathbb{Q}$ . Naime, potpolje  $\mathbb{K}$  mora sadržavati 1 i 0 jer su to neutralni elementi za množenje i zbrajanje. No tada  $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, \dots$  leže u  $\mathbb{K}$  zbog zatvorenosti zbrajanja, tj.  $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ . Zbog postojanja suprotnih elemenata slijedi da i  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ . Zbog postojanja recipročnih elemenata slijedi da  $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$  leže u  $\mathbb{K}$ , a tada i  $\frac{m}{n} \in \mathbb{K}$  za sve  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Drugim riječima,  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ .

**Definicija 1.2.** Preslikavanje  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo aditivnim ako zadovoljava Cauchyjevu funkcionalnu jednadžbu

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

**Napomena 1.3.** Kažemo da je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -homogena stupnja  $\alpha$  ako vrijedi

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Ako je  $\alpha = 1$  tada kažemo da je funkcija  $f$   $\mathbb{K}$ -homogena.

Preslikavanje  $f$  se zove  $\mathbb{K}$ -linearno ako je  $f$  aditivna i  $\mathbb{K}$ -homogena funkcija, tj.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

**Propozicija 1.4.** Svaka aditivna funkcija je  $\mathbb{Q}$ -homogena.

Dokaz. Ako u (1) uvrstimo  $x = y = 0$ , dobivamo  $f(0) = f(0) + f(0)$  iz čega slijedi  $f(0) = 0$ . Ako u istu tu jednadžbu uvrstimo  $y = -x$ , slijedi

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$$

iz čega slijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da je

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$



Provjerimo vrijedi li baza indukcije. Za  $n = 1$  imamo

$$f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x) = f(x) = f(1 \cdot x).$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za  $n = 1$ .

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $k \in \mathbb{N}$  gdje je  $n = k$ .

Pokažimo da tvrdnja vrijedi za  $n = k + 1, k \in \mathbb{N}$ . Ako u jednadžbu  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  uvrstimo  $y = kx$ , dobivamo

$$f((k + 1)x) = f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k + 1)f(x).$$

Dakle,  $f(nx) = nf(x)$ , za svaki  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ . Iz toga slijedi i ovo:

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je  $x \in \mathbb{R}$ . Tada je, prema upravo dokazanom svojstvu

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj.

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

I konačno, za  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  imamo

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(\frac{mx}{n}\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{1}{n}mf(x) = \frac{m}{n}f(x),$$

tj.  $f$  je  $\mathbb{Q}$ -homogena.

**Definicija 1.5.** Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  Jensen-konveksna ako

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in I.$$

Preslikavanje  $f$  je  $\mathbb{K}$ -konveksno ako

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{K} \cap \langle 0, 1 \rangle.$$

Ako vrijedi suprotna nejednakost kažemo da je  $f$   $\mathbb{K}$ -konkavna.

**Propozicija 1.6.** Ako je  $f$  Jensen-konveksna funkcija, tada je  $f$   $\mathbb{Q}$ -konveksna.

Dokaz. Treba dokazati da vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \forall x, y \in I, \alpha \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle.$$

Prvo ćemo metodom regresivne matematičke indukcije dokazati da za svaki  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}. \quad (2)$$

Prvo dokazujemo da (2) vrijedi za potencije broja 2, tj. za  $n = 2^k$ . Za  $n = 2$  (2) je upravo definicija Jensen-konveksne funkcije.

Pretpostavimo da (2) vrijedi za  $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ . Dokažimo da vrijedi za  $n = 2^{k+1}$ .

Prvo ćemo zbroj  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  prikazati kao zbroj dva broja na koja ćemo zatim primijeniti pretpostavku indukcije.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{1}{2} \frac{f(x_{2^k+1}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k} \\ &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili definiciju Jensen konveksne funkcije, a u drugoj smo koristili pretpostavku indukcije. Dokažimo da ako tvrdnja vrijedi za neki  $n \in \mathbb{N}$ , da tada vrijedi i za  $n - 1$ .

Zamijetimo da vrijedi

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left[ f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \right] \end{aligned}$$

pri čemu smo primjenili pretpostavku da tvrdnja vrijedi za  $n$ .  
Tada je

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &\leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right) \\
&\quad + \frac{1}{n}f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) \\
f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right)\left[1 - \frac{1}{n}\right] &\leq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right] \\
f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right) &\leq \frac{1}{n-1}\left[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right].
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za sve  $n$  koji su potencije broja 2, a sad smo dokazali da ako vrijedi za neki  $n$ , onda vrijedi i za njegovog prethodnika. Prema metodi regresivne indukcije vrijedi za sve  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Neka je  $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ . Tada je  $\alpha$  oblika  $\alpha = \frac{m}{n}, m < n, m, n \in \mathbb{N}$ .

Tada je  $1 - \alpha = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$ .

Vrijedi,

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f\left(\frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}y\right) \\
&= f\left(\frac{mx + (n-m)y}{n}\right) \\
&= f\left(\frac{x + \dots + x + y + \dots + y}{n}\right) \\
&\leq \frac{f(x) + \dots + f(x) + f(y) + \dots + f(y)}{n} \\
&= \frac{mf(x) + (n-m)f(y)}{n} \\
&= \frac{m}{n}f(x) + \frac{n-m}{n}f(y) \\
&= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u nejednakosti koristili maloprije dokazanu nejednakost za  $x_1, \dots, x_n$ .

□

**Propozicija 1.7.** *Ako je  $f$   $\mathbb{K}$ -konveksna, tada je  $f$   $\mathbb{Q}$ -konveksna.*

Dokaz. Budući da je za svako potpolje  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ , skup  $\mathbb{Q}$  njegov podskup, tvrdnja je očita. □

**Definicija 1.8.** Funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna u točki  $x_0 \in I$  ako  $\forall u \in I$

$$\lim_{\substack{\alpha \in \mathbb{K}_+ \\ \alpha \rightarrow 0}} f((1 - \alpha)x_0 + \alpha u) = f(x_0). \quad (3)$$

Kažemo da je funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna ako je radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna u svakoj točki svoje domene  $D$ .

**Definicija 1.9.** Neka je  $D \subset \mathbb{R}$ . Za funkciju  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je uniformno neprekidna na  $D$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da za sve  $x, y \in D$  koji su udaljeni za manje od  $\delta$ , njihove funkcijske vrijednosti  $f(x)$  i  $f(y)$  su udaljene za manje od  $\varepsilon$ , tj,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Definicija 1.10.** Kažemo da je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna ako za bilo koji  $x_0 \in I$  i  $u \in I$  preslikavanje

$$\alpha \mapsto f(x_0 + \alpha(u - x_0)), \alpha \in \mathbb{K} \cap [0, 1]$$

uniformno neprekidno.

Uniformna neprekidnost očito povlači neprekidnost na  $D$ , (tj. u svakoj točki  $c \in D$ ). Razlika između pojmova neprekidnosti na  $D$  i uniformne neprekidnosti na  $D$  je u tome što kod uniformne neprekidnosti  $\delta$  ovisi o  $\varepsilon$ , dok kod obične neprekidnosti  $\delta$  ovisi i o  $\varepsilon$  i o svakoj točki  $c \in D$ . Dakle, ako je  $f$  neprekidna na  $D$ , tada za fiksirani  $\varepsilon > 0$  svaki  $c \in D$  ima svoj  $\delta_{c,\varepsilon} > 0$  takav da za sve  $x \in A$  za koje je  $|x - c| < \delta_{c,\varepsilon}$  vrijedi  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ . No, općenito nećemo moći naći univerzalni  $\delta > 0$  takav da je  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  za sve  $x, y \in D$  za koje  $|x - y| < \delta$ .

**Primjer 1.11.** Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s  $f(x) = x^2$  je neprekidna na  $\mathbb{R}$ , ali ona nije uniformno neprekidna na  $\mathbb{R}$ . Zaista, za prirodni broj  $n$  stavimo  $a_n = \sqrt{n}$ .

Tada je  $(a_n)$  niz u  $\mathbb{R}$  takav da vrijedi

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Neka je  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Za proizvoljan  $\delta > 0$  izaberemo  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da je  $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$ . Iz (4) slijedi

$$|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \delta.$$

S druge strane imamo,

$$|f(a_{n_0+1}) - f(a_{n_0})| = |(n_0 + 1) - n_0| = 1 \geq \varepsilon.$$

Bilo koja neprekidna i bilo koja uniformno neprekidna funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  su radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidne i uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidne. Može se dogoditi da je uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna funkcija prekidna u svakoj točki. Jednostavan primjer je bilo koje prekidno  $\mathbb{K}$ -linearno preslikavanje. S druge strane, svaka uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna funkcija je također radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna funkcija, ali obratno ne vrijedi.

**Propozicija 1.12.** *Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna ako i samo ako za svaki  $a, b \in I$ , funkcija  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  je neprekidna.*

**Propozicija 1.13.** *Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna ako i samo ako za svaki  $a, b \in I$ , funkcija  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  je uniformno neprekidna.*

## 2 Konstrukcija $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala

Sadržaj ovog i sljedećih poglavlja zasniva se na sadržaju članka [1], dok se rezultati o klasičnom Riemannovom integralu mogu naći u knjigama [2] i [3].

Ponovimo za početak neke osnovne pojmove o Riemannovom integralu. Neka je  $[a, b]$ ,  $a < b$  segment u  $\mathbb{R}$  i neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija ograničena na segmentu  $[a, b]$ . To znači da postoje  $m = \inf_{[a,b]} f$  i  $M = \sup_{[a,b]} f$ , tj.

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M.$$

Uočimo, ako je  $[a', b'] \subseteq [a, b]$  podsegment, onda za svaki  $x \in [a', b']$ , vrijedi

$$m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M$$

gdje je  $m' = \inf_{[a',b']} f$  i  $M' = \sup_{[a',b']} f$ . Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu i supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu. Nadalje, neka je  $n \in \mathbb{N}$ . Podijelimo (izvršimo subdiviziju) segment  $[a, b]$  točkama

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

na  $n$  dijelova. Neka je  $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$  i  $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$ , gdje je  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Neka su  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  po volji izabrane točke. Definirajmo sljedeće sume:

$$s = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \sigma = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}), S = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj  $s$  zovemo donja Darbouxova suma,  $S$  je gornja Darbouxova suma, a  $\sigma$  je integralna suma. Jasno je da vrijedi

$$m(b-a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b-a).$$

Neka je  $A$  skup svih donjih Darbouxovih suma  $s$ ,  $B$  je skup svih gornjih Darbouxovih suma  $S$ , a  $C$  je skup svih integralnih suma  $\sigma$  funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$ . Sve te sume dobiju se variranjem broja  $n \in \mathbb{N}$ , svim različitim

izborima subdivizije  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  i točkaka  $t_k$ . Iz nejednakosti o integralnim i Darbouxovim sumama slijedi da su skupovi  $A, B$  i  $C$  ograničeni odozdo s  $m(b-a)$  i odozgo s  $M(b-a)$ . Prema aksiomu potpunosti postoje

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup A \quad , \quad \mathcal{I}^*(f; a, b) = \inf B.$$

**Definicija 2.1.** Broj  $\mathcal{I}_*(f; a, b)$  zovemo donji Riemannov integral funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$ , a broj  $\mathcal{I}^*(f; a, b)$  zovemo gornji Riemannov integral funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$ .

Iz prethodnog je jasno da donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  koja je ograničena na segmentu  $[a, b]$  i da je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) \leq \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

**Definicija 2.2.** Za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničenu na segmentu  $[a, b]$  kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili  $R$ -integrabilna na segmentu  $[a, b]$  ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Tada se broj  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$  naziva integral ili  $R$ -integral funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$  i označava jednom od sljedećih oznaka:

$$\mathcal{I} = \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

**Teorem 2.3.** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona funkcija na  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Tada je ona  $R$ -integrabilna na segmentu  $[a, b]$ .

**Definicija 2.4.** Za funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je monotona po dijelovima na segmentu  $[a, b]$  ako postoji subdivizija  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{k-1} < c_k < \dots < c_{n-1} < c_n = b$  takva da je  $f|_{[c_{k-1}, c_k]}$  monotona funkcija za sve  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Korolar 2.5.** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  po dijelovima monotona funkcija na  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Tada je ona  $R$ -integrabilna na segmentu  $[a, b]$ .

Kako smo ponovili bitne pojmove vezane uz Riemannov integral, možemo početi konstruirati  $\mathbb{K}$ -Riemannov integral.

Neka  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  predstavlja skup svih particija od intervala  $[a, b]$ , tj.

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(t_0, t_1, \dots, t_n) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

Nadalje, definiramo skup svih  $\mathbb{K}$ -particija na intervalu  $[a, b]$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} &= \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i = a + \alpha_i(b - a), \alpha_i \in \mathbb{K} \cap [0, 1], i = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]} : t_i \in [a, b]_{\mathbb{K}}, i = 1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ograničena na skupu  $[a, b]_{\mathbb{K}}$  sa

$$M := \sup_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x), m := \inf_{x \in [a,b]_{\mathbb{K}}} f(x).$$

Za danu  $\mathbb{K}$ -particiju  $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$  definiramo

$$M_i := \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), m_i := \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovi supremumi i infimumi su dobro definirani, tj. to su konačni realni brojevi jer je  $f$  ograničena funkcija na  $[a, b]_{\mathbb{K}}$ . Odnosno,

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, i = 1, 2, \dots, n.$$

Sada možemo definirati gornju  $\mathbb{K}$ -Darbouxevu sumu funkcije  $f$  na sljedeći način,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \sum_{i=1}^n M(t_i - t_{i-1}) = M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b - a).$$

Donju  $\mathbb{K}$ -Darbouxovu sumu funkcije  $f$  možemo definirati kao,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Vrijedi:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \geq \sum_{i=1}^n m(t_i - t_{i-1}) = m \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = m(b - a).$$



Primjetimo da vrijedi i sljedeća nejednakost,

$$\begin{aligned}
 m_i &< M_i \\
 m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq M_i(t_i - t_{i-1}) / \sum_{i=1}^n \\
 \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \\
 \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi).
 \end{aligned}$$

Stoga zaključujemo da je  $m(b-a) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq M(b-a)$ . Sada možemo definirati gornji  $\mathbb{K}$ -Riemannov integral od funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$  kao,

$$\int_a^{-b} f(t) d_{\mathbb{K}}t := \inf \left\{ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}$$

i donji  $\mathbb{K}$ -Riemannov integral kao

$$\int_{-a}^b f(t) d_{\mathbb{K}}t := \sup \left\{ \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}} \right\}.$$

**Definicija 2.6.** Funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omeđena na  $[a, b]_{\mathbb{K}}$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  ako su gornji i donji  $\mathbb{K}$ -Riemannovi integrali jednaki. U tom slučaju,  $\mathbb{K}$ -Riemannov integral od  $f$  zapisujemo kao

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

U slučaju kada je  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , koristit ćemo standardni simbol  $\int_a^b f(t) dt$  umjesto  $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$ . Sljedeći teorem daje nam kriterij za  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilnost.

**Teorem 2.7.** Funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  ako i samo ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji particija  $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$  takva da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Dokažimo prvo da za svaki pozitivni epsilon postoji particija  $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$  takva da  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ , tada je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna

na  $[a, b]$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Izaberimo particiju  $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$  koja zadovoljava gornju nejednakost. Kako vrijedi

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) \leq \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t$$

imamo,

$$0 \leq \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t - \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t \leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Kako nejednakost vrijedi za svaki  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t.$$

Pogledajmo sada drugi smjer, tj. pretpostavimo da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna funkcija, želimo dokazati da postoji particija  $\pi \in \mathcal{P}[a, b]^{\mathcal{K}}$  takva da  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Prema definiciji infimuma postoji particija  $\pi_1$ , td.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t + \frac{\varepsilon}{2},$$

a prema definiciji definiciji supremuma postoji particija  $\pi_2$ , td.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) > \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ . Imajući na umu da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna što znači  $\int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t$ , možemo zapisati.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\ &= \left( \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \int_a^{\rightarrow b} f(t) d_{\mathbb{K}} t \right) \\ &\quad + \left( \int_{\rightarrow a}^b f(t) d_{\mathbb{K}} t - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Korolar 2.8.** Funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  ako i samo ako za svaku particiju  $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}$ ,

$\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$ , takve da

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \longrightarrow 0, \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

i za bilo koji izbor  $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$  particije  $\pi_n$  imamo

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

**Propozicija 2.9.** Neka su  $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$ , potpolja od  $\mathbb{R}$ . Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}_2$ -Riemann integrabilna tada je također i  $\mathbb{K}_1$ -Riemann integrabilna i vrijedi

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t.$$

Dokaz. Neka je  $\pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  proizvoljan niz takav da

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Kako je  $f$   $\mathbb{K}_2$ -Riemann integrabilna, za bilo koji izbor  $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}_1}$  particije  $\pi_n$  imamo ,

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Zbog proizvoljnosti od  $\pi_n \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

□

Kao posljedicu gornje propozicije za  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}$  i  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$  možemo zaključiti sljedeće.

**Korolar 2.10.** Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrabilna u običajenom smislu, tada je za proizvoljno polje  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$  funkcija  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna, i vrijedi,

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}} t = \int_a^b f(t) d.$$

**Primjer 2.11.** Neka je  $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$ ,  $\mathbb{K}_1 \neq \mathbb{K}_2$  te neka su  $\mathbb{K}_1$  i  $\mathbb{K}_2$  potpolja od  $\mathbb{R}$ . Razmotrimo funkciju  $f : [a, b]_{\mathbb{K}_2} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [a, b]_{\mathbb{K}_1} \\ 1 & ; x \in [a, b]_{\mathbb{K}_2} \setminus [a, b]_{\mathbb{K}_1}. \end{cases}$$

Vidimo da je  $f$   $\mathbb{K}_1$ -Riemann integrabilna i  $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = 0$ . S druge strane za svaku particiju  $\pi \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_2} \setminus \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}_1}$ , vrijedi da  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$  i  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}_2}(\pi, f) = 1$ . Stoga,

$$0 = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_2} t \neq \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}_1} t = 1,$$

tj.  $f$  nije  $\mathbb{K}_2$ -Riemann integrabilna. Primjetimo da ako zamjenimo u formuli za  $f$ ,  $\mathbb{K}_1$  sa  $D$ , dobivamo,

$$D := \{x \in [0, 1] : x = \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

tada dobivamo primjer funkcije koja nije  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna za bilo koje podpolje  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ .

### 3 Svojstva $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala

**Propozicija 3.1.** *Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  monotona tada je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$ .*

Dokaz. Pretpostavimo da je  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  rastuća, tj.

$$f(x) \leq f(y), \text{ za } x \leq y, \text{ } x, y \in [a, b]_{\mathbb{K}},$$

te da je  $f(a) \neq f(b)$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$ . Fiksirajmo neku proizvoljnu particiju  $\pi_n$ ,

$$\pi = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{P}_{[a,b]}^{\mathbb{K}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Kako je  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  rastuća za svaki  $j \in \{1, \dots, k_n\}$

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_j)$$

$$m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]_{\mathbb{K}}} f(t) = f(t_{j-1}).$$

Stoga sumiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) &= \sum_{j=1}^{k_n} (M_j - m_j)(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \sum_{j=1}^{k_n} (M_j - m_j) \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \sum_{j=1}^{k_n} (f(t_j) - f(t_{j-1})) \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \left[ f(b) - f(t_{k_n-1}) + f(t_{k_n-1}) - f(t_{k_n-2}) \right. \\
&\quad \left. + \dots + f(t_2) - f(t_1) \right] \\
&= \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \left[ f(b) - f(a) \right] \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za proizvoljni  $\varepsilon > 0$  postoji particija za koju je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_n) < \varepsilon$$

a to znači da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna.

Slijedi da  $\mathcal{U}(f, \pi_n) - \mathcal{L}(f, \pi_n) = 0$  i zaključujemo da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna.

Dokaz za funkciju koja je padajuća je sličan. □

**Teorem 3.2.** *Ako su  $f$  i  $g$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilne na  $[a, b]$ , tada je  $f + g$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna.*

Dokaz. Neka je  $\varepsilon > 0$ . Budući da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna tada postoji subdivizija  $\pi_1$ ,  $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$  takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^n \sup f \Big|_{J_k} \cdot (y_k - y_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \inf f \Big|_{J_k} \cdot (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon,$$

gdje je  $J_k = [y_{k-1}, y_k]_{\mathbb{K}}$ .

Budući da je  $g$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna, tada postoji subdivizija  $\pi_2$ ,  $a = z_0 < z_1 < \dots < z_r = b$  takva da je  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon$ , tj.

$$\sum_{k=1}^r \sup g \Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^r \inf g \Big|_{Z_k} \cdot (z_k - z_{k-1}) < \varepsilon$$

gdje je  $Z_k = [z_{k-1}, z_k]_{\mathbb{K}}$ . Sada promotrimo novu subdiviziju koja je nastala unijom svih točaka iz subdivizije za  $f$  i  $g$ . Ta nova subdivizija je profinjenje subdivizije za  $f$  i  $g$  i njezine članove nazovimo  $x_k$ , tj. radi se o subdiviziji  $\pi$  sa čvorovima  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , pri čemu je

$$\{x_0, x_1, \dots, x_m\} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \cup \{z_0, z_1, \dots, z_r\}.$$

Kad subdiviziju profinimo, tada se gornja Darbouxova suma smanji, a donja se poveća, tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &> \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > s(g, \pi_2) \\ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1), \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) < S(g, \pi_2). \end{aligned}$$

Dakle vrijedi,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \varepsilon \\ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi) > \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi) &< \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(g, \pi_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalje ćemo i za  $f$  i  $g$  koristiti subdiviziju  $\pi$ . Koristit ćemo ove oznake

$$\begin{aligned} M_k(f) &= \sup f|_{[x_{k-1}, x_k]} \\ m_k(f) &= \inf f|_{[x_{k-1}, x_k]}. \end{aligned}$$

Za supremum i infimum vrijedi:

$$\begin{aligned} \sup(f + g) &\leq \sup f + \sup g \\ \inf(f + g) &\geq \inf f + \inf g. \end{aligned}$$

Naime, za bilo koji  $x \in [a, b]$  vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g,$$

tj.  $\sup f + \sup g$  je gornja međa za skup  $Im(f + g)$ . To znači da je veća ili jednaka najmanjoj gornjoj međi za  $Im(f + g)$ , a to je upravo  $\sup(f + g)$ .

Time smo obrazložili prvu nejednakost. Druga se dobiva slično. Dokažimo da je  $f + g$  integrabilna funkcija

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left( M_k(f+g) - m_k(f+g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \sum_{k=1}^n \left( M_k(f) + M_k(g) - m_k(f) - m_k(g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& = \sum_{k=1}^n \left( M_k(f) - m_k(f) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \left( M_k(g) - m_k(g) \right) (x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, za  $2\varepsilon > 0$  postoji subdivizija za koju je  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < 2\varepsilon$ , tj.  $f + g$  je integrabilna.

Dokažimo da je  $\int_a^b (f+g)(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t) d_{\mathbb{K}}t$ .

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t) d_{\mathbb{K}}t & \leq M_k(f+g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n M_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^n m_k(g)(x_k - x_{k-1}) \\
& \leq 2\varepsilon + \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t) d_{\mathbb{K}}t,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u gornjim nejednakostima koristili tvrdnje

$$\sum_{k=1}^n m_k(F)(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b F(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \sum_{k=1}^n M_k(F)(x_k - x_{k-1})$$

za  $F = f, g, f + g$ , te nejednakost  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(F, \pi) < \varepsilon + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, \pi)$  za  $F = f, g$ .



Vrijedi i sljedeće:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t &\geq M_k(f+g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq \sum m_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \sum m_k(g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq \varepsilon + \sum M_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \varepsilon + \sum M_k(g)(x_k-x_{k-1}) \\
&\geq 2\varepsilon + \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Dakle, za svaki  $\varepsilon > 0$  vrijedi

$$\left| \int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t - \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t \right| \leq 2\varepsilon$$

a to znači da je

$$\int_a^b (f+g)(t)d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b g(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

□

**Teorem 3.3.** *Ako je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tada je*

$$\int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t = \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan te neka je  $\alpha > 0$  (za  $\alpha < 0$  dokaz je analogan). Za proizvoljni  $\varepsilon > 0$  postoji subdivizija za koju je  $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}} < \frac{\varepsilon}{\alpha}$ . Kako znamo da  $\inf \alpha f = \alpha \inf f$  i  $\sup \alpha f = \alpha \sup f$  onda vrijedi i

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f},$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha \mathcal{U}_{\mathbb{K}_f}.$$

Iz toga slijedi da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_{\alpha f}} = \alpha(\mathcal{U}_{\mathbb{K}_f} - \mathcal{L}_{\mathbb{K}_f}) < \varepsilon,$$

pa zaključujemo da je  $\alpha f$  integrabilna, tj.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t - \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t \right| &< \varepsilon \\
\Rightarrow \int_a^b \alpha f(t)d_{\mathbb{K}}t &= \alpha \int_a^b f(t)d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

□

**Teorem 3.4.** Neka je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna funkcija na  $[a, b]$ .

a) Ako je  $f(t) \geq 0$  za svaki  $t \in [a, b]_{\mathbb{K}}$  tada je  $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \geq 0$ .

b) Apsolutna vrijednost  $|f|$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  i

$$\left| \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz.

a) Neka je  $\{\pi_n\}_n$  bilo koji niz particija takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je  $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$ . Tada je

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)}) (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}).$$

Budući da je  $f(s_j^{(n)}) \geq 0$  za sve  $j, n \in [a, b]_{\mathbb{K}}$ , te da je  $t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} > 0$  slijedi da su sume na desnoj strani nenegativne te je njihov limes nenegativan broj, tj.  $\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$  je nenegativan broj što je trebalo dokazati. □

b) Prvo zamjetimo da za svaki  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\left| |y| - |x| \right| \leq |y - x|.$$

Naime, ako  $y$  napišemo kao

$$y = (y - x) + x$$

i primijenimo nejednakost trokuta  $|a + b| \leq |a| + |b|$  na brojeve  $a = y - x$  i  $b = x$  dobivamo

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|,$$

tj.

$$|y| - |x| \leq |y - x|.$$

Ako u zadnjoj nejednakosti zamijenimo  $x$  i  $y$  dobivamo da je  $|x| - |y| \leq |x - y| = |y - x|$ . Iz te dvije nejednakosti slijedi da je  $||y| - |x|| \leq |y - x|$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan realan broj. Tada za svaka dva  $x, y \in [a, b]$  za koje je  $|y - x| < \varepsilon$ , prema upravo dokazanom, vrijedi i da je

$$\left| |y| - |x| \right| < \varepsilon.$$

Funkcija  $f$  je  $\mathbb{K}$ -integrabilna na  $[a, b]$  pa za  $\varepsilon^2 > 0$  postoji particija  $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  od  $[a, b]$  takva da je

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon^2.$$

Neka su

$$\begin{aligned} M_i &:= \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), \\ m_i &:= \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x), \\ M_i^* &:= \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x), \\ m_i^* &:= \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x). \end{aligned}$$

Indekse  $1, 2, \dots, n$  brojeva iz particije  $\pi$  podijelimo u dva skupa  $A$  i  $B$ . U skupu  $A$  su svi oni indeksi  $i$  za koje je  $M_i - m_i < \varepsilon$ . U skupu  $B$  su oni indeksi  $i$  za koje je  $M_i - m_i \geq \varepsilon$ .

Prvo promotrimo  $i \in A$ . Za taj indeks  $i$  vrijedi  $M_i - m_i < \varepsilon$ , tj.

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} f(x) < \varepsilon.$$

To znači da je razlika funkcijskih vrijednosti za bilo koja dva broja iz  $[t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$  manja od  $\varepsilon$ , tj,

$$\left| f(t) - f(s) \right| < \varepsilon$$

za sve  $t, s \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}$ . Budući da je

$$\left| |f(t)| - |f(s)| \right| < |f(t) - f(s)|,$$

slijedi i da je

$$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) < \varepsilon,$$

tj,  $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$ . Promotrimo sada  $i \in B$ . Funkcija  $f$  je ograničena na  $[a, b]_{\mathbb{K}}$ , tj.  $f(t) \in [m, M]$ . Tada  $|f(t)| \in [0, K]$  gdje je  $K = \max\{|m|, |M|\}$ . Tada je

$$M_i^* - m_i^* = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{K}}} |f|(x) \leq K + K = 2K.$$

Sad vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \in B} m_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i \in A} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Ali za  $i \in B$  imamo da je  $M_i - m_i \geq \varepsilon$  pa zajedno s prethodnom nejednakosti imamo:

$$\sum_{i \in B} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon^2,$$

pa kad podijelimo s  $\varepsilon$  dobijemo

$$\sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Sad ocijenimo razliku između gornje i donje Darbouxove sume za funkciju  $|f|$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) &= \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i \in A} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} 2K(x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon \sum_{i \in A} (x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon(b - a) + 2K\varepsilon \\
&= \varepsilon(b - a + 2K),
\end{aligned}$$

tj.

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(|f|, \pi) < \varepsilon(b - a + 2K),$$

a budući da je  $\varepsilon$  proizvoljan slijedi da je  $|f|$  integrabilna. Za dokaz formule koristit ćemo da je integral jednak limesu integralnih suma. Naime, neka je  $\{\pi_n\}_n$  bilo koji niz particija od  $[a, b]_{\mathbb{K}}$  takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = 0$$

i neka je  $s_j^{(n)} \in [t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}]_{\mathbb{K}}$ . Tada je prema nejednakosti trokuta

$$\left| \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |f(s_j^{(n)})| (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}),$$

tj.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^{k_n} f(s_j^{(n)})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \right| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} |f(s_j^{(n)})| (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) = \int_a^b |f|(x) d_{\mathbb{K}}x. \end{aligned}$$

□

**Propozicija 3.5.** *Ako je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna, tada je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na svakom podskupu  $[c, d] \subset [a, b]$ .*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne  $c, d \in [a, b]$  takvi da je  $c < d$ . Prema propoziciji 1.3, zaključujemo da je  $f|_{[c, d]}$  je uniformno neprekidna. Kako  $cl([c, d]_{\mathbb{K}}) = [c, d]$ , postoji jedinstvena neprekidna funkcija  $g_{cd} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  takva da

$$g_{cd}(t) = f(t) \quad , \quad t \in [c, d]_{\mathbb{K}}.$$

Na temelju korolara 2.10,  $f$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna, štoviše

$$\int_c^d f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_c^d g_{cd}(t) dt.$$

□

**Teorem 3.6.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval te neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne  $a, b \in I$   $a < b$  funkcija  $f|_{[a, b]}$  je uniformno neprekidna.*

**Teorem 3.7.** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval te neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne  $a, b \in I$   $a < b$  postoji jedinstvena neprekidna funkcija  $g_{ab} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da

$$g_{ab}(x) = f(x) \quad , \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Funkcija  $g_{ab}$  zadovoljava sljedeću nejednakost

$$g_{ab}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{g_{ab}(x) + g_{ab}(y)}{2}$$

za svaki  $x, y \in [a, b]$ , posebno  $g_{ab}$  je konveksna funkcija.

Sada možemo izračunati integral od  $\mathbb{K}$ -linearne funkcije. Primjetimo da funkcija može biti prekidna u svakoj točki, tako da Riemannov integral možda niti ne postoji.

**Propozicija 3.8.** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -linearna funkcija. Tada je funkcija  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na svakom intervalu  $[a, b]$ , štoviše

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je  $f$   $\mathbb{K}$ -linearna funkcija. Na temelju propozicije 2.2 i teorema 2.3, zaključujemo da je funkcija  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na svakom intervalu  $[a, b]$ . Nadalje, neka je

$$\pi_n := (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$$

gdje je  $t_j^{(n)} := a + \frac{j}{n}(b-a)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Imamo ovo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(t_j^{(n)}) \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left( na + \frac{n(n+1)}{2n}(b-a) \right) \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left( a + \frac{n+1}{2n}(b-a) \right) (b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f(a) + \frac{n+1}{2n} f(b-a) \right) (b-a) \\ &= \left[ f(a) + f\left(\frac{b-a}{2}\right) \right] (b-a) \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a). \end{aligned}$$

□

**Teorem 3.9.** *Pretpostavimo da  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $c \in [a, b]_{\mathbb{K}}$ . Tada  $f$  je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$  akko je  $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, c]$  i  $[c, b]$ . Štoviše u tom slučaju,*

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$ . Uzmemo  $\varepsilon > 0$  i particiju  $\pi \in \mathcal{P}_{[a, b]}^{\mathbb{K}}$  takvu da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon.$$

Definirajmo  $\bar{\pi}$  kao proširenje od  $\pi$  nastalo dodavanjem  $c$  na rubne točke od  $\pi$ . Tada je  $\bar{\pi} = \pi_1 \cup \pi_2$ , gdje

$$\pi_1 := \bar{\pi} \cap [a, c]_{\mathbb{K}} \quad , \quad \pi_2 := \bar{\pi} \cap [c, b]_{\mathbb{K}}.$$

Očito,  $\pi_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]}^{\mathbb{K}}$  i  $\pi_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]}^{\mathbb{K}}$ , štoviše

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) &= \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \bar{\pi}) - \left[ \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \right] \\ &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) < \varepsilon, \end{aligned}$$

što dokazuje da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, c]$ . Zamjenom  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , dobiti ćemo dokaz za  $[c, b]$ . Pogledajmo sad drugi smjer ekvivalencije. Ako je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, c]$  i  $[c, b]$ , tada postoje particije  $\pi_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]}^{\mathbb{K}}$  i  $\pi_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]}^{\mathbb{K}}$  takve da

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ . Tada

$$\mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) - \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) < \varepsilon,$$

što dokazuje da je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na  $[a, b]$ . Konačno, ako je  $f$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna, tada sa particijama kao gore  $\pi, \pi_1, \pi_2$ , kao gore imamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\leq \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\
&< \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) + \varepsilon \\
&< \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\geq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) \\
&> \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_1) + \mathcal{U}_{\mathbb{K}}(f, \pi_2) + \varepsilon \\
&> \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan, vidimo da

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t + \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

□

Promotrimo da za  $\mathbb{K}$ -linearnu funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$  i za točku  $c = \alpha a + (1 - \alpha)b \in (a, b)$ , gdje je  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ , imamo

$$\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_a^c f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_c^b f(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{2}(f(\alpha(a - b)) - \alpha f(a - b))(a - b).$$

Stoga, može se dogoditi da za neke  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \mathbb{K}$ , gornji izraz je različit od nule.



## 4 Poveznica između radijalne $\mathbb{K}$ -derivacije i $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala

U 2006. godini Z.Boros i Zs.Pales [1] su istražili i dali definiciju radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije preslikavanja točke u danom smjeru.

**Definicija 4.1.** *Za preslikavanje  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  je otvoreni interval) kažemo da ima radijalnu  $\mathbb{K}$ -derivaciju u točki  $x \in I$  u smjeru  $u \in \mathbb{R}$  ako postoji konačni limes,*

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) := \lim_{r \in \mathbb{K}_+ \rightarrow 0} \frac{f(x + ru) - f(x)}{r}.$$

Reći ćemo da je  $f$  radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilna u točki  $x$  ukoliko postoji  $D_{\mathbb{K}}f(x, u)$  za svaki  $u \in \mathbb{R}$ . Funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilnu ako je  $f$  radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilna u svakoj točki  $x \in \mathbb{R}$ . Poznato je, da je svaka  $\mathbb{K}$ -konveksna funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilna. Posebno, kao i svaka  $\mathbb{K}$ -linearna funkcija  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za } u \in \mathbb{R}.$$

S druge strane, ako je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilna u običajenom smislu u točki  $x \in I$  onda je ona i radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilna u  $x$  sa

$$D_{\mathbb{K}}f(x, u) = f'(x)u \quad , \quad \text{za } u \in \mathbb{R}.$$

Sada imamo vezu između radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije i  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala.

**Teorem 4.2.** *Pretpostavimo da je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -Riemann integrabilna na svakom podintervalu oblika  $[a, x]_{\mathbb{K}}$ , za svaki  $x \in \langle a, b \rangle$ . Neka je funkcija  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s formulom*

$$F(x) := \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}}t.$$

*Slijedi, ako je  $f$  radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna u točki  $x \in \langle a, b \rangle$  tada je  $F$  radijalno  $\mathbb{K}$ -derivabilna u  $x$  u smjeru  $x - a$ , štoviše*

$$D_{\mathbb{K}}F(x, x - a) = f(x)(x - a).$$

Dokaz. Fiksirajmo  $x \in [a, b]$  i uzmimo  $\varepsilon > 0$  proizvoljan. Za  $\alpha \in \mathbb{K}_+$  te  $x \in [a, x + \alpha(x - a)]_{\mathbb{K}}$  na temelju teorema 2.6 i teorema 2.7 dobivamo,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F(x + \alpha(x - a)) - F(x)}{\alpha} - f(x)(x - a) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\alpha} \left( \int_a^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \int_a^x f(t) d_{\mathbb{K}}t \right) - \frac{1}{\alpha} \left( \int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} f(t) d_{\mathbb{K}}t - \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} f(x) d_{\mathbb{K}}t \right| \\
&= \frac{1}{\alpha} \left| \int_x^{x+\alpha(x-a)} (f(t) - f(x)) d_{\mathbb{K}}t \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} |f(t) - f(x)| d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Neka je  $\alpha \in \mathbb{K}_+$ , dovoljno mali

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{x - a}, \quad t \in [x, x + \alpha(x - a)]_{\mathbb{K}}$$

tada,

$$\frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} |f(t) - f(x)| d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha(x-a)} \frac{\varepsilon}{x - a} d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{\alpha} \alpha(x - a) \frac{\varepsilon}{x - a} = \varepsilon.$$

□

Sada smo u poziciji da možemo dokazati slijedeću karakterizaciju  $\mathbb{K}$ -konveksne funkcije.

**Teorem 4.3.** *Neka je  $I$  otvoreni interval  $I \subseteq \mathbb{R}$  te neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -konveksna. Tada za svaki  $a, x \in I$ , imamo*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{x - a} \int_a^x D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) d_{\mathbb{K}}t.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne  $a, x \in I$  a  $a \neq x$  i  $a < x$ . Kako je  $f$   $\mathbb{K}$ -konveksna funkcija, prema teoremu 2.4 postoji uniformno neprekidna konveksna funkcija  $g : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ , takva da

$$f(t) = g(t), \quad t \in [a, x]_{\mathbb{K}}.$$

Stoga, za  $t \in [a, x]_{\mathbb{K}}$  dobivamo

$$\begin{aligned}
D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) &= \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \rightarrow 0} \frac{f(t + \alpha(x - a)) - f(t)}{\alpha} \\
&= (x - a) \lim_{\mathbb{K}_+ \ni \alpha \rightarrow 0} \frac{g(t + \alpha(x - a)) - g(t)}{\alpha(x - a)} \\
&= (x - a)g'_+(t).
\end{aligned}$$

Iz gornje tvrdnje i fundamentalnog teorema za obični Riemannov integral slijedi,

$$\frac{1}{x - a} \int_a^x D_{\mathbb{K}}f(t, x - a) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^x g'_+(t) dt = g(x) - g(a) = f(x) - f(a).$$

□

## 5 Hermite-Hadamardova nejednakost

Postoje mnoge nejednakosti koje vrijede za konveksne funkcije. Jedna od najpoznatijih nejednakosti je Hermite–Hadamardova nejednakost,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad a < b.$$

Ova nejednakost ima važnu ulogu u konveksnoj analizi. U literaturi možemo naći razne varijante generalizacije i primjene ove nejednakosti. Napomenimo da je C.Hermit prvi objavio ovu nejednakost, a 10 godina kasnije J.Hadamard je nanovo otkrio lijevu stranu iste nejednakosti. Zanimljivo je da lijeva i desna Hermit-Hadamardova nejednakost karakteriziraju konveksnost. Naime, ako je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija tako da  $\forall a, b \in I, a < b$  za restrikciju  $f|_{[a,b]}$  vrijedi lijeva Hermit-Hadamardova (ili desna) nejednakost, tada je  $f$  konveksna funkcija.

**Teorem 5.1.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  neprazni otvoreni interval i neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{K}$ -konveksna funkcija. Tada za proizvoljne  $a, b \in I, a < b$ , nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Dokaz. Neka su  $a, b \in I, a < b$ , proizvoljni i fiksni. Prema teoremu 3.7 postoji jedinstvena neprekidna i konveksna funkcija  $g_{ab} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takva da

$$g_{ab}(x) = f(x), \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Kako je  $g_{ab}$  konveksna, zadovoljava klasičnu Hermite-Hadamardovu nejednakost, tj.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g_{ab}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g_{ab}(t) dt \\ &\leq \frac{g_{ab}(a)+g_{ab}(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Budući da je,

$$\int_a^b g_{ab}(t) d_{\mathbb{K}}t = \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$$

sljedi da je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g_{ab}(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

čime je dokazan teorem. □

U prethodnom smo dokazu koristili klasičnu Hermit-Hadamardovu nejednakost. Sada ćemo napraviti još jedan dokaz, ali bez korištenja Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Dokaz. Kako bismo dokazali desnu stranu nejednakosti prvo dokažimo sljedeće,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a, b]_{\mathbb{K}}.$$

Neka je  $x \in [a, b]_{\mathbb{K}}$ . Tada postoji  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{K}$  takav da je

$$ta + (1-t)b = x.$$

Izrazimo li odavde  $t$  dobivamo

$$t = \frac{b-x}{b-a}.$$

Funkcija  $f$  je  $\mathbb{K}$ -konveksna na  $[a, b]_{\mathbb{K}}$  pa vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Uvrstimo u tu nejednakost  $ta + (1-t)b = x$ ,  $t = \frac{b-x}{b-a}$ ,  $1-t = \frac{x-a}{b-a}$  dobivamo,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Kada pomnožimo s  $(b-a)$  i faktorom  $b-x$  napišemo kao  $(b-a) - (x-a)$  imamo

$$\begin{aligned} (b-a)f(x) &\leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)f(x) &\leq [(b-a) - (x-a)]f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)f(x) &\leq (b-a)f(a) - (x-a)f(a) + (x-a)f(b) \\ (b-a)[f(x) - f(a)] &\leq [f(b) - f(a)](x-a) \\ f(x) - f(a) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \\ f(x) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a). \end{aligned}$$

Integriranjem gornje nejednakosti na intervalu  $[a, b]$  dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t &\leq \int_a^b \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) \right) d_{\mathbb{K}}t \\
&= \int_a^b f(a) d_{\mathbb{K}}t + \int_a^b \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a) d_{\mathbb{K}}t \\
&= f(a) \int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( \int_a^b t d_{\mathbb{K}}t - a \int_a^b d_{\mathbb{K}}t \right) \\
&= f(a) \int_a^b d_{\mathbb{K}}t + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( \frac{a + b}{2} (b - a) - a(b - a) \right) \\
&= f(a)(b - a) + (f(b) - f(a)) \left( \frac{a + b}{2} - a \right) \\
&= f(a)(b - a) + (f(b) - f(a)) \frac{b - a}{2} \\
&= \frac{b - a}{2} (2f(a) + f(b) - f(a)) \\
&= \frac{(b - a)}{2} (f(a) + f(b))
\end{aligned}$$

i dijeljenjem s  $b - a$  dobivamo

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Po definiciji konveksnosti mora vrijediti

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Neka je sada  $x = ta + (1 - t)b$  i  $y = (1 - t)a + tb$ . Tada dobivamo

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left( f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \right),$$

pa integriranjem po  $t$  na  $[0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a + b}{2}\right) &\leq \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \left( f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \right) \right] d_{\mathbb{K}}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( f(ta + (1 - t)b) \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 f\left((1 - t)a + tb\right) d_{\mathbb{K}}t.
\end{aligned}$$

Izračunajmo posebno dva integrala s desne strane posljednje nejednakosti. Za prvi uvedimo supstituciju  $u = ta + (1 - t)b$  pa je  $du = (a - b)dt$ , odnosno  $dt = \frac{1}{a-b}du$ , a granice prelaze iz 0 i 1 u  $b$  i  $a$ . Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left( f(ta + (1-t)b) \right) d_{\mathbb{K}}t &= \frac{1}{2(a-b)} \int_b^a f(u) d_{\mathbb{K}}u \\ &= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f(u) d_{\mathbb{K}}u. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo da je i drugi integral s desne strane posljednje nejednakosti jednak

$$= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b f(u) d_{\mathbb{K}}u.$$

□

Kao što je slučaj s realnim konveksnim funkcijama, u klasi uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidnih funkcija svaka od nejednakosti

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad a < b$$

je ekvivalentna  $\mathbb{K}$ -konveksnosti.

**Teorem 5.2.** *Ako je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uniformno radijalno  $\mathbb{K}$ -neprekidna i za svake elemente  $a < b$  od  $I$ , zadovoljava nejednakosti*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t$$

ili

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) d_{\mathbb{K}}t \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

onda je  $f$   $\mathbb{K}$ -konveksna.

Dokaz. Pretpostavimo da  $f$  zadovoljava prvu nejednakost (za drugu nejednakost dokaz se provodi na isti način). Dovoljno je pokazati da za svaki  $a, b \in I, a < b$  jedinstveno neprekidno proširenje  $g_{ab}$  of  $f|_{[a,b]_{\mathbb{K}}}$  je konveksna funkcija. Fiksirajmo proizvoljne  $c, d \in [a, b], c < d$ . Tada postoje nizovi  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i niz  $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  takvi da  $c_n, d_n \in [a, b]_{\mathbb{K}}, c_n < d_n, n \in \mathbb{N}$  i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d.$$

Budući da su  $c_n, d_n \in [a, b]_{\mathbb{K}}$ , proširenje  $g_{c_n d_n}$  na  $[c_n, d_n]$  zadovoljava

$$g_{ab}(t) = g_{c_n d_n}(t) = f(t) \quad , \quad t \in [c_n, d_n]_{\mathbb{K}}, n \in \mathbb{N}.$$

Po pretpostavci za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , vrijedi

$$g_{ab}\left(\frac{c_n + d_n}{2}\right) = f\left(\frac{c_n + d_n}{2}\right) \leq \frac{1}{d_n - c_n} \int_{c_n}^{d_n} f(t) d_{\mathbb{K}}t = \frac{1}{d_n - c_n} \int_{c_n}^{d_n} g_{ab}(t) dt.$$

Uzimajući limes za  $n \rightarrow \infty$  dobivamo

$$g_{ab}\left(\frac{c + d}{2}\right) \leq \frac{1}{d - c} \int_c^d g_{ab}(t) dt.$$

Pokazali smo da neprekidna funkcija  $g_{ab}$  zadovoljava lijevu stranu klasične Hermite–Hadamardove nejednakosti, a kako znamo da je takva funkcija konveksna i zbog proizvoljnosti od  $a, b \in I$  možemo zaključiti da je  $f$   $\mathbb{K}$ -konveksna, čime završavamo dokaz. □

**Teorem 5.3.** *Prva nejednakost u Hermite-Hadamardovoj nejednakosti jača je od druge nejednakosti, odnosno uz pretpostavke teorema vrijedi,*

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x.$$

Dokaz. Primijenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na intervalima  $\left[a, \frac{a + b}{2}\right]$  i  $\left[\frac{a + b}{2}, b\right]$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{a+b}{2} - a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d_{\mathbb{K}}x &\leq \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right] \\ \frac{1}{b - \frac{a+b}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) d_{\mathbb{K}}x &\leq \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \end{aligned}$$

Budući da je  $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$  i  $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$ , zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobivamo:

$$\frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x \leq \frac{1}{2} \left[ f(a) + f(b) \right] + f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

odakle pogodnim transformiranjem dobivamo

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) d_{\mathbb{K}}x.$$

□



## Literatura

- [1] A. Olbrys, On the K-Riemann integral and Hermite Hadamard inequalities for K-convex functions, *Aequationes Mathematicae*, 91(2017), 429–444.
- [2] S. Kurepa, Matematička analiza 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [3] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1976.
- [4] Z. Boros, Zs. Pales,  $\mathbb{Q}$ -subdifferential of Jensen-convex function, *J. Math. Appl. Anal.* 321(2006), 99–113.

## Sažetak

Ovaj se diplomski rad bavi definiranjem  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala. Kako bismo lakše definirali pojam  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala u radu smo ponovili važna svojstva i definicije vezane za Riemannov integral kao što su: gornja i donja Darbouxova suma, infimum, supremum, gornje i donje međe, integrabilnost funkcije, monotonost funkcije i ograničenost funkcije. Promatrajući integral na polju  $\mathbb{K}$  kao potpolju od  $\mathbb{R}$  konstrukcija  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala slična je konstrukciji Riemannovog integrala. U radu je također definiran pojam radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije te smo saznali postoji li poveznica između radijalne  $\mathbb{K}$ -derivacije i  $\mathbb{K}$ -Riemannovog integrala.

Na kraju rada smo proširili klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti na slučaj kada se uobičajeni Riemannov integral zamijeni s  $\mathbb{K}$ -Riemannovim integralom i pojam konveksnosti zamijeni s  $\mathbb{K}$ -konveksnosti.

## Summary

This master thesis introduces definition of  $\mathbb{K}$ -Riemann integral. In the beginning, we repeat some important properties and definitions regarding Riemann integral: upper and lower Darboux sum, infimum, supremum, upper and lower bound, function integrability, monotone function. Looking at integral on  $\mathbb{K}$  field as subfield of  $\mathbb{R}$ , construction of  $\mathbb{K}$ -Riemann integral is similar to Riemann integral construction. In this thesis we also define radial  $\mathbb{K}$ -derivation and we find out a connection between radial  $\mathbb{K}$ -derivation and  $\mathbb{K}$ -Riemann integral.

At the end of this thesis we extended classical Hermite-Hadamard inequalities to the case when the classical Riemann integral is replaced by  $\mathbb{K}$ -Riemann integral and the notion of convexity is replaced by  $\mathbb{K}$ -convexity.

## Životopis

Ante Nikšić rođen je 12. kolovoza 1991. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu dr. Vinka Žganca te potom upisuje Tehničku školu Ruđer Bošković, smjer tehničar za računarstvo. Godine 2010. upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, završava 2014. godine te iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij nastavničkog smjera matematike.